SUR LES VARIÉTÉS À TORSION NULLE.

PAR

FR. FABRICIUS-BJERRE

à COPENHAGUE.

Introduction.

Ce mémoire est consacré à l'étude des variétés à torsion nulle. Nous y retrouverons des résultats exposés par MM. E. CARTAN et R. LAGRANGE, mais la plupart des résultats obtenus ne se trouvent que dans ma thèse: »Differential-geometriske undersögelser af torsionsfri flader beliggende i rum med konstant krumming», Copenhague, 1934. —

Dans le premier paragraphe nous introduisons la notion: déplacement parallèle normal, et cette notion nous conduit d'une manière naturelle à la définition d'une variété à torsion nulle. C'est une variété, pour laquelle le déplacement parallèle normal ne dépend pas du chemin.[1] Le § 2 donne une démonstration de l'existence des directions principales; des conséquences immédiates de cette propriété sont énoncées dans le paragraphe suivant. Le § 4 a pour but d'étudier les lignes de courbure et les variétés qu'on peut attacher à une variété à torsion nulle. Il s'agit dans le § 5 de déterminer les variétés à torsion nulle qu'on peut dériver d'une variété donnée, à savoir les variétés parallèles, les images sphériques et les variétés inverses. Le § 6 donne une correspondance importante entre une variété à torsion nulle et les variétés développables (à courbure nulle). On y verra qu'une variété à torsion nulle peut être engendrée en développant une variété à courbure nulle. Le § 7 concerne les surfaces à torsion nulle, plongées dans un espace euclidien R^4. Dans ce cas simple il est possible de faire un examen plus détaillé.

[1] L'idée d'introduire les variétés à torsion nulle par cette définition est due à M. DAVID FOG.

Enfin, dans le § 8, nous étudions les variétés dont l'espace ambiant est à courbure constante, et nous pourrons démontrer que presque tous les résultats des paragraphes précédents sont aussi vrais si les variétés sont situées dans un espace non-euclidien.

§ 1. Déplacement parallèle normal.

Soit

$$x = x(u^1, u^2 \dots u^n)$$

l'équation vectorielle d'une variété V^n à n dimensions plongée dans un espace euclidien R^{n+p}. Imaginons que, en chaque point de la variété, nous avons attaché p vecteurs unitaires normaux $\xi^1, \xi^2, \dots \xi^p$, orthogonaux entre eux.

Si $b_i^{\sigma\nu}$ désigne la $\sigma^{\text{ième}}$ composante normale de la dérivée $\xi_i^\nu = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial u^i}$,

$$d_n \xi^\nu = b_i^{\sigma\nu} du^i \xi^\sigma \qquad (\sigma, \nu = 1, 2, \dots p)$$

sera la composante normale du vecteur $d\xi^\nu$. Considérons un vecteur

$$\lambda = \lambda^\nu \xi^\nu .$$

On a

$$d_n \lambda = d\lambda^\nu \xi^\nu + \lambda^\nu d_n \xi^\nu$$

et

$$d_n \lambda = (d\lambda^\sigma + \lambda^\nu b_i^{\sigma\nu} du^i) \xi^\sigma . \tag{1, 1}$$

L'équation (1, 1) définit la différentiation covariante normale[1], et les équations

$$d\lambda^\sigma + \lambda^\nu b_i^{\sigma\nu} du^i = 0 \tag{1, 2}$$

doivent définir le *déplacement parallèle normal* du vecteur λ. Soit $u^i = u^i(t)$ les équations d'un courbe C de la variété. (1, 2) nous permet de transporter par parallèlisme un vecteur d'un point P de la courbe à un point Q de la courbe.

Théorème. *Un déplacement parallèle normal laisse la longueur d'un vecteur et l'angle de deux vecteurs invariables.*

[1] Voir E. Cartan: La géométrie des espaces de Riemann, Paris 1925, p. 47.

Posons

$$d\mu^{\sigma} + \mu^{\nu} b_i^{\sigma\nu} du^i = 0. \tag{1, 3}$$

Si l'on multiplie l'équation (1, 2) par μ^{σ}, (1, 3) par λ^{σ}, on aura par addition

$$d(\lambda^{\sigma}\mu^{\sigma}) + \mu^{\sigma}\lambda^{\nu} b_i^{\sigma\nu} du^i + \lambda^{\sigma}\mu^{\nu} b_i^{\sigma\nu} du^i = 0.$$

Comme $b_i^{\sigma\nu} = - b_i^{\nu\sigma}$

$$d(\lambda^{\sigma}\mu^{\sigma}) = 0$$

$$\lambda^{\sigma}\mu^{\sigma} = \text{const.},$$

et le théorème est démontré. —

Généralement le résultat du déplacement parallèle normal d'un vecteur dépend du chemin choisi. Pour qu'il soit indépendant de la courbe C, il faut et il suffit, que les équations (1, 2) soient complètement intégrables. Les conditions d'intégrabilité s'écrivent

$$\frac{\partial(\lambda^{\nu} b_i^{\sigma\nu})}{\partial u^k} = \frac{\partial(\lambda^{\nu} b_k^{\sigma\nu})}{\partial u^i}$$

$$\lambda^{\nu}\left(\frac{\partial b_i^{\sigma\nu}}{\partial u^k} - \frac{\partial b_k^{\sigma\nu}}{\partial u^i}\right) - \lambda^{\tau} b_k^{\nu\tau} b_i^{\sigma\nu} + \lambda^{\tau} b_i^{\nu\tau} b_k^{\sigma\nu} = 0$$

ou

$$\lambda^{\nu} T_{ki}^{\sigma\nu} = 0,$$

si l'on pose

$$T_{ki}^{\sigma\nu} = \frac{\partial b_i^{\sigma\nu}}{\partial u^k} - \frac{\partial b_k^{\sigma\nu}}{\partial u^i} + b_i^{\sigma\tau} b_k^{\nu\tau} - b_k^{\sigma\tau} b_i^{\nu\tau}. \tag{1, 4}$$

Donc les conditions d'intégrabilité seront

$$T_{ik}^{\sigma\nu} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n;\ \sigma, \nu = 1, 2, \ldots p). \tag{1, 5}$$

Les tenseurs $T^{\sigma\nu}$ s'appellent *tenseurs de torsion.*[1] Ils satisfont aux relations

$$T_{ik}^{\sigma\nu} = - T_{ki}^{\sigma\nu} = - T_{ik}^{\nu\sigma} = T_{ki}^{\nu\sigma}.$$

Il existe alors en réalité $\frac{1}{2}p(p-1)$ tenseurs $T^{\sigma\nu}$ gauche-symétriques. On a le théorème

[1] CARTAN, l. c. p. 50.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que le déplacement parallèle normal à une variété V^n soit indépendant du chemin, sont que toutes les composantes des tenseurs de torsion soient nulles.

Si ces conditions sont satisfaites, la variété est dite *variété à torsion nulle.*

Etant donnée une variété V^n à torsion nulle, et attaché à un certain point de V^n un système de coordonnées $\xi^1 \xi^2 \dots \xi^p$, il existe en chaque point un système de coordonnées engendré par déplacement parallèle normal du système donné. Cet ensemble de systèmes de coordonnées s'appelle *système de coordonnées géodésique normal* à la variété. On voit l'analogie entre ce système et les coordonnées géodésiques (cartésiennes) d'une variété développable. — Un ensemble de p-èdres rectangulaires ayant une position constante par rapport au système de coordonnées géodésique normal forme lui-même un tel système. La différentielle d'un vecteur ξ, qui se déplace parallèlement à lui-même n'a aucune composante normale, de sorte que toutes les $b_i^{\sigma\nu} = 0$, le système de coordonnées étant géodésique normal.

Il est bien possible, pour une variété générale, de construire un système de coordonnées géodésique normal en *un* point donné; mais seulement les variétés à torsion nulle permettent des systèmes de coordonnées géodésiques normaux en *tout* point de la variété.

§ 2. Directions principales.

