

# EINE REPRÄSENTATION DER ZWEIREIHIGEN MATRIZEN (UND DER QUATERNIONEN) DURCH GERADEN DES RAUMES.

VON

INGEBRIGT JOHANSSON

in Oslo.

## Inhalt.

- § 1. Die Repräsentation der Matrizen.
- § 2. Die Skalarfläche und die Teiler der Null.
- § 3. Die lineargebrochenen Matrizen Transformationen.
- § 4. Die Summe und das Produkt.
- § 5. Entgegengesetzte, inverse und konjugierte Matrizen.
- § 6. Die Quaternionen.

---

## § 1. Die Repräsentation der Matrizen.

Da die Menge aller zweireihigen Matrizen ein vierdimensionales Kontinuum ist, so besteht die Möglichkeit sie in dem (bekanntlich auch vierdimensionalen) Geradenkontinuum des Raumes zu repräsentieren. Man kann natürlich beliebig viele Repräsentationen dieser Art aufstellen; die hier vorzuführende dürfte aber die einfachste sein. Bemerkenswert ist, dass wir für die Summe und das Produkt von zwei Matrizen ziemlich einfache Konstruktionen erhalten.

*Wir repräsentieren die Matrix*

$$(1) \quad a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

durch die Verbindungsgerade der beiden Punkte

$$(2) \quad \begin{aligned} &a_{11} : a_{12} : 1 : 0 \text{ und} \\ &a_{21} : a_{22} : 0 : 1, \end{aligned}$$

und wir nennen diese Gerade die  **$\alpha$ -Gerade** (vgl. Fig. 1).

Die beiden Punkte (2) liegen bzw. in den Koordinatenebenen  $(0 : 0 : 0 : 1)$  und  $(0 : 0 : 1 : 0)$ . Aus Gründen, die wir später erkennen werden, nennen wir die Schnittgerade dieser beiden Ebenen die  $\infty$ -Gerade. Die entgegengesetzte Kante des Koordinatentetraeders ist nach der Definition die  $o$ -Gerade.

Es ist nach der Definition offenbar, dass jede Matrix durch eine Gerade repräsentiert wird, die die  $\infty$ -Gerade nicht trifft, und dass umgekehrt jede solche Gerade eine Matrix repräsentiert.

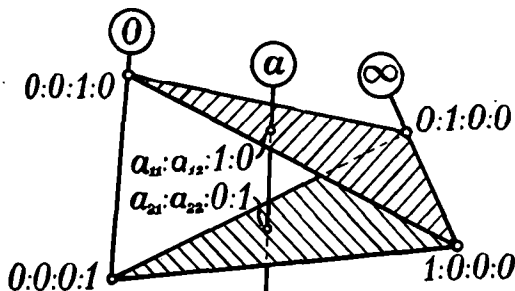


Fig. 1.

Für die Anschauung ist es bisweilen bequem die  $\infty$ -Gerade als unendlich fern zu denken, und zwar als die Horizontalgerade der unendlich fernen Ebene. Bei dieser Auffassung wird die Menge aller Matrizen auf die Menge aller eigentlichen, nicht-horizontalen Geraden abgebildet.

Die Verbindungsgerade der beiden Punkte

$$(3) \quad \begin{aligned} &x_1 : x_2 : x_3 : x_4 \text{ und} \\ &y_1 : y_2 : y_3 : y_4 \end{aligned}$$

repräsentiert die Matrix

$$(4) \quad \begin{pmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 y_4 - x_4 y_1}{x_3 y_4 - x_4 y_3} & \frac{x_2 y_4 - x_4 y_2}{x_3 y_4 - x_4 y_3} \\ \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{x_3 y_4 - x_4 y_3} & \frac{x_3 y_2 - x_2 y_3}{x_3 y_4 - x_4 y_3} \end{pmatrix}$$

unter der Voraussetzung, dass diese Matrix existiert, d. h. dass

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Denn wenn man die sechs Geradenkoordinaten sowohl für die Verbindungsgerade  $xy$  wie für den Repräsentanten der Matrix (4) bildet, so wird man sehen, dass Proportionalität besteht. — Analog sieht man auch folgendes ein:

