SUR LE CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES DÉFINIES.

PAR

RENÉ LAGRANGE

à DIJON.

Introduction.

La formule sommatoire d'Euler-Maclaurin est susceptible de deux applications essentielles et distinctes, qui sont le calcul approché d'une intégrale définie et la recherche, dans le calcul aux différences finies, de la somme d'une fonction. Ce n'est que dans ce second problème qu'intervient la propriété traduite par l'identité[1]

$$\triangle B_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

tandis que, dans la formule sommatoire, ce sont les formules

$$\frac{d\, B_n(x)}{dx} = B_{n-1}(x),$$

$$B_n(1) = B_n(0) = B_n = (-1)^n B_n$$

dont on a à tenir compte[2]. En particulier, le fait que les nombres de Bernoulli d'indice impair > 1 sont nuls est essentiel.

Or ces propriétés subsistent lorsqu'on multiplie la suite des polynômes de Bernoulli par une suite constante limitée

$$[\lambda_m]: \quad \lambda_{m,0}, 0, \; \lambda_{m,2}, 0, \ldots \lambda_{m,2k-2}, \; 0, \lambda_{m,2k}, 0 \ldots \qquad \lambda_{m,2k} = 0 \text{ pour } 2k > m.$$

---

[1] Cela suppose qu'on désigne par $B_n(x)$ ce que la plupart des auteurs désignent par $\dfrac{B_n(x)}{n!}$.

[2] Par exemple, cf. N. E. Nörlund: «Sur la «Somme» d'une fonction», p. 1—6 (Mémorial des Sc. Math. fasc. XXIV).

La suite des polynômes

$$B_{m,n}(x) = \sum_{2\nu=0}^{2\nu\leq m} \lambda_{m,2\nu}\, B_{n-2\nu}(x)$$

ainsi formés appartient à la classe des suites que j'ai appelées[1] «suites de polynômes bernoulliens d'interpolation», et la suite de leurs valeurs pour $x = 0$ et pour $x = 1$ a tous ses termes d'indice impair nuls à partir d'un certain rang.

Cette suite est fonction du nombre entier m et du choix de la suite $[\lambda_m]$, et fournit une formule sommatoire analogue à celle d'Euler-Maclaurin, pouvant servir à évaluer une intégrale définie à l'aide des valeurs prises par les dérivées de la fonction intégrée aux extrémités de l'intervalle d'intégration.

En examinant le genre d'approximation fournie par cette formule, on sera tout naturellement amené à lui imposer certaines conditions qui permettront, pour chaque valeur de m, de déterminer le facteur $[\lambda_m]$. On obtiendra ainsi les formules sommatoires que j'appellerai «spéciales», et dont la détermination et l'étude sont l'objet de ce travail.

Le chapitre I expose comment l'on peut généraliser la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin, et le problème auquel conduit la recherche de la meilleure approximation, pour une valeur donnée de m. Le chapitre II est consacré à la résolution de ce problème, c'est à dire à la détermination de la suite $[\lambda_m]$ et des nombres et polynômes correspondants.

Dans le chapitre III, la question est reprise à un point de vue moins synthétique. La formule sommatoire spéciale d'indice m et d'ordre n comporte en effet un développement dont les termes se partagent en deux groupes bien distincts. Le premier groupe est constitué par les m premiers termes, le deuxième par la somme de $n - 2m$ termes et du reste représenté par une certaine intégrale définie. Les termes qui sembleraient devoir occuper les rangs $m + 1, m + 2, \ldots 2m - 1$ entre ces deux groupes sont nuls dans la formule spéciale; il en résulte une coupure qui n'apparait pas dans la formule d'Euler, qui n'est autre que la formule sommatoire spéciale d'indice $m = 1$. La somme des termes du premier groupement représente alors la valeur de l'intégrale lorsqu'on substitue à la fonction intégrée le polynôme de degré $2m - 1$ qui coïncide aux extrémités de l'intervalle, ainsi que ses $m - 1$ premières dérivées, avec cette fonction et ses dérivés de même rang.[2] Le second groupe de termes représente l'erreur faite, et il suffit

[1] Cf. René Lagrange, «Mémoire sur les suites de polynômes», Acta math. t. 51, p. 258.

[2] Pour $m = 1$, cela revient à substituer la corde à l'arc, c'est à dire à évaluer l'intégrale par la méthode des trapèzes.

de faire $n = 2m - 1$ pour que sa valeur soit représentée par l'intégrale définie du reste seule. Or, sous cette forme particulière, cette formule est la formule de développement

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{(-1)^{\nu+1}\binom{m}{\nu}\left[\varphi^{(\nu-1)}(1) + (-1)^{\nu-1}\varphi^{(\nu-1)}(0)\right]}{2m(2m-1)\cdots(2m-\nu+1)} + \\ + \frac{(-1)^m}{(2m)!}\int_0^1 \frac{d^m[x^m(x-1)^m]}{dx^m}\varphi^{(m)}(x)\,dx$$

due à Darboux. Réciproquement, on peut développer cette dernière intégrale pour obtenir la formule sommatoire spéciale d'indice m et d'ordre $n > 2m - 1$, de la même façon que le développement de l'erreur fournie par la méthode des trapèzes conduit à la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin. On doit à Paul Lévy[1] un très intéressant procédé d'approximations successives pour effectuer ce développement, et imaginé justement par son auteur pour rattacher la formule d'Euler-Maclaurin à la méthode des trapèzes. C'est ce procédé que j'utilise au troisième chapitre de ce travail pour retrouver et étudier la formule sommatoire spéciale d'indice m, à partir de la formule de Darboux. Ce procédé permet de compléter l'étude des polynômes $B_{m,n}(x)$ et de certains nombres et polynômes qui s'y rattachent.

Enfin le dernier chapitre est consacré à l'étude du reste de la formule sommatoire spéciale et à quelques applications des valeurs majorantes trouvées pour ce reste.

CHAPITRE I.

Problème de l'évaluation approchée d'une intégrale définie.

1. Considérons une suite $[\lambda_m]$ dont les termes $\lambda_{m,n}$ sont constants et tels que $\lambda_{m,0} = 1$ et

$$\lambda_{m,n} = 0 \text{ pour } n \text{ impair ou } n \geq m.$$

m étant un nombre entier positif, on pourra supposer que le terme $\lambda_{m,n}$ dont l'indice n est la partie paire de $m-1$ $(n = 2k \leq m - 1 < 2k + 2)$ est essentiellement différent de zéro, sans quoi la suite se réduirait à une suite $[\lambda_{m'}]$ avec

[1] Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, p. 84—89.

$m' < m$. Avec les notations utilisées dans un mémoire antérieur[1], nous pourrons écrire

$$[\lambda_m] : \lambda_{m,0} = 1,\ 0,\ \lambda_{m,2},\ 0,\ \lambda_{m,4},\ \ldots,\ 0,\ \lambda_{m,2k},\ 0,\ \ldots \qquad 2k < m.$$

Soit d'autre part la suite newtonnienne réduite[2]

$$[1,0]' = \frac{[1,0]-1}{[1_1]} : 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \ldots$$

Le quotient de ces deux suites

$$(1) \qquad [B_m] = [\lambda_m] \cdot [1,0]'^{(-1)} : B_{m,0}, B_{m,1}, B_{m,2}, \ldots$$

est une nouvelle suite constante qui a le même caractère de généralité que $[\lambda_m]$.

Pour les valeurs particulières $m = 1$ ou 2, $[\lambda_1] = [\lambda_2]$ se réduit à son premier terme, et $[B_0] = [B_1]$ n'est rien autre que la suite $[B]$ des nombres de Bernoulli; en effet (1) s'écrit

$$[B] \cdot [1,0]' = [\lambda_0]$$

ou

$$(2) \qquad \begin{cases} B_0 = 1, \\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} B_{n-\nu} \frac{1}{(\nu+1)!} = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Par conséquent la suite $[B_m]$ la plus générale est le produit homogène

$$(3) \qquad [B_m] = [B] \cdot [\lambda_m]$$

de la suite $[\lambda_m]$ et de la suite de Bernoulli.

(3) s'écrit encore

$$(3') \qquad B_{m,n} = \sum_{k=0}^{2k \le m-1} \lambda_{m,2k} B_{n-2k};$$

si l'on se rappelle que les nombres B_n d'indice impair sont tous nuls, sauf $B_1 = -\frac{1}{2}$, on conclut de (3') que

---

[1] Cf. «Mémoire sur les suites de polynômes», Acta math. 51 (1928), p. 203—242.

[2] $(x, 0)_n = \frac{x^n}{n!}$, et $[x_1]$ est la suite élémentaire: $0, x, 0, 0, \ldots$

$$B_{m,\,2k+1} = -\frac{1}{2}\lambda_{m,\,2k},$$

et, en particulier, que les termes $B_{m,n}$ d'indice impair supérieur à m sont nuls.