Soit V^n une variété riemannienne, $\xi^1, \xi^2, \dots \xi^p$ p vecteurs unitaires normaux, $x_1, x_2, \dots x_n$ n vecteurs tangents, $x_i = \frac{\partial x}{\partial u^i}$, et posons $x_{ik} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^k}$. x_{ik} et ξ_i^ν sont donnés par les équations connues[1]

$$x_{ik} = \Gamma_{ik}^l x_l + \beta_{ik}^\nu \xi^\nu \tag{2, 1}$$

$$\xi_i^\nu = -\beta_{ik}^\nu g^{kl} x_l + b_i^{\sigma\nu} \xi^\sigma \tag{2, 2}$$

$$\begin{pmatrix} i, k, l = 1, 2, \dots n \\ \sigma, \nu = 1, 2, \dots p \end{pmatrix}$$

$\beta_{ik}^\nu = \xi^\nu x_{ik}$ est la composante normale de x_{ik}. On en déduit les conditions d'intégrabilité[2]

[1] Voir L. P. EISENHART: Riemannian Geometry, Princeton 1926 p. 189.
[2] l. c. p. 190.

(2, 3) $$R_{ijkl} = \beta^{\nu}_{ik}\beta^{\nu}_{jl} - \beta^{\nu}_{il}\beta^{\nu}_{jk}$$

(2, 4) $$\beta^{\nu}_{ij,k} - \beta^{\nu}_{ik,j} = \beta^{\sigma}_{ij}b^{\sigma\nu}_{k} - \beta^{\sigma}_{kj}\beta^{\sigma\nu}_{i}$$

(2, 5) $$T^{\sigma\nu}_{ik} = g^{jl}(\beta^{\sigma}_{ij}\beta^{\nu}_{kl} - \beta^{\sigma}_{kj}\beta^{\nu}_{il}).$$

R_{ijkl} désigne les composantes du tenseur de Riemann, $\beta^{\nu}_{ij,k}$ la dérivée covariante (tangentielle) du tenseur β^{ν}_{ij}.

Si V^n est une variété à torsion nulle les équations seront plus simples. Au lieu de (2, 2), (2, 4) et (2, 5) nous aurons

(2, 6) $$\xi^{\nu}_{i} = -\beta^{\nu}_{ik}g^{kl}x_l$$

(2, 7) $$\beta^{\nu}_{ij,k} = \beta^{\nu}_{ik,j}$$

(2, 8) $$T^{\sigma\nu}_{ik} = 0,$$

pourvu que l'on ait choisi un système de coordonnées géodésique normal. L'équation (2, 8) peut s'écrire sous une autre forme. Soit

$$g_{ik} = g^{ik} = \delta^{i}_{k},$$

c. a. d. le système de coordonnées $x_1 x_2 \ldots x_n$ rectangulaire, on a

(2, 9) $$T^{\sigma\nu}_{ik} = \beta^{\sigma}_{ij}\beta^{\nu}_{kj} - \beta^{\sigma}_{kj}\beta^{\nu}_{ij} = 0.$$

Nous allons trouver la signification géométrique de cette condition. — Supposons que le système de coordonnées rectangulaire E_n soit choisi tel que

(2, 10) $$\beta^{1}_{ik} = 0, \qquad i \neq k.$$

Alors les axes du repère sont les directions principales du tenseur β^1. Le calcul de $T^{\sigma 1}_{ik}$ donne

(2, 11) $$\beta^{\sigma}_{ik}(\beta^{1}_{kk} - \beta^{1}_{ii}) = 0.$$

Si le tenseur β^1 possède juste n directions principales, $\beta^{1}_{kk} \neq \beta^{1}_{ii}$, et l'on aura

(2, 12) $$\beta^{\sigma}_{ik} = 0 \qquad i \neq k, \ \sigma = 2, 3, \ldots p.$$

Donc: *Les tenseurs $\beta^1, \beta^2, \ldots \beta^p$ ont les mêmes directions principales.*

Au cas contraire où le tenseur β^1 possède plus de n directions principales, la même propriété des tenseurs β^{ν} peut se démontrer, mais la démonstration est un peu plus compliquée.

On se sert de la méthode inductive. Supposons d'abord $n = 2$. Toute direction tangente est direction principale de β^1, si $\beta^1_{11} = \beta^1_{22}$. Plaçons le système de coordonnées E_2 sur les directions principales du tenseur β^2. S'il n'existe que deux directions principales, les remarques ci-dessus vérifient le théorème; il ne nous faut que remplacer $T^{\sigma 1}_{12}$ par $T^{\sigma 2}_{12}$. S'il y a plusieurs directions principales de β^2, mettons E_2 sur les directions principales de β^3; en continuant de cette manière on obtient ou bien deux directions principales ou bien toute direction tangente.

Supposons ensuite que le théorème soit vrai pour des variétés à $1, 2, \ldots (n-1)$ dimensions. Il faut démontrer qu'on peut choisir les axes du repère E_n de manière à annuler tous les termes rectangulaires des formes quadratiques

$$\beta^{\nu}_{ik}\, du^i\, du^k \tag{2, 13}$$

sous les conditions (2, 9). — Comme deux ou plusieurs de $\beta^1_{11}, \beta^1_{22}, \ldots \beta^1_{nn}$ sont égaux on peut les grouper:

$$\begin{array}{llll} \beta^1_{11} = \beta^1_{22} = \beta^1_{33} & & & (g_1) \\ \beta^1_{44} = \beta^1_{55} = \beta^1_{66} = \beta^1_{77} & & & (g_2) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & & & \vdots \\ \qquad\qquad\quad \beta_{nn} & & & \end{array} \tag{2, 14}$$

de sorte que deux β^1, appartenant à des groupes différents ne soient jamais égaux. Soit i_1 un nombre arbitraire du groupe $g_1 (i_1 = 1, 2, 3)$, i_2 un nombre du groupe $g_2 (i_2 = 4, 5, 6, 7)$ etc., l'équation (2, 11) donne

$$\beta^{\sigma}_{i_r i_s} = 0 \qquad (r \neq s, \sigma = 2, 3 \ldots p). \tag{2, 15}$$

Par conséquent les formes (2, 13) peuvent s'écrire

$$\beta^{\nu}_{ik} du^i du^k = \beta^{\nu}_{i_1 k_1} du^{i_1} du^{k_1} + \beta^{\nu}_{i_2 k_2} du^{i_2} du^{k_2} + \cdots \tag{2, 16}$$

c. a. d. une somme d'un nombre fini de formes quadratiques, chacune dépendant de variables, dont le nombre est moins de n. En calculant $T^{\sigma\nu}_{i_1 k_1}$ on obtient

$$T^{\sigma\nu}_{i_1 k_1} = \beta^{\sigma}_{i_1 j_1} \beta^{\nu}_{k_1 j_1} - \beta^{\sigma}_{k_1 j_1} \beta^{\nu}_{i_1 j_1} \qquad (j_1 = 1, 2, 3)$$

à cause de l'équation (2, 15). En employant l'hypothèse énoncée plus haut, le théorème étant vrai pour les formes à moins de n variables, nous voyons qu'on peut tourner le système de coordonnées $x_1 x_2 x_3$ de manière que

$$\beta^{\sigma}_{i_1 k_1} = 0 \qquad (i_1 \neq k_1). \tag{2, 17}$$

La rotation sera faite dans l'espace R^3, contenant les vecteurs x_1, x_2 et x_3 originaires. Par une rotation analogue du système x_4, x_5, x_6, x_7 on obtient

$$\beta^{\sigma}_{i_2 k_2} = 0 \qquad (i_2 \neq k_2). \tag{2, 18}$$

En continuant ainsi nous finirons par avoir un système de coordonnées E_n tel que tout terme rectangulaire des formes (2, 13) ou (2, 16) s'annule. Par suite les tenseurs $\beta^1, \beta^2, \ldots \beta^p$ sont coaxiaux.[1]

Inversement, s'il est possible de choisir les axes d'un n-èdre rectangulaire E_n, tel que

$$g_{ik} = \beta^{\nu}_{ik} = 0 \qquad i \neq k \tag{2, 19}$$

les composantes $T^{\sigma\nu}_{ik}$ s'annulent, et la variété V^n est une variété à torsion nulle en ce point. En somme:

Pour qu'une variété V^n plongée dans un R^{n+p} soit à torsion nulle, il faut et il suffit qu'il existe n directions tangentes, qui sont directions principales pour tous les tenseurs β^{ν}. —

M. Struik[2] a introduit la notion: directions principales en un point d'une V^n, située dans une V^{n+p}. Il cherche $\frac{d\theta}{ds}$, $d\theta$ étant l'angle total des espaces normaux voisins, ds l'élément linéaire. Dans notre cas et avec nos notations, on obtient la formule

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = g^{jl} \beta^{\nu}_{ij} \beta^{\nu}_{kl} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds}. \tag{2, 20}$$

Soit V^n à torsion nulle, E_n le n-èdre mentionné plus haut. (2, 20) sera réduite à

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = (\beta_{11})^2 \cos^2 \alpha^1 + \cdots + (\beta_{nn})^2 \cos^2 \alpha^n.$$

D'où il suit que: *Les directions principales d'une variété à torsion nulle sont les directions principales des tenseurs β^{ν}.*

Les directions principales de Ricci sont les directions principales du ten-

---

[1] Voir R. Lagrange: Comptes rendus 176, p. 562.