*Die Schnittgerade der beiden Ebenen*

$$(5) \quad \begin{aligned} u_1 : u_2 : u_3 : u_4 \text{ und} \\ v_1 : v_2 : v_3 : v_4 \end{aligned}$$

repräsentiert die Matrix

$$(6) \quad - \begin{pmatrix} u_3 & v_3 \\ u_4 & v_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{u_2 v_3 - u_3 v_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1} & \frac{u_3 v_1 - u_1 v_3}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \\ \frac{u_2 v_4 - u_4 v_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1} & \frac{u_4 v_1 - u_1 v_4}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \end{pmatrix}$$

unter der Voraussetzung, dass diese Matrix existiert, d. h. dass

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

## § 2. Die Skalarfläche und die Teiler der Null.

*Die Repräsentanten der skalaren Matrizen*

$$s = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

bilden eine Regelfläche zweiter Ordnung, die (als Grenzfall) auch die  $\infty$ -Gerade umfasst. Wir nennen diese Fläche die **Skalarfläche**.

**Beweis:** Da die  $s$ -Gerade nach der Definition durch die beiden Punkte  $(s:0:1:0)$  und  $(0:s:0:1)$  festgelegt ist, so ist ein beliebiger Punkt  $x$  derselben von der Form:

$$\begin{aligned} (x_1 : x_2 : x_3 : x_4) &= \lambda_1 \cdot (s : 0 : 1 : 0) + \lambda_2 \cdot (0 : s : 0 : 1) \\ &= (\lambda_1 s : \lambda_2 s : \lambda_1 : \lambda_2). \end{aligned}$$

Dies ist also eine Parameterdarstellung der Skalarfläche nach den Parametern  $s$  und  $(\lambda_1 : \lambda_2)$ . Durch Elimination von diesen erhält man ihre Gleichung:

$$(7) \quad x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0,$$

woraus die Behauptung folgt.

Da die Erzeugenden der zweiten Schar die  $\infty$ -Gerade treffen, so repräsentieren sie keine Matrizen.

*Die  $a$ -Gerade und die  $b$ -Gerade treffen sich dann und nur dann, wenn die Differenz  $a - b$  Teiler der Null ist.*

**Beweis:** Dafür, dass sich die  $a$ -Gerade und die  $b$ -Gerade treffen, ist es offenbar notwendig und hinreichend, dass die beiden definierenden Punktpaare  $(a_{11} : a_{12} : 1 : 0)$ ,  $(a_{21} : a_{22} : 0 : 1)$  und  $(b_{11} : b_{12} : 1 : 0)$ ,  $(b_{21} : b_{22} : 0 : 1)$  in einer Ebene liegen, d. h. dass

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \\ b_{11} & b_{12} & 1 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich aber auf die folgende:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

die die Matrix  $a - b$  als Teiler der Null kennzeichnet.

Wenn wir insbesondere  $b = 0$  annehmen, so erhalten wir den Satz:

*Die Geraden, die die 0-Gerade treffen, repräsentieren die Teiler der Null.*

Und wenn wir  $b = \text{skalar} = \varrho = \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}$  setzen, so folgt:

*Die beiden (skalaren) Lösungen  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  der charakteristischen Gleichung*

$$(8) \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho \end{vmatrix} \equiv \varrho^2 - (a_{11} + a_{22})\varrho + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

*der Matrix  $a$  entsprechen den beiden Skalargeraden, die die  $a$ -Gerade treffen.*

§ 3. Die lineargebrochenen Matrizen-Transformationen.

Jede homographische Transformation des Raumes lässt sich sowohl als rechtsseitige wie als linksseitige linear-gebrochene Transformation<sup>1</sup> der Matrizen schreiben, und zwar entsprechen einander die homographische Transformation

$$(9) \quad \varrho \cdot (x_1^* x_2^* \mid x_3^* x_4^*) = (x_1 x_2 \mid x_3 x_4) \cdot \left( \begin{array}{cc|cc} p_{11} & p_{12} & r_{11} & r_{12} \\ p_{21} & p_{22} & r_{21} & r_{22} \\ \hline q_{11} & q_{12} & s_{11} & s_{12} \\ q_{21} & q_{22} & s_{21} & s_{22} \end{array} \right), \quad \varrho \neq 0,$$

$$(10) \quad \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \\ u_4^* \end{pmatrix} \cdot \sigma = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & R_{11} & R_{12} \\ P_{21} & P_{22} & R_{21} & R_{22} \\ \hline Q_{11} & Q_{12} & S_{11} & S_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} & S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \quad \sigma \neq 0,$$