2. Le produit homogène de la suite constante $[B_m]$ et de la suite newtonnienne $[x, 0]$ est une suite de polynômes bernoulliens d'interpolation[1]; cette suite

$$[B_m(x)] = [B_m] \cdot [x, 0] \tag{4}$$

est telle que l'on ait

$$[B_m(0)] = [B_m] \tag{5}$$

$$[B_m(x + y)] = [B_m(x)] \cdot [y, 0], \tag{6}$$

et enfin

$$\left[\frac{d\,B_m(x)}{dx}\right] = [B_m(x)]. \tag{7}$$

On déduit encore de (6) que

$$\begin{aligned}[B_m(x + y)] - [B_m(x)] &= [B_m(x)] \cdot [[y, 0] - 1] \\ &= [B_m(x)] \cdot [y, 0]' \cdot [y_1],\end{aligned} \tag{8}$$

où $[y, 0]'$ est la suite newtonnienne réduite

$$[y, 0]' = \frac{[y, 0] - 1}{[y_1]} : 1, \frac{y}{2!}, \frac{y^2}{3!}, \ldots$$

En divisant les deux membres de (8) par $y = [y_0]$, et faisant tendre y vers 0, on retrouve (7). Pour $y = 1$, (8) donne encore

$$\begin{aligned}[\Delta B_m(x)] = [B_m(x + 1)] - [B_m(x)] &= [B_m(x)] \cdot [1, 0]' \cdot [1_1] \\ &= [\lambda_m] \cdot [x, 0] \cdot [1_1] \\ &= [\lambda_m] \cdot [(x, 0)_{n-1}].\end{aligned} \tag{9}$$

En particulier,

$$B_{m,n}(1) - B_{m,n}(0) = \lambda_{m,\,n-1}. \tag{10}$$

Il résulte de (9) et de la nullité des $\lambda_{m,n}$ d'indice impair que $\Delta B_{m,n}(x)$ est un polynôme en x dont les termes sont de la parité de $n - 1$. En changeant

[1] loc. cit., p. 258.

x en $-x$, il vient donc

$$\triangle B_{m,n}(1-x) = B_{m,n}(-x) - B_{m,n}(1-x) = (-1)^n \triangle B_{m,n}(x),$$

et, par conséquent,

$$B_{m,n}(1-x) = (-1)^n B_{m,n}(x) + C^{\text{te}};$$

la dérivation des deux membres, compte tenu de (7), entraîne la même identité d'où la constante a disparu, ce qui donne

$$(11) \qquad B_{m,n}(1-x) = (-1)^n B_{m,n}(x).$$

En particulier, $B_{m,n}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ lorsque n est impair. Enfin, pour $x = 0$, (10) et (11) conduisent à l'identité

$$(12) \qquad ((-1)^n - 1) B_{m,n} = \lambda_{m,n-1}.$$

On retrouve ainsi, sans faire intervenir les propriétés connues des nombres de Bernoulli, la propriété des $B_{m,n}$ énoncée à la fin du paragraphe précédent.

La suite bernoullienne d'interpolation $[B_{m,n}(x)]$ possède donc quelques unes des propriétés essentielles des polynômes de Bernoulli, propriétés que traduisent (6), (7), (11). Quant à (9), elle correspond, sous une forme plus compliquée, à l'identité essentielle

$$\triangle B_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

que vérifient les polynômes de Bernoulli.

3. Ceci posé, désignons par $\overline{B}_{m,n}(x)$ la fonction périodique[1], de période 1, égale à $B_{m,n}(x)$ dans l'intervalle $0 \leq x < 1$. Elle est continue pour les valeurs non entières de x. Par contre, lorsque x est un nombre entier, il vient, grâce à (10),

$$(13) \qquad \overline{B}_{m,n}(x+0) - \overline{B}_{m,n}(x-0) = B_{m,n} - B_{m,n}(1) = -\lambda_{m,n-1},$$

de sorte que les seules fonctions $\overline{B}_{m,n}(x)$ qui sont discontinues pour les valeurs entières de x sont celles dont l'indice n est impair et inférieur à $m+1$. Enfin, il résulte de (11) que $\overline{B}_{m,n}(-x) = (-1)^n \overline{B}_{m,n}(x)$.

[1] Nous utilisons ici un raisonnement employé par N. E. Nörlund pour établir la formule sommatoire d'Euler et de Maclaurin. Cf. «Mémorial des Sciences Math.», fasc. XXIV: Sur la «Somme» d'une fonction.

Considérons maintenant une fonction $\varphi(x)$ admettant toutes les dérivées continues qui nous seront nécessaires, et formons l'intégrale

$$R_n = \omega^n \int_0^1 B_{m,n}(h-z)\,\varphi^{(n)}(x+\omega z)\,dz \qquad 0 \leq h \leq 1. \tag{14}$$

En supposant d'abord $0 < h < 1$, l'intégration par parties de (14) donne

$$R_n = [\omega^{n-1} \bar{B}_{m,n}(h-z)\,\varphi^{(n-1)}(x+\omega z)]_{h+0}^{1} +$$
$$+ [\omega^{n-1} \ddot{B}_{m,n}(h-z)\,\varphi^{(n-1)}(x+\omega z)]_0^{h-0} + R_{n-1};$$

en posant

$$\underset{\omega}{\triangle}\,\varphi(x) = \frac{\varphi(x+\omega)-\varphi(x)}{\omega},$$

on a donc, compte-tenu de (13),

$$R_n = \omega^n B_{m,n}(h) \underset{\omega}{\triangle} \varphi^{(n-1)}(x) - \lambda_{m,n-1}\,\omega^{n-1}\varphi^{(n-1)}(x+\omega h) + R_{n-1}. \tag{15}$$

La continuité des fonctions R_n, R_{n-1}, $B_{m,n}(h)$ et $\varphi^{(n-1)}(x)$ permet d'étendre cette identité à l'intervalle fermé $0 \leq h \leq 1$.

En intégrant par parties aussi souvent qu'il est possible, on aboutit enfin à l'expression

$$R_n = \sum_{\nu=1}^{n} \omega^\nu B_{m,\nu}(h) \underset{\omega}{\triangle} \varphi^{(\nu-1)}(x) - \sum_{r=0}^{2r \leq n-1} \lambda_{m,2r}\,\omega^{2r}\varphi^{(2r)}(x+\omega h) + R_0, \tag{16}$$

où l'on a tenu compte de la forme de la suite $[\lambda_m]$, et où

$$R_0 = \int_0^1 \varphi(x+\omega z)\,dz. \tag{17}$$

Nous avons ainsi obtenu une généralisation de la formule sommatoire d'Euler

$$\sum_{r=0}^{2r \leq n-1} \lambda_{m,2r}\,\omega^{2r}\varphi^{(2r)}(x+\omega h) = \int_0^1 \varphi(x+\omega z)\,dz + \sum_{\nu=1}^{n} \omega^\nu B_{m,\nu}(h) \underset{\omega}{\triangle} \varphi^{(\nu-1)}(x) - R_n; \tag{18}$$

pour $m = 1$ ou 2, (18) n'est rien autre que la formule sommatoire d'Euler, et, réciproquement, elle se déduit aisément de celle-ci.

Remarquons que, pour $n \geq m$, la somme au premier membre de (18) se réduit à $\sum_{r=0}^{2r \leq m-1}$. Plaçons-nous dans ce cas, et écrivons (18) sous la forme

$$(19) \quad \int_0^1 \varphi(x+\omega z)\,dz = \sum_{r=0}^{2r\leq m-1} \lambda_{m,2r}\,\omega^{2r}\,\varphi^{(2r)}(x+\omega h) - \sum_{\nu=1}^{n} \omega^\nu B_{m,\nu}(h) \underset{\omega}{\triangle} \varphi^{(\nu-1)}(x) + R_n;$$

cette identité fournit un moyen d'évaluer l'intégrale au premier membre en fonction des valeurs de $\varphi(x)$ et de ses $n-1$ premières dérivées aux extrémités de l'intervalle d'intégration, avec une erreur représentée par R_n.

4. Supposons que h soit nul; (19) peut s'écrire

$$\int_0^1 \varphi(x+\omega z)\,dz = \sum_{\nu=0}^{m-1} \omega^\nu \left[\lambda_{m,\nu}\,\varphi^{(\nu)}(x) - B_{m,\nu+1}\left(\varphi^{(\nu)}(x+\omega) - \varphi^{(\nu)}(x)\right)\right] -$$
$$- \sum_{\nu=m+1}^{n} \omega^\nu B_{m,\nu} \underset{\omega}{\triangle} \varphi^{(\nu-1)}(x) + R_n \qquad n \geq m,$$

la seconde somme au second membre disparaissant lorsque $n=m$. La formule (12) permet de ne conserver au second membre que des coefficients $B_{m,\nu}$; le crochet qui s'y trouve devient ainsi

$$B_{m,\nu+1}\left[\left((-1)^{\nu+1}-1\right)\varphi^{(\nu)}(x) + \varphi^{(\nu)}(x) - \varphi^{(\nu)}(x+\omega)\right] =$$
$$= - B_{m,\nu+1}\left[\varphi^{(\nu)}(x+\omega) + (-1)^\nu \varphi^{(\nu)}(x)\right].$$

Nous poserons

$$\underset{\omega}{\square}\,\varphi^{(\nu)}(x) = \frac{\varphi^{(\nu)}(x+\omega) + (-1)^\nu \varphi^{(\nu)}(x)}{\omega},$$

ce qui nous permettra de donner à notre dernière identité la forme

$$(20) \quad \int_0^1 \varphi(x+\omega z)\,dz = - \sum_{\nu=1}^{m} B_{m,\nu}\,\omega^\nu \underset{\omega}{\square}\,\varphi^{(\nu-1)}(x) - \sum_{2r\geq m+1}^{2r\leq n} B_{m,2r}\,\omega^{2r} \underset{\omega}{\triangle} \varphi^{(2r-1)}(x) + R_n,$$

avec

$$(21) \qquad R_n = \omega^n \int_0^1 \bar{B}_{m,n}(-z)\,\varphi^{(n)}(x+\omega z)\,dz.$$

Le second membre de (20) se compose de trois parties. La première somme ne contient que les dérivées de $\varphi(x)$ d'ordre inférieur à m; la suivante ne se compose, au contraire, que de dérivées d'ordre supérieur ou égal à m; le dernier terme est le reste.

Au lieu de considérer comme valeur approchée de l'intégrale au premier membre la somme des deux premières parties du second membre, l'erreur étant représentée par R_n, on peut évaluer cette intégrale en l'égalant seulement à la première partie, l'erreur étant alors représentée par l'ensemble de la somme suivante et de R_n. L'approximation ainsi envisagée peut être considérée comme d'autant meilleure que le développement

$$\varrho_m = - \sum_{2r \geq m+1}^{2r \leq n} B_{m,2r}\, \omega^{2r} \underset{\omega}{\triangle} \varphi^{(2r-1)}(x) + R_n$$

du reste commence par des puissances plus élevées de ω, supposé inférieur à 1 en valeur absolu.