[2] »Grundzüge der mehrdim. Differentialgeometrie«, Berlin 1922, p. 95.

seur $R_{jk} = g^{il} R_{ijkl}$. En faisant usage des équations (2, 3) et (2, 19), on déduit $R_{jk} = 0$, $j \neq k$. Ainsi

Les directions principales de Ricci coïncident avec les directions principales de la variété.

§ 3. Variété de courbure et variété polaire.

Considérons une variété riemannienne V^n. Les composantes du *vecteur de courbure* en un point P de la variété sont données par les équations

$$y^\nu = \frac{\beta^\nu_{ik}\, du^i\, du^k}{g_{ik}\, du^i\, du^k} \tag{3, 1}$$

ou

$$y^\nu = \beta^\nu_{ik} \cos \alpha^i \cos \alpha^k, \tag{3, 2}$$

le système de coordonnées $x_1, x_2 \ldots x_n$ étant cartésien. A chaque direction tangente correspond un vecteur y, et son point extrême décrit une variété C, la *variété de courbure* en P. L'espace normal ν^q, ayant le plus petit nombre de dimensions et contenant la variété C, s'appelle *l'espace normal principal.* L'espace normal ν^{p-q} totalement orthogonal à ν^q est dit *espace binormal.*

Supposons maintenant V^n à torsion nulle et de plus qu'on ait choisi le système de coordonnées cartésien E_n, de sorte qu'on peut se servir des équations (2, 19). (3, 2) donne

$$y^\nu = \sum_i \beta^\nu_{ii} \cos^2 \alpha^i. \tag{3, 3}$$

En posant $x^i = \cos^2 \alpha^i$, $x^1, x^2, \ldots x^n$ sont des nombres non-négatifs, qui satisfont à l'équation

$$x^1 + x^2 + \cdots + x^n = 1 \tag{3, 4}$$

et (3, 3) aura la forme

$$y^\nu = \sum_i \beta^\nu_{ii} x^i. \tag{3, 5}$$

Supposons un moment que les nombres x^i soient des coordonnées rectangulaires. L'équation (3, 4) représente un hyperplan, mais comme $x^i \geqq 0$ on ne peut tirer parti que des points qui sont situés à l'intérieur ou à la frontière d'un hypertétraèdre *régulier* à n sommets. Parce que l'équation (3, 5) est linéaire, on a

La variété de courbure d'une variété à torsion nulle est un hypertétraèdre à n sommets ou la projection d'une telle figure.

On voit facilement que les n sommets correspondent aux directions principales de V^n. Si le nombre $p \geqq n$, les n vecteurs de courbure correspondants sont, en général, indépendants. De là il suit

En général l'espace normal principal aura n dimensions.

Retournons à une variété V^n quelconque. L'équation de l'espace normal $\nu^p(P)$, contenant les vecteurs normaux $\xi^1, \xi^2 \ldots \xi^p$, peut s'écrire

$$X = x + y^\nu \xi^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p). \tag{3, 6}$$

Soit du^i une direction tangente arbitraire au point P; supposons que $Q \to P$ tel que la droite PQ s'approche de la tangente donnée; alors l'espace normal $\nu^p(Q)$ tend vers l'espace normal $\nu^p(P)$. Nous allons y trouver les points caractéristiques. Il faut alors déterminer les fonctions $y^\nu(u^1, u^2, \ldots u^n)$ de manière que la composante tangentielle du vecteur dX s'annule. On a

$$dX = x_i du^i + y^\nu \xi_i^\nu du^i + dy^\nu \xi^\nu \tag{3, 7}$$

et à l'aide de l'équation (2, 2) les conditions

$$\underline{(g_{ik} - y^\nu \beta_{ik}^\nu) du^i = 0}. \tag{3, 8}$$

En éliminant les différentielles du^i, on obtient l'équation d'une variété V^{p-1}, qu'on peut appeler *la variété polaire* en P.[1]

On peut démontrer qu'en général la variété de courbure et la variété polaire sont polaires réciproques par rapport à une hypersphère d'unité, dont P est le centre.

S'il s'agit d'une V^n *à torsion nulle* les équations deviennent

$$\begin{gathered}(1 - y^\nu \beta_{11}^\nu) du^1 = 0 \\ (1 - y^\nu \beta_{22}^\nu) du^2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (1 - y^\nu \beta_{nn}^\nu) du^n = 0.\end{gathered}$$

[1] Voir KÜHNE: Archiv d. Math. u. Physik, 3. R. 6. 1904, p. 253. La variété polaire est dite »Krümmungsspur» par Kühne.

Par conséquent:

Si V^n est à torsion nulle, sa variété polaire se décompose en n hyperplans.[1]

On voit que les variétés C et V^{p-1} ne sont pas polaires réciproques; néanmoins, les sommets de l'hypertétraèdre sont les pôles des n hyperplans par rapport à l'hypersphère mentionnée plus haut.

§ 4. Lignes de courbure. Variétés conjuguées.

Les variétés V^n à torsion nulle sont caracterisées par la propriété d'avoir n congruences de lignes de courbure orthogonales; ce sont les courbes dont les tangentes sont les directions principales. — Les lignes de courbure d'une variété V^n, située dans un R^{n+1} possèdent deux propriétés différentes:

1) En deux points consécutifs d'une ligne de courbure les normales se coupent l'une l'autre. 2) Les directions principales sont directions conjuguées. Nous allons voir que les lignes de courbure d'une V^n à torsion nulle jouissent de toutes les deux propriétés.

Soient $\xi^1, \xi^2, \dots \xi^p$ les axes d'un système de coordonnées géodésique normal. De l'équation

$$X = x + \lambda \xi^1 \tag{4, 1}$$

de la normale contenant le vecteur ξ^1, on déduit

$$dX = x_i du^i + \lambda \xi^1_i du^i + d\lambda \xi^1$$

et en faisant usage de (2, 6)

$$dX = (x_i - \lambda \beta^1_{ik} g^{kl} x_l)\, du^i + d\lambda \xi^1. \tag{4, 2}$$

Il existe sur la normale (4, 1) un point caractéristique, si les équations

$$(g_{ik} - \lambda \beta^1_{ik})\, du^i = 0 \tag{4, 3}$$

sont satisfaites. Donc λ doit satisfaire à l'équation

$$|g_{ik} - \lambda \beta^1_{ik}| = 0. \tag{4, 4}$$

Les n racines de (4, 4) correspondent à n directions (4, 3), les directions principales du tenseur β^1. A ces directions correspondent n points caractéristiques de

[1] Voir R. Lagrange, l. c. p. 563.

la normale, les points de section avec les hyperplans polaires. Ainsi, une ligne de courbure de la variété V^n à torsion nulle est la développante d'une courbe C, qui est elle-même le lieu de points caractéristiques. Si la ligne de courbure parcourt V^n, la courbe C décrit une variété U^n, à laquelle C est géodésique.

Ces considérations ne concernent pas seulement le système de normales ξ^1, mais tout système de normales correspondantes, de sorte qu'il *existe en tout* $n \cdot \infty^{p-1}$ *variétés* U^n. — Si l'on développe une variété quelconque le long d'une congruence de courbes géodésiques on n'obtient pas de variétés à torsion nulle mais un faisceau de variétés, qui ont une normale commune.