wo

$$(11) \quad \left( \begin{array}{cc|cc} p_{11} & p_{12} & r_{11} & r_{12} \\ p_{21} & p_{22} & r_{21} & r_{22} \\ \hline q_{11} & q_{12} & s_{11} & s_{12} \\ q_{21} & q_{22} & s_{21} & s_{22} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{cc|cc} P_{11} & P_{12} & R_{11} & R_{12} \\ P_{21} & P_{22} & R_{21} & R_{22} \\ \hline Q_{11} & Q_{12} & S_{11} & S_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} & S_{21} & S_{22} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} \tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau \end{array} \right), \quad \tau \neq 0,$$

die rechtsseitige lineargebrochene Matrizen-Transformation

$$(12) \quad \xi^* = \frac{\xi p + q}{\xi r + s} = (\xi r + s)^{-1} \cdot (\xi p + q)$$

und die linksseitige lineargebrochene Matrizen-Transformation

$$(13) \quad \xi^* = \frac{S\xi - Q}{-R\xi + P} = (S\xi - Q) \cdot (-R\xi + P)^{-1}.$$

**Beweis:** 1°. Die beiden Punkte  $(\xi_{11} : \xi_{12} : 1 : 0)$  und  $(\xi_{21} : \xi_{22} : 0 : 1)$  der  $\xi$ -Geraden gehen bei (9) in die folgenden über:

$$\begin{aligned} \xi_{11} p_{11} + \xi_{12} p_{21} + q_{11} : \xi_{11} p_{12} + \xi_{12} p_{22} + q_{12} : \xi_{11} r_{11} + \xi_{12} r_{21} + s_{11} : \xi_{11} r_{12} + \xi_{12} r_{22} + s_{12}, \\ \xi_{21} p_{11} + \xi_{22} p_{21} + q_{21} : \xi_{21} p_{12} + \xi_{22} p_{22} + q_{22} : \xi_{21} r_{11} + \xi_{22} r_{21} + s_{21} : \xi_{21} r_{12} + \xi_{22} r_{22} + s_{22}, \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Bezeichnung nach E. Study: Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen, Math. Zeitschr. Bd. 18, S. 55 ff.

und die Verbindungsgerade von diesen ist nach (4) eben die durch (12) bestimmte  $\xi^*$ -Gerade.

2°. Die beiden Ebenen  $(-1:0:\xi_{11}:\xi_{21})$  und  $(0:-1:\xi_{12}:\xi_{22})$ , die nach (6) die  $\xi$ -Gerade bestimmen, gehen bei (10) in die folgenden über:

$$\begin{aligned} -P_{11} + R_{11}\xi_{11} + R_{12}\xi_{21} &: -P_{21} + R_{21}\xi_{11} + R_{22}\xi_{21} : \\ &: -Q_{11} + S_{11}\xi_{11} + S_{12}\xi_{21} : -Q_{21} + S_{21}\xi_{11} + S_{22}\xi_{21}, \\ -P_{12} + R_{11}\xi_{12} + R_{12}\xi_{22} &: -P_{22} + R_{21}\xi_{12} + R_{22}\xi_{22} : \\ &: -Q_{12} + S_{11}\xi_{12} + S_{12}\xi_{22} : -Q_{22} + S_{21}\xi_{12} + S_{22}\xi_{22}, \end{aligned}$$

und die Schnittgerade von diesen ist nach (6) eben die durch (13) bestimmte  $\xi^*$ -Gerade.

In den Formeln (12) und (13) wird im allgemeinen für gewisse Werte von  $\xi$  der Nenner Null oder Teiler der Null. Dann ist der Ausdruck unsinnig, und es gibt zu diesen Werten von  $\xi$  kein entsprechendes  $\xi^*$ . Dies bedeutet aber nur, dass die  $\xi$ -Gerade bei der entsprechenden homographischen Transformation in die  $\infty$ -Gerade oder eine Treffgerade derselben übergeht; eine solche Gerade repräsentiert ja keine Matrix.

Es kann unter Umständen bequem sein die  $\infty$ -Gerade und ihre Treffgeraden als Repräsentanten von uneigentlichen Matrizen anzusehen. Man erreicht dadurch, dass die lineargebrochenen Transformationen (12) und (13) umkehrbar eindeutig und singularitätenfrei werden. Man könnte diesen uneigentlichen Matrizen etwa als die Matrix Unendlich und die Teiler der Matrix Unendlich bezeichnen (vgl. Teiler der Null in § 2).