Ainsi, on peut espérer améliorer l'approximation en accroissant m; mais, ce faisant, on introduit un plus grand nombre de termes dans l'expression de la valeur approchée

$$E_m = - \sum_{\nu=1}^{m} B_{m,\nu}\, \omega^{\nu} \underset{\omega}{\square} \varphi^{(\nu-1)}(x).$$

Par contre, on pourra améliorer l'approximation que fournit E_m, sans changer m, donc sans augmenter le nombre des termes dont se compose cette valeur approchée, en choisissant la base $[\lambda_m]$ de notre formule sommatoire de façon que les premiers des coefficients $B_{m,2r}$ d'indice $2r > m$ soient nuls. Le nombre des éléments essentiellement arbitraires dont se compose la suite $[\lambda_m]$ est la partie entière $\bar{m}$ de $\frac{m-1}{2}$. Par conséquent, on peut se proposer de choisir cette base de façon que les $\bar{m}$ premiers coefficients $B_{m,2r}$ d'indice $2r > m$ soient nuls, savoir

$$(22) \qquad \begin{cases} B_{m,m+1} = B_{m,m+3} = \cdots = B_{m,2m-2} = 0 & m \text{ impair,} \\ B_{m,m+2} = B_{m,m+4} = \cdots = B_{m,2m-2} = 0 & m \text{ pair.} \end{cases}$$

C'est le problème que nous allons résoudre dans le chapitre suivant. Nous utiliserons, dans ce but, la remarque suivante. Lorsqu'on applique la formule sommatoire (20) à un polynôme $Q(x)$ de degré $\leq 2m-1$, elle se réduit, pour la valeur $n = 2m$, à

$$\int_0^1 Q(x+\omega z)\,dz = -\sum_{\nu=1}^{m} B_{m,\nu}\,\omega^\nu \underset{\omega}{\square} Q^{(\nu-1)}(x) - \sum_{2r\geq m+1}^{2r\leq 2m-2} B_{m,2r}\,\omega^{2r} \underset{\omega}{\triangle} Q^{(2r-1)}(x),$$

car $Q^{(2m)}(x)=0$ et $Q^{(2m-1)}(x)=\mathrm{C}^{\mathrm{te}}$. Il résulte de là que les conditions (22) sont équivalentes à la validité de l'identité

$$(23)\qquad \int_0^1 \varphi(x+\omega z)\,dz = -\sum_{\nu=1}^{m} B_{m,\nu}\,\omega^\nu \underset{\omega}{\square} Q^{(\nu-1)}(x)$$

pour tout polynôme $Q(x)$ de degré $\leq 2m-1$. Ce sera le point de départ de la résolution du problème que nous nous sommes posé.

D'une manière générale, la base $[\lambda_m]$ étant ainsi choisie, si le polynôme $Q(x)$ de degré $\leq 2m-1$ et la fonction $\varphi(x)$ coïncident, ainsi que leurs dérivées d'ordre $1, 2, \ldots m-1$, aux extrémités $0, 1$ de l'intervalle d'intégration de z, c'est à dire pour les valeurs x et $x+\omega$ de leur argument, la valeur approchée E_m de $\int_0^1 Q(x+\omega z)\,dz$ est égale à

$$(24)\qquad E_m = \int_0^1 Q(x+\omega z)\,dz,$$

et l'erreur

$$(25)\qquad \varrho_m = \int_0^1 [\varphi(x+\omega z) - Q(x+\omega z)]\,dz$$

est égale à

$$(26)\qquad \varrho_m = -\sum_{2r=2m}^{2r\leq n} B_{m,2r}\,\omega^{2r} \underset{\omega}{\triangle} \varphi^{(2r-1)}(x) + R_n.$$

D'ailleurs cette dernière somme disparait lorsque n est inférieur à $2m$.

Ces formules fournissent une interprétation élémentaire de la valeur approchée E_m de l'intégrale (20). Cette valeur s'obtient en substituant à $\varphi(x)$ le polynôme de degré $\leq 2m-1$ qui coïncide, ainsi que ses $m-1$ premières dérivées, avec $\varphi(x)$ et ses dérivées de même ordre aux deux extrémités de l'intervalle $(x, x+\omega)$.

Il sera utile de qualifier de «spéciales» les formules sommatoires (20), et les suites $[B_m]$, $[\lambda_m]$ correspondantes qui satisferont à ces conditions.

CHAPITRE II.

Les formules sommatoires spéciales.

5. C'est un résultat classique qu'il existe toujours un polynôme et un seul, de degré $\leq 2m-1$, dont les dérivées d'ordre $0, 1, 2, \ldots m-1$ prennent des valeurs données en deux points donnés. C'est un cas limite de la formule d'interpolation de Lagrange. En voici une démonstration directe. En supposant que les deux points en question sont les points -1 et $+1$, ce qui ne restreint en rien la généralité, mettons le polynôme inconnu $Q(x)$ sous la forme très générale

$$(1) \qquad Q(x) = \sum_{i=0}^{2m-1} q_i (x+1)^i (x-1)^{2m-1-i}.$$

Il vient tout de suite

$$(2) \qquad Q(1) = 2^{2m-1} q_{2m-1}, \quad Q(-1) = -2^{2m-1} q_0,$$

de sorte que la connaissance de $Q(1)$ et $Q(-1)$ entraîne celle des coefficients extrêmes q_0 et q_{2m-1}. La dérivation de $Q(x)$ donne alors

$$(3) \qquad Q'(x) = \sum_{i=0}^{2m-2} q_i^{(1)} (x+1)^i (x-1)^{2m-2-i},$$

où

$$(4) \qquad q_i^{(1)} = (2m-1-i) q_i + (i+1) q_{i+1};$$

les valeurs de $Q'(1)$ et $Q'(-1)$ fournissent donc celles de $q_0^{(1)}$ et $q_{2m-2}^{(1)}$, et par conséquent celles de q_1 et q_{2m-2} puisqu'on connait déjà q_0 et q_{2m-1}. Observons même que q_1 et q_{2m-2} sont affectés de coefficients égaux à 1 dans les formules (4) qui permettent de les calculer. En raisonnant sur $Q'(x)$ comme on vient de faire sur $Q(x)$, et ainsi de suite, on formera successivement les dérivées

$$(5) \qquad Q^{(\nu)}(x) = \sum_{i=0}^{2m-1-\nu} q_i^{(\nu)} (x+1)^i (x-1)^{2m-1-\nu-i} \qquad \nu = 2, 3, \ldots m-1,$$

avec

$$(6) \qquad q_i^{(\nu)} = (2m-\nu-i) q_i^{(\nu-1)} + (i+1) q_{i+1}^{(\nu-1)};$$

la connaissance des valeurs $Q^{(\nu)}(1)$ et $Q^{(\nu)}(-1)$ entraîne la détermination de $q_0^{(\nu)}$ et $q_{2m-1-\nu}^{(\nu)}$; si l'on suppose que les valeurs antérieures à ν ont permis de connaître $q_0, q_1, \ldots q_{\nu-1}, q_0^{(1)}, q_1^{(1)}, \ldots q_{\nu-2}^{(1)}, \ldots q_0^{(\nu-2)}, q_1^{(\nu-2)}, q_0^{(\nu-1)}$, la connaissance de $q_0^{(\nu)}$ permet de remonter, par les formules analogues à (6), à $q_1^{(\nu-1)}, q_2^{(\nu-2)}, \ldots q_\nu$; de la même façon, on démontre par récurrence que l'on connait, à l'aide des formules (5) et (6) d'indice 0, 1, 2, ... ν, les coefficients $q_{2m-1}, q_{2m-2}, \ldots q_{2m-1-\nu}, q_{2m-2}^{(1)}, q_{2m-3}^{(1)}, \ldots q_{2m-1-\nu}^{(1)}, \ldots q_{2m-1-\nu}^{(\nu)}$. Pour $\nu = m-1$, tous les coefficients de $Q(x)$ sont ainsi déterminés, de manière unique, et cela quelles que soient les valeurs attribuées à ce polynôme et à ses dérivées d'ordre $\leq m-1$.

6. Ceci rappelé, écrivons maintenant ce polynôme $Q(x)$ sous la forme

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{2m-1} \binom{2m-1}{i} \mu_i x^{2m-1-i} \tag{7}$$

et évaluons l'intégrale $\int_{-1}^{+1} Q(x)\,dx$. On trouve immédiatement que

$$\int_{-1}^{+1} Q(x)\,dx = 2\sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m-1}{2k+1} \frac{\mu_{2k+1}}{2m-2k-1} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k+1} \mu_{2k+1}. \tag{8}$$

Cette intégrale s'évalue donc à l'aide des seuls coefficients μ_i d'indice impair, qu'il s'agit justement d'exprimer à l'aide des valeurs que prennent $Q(x)$ et ses dérivées aux extrémités de l'intervalle d'intégration. Or on a

$$Q^{(\nu-1)}(x) = (2m-1)(2m-2)\cdots(2m-\nu+1) \sum_{i=0}^{2m-\nu} \binom{2m-\nu}{i} \mu_i x^{2m-\nu-i},$$

et, par suite,

$$\underset{2}{\square}\, Q^{(\nu-1)}(-1) = \frac{Q^{(\nu-1)}(1) + (-1)^{\nu-1} Q^{(\nu-1)}(-1)}{2} = \tag{9}$$

$$= (2m-1)(2m-2)\cdots(2m-\nu+1) \sum_{k=0}^{2k \leq 2m-\nu-1} \binom{2m-\nu}{2k+1} \mu_{2k+1} \qquad \nu = 1, 2, \ldots m.$$

On verrait de même que les coefficients μ_i d'indice pair interviennent seuls dans les expressions de

$$(10) \qquad \frac{Q^{(\nu)}(1) - (-1)^\nu Q^{(\nu)}(-1)}{2} \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots m-1.$$

La donnée des valeurs des quantités (9) et (10) équivaut à la donnée des valeurs des dérivées $Q^{(\nu)}(1)$ et $Q^{(\nu)}(-1)$ ($\nu = 0, 1, \ldots m-1$); celle-ci déterminant le polynôme $Q(x)$, et cela de manière unique, on conclut de ce qui précède que le système des valeurs prises par les premiers membres de (9) détermine toujours les coefficients μ_{2k+1} ($k = 0, 1, \ldots, m-1$) de $Q(x)$, et cela de manière unique. Nous avons ainsi démontré que l'élimination de ces coefficients μ_{2k+1} est possible entre (8) et les équations (9); on obtient ainsi une relation de la forme

$$(11) \qquad m\int_{-1}^{+1} Q(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{A_{m,\nu}}{(2m-1)(2m-2)\cdots(2m-\nu+1)} \underset{2}{\square}\, Q^{(\nu-1)}(-1),$$

dont il s'agit de déterminer les coefficients $A_{m,\nu}$.