Cherchons encore les points caractéristiques d'un espace normal $X = x + y^\nu \xi^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots q$. On voit facilement que deux espaces normaux consécutifs $\nu^q(P)$ et $\nu^q(Q)$ se coupent en un espace ν^{q-1}, la direction PQ étant direction principale. Par suite, le long d'une ligne de courbure les espaces normaux ν^q seront des espaces osculateurs à q dimensions ($q-1$-plans osculateurs) d'une courbe C, et la ligne de courbure sera la trajectoire orthogonale des espaces. Si la ligne de courbure parcourt V^n, la courbe C engendrera une variété U^n_q. Il existe autant de variétés U^n_q qu'il y a d'espaces ν situés dans ν^p. Le nombre est $\infty^{q(p-q)}$. Donc *il y a en tout* $n \cdot \infty^{q(p-q)}$ *variétés* U^n_q, $q = 1, 2, \ldots p-1$. Particulièrement, le cas $p = q$ donne: *Le long d'une ligne de courbure les espaces normaux à une variété à torsion nulle sont les* $(p-1)$*-plans osculateurs d'une courbe; il y a* n *variétés* U^n_p.

Si nous cherchons les points caractéristiques des *espaces tangents* nous pouvons le faire de la manière suivante. Supposons que V^n soit une variété quelconque, et posons

$$X = x + \lambda^i x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

En différentiant cette équation l'on aura

$$dX = x_k du^k + (\lambda^i_k x_i + \lambda^i x_{ik})\, du^k.$$

dont la composante normale doit s'annuler. En appliquant l'équation (2, 1) les équations de condition s'écrivent

$$\lambda^i \beta^\nu_{ik} du^k = 0.$$

Si la variété est à torsion nulle, et la direction tangente est une direction principale, nous aurons par exemple

$$\lambda^1 = 0.$$

Donc l'espace d'intersection de deux espaces tangents τ^n voisins sera un espace τ^{n-1} à $n-1$ dimensions, la direction tangente étant direction principale. La direction principale est orthogonale à l'espace d'intersection. Ces propriétés sont évidentes, parce que tous les tenseurs β^ν ont les mêmes directions principales. On en déduit

Les espaces tangents le long d'une ligne de courbure sont les $(n-1)$-plans osculateurs d'une courbe.

A chaque ligne de courbure correspond une développable circonscrite à n dimensions. Une congruence de lignes de courbure correspond à une congruence de courbes, qui engendrent une variété nouvelle, $\overline{U}^n$. Les variétés U^n et $\overline{U}^n$ sont dites *conjuguées.*

A une variété à torsion nulle sont attachées n variétés conjuguées.

L'existence des variétés conjuguées est due à la propriété des lignes de courbure d'être *courbes conjuguées* de la variété, et les théorèmes énoncés s'étendent à toute variété ayant des systèmes conjugués. Ainsi les variétés à torsion nulle appartiennent à une classe de variété *plus étendue.* Cette classe est caractérisée par la possibilité de trouver en chaque point d'une variété un système de coordonnées tel que $\beta^\nu_{ik} = 0$, $i \neq k$, $\nu = 1, 2, \ldots p$. On n'exige pas que le système de coordonnées soit rectangulaire. — On trouvera que la variété de l'infini de la variété de courbure se décompose en hyperplans, et encore que l'espace normal principal doit avoir, en général, n dimensions.

Toute *surface* V^2, plongée dans un R^4, appartient à cette classe. La théorie des *surfaces conjuguées* est exposée par MM. Burstin et Mayer.[1] — Les variétés développables, examinées par M. E. Cartan[2], appartiennent aussi à cette classe.

§ 5. Variétés à torsion nulle dérivées d'une variété donnée.

1. Variétés parallèles.

Deux variétés, V^n et $\overline{V}^n$, sont dites parallèles, si les espaces normaux en deux points quelconques correspondants coïncident. Soit V^n une variété à torsion nulle, $\overline{V}^n$ déterminée par l'équation

$$X = x + \lambda^\nu \xi^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p).$$

[1] Math. Zeitschrift (26) 1927, p. 373.

[2] Bul. de la Soc. Math. de France, t. 48, 1920, p. 172.

On aura

$$X_i = x_i - \lambda^\nu \beta^\nu_{ik} g^{kl} x_l + \lambda^\nu_i \xi^\nu.$$

$\overline{V}^n$ est parallèle à V^n, si $\lambda^\nu_i = 0$, $\lambda^\nu = const.$ La distance de deux points correspondants est constante, et $\overline{V}^n$ peut être engendrée par un vecteur normal d'une position constante par rapport au système de coordonnées géodésique normal. Les systèmes de coordonnées géodésiques normaux à V^n sont aussi géodésiques normaux à $\overline{V}^n$. $\overline{V}^n$ est à torsion nulle.

Il y a ∞^p variétés à torsion nulle parallèles à la variété originaire.

Nous démontrons que, essentiellement, une variété à torsion nulle est caracterisée par *l'existence d'une seule variété parallèle à elle-même.* Il faut seulement que le tenseur, appartenant à la normale commune des variétés, possède juste n directions principales. — En effet, nous exigerons que la variété $\overline{V}^n$

$$X = x + \lambda \xi^1$$

soit parallèle à V^n. En faisant usage de l'équation (2, 2) nous aurons

$$X_i = x_i - \lambda \beta^1_{ik} g^{kl} x_l + \lambda b^{\sigma 1}_i \xi^\sigma + \lambda_i \xi^1$$

et une multiplication par ξ^ν donne ($\nu = 1$ ou $\nu \neq 1$):

$$\lambda_i = 0 \quad \text{et} \quad \lambda b^{\sigma 1}_i = 0$$

$$\lambda = \text{const.}; \quad b^{\sigma 1}_i = 0.$$

Ecrivons l'équation (1, 4), ν étant égale à 1,

$$T^{\sigma 1}_{ki} = \frac{\partial b^{\sigma 1}_i}{\partial u^k} - \frac{\partial b^{\sigma 1}_k}{\partial u^i} + b^{\sigma\tau}_i b^{1\tau}_k - b^{\sigma\tau}_k b^{1\tau}_i.$$

On en déduit

$$\underline{T^{\sigma 1}_{ki} = 0.}$$

Comme nous avons supposé juste n directions principales du tenseur β^1, la démonstration p. 53 suffit à faire coïncider les directions principales de tous les tenseurs β^ν. Par conséquent V^n (et $\overline{V}^n$) sont à torsion nulle.

La condition ajoutée est nécessaire. Car par multiplication d'une variété, située dans une hypersphère, on obtient une autre variété, parallèle à l'originaire. Les variétés sont homothétiques, mais, en général, elles ne sont pas à torsion nulle.

2. Représentation sphérique.

Soit $\xi^1, \xi^2, \ldots \xi^p$ un système de coordonnées géodésique normal à la variété V^n. La variété $\bar{V}^n$, définie par l'équation

$$\bar{x} = \xi^1$$

est dite *image sphérique* de V^n. Nous allons voir que l'image sphérique d'une variété à torsion nulle est elle-même à torsion nulle. On a

$$\bar{x}_i = \xi^1_i$$

ou

$$\bar{x}_i = -\beta^1_{ik} g^{kl} x_l.$$

Les espaces tangents en des points correspondants de V^n et $\bar{V}^n$ sont parallèles. Donc le système de coordonnées $\xi^1 \ldots \xi^p$ est géodésique normal aussi par rapport à la variété $\bar{V}^n$, qui doit être à torsion nulle. Si nous faisons usage d'un autre système de normales nous obtiendrons une variété nouvelle:

Il y a ∞^{p-1} images sphériques d'une V^n à torsion nulle; elles sont toutes à torsion nulle.

Inversement, si la représentation sphérique d'une variété devient une variété, dont les espaces tangents en des points correspondants sont parallèles, les variétés seront à torsion nulle, pourvu que le tenseur, appartenant à la normale de la représentation, possède juste n directions principales. La démonstration est tout à fait la même que celle du paragraphe précédent.

On reconnait sans difficulté que les directions principales d'une variété à torsion nulle sont parallèles aux directions principales et d'une variété parallèle à V^n et d'une image sphérique de V^n.