#### § 4. Die Summe und das Produkt.

Von einem beliebigen Punkt  $o$  (Fig. 2) der  $o$ -Geraden ziehen wir die Gerade  $A$ , die die  $a$ -Gerade und die  $\infty$ -Gerade trifft, und die Gerade  $B$ , die die  $b$ -Gerade und die  $\infty$ -Gerade trifft. Nachher verbinden wir die Treffpunkte  $b = (B, b)$  und  $p = (A, \infty)$  durch eine Gerade  $C$  und die Treffpunkte  $a = (A, a)$  und  $q = (B, \infty)$  durch eine Gerade  $D$ . Dann wird der sechste Eckpunkt  $r = (C, D)$  des entstandenen ebenen Vierseits  $ABCD$  ein Punkt der  $a + b$ -Geraden sein.

**Beweis:** Wir betrachten die Transformation

$$(14) \quad \xi^* = \xi + b = \frac{\xi \cdot 1 + b}{\xi \cdot 0 + 1} = \frac{1 \cdot \xi + b}{0 \cdot \xi + 1}.$$

Wenn man nach § 3 die entsprechende homographische Transformation in Punkt- und Ebenenkoordinaten aufschreibt, so wird man sofort sehen, dass die  $\infty$ -Gerade punktweise und ebenwise festbleibt. Es bleiben also insbesondere die Punkte  $p$  und  $q$  und die Ebene unseres Vierseits in Ruhe. — Da  $\xi=0$  in die Gleichung (14) eingesetzt  $\xi^*=b$  liefert, so geht die  $0$ -Gerade in die  $b$ -Gerade über. Hieraus folgt, dass der Punkt  $o$  in den Punkt  $b$  übergeht, und ferner, dass die Gerade  $A=(o, p)$  in die Gerade  $C=(b, p)$  übergeht. — Da  $\xi=a$  in (14) eingesetzt

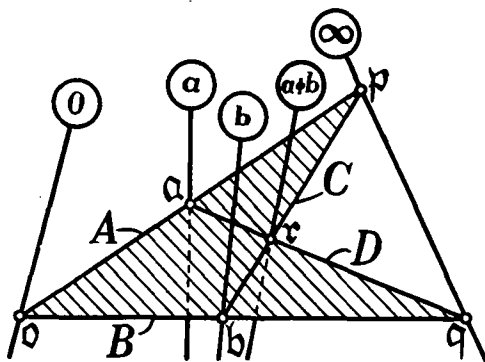


Fig. 2.

$\xi^*=a+b$  liefert, so geht die  $a$ -Gerade in die  $a+b$ -Gerade über. Und da die  $a$ -Gerade die Gerade  $A$  trifft, so muss die  $a+b$ -Gerade die entsprechende Gerade  $C$  treffen.

Eine ganz analoge Betrachtung der Transformation

$$\xi^* = \xi + a$$

wird zeigen, dass die  $a+b$ -Gerade die Gerade  $D$  treffen muss. Sie enthält mithin den Schnittpunkt  $t$  von  $C$  und  $D$ , w. z. b. w.

Wenn man von gewissen Spezialfällen, wo unsere Vierseitskonstruktion versagt, absieht, so werden offenbar zwei solche Konstruktionen genügen um die  $a+b$ -Gerade vollständig festzulegen.

Wenn wir die  $\infty$ -Gerade als unendlich fern und horizontal auffassen, so werden die beiden Vierseite horizontale Parallelogramme, und unsere Konstruk-

tion der Matrixsumme reduziert sich auf die Konstruktion von Vektorsummen in zwei beliebigen horizontalen Ebenen.

Von einem beliebigen Punkt  $e$  (Fig. 3) der 1-Geraden ziehen wir die Gerade  $A$ , die die  $a$ -Gerade und die  $o$ -Gerade trifft, und die Gerade  $B$ , die die  $b$ -Gerade und die  $\infty$ -Gerade trifft. Nachher verbinden wir die Treffpunkte  $v=(B, b)$  und  $o=(A, o)$  durch eine Gerade  $C$  und die Treffpunkte  $a=(A, a)$  und  $u=(B, \infty)$  durch eine Gerade  $D$ . Dann wird der sechste Eckpunkt  $p=(C, D)$  des entstandenen ebenen Vierseits  $ABCD$  ein Punkt der  $a \cdot b$ -Geraden sein.

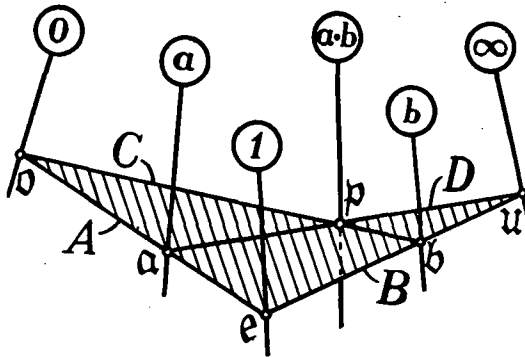


Fig. 3.