Le problème de cette détermination est équivalent au problème posé au § 4. D'ailleurs, la comparaison de (11) à la formule (23) Ch. I où l'on fait $x = -1$, $\omega = 2$ fournit, entre les $A_{m,\nu}$ et les coefficients $B_{m,\nu}$ cherchés, les relations simples

$$(12) \qquad 2^\nu B_{m,\nu} = -\frac{A_{m,\nu}}{2m(2m-1)\cdots(2m-\nu+1)} \qquad \nu = 1, 2, \ldots m.$$

7. La détermination des coefficients $A_{m,\nu}$ est une conséquence de la remarque que les coefficients des éléments inconnus μ_{2k+1} aux derniers membres de (8) et (9) se trouvent également dans les identités classiques

$$(13) \qquad \mathrm{ch}^\nu x\,\mathrm{sh}(2m-\nu)x = \sum_{k=0}^{2k\le 2m-\nu-1} \binom{2m-\nu}{2k+1} \mathrm{ch}^{2m-2k-1} x\,\mathrm{sh}^{2k+1} x \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots;$$

l'élimination des termes $\mathrm{ch}^{2m-2k-1} x\,\mathrm{sh}^{2k+1} x$ entre les $m+1$ premières équations (13) fournit donc l'identité

$$(14) \qquad \mathrm{sh}\,2mx = \sum_{\nu=1}^{m} A_{m,\nu}\,\mathrm{ch}^\nu x\,\mathrm{sh}(2m-\nu)x,$$

où les $A_{m,\nu}$ sont les coefficients cherchés. Nous sommes donc conduits à démontrer qu'il n'existe qu'une identité de la forme (14) et à trouver une pareille identité. Le second point ne présente aucune difficulté; en effet, élevons à la m^e puissance les deux membres de l'identité

$$1 = e^x (2 \operatorname{ch} x - e^x);$$

il vient

$$1 = e^{mx} (2 \operatorname{ch} x - e^x)^m$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} 2^\nu \operatorname{ch}^\nu x \, e^{(2m-\nu)x} (-1)^{m-\nu},$$

et l'identification des parties impaires des deux membres donne tout de suite

$$0 = \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} (-2)^\nu \operatorname{ch}^\nu x \operatorname{sh} (2m - \nu) x,$$

ou encore

$$\operatorname{sh} 2mx = - \sum_{\nu=1}^{m} \binom{m}{\nu} (-2)^\nu \operatorname{ch}^\nu x \operatorname{sh} (2m - \nu) x, \tag{15}$$

qui est bien de la forme (14).

Pour démontrer l'unité d'une identité de cette forme, changeons, par exemple, x en ix, de sorte que (14) devient

$$\sin 2mx = \sum_{\nu=1}^{m} A_{m,\nu} \cos^\nu x \sin (2m - \nu) x;$$

multiplions maintenant les deux membres par $\sin 2\alpha x$ et intégrons de 0 à π. En supposant que α est un nombre entier positif, il vient ainsi

$$\varepsilon_{m,\alpha} \pi = 2 \sum_{\nu=1}^{m} A_{m,\nu} \int_0^\pi \cos^\nu x \sin (2m - \nu) x \sin 2\alpha x \, dx, \tag{16}$$

où $\varepsilon_{m,\alpha} = 1$ ou 0 suivant que $\alpha = m$ ou $\alpha \neq m$. En remplaçant le produit des sinus au second membre par $\frac{1}{2}[\cos (2m - \nu - 2\alpha) x - \cos (2m - \nu + 2\alpha) x]$ et se rappelant la formule de Cauchy

$$\int_0^\pi \cos^\nu x \cos (2n - \nu) x \, dx = \frac{\pi \nu!}{2^\nu \Gamma(n+1) \Gamma(\nu - n + 1)},$$

(16) devient

$$\varepsilon_{m,\alpha} = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{A_{m,\nu}}{2^\nu} \left[\frac{\nu!}{\Gamma(m-\alpha+1)\Gamma(\nu-m+\alpha+1)} - \frac{\nu!}{\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(\nu-m-\alpha+1)} \right].$$

La première fraction entre crochets ne diffère de zéro que si ν est au moins égal à $m-\alpha$, et la deuxième est ici toujours nulle. Par conséquent, (16) se réduit à

$$(17) \qquad \sum_{\nu=1,\, m-\alpha}^{m} \frac{A_{m,\nu}}{2^\nu} \binom{\nu}{m-\alpha} = \varepsilon_{m,\alpha} \qquad \alpha = 1, 2, \ldots m.$$

Soient les $m-1$ équations d'indices $\alpha = 1, 2, \ldots m-1$ où sont considérées comme inconnus $\frac{A_{m,m-1}}{2^{m-1}}, \frac{A_{m,m-2}}{2^{m-2}}, \ldots \frac{A_{m,1}}{2}$; le déterminant de leurs coefficients se réduit au produit des éléments de sa diagonale principale, qui n'est pas nul, et par suite le système des équations (17) ne peut être qu'à solution unique ou incompatible; nous savons que l'incompatibilité est à écarter, et l'unité de la relation (14) est ainsi démontrée.

L'identification des coefficients de (14) et de (15) donne enfin

$$(18) \qquad A_{m,\nu} = -\binom{m}{\nu}(-2)^\nu.$$

8. La détermination des $B_{m,\nu}\,(\nu \leq m)$ et de la base $[\lambda_m]$ s'ensuit immédiatement. (12) donne en effet

$$(19) \qquad B_{m,\nu} = \binom{m}{\nu} \frac{(-1)^\nu}{2m(2m-1)\cdots(2m-\nu+1)} \qquad \nu = 1, 2, \ldots m,$$

et cette valeur convient encore pour $\nu = 0$, si l'on assimile alors à 1 le dénominateur

$$2m(2m-1)\cdots(2m-\nu+1) = \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(2m-\nu+1)}.$$

Il résulte ensuite de (12) ch. I que

$$(20) \qquad \lambda_{m,2n} = -2B_{m,2n+1} = \frac{2}{2m(2m-1)\cdots(2m-2n)}\binom{m}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2^n(2n+1)!}\,\frac{(m-n-1)(m-n-2)\cdots(m-2n)}{(2m-1)(2m-3)\cdots(2m-2n+1)} \qquad 2n < m.$$

On sait que les termes $B_{m,\nu}$ $(m < \nu < 2m)$ sont nuls. Par contre, le calcul des $B_{m,\nu}$ d'indice $\nu \geqq 2m$ ne conduit plus à des résultats aussi simples. Pourtant, il se présente des simplifications qu'il parait intéressant d'exposer, ce qui nous permettra simultanément de donner les expressions des premiers d'entre ces coefficients. (1) ch. 1 s'écrit en effet

$$\sum_{\nu=0}^{n} B_{m,\nu}\frac{1}{(n-\nu+1)!}=\lambda_{m,n},$$

donc pour les valeurs de $n \geq 2m$, compte tenu de

$$B_{m,\nu}=0 \qquad \nu=m+1, m+2, \ldots 2m-1,$$

il vient

$$\sum_{\nu=2m}^{n}\frac{B_{m,\nu}}{(n-\nu+1)!}=-\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m}{\nu}\frac{(-1)^\nu}{(n-\nu+1)!\,2m(2m-1)\cdots(2m-\nu+1)}.$$

Le premier membre ne contient que les coefficients $B_{m,\nu}$ inconnus et permettra de les calculer de proche en proche en donnant à n les valeurs successives $2m, 2m+1, \ldots$; mais ce qui fait l'intérêt de ces équations est la forme simple que l'on peut donner au second membre. La somme qui s'y trouve s'écrit en effet

$$\sum_{\nu=0}^{m}\frac{(-1)^\nu m!(2m-\nu)!}{(2m)!(m-\nu)!\,\nu!\,(n-\nu+1)!}=\frac{(m!)^2}{(2m)!(n+1)!}\sum_{\nu=0}^{m}\binom{n+1}{\nu}\binom{2m-\nu}{m-\nu}(-1)^\nu$$

$$=\frac{(m!)^2}{(2m)!(n+1)!}\sum_{\nu=0}^{m}\frac{-n-1}{-n-1+\nu}\binom{-n-1+\nu}{\nu}\binom{2m-\nu}{m-\nu},$$

cette dernière somme s'évalue immédiatement en appliquant l'identité de Jansen

$$\sum_{\nu=0}^{m}\frac{x}{x+\alpha\nu}\binom{x+\alpha\nu}{\nu}\binom{y-\alpha\nu}{m-\nu}=\binom{x+y}{m},$$

et il vient ainsi

$$(21) \qquad \sum_{\nu=2m}^{n}\frac{B_{m,\nu}}{(n-\nu+1)!}=-\frac{(m!)^2}{(2m)!(n+1)!}\binom{2m-n-1}{m}$$

$$=(-1)^{m+1}\frac{(m!)^2}{(2m)!(n+1)!}\binom{n-m}{m} \qquad n\geq 2m.$$

Enfin n'oublions pas que les $B_{m,\nu}$ inconnus d'indice ν impair sont nuls, ce qui nous permet d'écrire les seules relations (21) d'indice n pair. Le calcul des $B_{m,2\nu}$ $(\nu\geq m)$ pourra donc être effectué assez aisement à l'aide des équations successives

$$(22)\qquad \sum_{\nu=m}^{n} \frac{B_{m,2\nu}}{(2n-2\nu+1)!} = (-1)^{m+1} \frac{(m!)^2}{(2m)!\,(2n+1)!} \binom{2n-m}{m} \qquad n \geqq m.$$