3. Variétés inverses.

Soit donnée une inversion, le centre O, et une variété V^n quelconque. Aux vecteurs $x, x_i, \xi^\nu, \ldots$ et aux quantités $\beta^\nu_{ik}, b^{\sigma\nu}_i, \ldots$ correspondent d'autres vecteurs $\bar{x}, \bar{x}_i, \bar{\xi}^\nu, \ldots$ et d'autres quantités $\bar{\beta}^\nu_{ik}, \bar{b}^{\sigma\nu}_i, \ldots$. A la variété V^n correspond une variété $\bar{V}^n$, représentée par l'équation

$$\bar{x} = \frac{c^2}{r^2} x;$$

c^2 désigne le module de l'inversion, r la longueur $|x|$ du vecteur x. Par différentiation l'on aura

$$\bar{x}_i = \frac{c^2}{r^2} x_i - \frac{2c^2}{r^3} r_i x$$

et ensuite

$$\bar{g}_{ik} = \frac{c^4}{r^4} g_{ik}.$$

Les vecteurs ξ^ν peuvent correspondre aux vecteurs

$$\bar{\xi}^\nu = \xi^\nu - \frac{2p^\nu}{r^2} x \qquad\qquad (p^\nu = \xi^\nu x),$$

car deux vecteurs ξ^ν et $\bar{\xi}^\nu$ doivent avoir, au signe près, la même projection orthogonale sur la droite Ox. — On peut alors déterminer les quantités $\bar{\beta}^\nu_{ik} = -\bar{\xi}^\nu_i x_k$ et $\bar{b}^{\sigma\nu}_i = \bar{\xi}^\sigma \bar{\xi}^\nu_i$, et le résultat du calcul sera

$$\bar{\beta}^\nu_{ik} = \frac{c^2}{r^2} \beta^\nu_{ik} + \frac{2c^2 p^\nu}{r^4} g_{ik}$$

$$\bar{b}^{\sigma\nu}_i = b^{\sigma\nu}_i.$$

La dernière équation nous permet d'énoncer

Les composantes $b^{\sigma\nu}_i$ et les tenseurs de torsion $T^{\sigma\nu}_{ik}$ sont des invariantes absolues.

Puis: *La variété inverse d'une variété à torsion nulle est elle-même à torsion nulle.*

Considérons le système de coordonnées E_n, dont les axes sont les directions principales en un point P de la variété. En ce point on a les équations (2, 19)

$$g_{ik} = \beta^\nu_{ik} = 0, \qquad i \neq k$$

et par conséquent

$$\bar{g}_{ik} = \bar{\beta}^\nu_{ik} = 0, \qquad i \neq k$$

c. a. d.: *Les lignes de courbure de V^n correspondent aux lignes de courbure de $\bar{V}^n$.*

En général, les directions principales correspondantes ne sont pas parallèles.

§ 6. Variétés à torsion nulle et variétés développables.

Nous allons établir une correspondance intéressante entre les variétés à torsion nulle et une certaine classe de variétés développables (à courbure nulle). Supposons que la variété V^n soit située dans un R^{n+p}, $p \geqq n$, et de plus, que l'éspace normal principal ait juste n dimensions. Donc les n vecteurs de courbure $\beta^\nu_{11}, \beta^\nu_{22}, \ldots \beta^\nu_{nn}$, mentionnés p. 57, sont linéairement indépendants.

L'équation d'un espace normal à n dimensions s'écrit

$$X = x + y^j \xi^j \qquad (j = 1, 2, \ldots n). \tag{6, 1}$$

Il s'agit de trouver les points caractéristiques des espaces normaux ν^n. La différentielle dX vérifie l'équation

$$dX = x_i du^i + y^j \xi^j_i du^i + dy^j \xi^j$$

et en faisant usage de (2, 6)

$$dX = (x_i - y^j \beta^j_{ik} g^{kl} x_l)\, du^i + dy^j \xi^j. \tag{6, 2}$$

Pour que la composante tangentielle soit nulle pour toute direction tangente du^i, il faut et il suffit que

$$x_i - y^j \beta^j_{ik} g^{kl} x_l = 0$$

ou

$$g_{ik} - y^j \beta^j_{ik} = 0. \tag{6, 3}$$

Ces $\frac{1}{2} n(n+1)$ équations sont compatibles. Car, si nous introduisons le système de coordonnées E_n, il ne reste que les équations

$$1 - y^j \beta^j_{ii} = 0$$

dont on peut obtenir $y^1, y^2, \ldots y^n$, parce que les vecteurs $\beta_{11}, \ldots \beta_{nn}$ sont indépendants. Le point y^j est point d'intersection entre l'espace ν^n et les n hyperplans de la variété polaire. — Si le point podaire de l'espace ν^n parcourt la variété V^n à torsion nulle, le point y^j décrit une variété W^n. L'équation (6, 2) donne

$$dX = dy^j \xi^j. \tag{6, 4}$$

W^n est la variété d'enveloppe des espaces normaux ν^n. W^n est développable.

L'équation (6, 4) est la même que

$$X_i = y_i^j \xi^j$$

dont on déduit

$$X_{ik} = y_{ik}^j \xi^j - y_i^j \beta_{km}^j g^{ml} x_l.$$

Par conséquent: *L'espace normal principal à W^n possède n dimensions, et il est parallèle à l'espace tangent à V^n.*

W^n est une *variété développable* de CARTAN.[1] Ces variétés jouissent de propriétés intéressantes. Nous avons vu (p. 60) que la variété de l'infini de la variété de courbure se décompose en hyperplans, la variété donnée ayant des congruences de courbes conjuguées. Si la variété donnée est une variété de Cartan, les hyperplans sont les éléments de l'infini d'un n-èdre rectangulaire. Ceci peut se démontrer facilement, si l'on cherche la variété polaire en un point de W^n. On aura en outre que les arêtes du n-èdre rectangulaire sont parallèles aux directions principales au point correspondant de V^n.

Puis nous démontrerons le théorème suivant:

Si les espaces normaux v^n d'une variété V^n enveloppent une variété de Cartan, W^n, V^n sera à torsion nulle et pourra être représentée par l'équation

$$X = x + (c^i - u^i) x_i, \tag{6, 5}$$

x étant le vecteur appartenant à W^n, c^i des constantes arbitraires.

Démonstration. Soit

$$X = x + \lambda^i x_i$$

l'équation de V^n. Les vecteurs tangents sont donnés par

$$X_k = x_k + \lambda_k^i x_i + \lambda^i x_{ik}.$$

Si l'espace tangent à W^n doit être espace orthogonal à V^n, il faut et il suffit que les équations

$$X_k x_j = 0$$

soient satisfaites. On a

$$g_{jk} + \lambda_k^i g_{ij} + \lambda^i \Gamma_{j,ik} = 0$$

---

[1] Voir la note p. 60.

et en choisissant un système de coordonnées géodésique à W^n tel que $g_{ik} = \delta_k^i$ et $\Gamma_{j,ik} = 0$, on aura

$$\delta_k^j + \lambda_k^j = 0.$$

Si l'on multiplie par du^k on obtient par intégration

$$\lambda^j = c^j - u^j$$

et la dernière partie du théorème énoncé est démontrée.

En différentiant l'équation (6, 5) on obtient

$$X_k = (c^i - u^i)\, x_{ik}.$$

Donc l'espace tangent à V^n est parallèle à l'espace normal principal de la variété euclidienne W^n.

Pour démontrer que V^n est à torsion nulle il faut trouver p vecteurs d'unité, normaux à V^n, tels que toute différentielle des vecteurs soient située dans l'espace tangent à V^n. — Les vecteurs $x_1, x_2, \ldots x_n$ sont des vecteurs unitaires, orthogonaux entre eux. Les différentielles

$$dx_i = x_{ik}\, du^k \tag{6, 6}$$

appartiennent à l'espace tangent de V^n.

Si l'espace ambiant de V^n ne possède que $2n$ dimensions ($p = n$), le système de coordonnées $x_1, x_2, \ldots x_n$, géodésique par rapport à W^n, est géodésique normal par rapport à V^n, et la première partie aussi du théorème est vérifiée. Mais au cas général, où $p > n$, il nous manque $p - n$ vecteurs normaux pour avoir un système de coordonnées complet.