**Beweis:** Wir betrachten die Transformation

$$(15) \quad \xi^* = \xi \cdot b = \frac{|\xi \cdot b + o}{\xi \cdot o + 1} = \frac{1 \cdot \xi + o}{o \cdot \xi + b - 1}.$$

Wenn man nach § 3 die entsprechende homographische Transformation in Punkt- und Ebenenkoordinaten aufschreibt, so wird man sofort sehen, dass die  $o$ -Gerade punktweise und die  $\infty$ -Gerade ebenenweise festbleibt. Es bleiben also insbesondere der Punkt  $o$  und die Verbindungsebene  $(B, \infty)$  (die in der Figur nicht gezeichnet ist) in Ruhe. — Da  $\xi=1$  in die Gleichung (15) eingesetzt  $\xi^*=b$  liefert, so geht die 1-Gerade in die  $b$ -Gerade über. Hieraus folgt, dass der Punkt  $e$  in den Punkt  $v$  übergeht (weil die 1-Gerade und die  $b$ -Gerade die eben erwähnte in Ruhe bleibende Ebene  $(B, \infty)$  in diesen Punkten schneidet) und ferner, dass die Gerade  $A=(e, o)$  in die Gerade  $C=(v, o)$  übergeht. — Da  $\xi=a$  in (15) eingesetzt  $\xi^*=a \cdot b$  liefert, so geht die  $a$ -Gerade in die  $a \cdot b$ -Gerade über. Und da die  $a$ -Gerade die Gerade  $A$  trifft, so muss die  $a \cdot b$ -Gerade die entsprechende Gerade  $C$  treffen.



Wir betrachten demnächst die Transformation

$$\xi^* = a \cdot \xi = \frac{\xi \cdot 1 + 0}{\xi \cdot 0 + a^{-1}} = \frac{a \cdot \xi + 0}{0 \cdot \xi + 1}.$$

Wenn man nach § 3 die entsprechende homographische Transformation aufschreibt, so sieht man, dass die 0-Gerade ebenenweise und die  $\infty$ -Gerade punktweise festbleibt. — Eine ganz analoge Schlussweise wie oben wird dann zeigen, dass die  $a \cdot b$ -Gerade auch die Gerade  $D$  trifft.

Die  $a \cdot b$ -Gerade enthält mithin den Schnittpunkt  $p$  von  $C$  und  $D$ , w. z. b. w.

Um die  $a \cdot b$ -Gerade durch zwei Punkte festzulegen hat man natürlich zwei Vierseitskonstruktionen der beschriebenen Art auszuführen. — Es gibt allerdings gewisse Fälle wo dies Verfahren versagt.

### § 5. Entgegengesetzte, inverse und konjugierte Matrizen.

*Zwei Geraden, die entgegengesetzte Matrizen*

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad -a = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$$

repräsentieren, liegen harmonisch in bezug auf die 0-Gerade und die  $\infty$ -Gerade, d. h.: Jede Gerade, die die 0-Gerade, die  $\infty$ -Gerade und die  $a$ -Gerade trifft, trifft auch die  $-a$ -Gerade, und zwar so, dass die vier Treffpunkte harmonisch liegen.

**Beweis:** Wenn in der Fig. 2 die Punkte  $o$ ,  $a$  und  $p$  festgehalten werden, während sich  $r$  zu  $o$  nähert und  $q$  fortwährend auf der  $\infty$ -Geraden bleibt, so rückt  $b$  gegen den vierten harmonischen Punkt zu  $a$  in bezug auf  $o$  und  $p$ .

*Zwei Geraden, die inverse Matrizen*

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a^{-1} = \frac{1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

repräsentieren, liegen harmonisch in bezug auf die 1-Gerade und die  $-1$ -Gerade.

**Beweis:** Bei einer Transformation der Form

$$\xi^* = \frac{\xi + 1}{\xi - 1}$$

gehen die Matrizen  $1, -1, a$  und  $a^{-1}$  in bzw.  $\infty, 0, (a-1)^{-1}(a+1)$  und  $(a^{-1}-1)^{-1}(a^{-1}+1)$  über. Da aber die beiden letzten (wie eine einfache Rechnung zeigt) einander entgegengesetzt sind, so ist unsere Behauptung auf den vorigen Satz zurückgeführt.