On trouve ainsi, pour les premiers de ces coefficients, les valeurs

$$(23)\quad \begin{cases} B_{m,2m} = (-1)^{m+1} \dfrac{(m!)^2}{(2m)!\,(2m+1)!}, \\[2mm] B_{m,2m+2} = (-1)^{m+2} \dfrac{m!\,(m+1)!}{(2m)!\,(2m+3)!} \dfrac{m}{3\cdot 2!}, \\[2mm] B_{m,2m+4} = (-1)^{m+3} \dfrac{m!\,(m+2)!}{(2m)!\,(2m+5)!} \dfrac{m(7m+13)}{3\cdot 5\cdot 4!}, \\[2mm] B_{m,2m+6} = (-1)^{m+4} \dfrac{m!\,(m+3)!}{(2m)!\,(2m+7)!} \dfrac{m(31m^2+159m+188)}{3\cdot 7!}, \\[2mm] B_{m,2m+8} = (-1)^{m+5} \dfrac{m!\,(m+4)!}{(2m)!\,(2m+9)!} \dfrac{m(127m^3+1214m^2+3657m+3402)}{3\cdot 5\cdot 8!}, \\[2mm] B_{m,2m+10} = (-1)^{m+6} \dfrac{m!\,(m+5)!}{(2m)!\,(2m+11)!} \cdot \\[2mm] \qquad \cdot \dfrac{m(2555m^4+38426m^3+207301m^2+471046m+375216)}{3\cdot 11!}. \end{cases}$$

En particulier $m = 1$ ou $m = 2$ donnent

$$\begin{cases} B_2 = \dfrac{1}{3!}\dfrac{1}{2}, & B_4 = -\dfrac{1}{5!}\dfrac{1}{6}, & B_6 = \dfrac{1}{7!}\dfrac{1}{6}, \\[2mm] B_8 = -\dfrac{1}{9!}\dfrac{3}{10}, & B_{10} = \dfrac{1}{11!}\dfrac{5}{6}, & B_{12} = -\dfrac{1}{13!}\dfrac{691}{210}, \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} B_2 = \dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{6}, & B_4 = -\dfrac{1}{4!}\dfrac{1}{30}, & B_6 = -\dfrac{1}{6!}\dfrac{1}{42}, \\[2mm] B_8 = -\dfrac{1}{8!}\dfrac{1}{30}, & B_{10} = \dfrac{1}{10!}\dfrac{5}{66}, & B_{12} = -\dfrac{1}{12!}\dfrac{691}{2730}, \end{cases}$$

qui sont bien les nombres de Bernoulli, mais différant de ceux habituellement considérés par un facteur égal à l'inverse de la factorielle de l'indice. Remarquons à ce sujet que si l'on pouvait déterminer une loi simple pour la formation des $B_{m,2\nu}$, on en déduirait une loi de formation simple des nombres de Bernoulli eux-mêmes. La question se réduit à chercher la loi de formation du polynôme en m de degré $\nu - m - 1$ qui se trouve dans l'expression de $B_{m,2\nu}$, mais celle-ci ne parait pas aisée à trouver.

9. Notre formule interpolatoire exige encore la connaissance des polynômes $B_{m,\nu}(x)$. De même que les $2m$ premiers termes de la suite $[B_m]$, les $2m$ premiers de ces polynômes sont relativement simples; plus particulièrement, les expressions de $B_{m,m}(x)$ et $B_{m,2m}(x)$ sont remarquables. On a en effet

$$
\begin{aligned}
B_{m,2m}(x) &= \sum_{\nu=0}^{2m} B_{m,\nu} \frac{x^{2m-\nu}}{(2m-\nu)!} \\
&= \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-1)^\nu}{2m(2m-1)\cdots(2m-\nu+1)} \binom{m}{\nu} \frac{x^{2m-\nu}}{(2m-\nu)!} + B_{m,2m} \\
&= \frac{x^m}{(2m)!} \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} (-1)^\nu x^{m-\nu} + B_{m,2m},
\end{aligned}
$$

et enfin

$$B_{m,2m}(x) = \frac{x^m(x-1)^m}{(2m)!} + B_{m,2m}. \tag{24}$$

On en déduit que, pour $n < 2m$,

$$B_{m,n}(x) = \frac{1}{(2m)!} \frac{d^{2m-n}[x(x-1)]^m}{dx^{2m-n}} \qquad 0 \leq n \leqq 2m-1, \tag{25}$$

et, en particulier, que

$$B_{m,m}(x) = \frac{1}{(2m)!} \frac{d^m[x(x-1)]^m}{dx^m};$$

par conséquent

$$B_{m,m}\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{1}{2^m(2m)!} \frac{d^m(x^2-1)^m}{dx^m}$$

n'est rien autre que le polynôme de Legendre $P_m(x)$ à un facteur constant près; d'une manière précise, on a

$$B_{m,m}\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{m!}{(2m)!} P_m(x). \tag{26}$$

Signalons encore que les polynômes aux premiers membres de (25) sont hypergéométriques. En effet, si $0 \leq n \leq 2m-1$, il vient encore

$$B_{m,n}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{2m(2m-1)\cdots(2m-\nu+1)} \binom{m}{\nu} \frac{x^{n-\nu}}{(n-\nu)!}$$

$$= (-1)^n \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{2m(2m-1)\cdots(2m-n+\nu+1)} \binom{m}{n-\nu} \frac{x^\nu}{\nu!}$$

$$= \frac{(-1)^n \binom{m}{n}}{2m(2m-1)\cdots(2m-n+1)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-n)(-n+1)\cdots(-n+\nu-1)(2m-n+1)(2m-n+2)\cdots(2m-n+\nu)}{\nu!\,(m-n+1)(m-n+2)\cdots(m-n+\nu)} x^\nu$$

et par conséquent

$$(27) \qquad B_{m,n}(x) = B_{m,n} F(-n,\, 2m-n+1,\, m-n+1\,;\, x) \qquad 0 \leq n \leq 2m-1.$$

CHAPITRE III.

Les formules sommatoires spéciales (Suite).

10. Nous allons retrouver les résultats qui précèdent en nous plaçant à un point de vue différent. Considérons l'intégrale

$$(1) \qquad I_m = \int_{-1}^{+1} P_m(x)\, \varphi^{(m)}(x)\, dx,$$

où m est toujours un nombre entier positif, $\varphi^{(m)}(x)$ la dérivée d'ordre m d'une fonction $\varphi(x)$ possédant autant de dérivées continues qu'il sera nécessaire, et $P_m(x)$ le polynôme de Legendre de degré m. En intégrant m fois de suite par parties, il vient encore

$$I_m = \left[P_m(x)\, \varphi^{(m-1)}(x) - P'_m(x)\, \varphi^{(m-2)}(x) + \cdots + (-1)^{m-1} P_m^{(m-1)}(x)\, \varphi(x)\right]_{-1}^{+1} +$$
$$+ (-1)^m \int_{-1}^{+1} P_m^{(m)}(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Sachant que

$$P_m^{(n)}(1) = \frac{(m+n)(m+n-1)\cdots(m-n+1)}{2^n\, n!},$$

$$P_m^{(n)}(-1) = (-1)^{m+n} P_m^{(n)}(1),$$

$$P_m^{(m)}(x) = c^{te} = \frac{(2m)!}{2^m m!},$$

on a donc

$$I_m = 2 \sum_{\nu=1}^{m} (-1)^{m-\nu} P_m^{(m-\nu)}(1) \underset{2}{\square} \varphi^{(\nu-1)}(-1) + \frac{(-1)^m (2m)!}{2^m m!} \int_{-1}^{+1} \varphi(x)\, dx.$$

On extrait de là l'expression de la dernière intégrale définie

$$(2) \qquad \int_{-1}^{+1} \varphi(x)\, dx = -2 \sum_{\nu=1}^{m} \frac{(-1)^\nu 2^\nu}{2m(2m-1)\cdots(2m-\nu+1)} \binom{m}{\nu} \underset{2}{\square} \varphi^{(\nu-1)}(-1) + J_m,$$

avec

$$J_m = \frac{(-1)^m 2^m m!}{(2m)!} I_m.$$

On retrouve tout naturellement les coefficients «spéciaux» $B_{m,\nu}$ d'indice $\nu \leq m$. D'ailleurs, il suffit de remplacer x par $-1 + 2z$ pour que (2) prenne la forme

$$(2') \qquad \int_{0}^{1} \varphi(-1 + 2z)\, dz = -\sum_{\nu=1}^{m} \frac{(-1)^\nu 2^\nu}{2m(2m-1)\cdots(2m-\nu+1)} \binom{m}{\nu} \underset{2}{\square} \varphi^{(\nu-1)}(-1) + J_m$$

avec

$$J_m = \frac{(-1)^m 2^m m!}{(2m)!} \int_{0}^{1} P_m(-1 + 2z)\, \varphi^{(m)}(-1 + 2z)\, dz,$$

à rapprocher de la formule (20) ch. I, où l'on fait $x = -1$, $\omega = 2$, $n = m$. Il est bien clair que la seule restriction effective est celle qui concerne la valeur de n. Mais n'oublions pas que les coefficients au second membre de (20) ch. I ne sont pas nécessairement des coefficients $B_{m,\nu}$ «spéciaux». Enfin, en remplaçant, dans (2'), $\varphi(-1 + 2z)$ par $\varphi(z)$, il viendra encore

$$(3) \qquad \int_{0}^{1} \varphi(x)\, dx = -\sum_{\nu=1}^{m} \frac{(-1)^\nu}{2m(2m-1)\cdots(2m-\nu+1)} \binom{m}{\nu} \underset{1}{\square} \varphi^{(\nu-1)}(0) + J_m,$$

avec

$$(4) \qquad J_m = \frac{(-1)^m}{(2m)!} \int_0^1 \frac{d^m [x(x-1)]^m}{dx^m} \varphi^{(m)}(x)\,dx.$$

On peut transformer J_m à l'aide de m nouvelles intégrations par parties; en remarquant que les dérivées d'ordre $m-1$, $m-2$, ... 1, 0 de $x^m(x-1)^m$ s'annulent aux deux extrémités de l'intervalle d'intégration, il vient ainsi

$$(5) \qquad J_m = R_{2m} = \int_0^1 \frac{x^m (x-1)^m}{(2m)!} \varphi^{(2m)}(x)\,dx.$$

Ce résultat exprime que la formule interpolatoire (2) est une formule «spéciale». L'unité d'une formule de cette sorte pour chaque valeur de m ayant été démontrée au § 6, les coefficients au second membre de (2) sont les coefficients «spéciaux» $B_{m,\nu}$ $(1 \leq \nu \leq m)$, de sorte que nous pouvons considérer les calculs de ce paragraphe comme un nouveau mode de détermination de ces coefficients. Cette formule n'est d'ailleurs, sous cette forme, qu'un cas particulier d'une formule sommatoire due à Darboux[1].