Supposons que les n vecteurs $\xi^1, \xi^2, \ldots \xi^n$, déterminent l'espace normal principal de W^n, les $p - n$ vecteurs $\xi^{n+1}, \ldots \xi^p$ l'espace binormal. On a donc

$$\beta_{ik}^R = 0 \qquad (R = n+1, n+2, \ldots p)$$

et les équations (2, 2), (2, 4) et (2, 5) donnent

$$\xi_i^R = b_i^{jR}\, \xi^j + b_i^{SR}\, \xi^S \qquad (j = 1, 2, \ldots n) \tag{6, 7}$$

$$\beta_{ik}^j\, b_l^{jR} - \beta_{il}^j\, b_k^{jR} = 0 \tag{6, 8}$$

$$T_{ik}^{RS} = 0. \tag{6, 9}$$

Si l'on pose

$$(6,10) \qquad \overline{T}_{ik}^{RS} = \frac{\partial b_k^{RS}}{\partial u^i} - \frac{\partial b_i^{RS}}{\partial u^k} + b_k^{RQ} b_i^{SQ} - b_i^{RQ} b_k^{SQ}, \quad (R, S, Q = n+1, \ldots p)$$

on voit que l'équation (6, 9) peut s'écrire

$$(6,11) \qquad \overline{T}_{ik}^{RS} = b_i^{Rj} b_k^{Sj} - b_k^{Rj} b_i^{Sj}.$$

Comme la variété W^n est une variété de Cartan il existe en chaque point un système de coordonnées tel que

$$\beta_{ik}^j = 0.$$

Les axes sont les tangentes aux courbes conjuguées. Les vecteurs de courbure, qui correspondent aux directions conjuguées, forment un n-èdre rectangulaire; si nous mettons les vecteurs $\xi^1, \ldots \xi^n$ sur les arêtes du n-èdre, seulement les quantités

$$\beta_{11}^1, \ \beta_{22}^2, \ \ldots \ \beta_{nn}^n$$

seront différentes de zéro. — En employant ce système de référence, on dérive de l'équation (6, 8) pour $i \neq k \neq l$

$$\beta_{ii}^j b_l^{jR} = 0$$

et puisque tout terme, sauf celui qui contient β_{ii}^i, est égal à zéro, on obtient

$$b_l^{iR} = 0 \qquad (i \neq l, \ R = n+1, \ldots p).$$

On voit alors que toutes les composantes des tenseurs $\overline{T}$ s'annulent. Car, chaque tenseur est gauche-symétrique, et pour $i \neq k$ ou b_i^{Rj} ou b_k^{Rj} s'annule. Les tenseurs $\overline{T}$ sont indépendants du système de coordonnées de l'espace normal principal, et par suite l'équation

$$\overline{T}_{ik}^{RS} = 0$$

est valable pour tout système de coordonnées de W^n et de l'espace normal principal.

Considérons maintenant un vecteur binormal $\lambda = \lambda^R \xi^R$. La composante binormale de la différentielle $d\lambda$ sera

$$d_{bn}\lambda = (d\lambda^S + b_i^{RS} \lambda^R du^i)\, \xi^S.$$

On peut parler d'un *déplacement parallèle binormal*, défini par

$$d\lambda^S + b_i^{RS} \lambda^R du^i = 0$$

et comme $\overline{T}_{ik}^{RS} = 0$ ces équations sont complètement intégrables. Il en résulte — comme dans le § 1 — qu'il est possible de choisir un système de coordonnées binormal $\xi^{n+1}, \ldots \xi^p$ tel que toutes les b_i^{RS} s'annulent. Si l'on se sert d'un tel système, l'équation (6, 7) se réduit à

$$\xi_i^R = b_i^{jR}\, \xi^j$$

c. a. d. toutes les différentielles des $p - n$ vecteurs $\xi^{n+1}, \ldots \xi^p$ se trouvent dans l'espace normal principal de W^n, qui était parallèle à l'espace tangent de V^n. Donc les p vecteurs $x_1, x_2, \ldots x_n, \xi^{n+1}, \ldots \xi^p$ sont les axes d'un système de coordonnées géodésique normal à V^n. V^n est à torsion nulle. —

Si nous posons

$$c^1 = c^2 = \cdots = c^n = 0, \quad u^2 = u^3 = \cdots u^n = 0$$

l'équation (6, 5) se réduit à

$$X = x - u^1 x_1.$$

Si le point x parcourt la géodésique donnée le point X décrit la développante. Le développement commence au point $u^1 = 0$, c. a. d. au point d'intersection O des variétés V^n et W^n. Puisque la géodésique considerée est une géodésique complètement arbitraire issue du point O, on peut énoncer

Si l'on développe toutes les géodésiques de W^n, issues d'un point O, les développantes engendreront une variété V^n à torsion nulle.

Le réseau de géodésiques passant par O correspond à un réseau (une congruence) de développantes, situées dans V^n, et qui passent aussi par O. Les développantes forment un *nouveau système de lignes de courbure.* Ce système ne coïncide pas avec un système de lignes de courbure, dont les tangentes sont directions principales. Car ces courbes correspondent aux courbes conjuguées de W^n, et, en général, les courbes conjuguées ne sont pas géodésiques.

Si la variété V^n à torsion nulle est plongée dans un R^{2n} $(p = n)$ il n'existe qu'une variété W^n. Aux ∞^n points O correspondent les ∞^n *variétés* (6, 5) *parallèles à V^n.* Evidemment nous avons obtenu une généralisation de la correspondance connue entre une courbe *plane* et ses développantes.

Si V^n est située dans un R^{n+p} $(p > n)$ il existe autant de variétés W^n qu'il y a d'espaces ν^n dans ν^p. Leur nombre sera $\infty^{n(p-n)}$. Elles sont toutes situées dans l'enveloppe W^p des espaces normaux ν^p. On voit l'analogie avec les courbes *gauches.*

§ 7. Surfaces à torsion nulle dans un espace à quatre dimensions.

La variété la plus simple à torsion nulle est la surface V^2, située dans un espace euclidien R^4. Nous allons faire subir à ces variétés un examen détaillé.

Soit V^2 une surface hyperbolique. Les courbes conjuguées sont réelles, et la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient courbes de coordonnées, est

$$\beta^1_{12} = \beta^2_{12} = 0$$

(voir p. 60). Donc les coordonnées x^1, x^2, x^3, x^4 satisfont à l'équation de LAPLACE

$$x_{12} = \Gamma^1_{12} x_1 + \Gamma^2_{12} x_2 . \tag{7, 1}$$

Si la surface est *à torsion nulle* les courbes conjuguées sont *orthogonales*, et l'on aura

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2, \qquad g_{12} = 0. \tag{7, 2}$$

On a d'ailleurs les formules

$$x_{11} = \Gamma^l_{11} x_l + \beta^j_{11} \xi^j \tag{7, 3}$$

$$\xi^j_1 = - \beta^j_{11} g^{11} x_1 \tag{7, 4}$$

et des équations analogues. — En posant $\beta^j_{iik} = \frac{\partial \beta^j_{ii}}{\partial u^k}$ et $g_{iik} = \frac{\partial g_{ii}}{\partial u^k}$ la condition d'intégrabilité (2, 7) sera

$$\beta^j_{112} = \frac{1}{2} g_{112} (g^{11} \beta^j_{11} + g^{22} \beta^j_{22}), \tag{7, 5}$$

dont nous nous servirons plus loin.

Etudions d'abord les variétés U^2_1 qui étaient des surfaces engendrées par les points caractéristiques des normales ξ^1 correspondantes. L'équation de U^2_1 s'écrit

$$X = x + \lambda \xi^1, \qquad \frac{1}{\lambda} = \beta^1_{11} g^{11}. \tag{7, 6}$$

En différentiant (7, 6) on obtient

$$X_1 = \lambda_1 \xi^1 \tag{7, 7}$$

$$X_2 = \lambda_2 \xi^1 + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) x_2 , \qquad \frac{1}{\mu} = \beta^1_{22} g^{22} \tag{7, 8}$$

et

$$X_{12} = \lambda_{12} \xi^1 - \frac{\lambda_1}{\mu} x_2 . \tag{7, 9}$$

Le plan tangent à U_1^2 contient les vecteurs ξ^1 et x_2. Il est demi-orthogonale au plan tangent à V^2. (7, 9) montre que

Les lignes de courbure de V^2 correspondent aux courbes conjuguées de U_1^2.

Comme l'un des systèmes de lignes de courbure en outre correspond à un système de géodésiques (voir p. 59), on aura:

L'un des systèmes de courbes conjuguées de U_1^2 est composé de géodésiques.