*Zwei Geraden, die konjugierte Matrizen*

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{a} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

repräsentieren, sind die Polaren von einander in bezug auf die Skalarfläche.

**Beweis:** Zu den Punkten  $(a_{11}:a_{12}:1:0)$  und  $(a_{21}:a_{22}:0:1)$  der  $a$ -Geraden erhält man in bezug auf die Skalarfläche  $x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$  (vgl. § 2) die Polarebenen  $(0:-1:-a_{12}:a_{11})$  und  $(1:0:-a_{22}:a_{21})$ , und die Schnittgerade von diesen repräsentiert nach (6) die Matrix  $\tilde{a}$ .

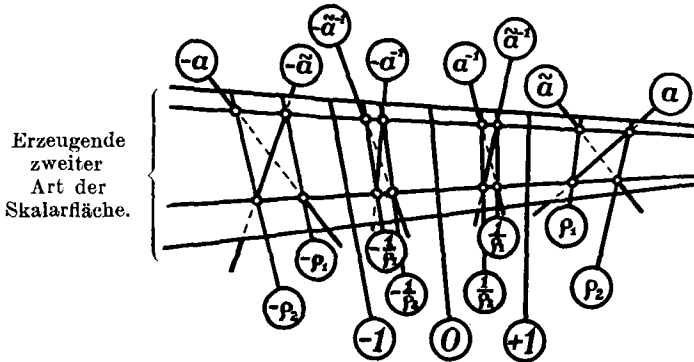


Fig. 4.

Aus diesen drei Sätzen leitet man leicht die folgende Übersicht ab:

*Im allgemeinen Fall, wo die  $a$ -Gerade die Skalarfläche in zwei getrennten Punkten schneidet, werden die Repräsentanten der acht Matrizen*

$$\begin{matrix} a & \tilde{a} & a^{-1} & \tilde{a}^{-1} \\ -a & -\tilde{a} & -a^{-1} & -\tilde{a}^{-1} \end{matrix}$$

*in bezug auf die Skalarfläche die in der Fig. 4 angegebene Lage haben. — Natürlich können dabei die Schnittpunkte mit der Skalarfläche sehr wohl imaginär sein, auch wenn die acht Geraden reell sind; die Figur ist nur schematisch aufzufassen.*

### § 6. Die Quaternionen.

Die zweireihigen Matrizen sind im komplexen Gebiet mit den Quaternionen äquivalent; denn wenn wir unter  $e_1, e_2, e_3$  und  $i$  die Quaternioneneinheiten und die imaginäre Einheit verstehen, so können wir

$$(16) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} - i \frac{a_{11} - a_{22}}{2} e_1 + \frac{a_{12} - a_{21}}{2} e_2 - i \frac{a_{12} + a_{21}}{2} e_3$$

setzen, was wohl A. CAYLEY<sup>1</sup> zuerst angegeben hat. Wir können folglich auch die Quaternionen und die Quaternionenrechnung im Geradenkontinuum des Raumes in derselben Weise veranschaulichen, wie wir für die Matrizen und die Matrizenrechnung auseinandergesetzt haben. Dabei ist aber zu bemerken, dass die reellen Quaternionen und die reellen Geraden einander nicht entsprechen auf Grund der imaginären Koeffizienten in (16).

Es ist bekannt, dass das Geradenkontinuum des Raumes

$$(17) \quad \begin{cases} X_{23} : X_{31} : X_{12} : X_{14} : X_{24} : X_{34}, \\ X_{23} \cdot X_{14} + X_{31} \cdot X_{24} + X_{12} \cdot X_{34} = 0 \end{cases}$$

im komplexen Gebiet mit dem Punktkontinuum

$$(18) \quad \begin{cases} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_6^2 = 0 \end{cases}$$

äquivalent ist. — Wenn wir nun unsere Repräsentation der Quaternionen auf dieses letztere übertragen, so wird sich zeigen, dass wir auf eine von E. STUDY<sup>2</sup> gefundene Darstellung des Kontinuums (18) durch die Quaternionen geführt werden.

Der Verfasser ist übrigens ursprünglich den entgegengesetzten Weg gegangen, indem er von der Studyschen Arbeit ausgegangen ist, hat aber schliesslich gefunden, dass eine selbständige Darstellung für den Leser bequemer ist.

<sup>1</sup> Coll. Works XII, S. 479, oder Journ. f. Math., Bd. 101, S. 209—213.

<sup>2</sup> Journ. f. Math., Bd. 157, S. 33—59.