11. Quoi qu'il en soit, nous n'avons retrouvé jusqu'ici que les $2m$ premiers coefficients spéciaux $B_{m,\nu}$. Les suivants vont apparaitre, ainsi que les polynômes correspondants, en développant le reste R_{2m} suivant un procédé dû à Paul Lévy[2]. Remarquons que, le polynôme au second membre de (5) ayant un signe constant, la formule de la moyenne généralisée permet d'écrire

$$R_{2m} = \varphi^{(2m)}(\xi) \int_0^1 \frac{x^m (x-1)^m}{(2m)!}\,dx \qquad 0 < \xi < 1.$$

Posons

$$(6) \qquad \int_0^1 \frac{x^m (x-1)^m}{(2m)!}\,dx = \frac{(-1)^m (m!)^2}{(2m)!\,(2m+1)!} = -B_{m,2m},$$

[1] Journal de Math. (3) II (1876), p. 296. Cf. également Whittaker and Watson: A course of Modern Analysis, p. 125.

[2] loc. cit.

sans nous préoccuper pour l'instant de la signification attribuée précédemment à cette notation. D'autre part, on a

$$\int_0^1 \varphi^{(2m)}(x)\,dx = \Delta\,\varphi^{(2m-1)}(0) = \varphi^{(2m)}(\xi') \qquad 0 < \xi' < 1;$$

on est ainsi conduit à adopter, pour valeur approchée de R_{2m} l'expression

$$(7) \qquad K_{2m} = -B_{m,2m}\,\Delta\,\varphi^{(2m-1)}(0) = -B_{m,2m}\int_0^1 \varphi^{(2m)}(x)\,dx,$$

l'erreur

$$(8) \qquad R_{2m+1} = R_{2m} - K_{2m}$$

étant alors représentée par l'intégrale

$$(9) \qquad R_{2m+1} = \int_0^1 \left[\frac{x^m(x-1)^m}{(2m)!} + B_{m,2m}\right]\varphi^{(2m)}(x)\,dx.$$

Nous sommes ainsi amenés tout naturellement à considérer le polynôme

$$(10) \qquad B_{m,2m}(x) = \frac{x^m(x-1)^m}{(2m)!} + B_{m,2m},$$

de valeur moyenne nulle dans l'intervalle (0, 1) et tel que l'on ait

$$(11) \qquad B_{m,2m}(1) = B_{m,2m}(0) = B_{m,2m};$$

enfin, (9) s'écrit

$$(9') \qquad R_{2m+1} = \int_0^1 B_{m,2m}(x)\,\varphi^{(2m)}(x)\,dx.$$

Ce polynôme $B_{m,2m}(x)$ n'a pas un signe constant dans l'intervalle (0, 1), mais deux intégrations par parties suffisent pour exprimer R_{2m+1} par une intégrale sur laquelle on pourra raisonner comme on a fait sur (5). Pour cela, nous poserons

$$(12) \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{x} B_{m,2m}(x)\,dx = B_{m,2m+1}(x),$$

puis

$$\int_0^x B_{m,\,2m+1}(x)\,dx = D_{m,\,2m+2}(x). \tag{13}$$

Le polynôme $B_{m,\,2m}(x)$ étant symétrique par rapport à la valeur $x = \frac{1}{2}$, $B_{m,\,2m+1}(x)$ est symétrique gauche; en outre, il résulte de (6) que

$$B_{m,\,2m+1}(1) = -B_{m,\,2m+1}(0) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^m (x-1)^m}{(2m)!}\,dx + \frac{1}{2} B_{m,\,2m} = 0.$$

Par conséquent, le polynôme $D_{m,\,2m+2}(x)$ est une fonction paire de $x - \frac{1}{2}$, et tel que

$$D_{m,\,2m+2}(0) = D_{m,\,2m+2}(1) = 0.$$

Ceci posé, il vient, à l'aide de deux intégrations par parties successives,

$$\begin{aligned} R_{2m+1} &= -\int_0^1 B_{m,\,2m+1}(x)\,\varphi^{(2m+1)}(x)\,dx \\ &= \int_0^1 D_{m,\,2m+2}(x)\,\varphi^{(2m+2)}(x)\,dx. \end{aligned}$$

Nous poserons encore, afin d'unifier l'écriture,

$$R_{2m+1} = R_{2m+2} = \int_0^1 D_{m,\,2m+2}(x)\,\varphi^{(2m+2)}(x)\,dx, \tag{14}$$

et nous allons voir que le polynôme au dernier membre a un signe constant dans l'intervalle (0, 1). Remarquons tout d'abord que $B_{m,\,2m}$ est du signe de $(-1)^{m+1}$, avec

$$0 < (-1)^{m+1} B_{m,\,2m} < \frac{1}{2^{2m}(2m)!}. \tag{15}$$

Nous pouvons alors représenter les variations des 3 polynômes $B_{m,\,2m}(x)$, $B_{m,\,2m+1}(x)$, $D_{m,\,2m+2}(x)$ dans le tableau

x	0				$\frac{1}{2}$				1	
		$-$		$\nearrow$	$+$	$\searrow$		$-$		m pair
$B_{m,\,2m}(x)$	$B_{m,\,2m}$		0		$\frac{(-1)^m}{2^{2m}(2m)!}+B_{m,\,2m}$		0		$B_{m,\,2m}$	
		$+$		$\searrow$	$-$	$\nearrow$		$+$		m impair
		$\searrow$	$-$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+$	$\searrow$		m pair
$B_{m,\,2m+1}(x)$	0				0				0	
		$\nearrow$	$+$	$\searrow$		$\searrow$	$-$	$\nearrow$		m impair
			$\searrow$		$-$		$\nearrow$			m pair
$D_{m,\,2m+2}(x)$	0								0	
			$\nearrow$		$+$		$\searrow$			m impair.

La propriété annoncée est ainsi vérifiée, et nous voyons même que le signe constant de $D_{m,2m+2}(x)$ est celui de $(-1)^{m+1}$. En raisonnant sur l'intégrale (14) comme on a fait sur (5), nous poserons

$$\int_0^1 D_{m,\,2m+2}(x)\,dx = -B_{m,\,2m+2}, \tag{16}$$

puis

$$B_{m,\,2m+2}(x) = D_{m,\,2m+2}(x) + B_{m,\,2m+2}, \tag{17}$$

$$B_{m,\,2m+3}(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} B_{m,\,2m+2}(x)\,dx, \tag{18}$$

$$D_{m,\,2m+4}(x) = \int_0^x B_{m,\,2m+3}(x)\,dx. \tag{19}$$

Grâce à deux intégrations par parties successives, il viendra alors

$$R_{2m+2} = \int_0^1 B_{m,2m+2}(x)\,\varphi^{(2m+2)}(x)\,dx - B_{m,2m+2}\,\Delta\,\varphi^{(2m+1)}(0)$$

$$= \int_0^1 D_{m,2m+4}(x)\,\varphi^{(2m+4)}(x)\,dx - B_{m,2m+2}\,\Delta\,\varphi^{(2m+1)}(0).$$

On posera

$$K_{2m+2} = -B_{m,2m+2}\,\Delta\,\varphi^{(2m+1)}(0) = -B_{m,2m+2}\int_0^1 \varphi^{(2m+2)}(x)\,dx,$$

(20) $$R_{2m+3} = R_{2m+4} = \int_0^1 D_{m,2m+4}(x)\,\varphi^{(2m+4)}(x)\,dx,$$

de sorte que l'on aura

$$R_{2m} = K_{2m} + K_{2m+2} + R_{2m+4}.$$

Pour démontrer que $D_{m,2m+4}(x)$ a un signe constant dans l'intervalle (0, 1), il suffit de raisonner comme pour $D_{m,2m+2}(x)$, après avoir vérifié que $B_{m,2m+2}$ satisfait à une double inégalité analogue à (15). Or il résulte de la variation de $B_{m,2m}(x)$ que, dans l'intervalle (0, 1), on a

$$|B_{m,2m}(x)| < \frac{1}{2^{2m}(2m)!};$$

(12) entraîne donc l'inégalité

$$|B_{m,2m+1}(x)| < \frac{\left|x-\frac{1}{2}\right|}{2^{2m}(2m)!};$$

par conséquent

$$|D_{m,2m+2}(x)| \leq \left|D_{m,2m+2}\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{1}{2^{2m}(2m)!}\int_0^{\frac{1}{2}}\left|x-\frac{1}{2}\right|dx$$

$$= \frac{1}{2^{2m+3}(2m)!}.$$

On déduit enfin immédiatement de (16), compte tenu du signe connu de $D_{m,2m+2}(x)$, que

$$0 < (-1)^m B_{m,2m+2} < \frac{1}{2^{2m+3}(2m)!}.$$

Signalons encore que cette étude des variations des trois polynômes $B_{m,2m+2}(x)$, $B_{m,2m+3}(x)$, $D_{m,2m+4}(x)$ montre que $B_{m,2m+2}(x)$ s'annule deux fois dans l'intervalle $(0, 1)$, que $B_{m,2m+3}(x)$ s'annule seulement pour les 3 valeurs $x = 0, \frac{1}{2}, 1$, et enfin que $D_{m,2m+4}(x)$, symétrique par rapport à $x = \frac{1}{2}$, ne s'annule qu'aux extrémités de l'intervalle.