Cette propriété caractérise les surfaces U_1^2. Car on peut démontrer que: *Si l'on développe une surface le long d'une congruence de courbes géodésiques, qui est de plus l'un des systèmes conjugués, on obtient une surface à torsion nulle.*

Démonstration. La forme différentielle de la surface U^2 peut s'écrire

$$ds^2 = (du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2. \tag{7, 10}$$

Les géodésiques $du^2 = 0$ sont l'un des systèmes de courbes conjuguées, si

$$\begin{vmatrix} \beta_{11}^1 & \beta_{12}^1 \\ \beta_{11}^2 & \beta_{12}^2 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$k_1\beta_{11} + k_2\beta_{12} = 0 \qquad (k_1, k_2 \neq 0, 0)$$

c. a. d. les composantes normales des vecteurs x_{11} et x_{12} coïncident. (Le vecteur x appartient à la surface U^2). En vertu de (7, 10) l'équation (2, 2) devient

$$\begin{aligned} x_{11} &= \beta_{11}^j\,\xi^j \\ x_{12} &= \Gamma_{12}^2 x_2 + \alpha x_{11}. \end{aligned}$$

Nous allons démontrer que la surface développante V^2

$$X = x + (c - u^1)\,x_1$$

sera à torsion nulle. Les vecteurs tangents sont

$$\begin{aligned} X_1 &= (c - u^1)\,x_{11} \\ X_2 &= (c - u^1)\,\alpha x_{11} + (1 + (c - u^1)\,\Gamma_{12}^2)\,x_2. \end{aligned}$$

Il s'agit de trouver deux vecteurs normaux, formant un système de coordonnées géodésique normal. L'un des vecteurs sera x_1 parce que et x_{11} et x_{12} sont situés dans le plan tangent à V^2, qui contient alors la différentielle dx_1. L'autre vecteur normal ξ sera défini par les équations

$$\xi x_1 = 0, \quad \xi x_{11} = 0, \quad \xi x_2 = 0, \quad \xi^2 = 1.$$

Ces équations donnent

$$\xi_1 x_1 = 0, \quad \xi_2 x_1 = 0, \quad \xi d\xi = 0$$

de sorte que $d\xi \perp x_1$. Comme $d\xi \perp \xi$, la différentielle $d\xi$ est tangente à V^2. Par suite V^2 est une surface à torsion nulle. —

Le développement de U^2 commence à une trajectoire orthogonale des courbes géodésiques. Cette trajectoire est la courbe d'intersection des surfaces U^2 et V^2.

Nous continuons l'étude des surfaces attachées à une surface à torsion nulle en examinant une variété U_2^2. Les plans normaux de V^2 le long d'une ligne de courbure étaient plans osculateurs d'une courbe gauche. Nous trouverons le lieu géométrique de ces courbes, quand la ligne de courbure se meut sur la surface.

Considérons les plans normaux le long de la courbe $u^2 = 0$. Deux plans voisins se coupent en la droite

$$z^j \beta_{11}^j = g_{11} \qquad (j = 1, 2), \tag{7, 11}$$

z^1 et z^2 désignant des coordonnées rectangulaires du plan (voir p. 57). En différentiant par rapport à u^1 on obtient

$$z^j \beta_{111}^j = g_{111}. \tag{7, 12}$$

Soient z^1 et z^2 maintenant les coordonnées du point d'intersection des droites (7, 11) et (7, 12). L'équation (7, 11) donne alors

$$z_1^j \beta_{11}^j + z^j \beta_{111}^j = g_{111}$$

et

$$z_1^j \beta_{11}^j = 0. \tag{7, 13}$$

L'équation

$$Z = x + z^j \xi^j \tag{7, 14}$$

définit une surface. On obtient

$$\begin{aligned} Z_1 &= z_1^j \xi^j \\ Z_2 &= z_2^j \xi^j + (1 - g^{22} \beta_{22}^j z^j) x_2 \end{aligned} \tag{7, 15}$$

et

$$Z_{11} = z_{11}^j \xi^j. \tag{7, 16}$$

Il est évident que cette surface est la surface U_2^2 cherchée. Car le plan normal à V^2 est plan osculateur de la courbe $u^2 = 0$ de U_2^2. — On peut démontrer que *les lignes de courbure de V^2 correspondent aux courbes conjuguées de* U_2^2, de sorte qu'il existe une équation de Laplace

$$Z_{12} = a Z_1 + b Z_2. \tag{7, 17}$$

Nous omettrons la démonstration.

Finalement écrivons l'équation de la *surface développable W^2 de Cartan* (6, 1)

$$Y = x + y^j \xi^j \qquad (j = 1, 2), \tag{7, 18}$$

y^1 et y^2 satisfaisant aux équations

$$y^j \beta_{11}^j = g_{11} \quad \text{et} \quad y^j \beta_{22}^j = g_{22}.$$

En différentiant la première équation on aura

$$y_2^j \beta_{11}^j + y^j \beta_{112}^j = g_{112}$$

et au moyen de (7, 5)

$$y_2^j \beta_{11}^j = 0. \tag{7, 19}$$

Les vecteurs tangents à W^2 seront

$$Y_1 = y_1^j \xi^j$$
$$Y_2 = y_2^j \xi^j$$

et encore

$$Y_{21} = y_{21}^j \xi^j - g^{11} y_2^j \beta_{11}^j x_1.$$

En regardant (7, 19) on voit que

$$Y_{12} = y_{12}^j \xi^j = p Y_1 + q Y_2$$

et par suite: *Les lignes de courbure de V^2 correspondent aux courbes conjuguées de W^2.*

Finissons ce paragraphe en démontrant le théorème: *La variété développable W^2 et les surfaces U_2^2 sont surfaces conjuguées.*

Nous avons déjà démontré que le plan normal en un point de la surface V^2 à torsion nulle est à la fois plan tangent en un point de W^2, et plan osculateur en un point de U_2^2. En réalité, c'est assez pour vérifier le théorème. Mais nous pourrons encore faire voir que la correspondance entre W^2 et U_2^2 est réciproque. A cause des équations (7, 13) et (7, 19) les composantes z_1^j et y_2^j sont proportionnelles, et il existe donc une relation

$$Y_2 = \varrho Z_1.$$

En différentiant par rapport à u^2 on obtient

$$Y_{22} = \varrho_2 Z_1 + \varrho Z_{12}$$

et par (7, 17)

$$Y_{22} = a Z_1 + b Z_2.$$

Par conséquent, *les plans tangents à U_2^2 sont plans osculateurs des courbes $u^1 = const.$ de la surface W^2.* Ainsi, nous avons établi exactement la correspondance qui caractérise les surfaces conjuguées.[1]

§ 8. Variétés à torsion nulle plongées dans un espace non euclidien.

La définition du déplacement parallèle normal peut s'étendre aux variétés, plongées dans un espace à courbure constante ou, plus généralement, dans un espace riemannien quelconque. On peut donc parler d'une variété à torsion nulle située dans un espace où la métrique n'est pas euclidienne. Nous nous bornerons aux espaces non-euclidiens, c. a. d. aux espaces à courbure constante.

Soit V^n une variété située dans un espace à courbure constante K_0. On peut déduire des formules analogues aux équations (2, 1), (2, 2) etc.[2], en faisant usage des coordonnées de WEIERSTRASS. Pour obtenir ces coordonnées, on s'imagine l'espace S^{n+p} à courbure constante situé dans un espace R^{n+p+1} euclidien ou pseudo-euclidien, la courbure K_0 étant positive ou négative. — Si V^n est une *variété à torsion nulle* on aura les équations

$$(8, 1) \qquad x_{ik} = \Gamma_{ik}^l x_l + \beta_{ik}^\nu \xi^\nu - K_0 g_{ik} x \qquad \begin{pmatrix} i, k, l = 1, 2, \ldots n \\ \nu, \sigma = 1, 2, \ldots p \end{pmatrix}$$

$$(8, 2) \qquad \xi_i^\nu = - \beta_{ik}^\nu g^{kl} x_l$$

[1] Voir le mémoire de MM. BURSTIN et MAYER, p. 399 et 406.