D'une manière générale, supposons que nous ayons obtenu le développement

$$R_{2m} = K_{2m} + K_{2m+2} + \cdots + K_{2m+2\nu-2} + R_{2m+2\nu}, \tag{21}$$

avec

$$K_{2m+2n} = -B_{m,2m+2n} \triangle \varphi^{(2m+2n-1)}(0) \qquad n = 0, 1, \ldots \nu - 1, \tag{22}$$

et

$$R_{2m+2\nu-1} = R_{2m+2\nu} = \int_0^1 D_{m,2m+2\nu}(x)\, \varphi^{(2m+2\nu)}(x)\, dx; \tag{23}$$

supposons en outre que $D_{m,2m+2\nu}(x)$ est un polynôme en x, de degré $2m + 2\nu$, symétrique par rapport à $x = \frac{1}{2}$, et admettant le tableau des variations suivant

x	0		$\frac{1}{2}$		1	
		$\nearrow$	$+$	$\searrow$		$m + \nu$ pair
$D_{m,2m+2\nu}(x)$	0				0	
		$\searrow$	$-$	$\nearrow$		$m + \nu$ impair,

avec

$$0 < (-1)^{m+\nu} D_{m,2m+2\nu}\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2^{2\overline{m+3\nu}}(2m)!} \tag{24}$$

Nous poserons alors

$$\int_0^1 D_{m,2m+2\nu}(x)\, dx = -B_{m,2m+2\nu}, \tag{25}$$

$$B_{m,\,2m+2\nu}(x) = D_{m,\,2m+2\nu}(x) + B_{m,\,2m+2\nu}, \tag{26}$$

$$B_{m,\,2m+2\nu+1}(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} B_{m,\,2m+2\nu}(x)\,dx, \tag{27}$$

et enfin

$$D_{m,\,2m+2\nu+2}(x) = \int_{0}^{x} B_{m,\,2m+2\nu+1}(x)\,dx. \tag{28}$$

On vérifie tout de suite que

$$0 < (-1)^{m+\nu} B_{m,2m+2\nu} < (-1)^{m+\nu} D_{m,2m+2\nu}\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2^{2m+3\nu}(2m)!}, \tag{29}$$

que $B_{m,2m+2\nu}(x)$ est une fonction paire de $x - \frac{1}{2}$ de valeur moyenne nulle dans $(0, 1)$, que $B_{m,2m+2\nu+1}(x)$ est une fonction impaire et $D_{m,2m+2\nu+2}(x)$ une fonction paire de cet argument; ce sont d'ailleurs des polynômes dont le degré est égal au second indice, et leurs variations dans l'intervalle $(0, 1)$ sont représentées dans le tableau

x	0		$\frac{1}{2}$		1	
	$-$	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	$-$	$m+\nu$ pair
$B_{m,2m+2\nu}(x)$	$B_{m,2m+2\nu}$	0	$D_{m,2m+2\nu}\left(\frac{1}{2}\right) + B_{m,2m+2\nu}$	0	$B_{m,2m+2\nu}$	
	$+$	$\searrow$	$-$	$\nearrow$	$+$	$m+\nu$ impair
		$\searrow$ $-$ $\nearrow$		$\nearrow$ $+$ $\searrow$		$m+\nu$ pair
$B_{m,2m+2\nu+1}(x)$	0		0		0	
		$\nearrow$ $+$ $\searrow$		$\searrow$ $-$ $\nearrow$		$m+\nu$ impair
		$\searrow$		$\nearrow$		$m+\nu+1$ impair
$D_{m,2m+2\nu+2}(x)$	0		$D_{m,2m+2\nu+2}\left(\frac{1}{2}\right)$		0	
		$\nearrow$		$\searrow$		$m+\nu+1$ pair.

Ce dernier polynôme varie donc de la même façon que $D_{m,\,2m+2\nu}(x)$, et le maximum de sa valeur absolue vérifie la double inégalité analogue à (24)

$$0 < (-1)^{m+\nu+1} D_{m,\,2m+2\nu+2}\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2^{2m+3\nu+3}(2m)!};$$

ce dernier fait résulte en effet des inégalités successives

$$|B_{m,\,2m+2\nu}(x)| < \frac{1}{2^{2m+3\nu}(2m)!},$$

$$|B_{m,\,2m+2\nu+1}(x)| < \frac{\left|x-\frac{1}{2}\right|}{2^{2m+3\nu}(2m)!},$$

et enfin

$$\left|D_{m,\,2m+2\nu+2}\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{1}{2^{2m+3\nu}(2m)!}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)dx = \frac{1}{2^{2m+3\nu+3}(2m)!}.$$

Ce procédé récurrent de formation des polynômes $B_{m,\,2m+2\nu}(x)$, $B_{m,\,2m+2\nu+1}(x)$, $D_{m,\,2m+2\nu+2}(x)$ fournit donc des groupes de trois polynômes dont les tableaux de variation sont les mêmes, avec conservation de la triple inégalité (29). En outre leurs définitions et leurs propriétés permettent de transformer l'expression (23) de $R_{2m+2\nu}$ comme nous avons fait pour R_{2m}; en prenant pour valeur approchée, grâce à la constance du signe de $D_{m,\,2m+2\nu}(x)$, l'expression

$$K_{2m+2\nu} = -B_{m,\,2m+2\nu}\int_0^1 \varphi^{(2m+2\nu)}(x)\,dx = -B_{m,\,2m+2\nu}\,\Delta\,\varphi^{(2m+2\nu-1)}(0),$$

il vient

$$R_{2m+2\nu} = K_{2m+2\nu} + R_{2m+2\nu+1},$$

avec

$$R_{2m+2\nu+1} = \int_0^1 B_{m,\,2m+2\nu}(x)\,\varphi^{(2m+2\nu)}(x)\,dx,$$

et deux intégrations par parties successives, compte tenu de ce que $B_{m,\,2m+2\nu+1}(x)$ et $D_{m,\,2m+2\nu+2}(x)$ s'annulent aux extrémités de l'intervalle (0, 1), donnent

$$R_{2m+2\nu+1} = -\int_0 B_{m,\,2m+2\nu+1}(x)\,\varphi^{(2m+2\nu+1)}(x)\,dx$$

$$= R_{2m+2\nu+2} = \int_0^1 D_{m,\,2m+2\nu+2}(x)\,\varphi^{(2m+2\nu+2)}(x)\,dx.$$

On aura donc de nouveau un développement de R_{2m} tout à fait semblable à (21), où ν serait remplacé par $\nu + 1$. Nous pourrons donc écrire

$$R_{2m} = -\sum_{2r=2m}^{2n} B_{m,\,2r}\,\triangle\,\varphi^{(2r-1)}(0) + R_{2n+1} \tag{30}$$

avec

$$R_{2n+1} = \int_0^1 B_{m,\,2n}(x)\,\varphi^{(2n)}(x)\,dx = -\int_0^1 B_{m,\,2n+1}(x)\,\varphi^{(2n+1)}(x)\,dx \tag{31}$$

$$= R_{2n+2} = \int_0^1 D_{m,\,2n+2}(x)\,\varphi^{(2n+2)}(x)\,dx.$$

12. Ceci établi, portons l'expression (30) de $R_{2m} = J_m$ dans la formule interpolatoire (3). Celle-ci prend la forme

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = -\sum_{\nu=1}^{m} B_{m,\nu}\,\underset{1}{\Box}\,\varphi^{(\nu-1)}(0) - \sum_{2r=2m}^{2n} B_{m,\,2r}\,\triangle\,\varphi^{(2r-1)}(0) + R_{2n+2}, \tag{32}$$

où nous savons déjà que les $B_{m,\nu}$ appartenant à la première somme au second membre sont les coefficients «spéciaux» introduits aux chapitres précédents. D'ailleurs, prenons pour $\varphi(x)$ un polynôme arbitraire de degré $2n - 1$, et appliquons lui cette formule interpolatoire (32), ainsi que la formule (20) Ch. I où l'on remplacerait x par 0, ω par 1 et n par $2n$; l'identification des deux seconds membres exige l'identité de tous les coefficients $B_{m,\nu}$ au second membre de (32) avec les coefficients spéciaux introduits par les autres méthodes. Les nouveaux polynômes $B_{m,\nu}(x)\,(\nu \geq 2m)$ sont également identiques à ceux désignés déjà par cette notation, puisque leur suite possède la double propriété

$$(33)\qquad \begin{cases} B_{m,\nu}(0) = B_{m,\nu} & \nu = 2m,\, 2m+1, \ldots, \\ \dfrac{dB_{m,\nu}(x)}{dx} = B_{m,\nu-1}(x) & \nu = 2m+1,\, 2m+2, \ldots, \end{cases}$$

et qu'il y a identité, d'après (10), entre les deux premiers polynômes $B_{m,2m}(x)$ de ces deux suites. Remarquons que dans ce chapitre, les polynômes $B_{m,\nu}(x)$ d'indice ν inférieur à $2m$ ne sont pas intervenus, mais il suffit de prolonger les égalités (33) vers les indices inférieurs à $2m$ pour retrouver ces polynômes ainsi que les coefficients $B_{m,\nu}$ correspondants. En outre, nous avons mis en évidence que le polynôme $B_{m,2m+2n}(x)$ est tel que

$$(34)\qquad B_{m,2m+n}(x) - B_{m,2m+n} \quad (n > 0)$$

a un signe constant dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, et est une fonction paire ou impaire de $x - \frac{1}{2}$ suivant que n est lui même pair ou impair. Mais cette propriété ne subsiste pas pour les polynômes

$$B_{m,2m-n}(x) = \frac{d^n}{dx^n} B_{m,2m}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \frac{x^m (x-1)^m}{(2m)!} \qquad n = 1, 2, \ldots 2m.$$

13. Proposons-nous maintenant de préciser les expressions des polynômes (34), et, en particulier, celles des nombres $B_{m,2m+2n}$, $D_{m,2m+2n}\left(\frac{1}{2}\right)$, $B_{m,2m+2n}\left(\frac{1}{2}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Nous poserons

$$\begin{cases} D_{m,2m+2n}\left(\dfrac{1}{2}\right) = D_{m,2m+2n}, \\ B_{m,2m+2n}\left(\dfrac{1}{2}\right) = E_{m,2m+2n}, \end{cases}$$

de sorte que l'on a

$$E_{m,2m+2n} = D_{m,2m+2n} + B_{m,2m+2n}.$$

Tous ces polynômes ont été définis à partir du polynôme initial

$$\begin{aligned} B_{m,2m}(x) &= \frac{x^m (x-1)^m}{(2m)!} + B_{m,2m} \\ &= \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-1)^{m-\nu} \binom{m}{\nu}}{(2m)!\, 2^{2m-2\nu}} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2\nu} + B_{m,2m}. \end{aligned}$$