[2] Voir EISENHART l. c. p. 204—206.

et les conditions d'intégrabilité:

$$R_{ijkl} = \beta^{\nu}_{ik}\beta^{\nu}_{jl} - \beta^{\nu}_{il}\beta^{\nu}_{jk} + K_0(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \tag{8, 3}$$

$$\beta^{\nu}_{ij,k} = \beta^{\nu}_{ik,j} \tag{8, 4}$$

$$T^{\sigma\nu}_{ik} = 0. \tag{8, 5}$$

Il est facile de voir que, essentiellement, les résultats des §§ 2, 3, 4 et 5 sont vrais, la variété étant située dans un espace S^{n+p}. Nous n'insisterons pas sur ce point, mais laissons au lecteur à faire les démonstrations précises.[1] Quant au § 6 les résultats aussi peuvent s'appliquer au cas présent, mais cette démonstration diffère beaucoup de la démonstration précédente. Donc il n'est pas inutile de faire de nouvelles considérations. —

L'équation d'un espace à n dimensions normal à la variété peut s'écrire

$$X = \lambda^0 x + \lambda^j \xi^j, \qquad (j = 1, 2, \dots n) \tag{8, 6}$$

$\lambda^0, \lambda^1, \dots \lambda^n$ satisfaisant à l'équation

$$\frac{1}{K_0} = \frac{(\lambda^0)^2}{K_0} + (\lambda^1)^2 + \cdots + (\lambda^n)^2. \tag{8, 7}$$

Il s'agit de trouver les points caractéristiques des espaces normaux correspondants. On a

$$dX = d\lambda^0 x + d\lambda^j \xi^j + (\lambda^0 x_i + \lambda^j \xi^j_i)\, du^i \tag{8, 8}$$

et d'après (8, 2)

$$dX = d\lambda^0 x + d\lambda^j \xi^j + (\lambda^0 x_i - \lambda^j \beta^j_{ik} g^{kl} x_l)\, du^i. \tag{8, 9}$$

En général, il y a un point S, dont les coordonnées satisfont aux équations

$$\lambda^0 g_{ik} - \lambda^j \beta^j_{ik} = 0$$

ce qu'on voit en introduisant le système de coordonnées E^n, considéré plus haut. Nous allons examiner le lieu W^n des points S. L'équation (8, 9) donne

$$dX = d\lambda^0 x + d\lambda^j \xi^j$$

[1] Voir ma thése, p. 78—82.

et par suite

$$dS^2 = \frac{(d\lambda^0)^2}{K_0} + (d\lambda^1)^2 + \cdots + (d\lambda^n)^2$$

c. a. d. W^n *est une variété à courbure constante* K_0; W^n *est développable.* L'équation (8, 9) donne encore

$$X_i = \lambda_i^0 x + \lambda_i^j \xi^j$$

et

$$X_{ik} = \lambda_{ik}^0 x + \lambda_i^0 x_k + \lambda_{ik}^j \xi^j - \lambda_i^j \beta_{km}^j g^{ml} x_l.$$

L'espace normal principal à W^n *possède donc* n *dimensions;* W^n *est une variété de Cartan.*

Nous nous proposons de démontrer la réciproque, à savoir le théorème p. 65, sauf l'équation (6, 5). — Soit

$$x = x(u^1 u^2 \dots u^n)$$

l'équation de la variété de Cartan W^n, et

$$X = \lambda^0 x + \lambda^i x_i, \qquad (i = 1, 2, \dots n) \tag{8, 10}$$

$\lambda^0, \lambda^1, \dots \lambda^n$ vérifiant l'équation

$$\frac{1}{K_0} = \frac{(\lambda^0)^2}{K_0} + \lambda^i \lambda^k g_{ik}, \tag{8, 11}$$

l'équation de la variété V^n. Les vecteurs tangents de V^n sont déterminés par

$$X_k = \lambda_k^0 x + \lambda^0 x_k + \lambda_k^i x_i + \lambda^i x_{ik}.$$

Pour que V^n soit orthogonale à l'espace tangent (8, 10) de W^n il faut et il suffit que tous les vecteurs $x, x_1 \dots x_n$ soient orthogonaux à tout vecteur X_k. On aura par suite les conditions

$$x X_k = 0 \quad x_j X_k = 0$$

et l'on obtient

$$\lambda_k^0 - \lambda^i K_0 g_{ik} = 0 \tag{8, 12}$$

$$\lambda^0 g_{jk} + \lambda_k^i g_{ij} + \lambda^i \Gamma_{j, ik} = 0. \tag{8, 13}$$

Si l'on multiplie (8, 13) par g^{jl} on obtient les équations différentielles

(8, 14) $$\lambda^0_k - \lambda^i K_0 g_{ik} = 0$$

(8, 15) $$\lambda^l_{,k} + \lambda^0 \delta^l_k = 0,$$

$\lambda^l_{,k}$ étant la *dérivée covariante.* On en déduit

(8, 16) $$\lambda^0_{k,j} = \lambda^0_{j,k}$$

et

(8, 17) $$\lambda^l_{,k,j} + \lambda^i K_0 \delta^l_k g_{ij} = 0.$$

Comme W^n est une variété à courbure constante K_0, il suit

(8, 18) $$\lambda^l_{,k,j} - \lambda^l_{,j,k} = -\lambda^i R^l_{ikj}.$$

Les équations (8, 16) et (8, 18) sont précisément les conditions d'intégrabilité des équations (8, 14) et (8, 15), et par conséquent les équations différentielles peuvent s'intégrer. —

Il nous faut démontrer qu'une solution $(\lambda^0, \lambda^1 \ldots \lambda^n)$ peut satisfaire à (8, 11). Néanmoins il sera utile de démontrer un peu plus. Soit $(\lambda^0, \lambda^1, \ldots \lambda^n)$ et $(\mu^0, \mu^1, \ldots \mu^n)$ deux solutions arbitraires. Multiplions d'abord (8, 12) par $\frac{\mu^0}{K_0}$, (8, 13) par μ^j; puis changeons les lettres λ et μ. Si l'on fait une addition de ces quatre équations la somme sera la dérivée de l'expression

(8, 19) $$\frac{\lambda^0 \mu^0}{K_0} + \lambda^i \mu^j g_{ij}$$

par rapport à u^k, et égale à zéro. Donc l'expression (8, 19) doit être *constante.* Si l'on pose $\lambda^j = \mu^j$, la condition (8, 11) peut se vérifier, puisque les équations différentielles sont homogènes. Par conséquent, il existe des variétés V^n. Cela posé, il faut démontrer que V^n est à torsion nulle, pourvu que W^n soit une variété développable de Cartan, c. a. d. qu'il y ait un espace normal principal à n dimensions. — Le système de coordonnées géodésique normal sera choisi de la même manière que précédemment. Choisissons premièrement n vecteurs unitaires

$$Y_\alpha = \lambda^0_\alpha x + \lambda^i_\alpha x_i \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

orthogonaux entre eux, les λ satisfaisant aux conditions (8, 12) et (8, 13). On doit encore avoir

$$\frac{\lambda_\alpha^0 \lambda_\beta^0}{K_0} + \lambda_\alpha^i \lambda_\beta^k g_{ik} = \delta_\beta^\alpha;$$

les remarques plus haut montrent qu'il est bien possible de faire un tel choix. — Si l'espace normal principal à W^n est déterminé par les vecteurs $\xi^1, \xi^2, \dots \xi^n$, la dérivée x_{ik} est donnée par

$$x_{ik} = \Gamma_{ik}^l x_l + \beta_{ik}^j \xi^j - K_0 g_{ik} x, \tag{8, 20}$$

et si $\lambda^0, \lambda^1, \dots \lambda^n$ est une solution arbitraire des équations (8, 12) et (8, 13) l'expression X_k peut être simplifiée en

$$X_k = \lambda^j \beta_{ik}^j \xi^i.$$

On voit donc que l'espace tangent à V^n contient les mêmes vecteurs que l'espace normal principal correspondant à W^n. Comme $(\lambda^0, \lambda^1, \dots \lambda^n)$ était une solution arbitraire, toutes les différentielles dY_α sont situées dans l'espace tangent à V^n. — Choisissons encore $p - n$ vecteurs binormaux à W^n, $\xi^{n+1}, \xi^{n+2}, \dots \xi^p$, ayant la propriété que toute différentielle $d\xi^R$ est située dans l'espace normal principal (voir p. 67—68). Donc le système de vecteurs $Y_1, Y_2, \dots Y_n, \xi^{n+1}, \dots \xi^p$ forme un système de coordonnées géodésique normal par rapport à la variété V^n. *V^n est à torsion nulle.*

On peut démontrer que le dernier théorème du § 6 est vrai, même si la variété à torsion nulle est plongée dans un espace à courbure constante.