On en déduit tout d'abord que

$$B_{m,\,2m+1}(x) = \int_0^{x-\frac{1}{2}} B_{m,\,2m}\left(\frac{1}{2}+z\right) dz$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}}{(2m)!\,2^{2m-2\nu}(2\nu+1)}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2\nu+1} + B_{m,\,2m}\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

et

$$D_{m,\,2m+2}(x) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}}{(2m)!\,2^{2m-2\nu}(2\nu+1)(2\nu+2)}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2\nu+2} +$$

$$+ \frac{B_{m,\,2m}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + D_{m,\,2m+2}.$$

$D_{m,\,2m+2}$ est alors donné par $D_{m,\,2m+2}(0) = 0$, c'est à dire par

$$0 = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}}{(2m)!\,2^{2m+2}(2\nu+1)(2\nu+2)} + \frac{B_{m,\,2m}}{2^3} + D_{m,\,2m+2}, \tag{35}$$

et ensuite (16) fournit

$$B_{m,\,2m+2} = -\sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}}{(2m)!\,2^{2m+2}(2\nu+1)(2\nu+2)(2\nu+3)} - \frac{B_{m,\,2m}}{2^2\cdot 3!} - D_{m,\,2m+2}. \tag{36}$$

L'élimination de $D_{m,\,2m+2}$ entre ces deux dernières équations donne alors

$$B_{m,\,2m+2} = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}}{(2m)!\,2^{2m+2}(2\nu+1)(2\nu+3)} + \frac{B_{m,\,2m}}{2\cdot 3!}, \tag{37}$$

tandis que (36) s'écrit encore

$$E_{m,\,2m+2} = -\sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}}{(2m)!\,2^{2m+2}(2\nu+1)(2\nu+2)(2\nu+3)} - \frac{B_{m,\,2m}}{2^2\cdot 3!}. \tag{38}$$

On peut alors former

$$(39)\qquad B_{m,\,2m+2}(x) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}}{(2m)!\,2^{2m-2\nu}(2\nu+1)(2\nu+2)}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2\nu+2} + \\ + \frac{B_{m,\,2m}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2} + E_{m,\,2m+2}.$$

Pour rendre l'écriture plus homogène, nous conviendrons d'écrire

$$E_{m,\,2m} = B_{m,\,2m}.$$

Supposons alors que nous ayons obtenu, d'une manière générale, l'expression suivante de $B_{m,\,2m+2r-2}\,(r>1)$

$$(40)\qquad B_{m,\,2m+2r-2}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{E_{m,\,2m+2r-2-2\nu}}{(2\nu)!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2\nu} + \\ + \sum_{\nu=0}^{m}\frac{(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2r-2+2\nu}}{(2m)!\,2^{2m-2\nu}(2\nu+1)(2\nu+2)\cdots(2\nu+2r-2)}$$

et montrons qu'elle est encore valable pour $B_{m,\,2m+2r}(x)$.

Il vient en effet

$$(41)\qquad B_{m,\,2m+2r-1}(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} B_{m,\,2m+2r-2}(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{E_{m,\,2m+2r-2-2\nu}}{(2\nu+1)!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2\nu+1} \\ + \sum_{\nu=0}^{m}\frac{(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2r-1+2\nu}}{(2m)!\,2^{2m-2\nu}(2\nu+1)(2\nu+2)\cdots(2\nu+2r-1)},$$

puis

$$(42)\qquad D_{m,\,2m+2r}(x) = D_{m,\,2m+2r} + \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{E_{m,\,2m+2r-2-2\nu}}{(2\nu+2)!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2\nu+2} \\ + \sum_{\nu=0}^{m}\frac{(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2r+2\nu}}{(2m)!\,2^{2m-2\nu}(2\nu+1)(2\nu+2)\cdots(2\nu+2r)}.$$

Ajoutons $B_{m,\,2m+2r}$ aux deux membres, et adjoignons à la première somme au second membre le terme $B_{m,\,2m+2r}+D_{m,\,2m+2r}=E_{m,\,2m+2r}$; en substituant ν à $\nu+1$ dans cette somme, on obtient enfin

$$(43)\qquad B_{m,\,2m+2r}(x) = \sum_{\nu=0}^{r} \frac{E_{m,\,2m+2r-2\nu}}{(2\nu)!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2\nu} + \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2r+2\nu}}{(2m)!\,2^{2m-2\nu}(2\nu+1)(2\nu+2)\cdots(2\nu+2r)},$$

qui est bien de la forme (40). Cette formule est donc générale, et détermine les polynômes $B_{m,\,2m+2r}(x)$ dès que l'on sait déterminer les nombres $E_{m,\,2m+2r}$. La formule (42) définit $D_{m,\,2m+2r}(x)$ pour toutes les valeurs positives de r en fonction de ces mêmes nombres et de $D_{m,\,2m+2r}$. Pour déterminer ceux-ci, écrivons (16) et $D_{m,\,2m+2r}(0)=0$; on déduit ainsi de (42) que

$$(44)\qquad B_{m,\,2m+2r} = -D_{m,\,2m+2r} - \sum_{\nu=1}^{r}\frac{E_{m,\,2m+2r-2\nu}}{(2\nu+1)!\,2^{2\nu}} - \sum_{\nu=0}^{m}\frac{(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}}{(2m)!\,2^{2m+2r}(2\nu+1)(2\nu+2)\cdots(2\nu+2r+1)},$$

$$(45)\qquad 0 = D_{m,\,2m+2r} + \sum_{\nu=1}^{r}\frac{E_{m,\,2m+2r-2\nu}}{(2\nu)!\,2^{2\nu}} + \sum_{\nu=0}^{m}\frac{(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}}{(2m)!\,2^{2m+2r}(2\nu+1)(2\nu+2)\cdots(2\nu+2r)};$$

la première de ces équations fournit une relation récurrente définissant les $E_{m,\,2m+2\nu}$; en faisant passer le terme $-D_{m,\,2m+2r}$ au premier membre, il vient en effet

$$(46)\qquad E_{m,\,2m+2r} = -\sum_{\nu=1}^{r}\frac{E_{m,\,2m+2r-2\nu}}{(2\nu+1)!\,2^{2\nu}} - \sum_{\nu=0}^{m}\frac{(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}}{(2m)!\,2^{2m+2r}(2\nu+1)(2\nu+2)\cdots(2\nu+2r+1)},$$

que l'on peut encore écrire

$$(46')\qquad \sum_{\nu=0}^{r}\frac{E_{m,\,2m+2r-2\nu}}{(2\nu+1)!\,2^{2\nu}} = -\sum_{\nu=0}^{m}\frac{(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}}{(2m)!\,2^{2m+2r}(2\nu+1)(2\nu+2)\cdots(2\nu+2r+1)}.$$

L'élimination de $D_{m,2m+2r}$ entre (44) et (45) définit $B_{m,2m+2r}$ en fonction des nombres $E_{m,2m+2\nu}$, et l'on a

$$(47)\qquad B_{m,2m+2r} = \sum_{\nu=1}^{r} \frac{2\nu E_{m,2m+2r-2\nu}}{(2\nu+1)!\,2^{2\nu}} + \\ + \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}(2\nu+2r)}{(2m)!\,2^{2m+2r}(2\nu+1)(2\nu+2)\cdots(2\nu+2r+1)}.$$

Enfin (45) définit les nombres $D_{m,2m+2r}$ à l'aide des $E_{m,2m+2\nu}$, mais l'on sait d'ailleurs que $D_{m,2m+2r} = E_{m,2m+2r} - B_{m,2m+2r}$.

14. Etant donné l'importance des nombres $B_{m,2m+2r}$, il est intéressant de déduire de ces identités une formule de récurrence ne contenant point d'éléments intermédiaires. Il s'agit d'éliminer les nombres $E_{m,2m+2\nu}$ entre l'équation (47) et les équations (46′) d'indice $1, 2, \ldots r-1$. Or cette élémination se fait aisément en utilisant les nombres de Bernoulli. Pour simplifier l'écriture, nous désignerons par K_{2r} et J_{2r} les dernières sommes écrites dans (46′) et (47), de sorte que les r équations entre lesquelles l'élimination doit se faire s'écrivent

$$(46'')\qquad \sum_{\nu=0}^{s} \frac{E_{m,2m+2\nu}}{(2s-2\nu+1)!\,2^{2s-2\nu}} = -K_{2s} \qquad s = 1, 2, \ldots r-1,$$

$$\sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{(2r-2\nu)E_{m,2m+2\nu}}{(2r-2\nu+1)!\,2^{2r-2\nu}} = B_{m,2m+2r} - J_{2r}$$

écrivons encore cette dernière équation

$$\sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{E_{m,2m+2\nu}}{(2r-2\nu+1)!\,2^{2r-2\nu}} = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{E_{m,2m+2\nu}}{(2r-2\nu)!\,2^{2r-2\nu}} + J_{2r} - B_{m,2m+2r},$$

ou mieux, sous la forme plus symétrique

$$(47')\qquad \sum_{\nu=0}^{r} \frac{E_{m,2m+2\nu}}{(2r-2\nu+1)!\,2^{2r-2\nu}} = \sum_{\nu=0}^{r} \frac{E_{m,2m+2\nu}}{(2r-2\nu)!\,2^{2r-2\nu}} + J_{2r} - B_{m,2m+2r}.$$

Ceci posé, multiplions les r équations (46″) et (47′) par les coefficients respectifs $B_{2r-2s}(s = 1, 2, \ldots r-1, r)$, et ajoutons les. Il vient

$$\sum_{s=1}^{r}\sum_{\nu=0}^{s}\frac{B_{2r-2s}E_{m,\,2m+2\nu}}{(2s-2\nu+1)!\,2^{2s-2\nu}}=\sum_{\nu=0}^{r}\frac{E_{m,\,2m+2\nu}}{(2r-2\nu)!\,2^{2r-2\nu}}-B_{m,\,2m+2r}+J_{2r}-\sum_{s=1}^{r-1}B_{2r-2s}K_{2s},$$

ou encore, après addition aux deux membres de $B_{2r}E_{m,\,2m}=B_{2r}B_{m,\,2m}$,

$$\sum_{s=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{s}\frac{B_{2r-2s}E_{m,\,2m+2\nu}}{(2s-2\nu+1)!\,2^{2s-2\nu}}=\sum_{\nu=0}^{r}\frac{E_{m,\,2m+2\nu}}{(2r-2\nu)!\,2^{2r-2\nu}}+B_{2r}B_{m,\,2m}-B_{m,\,2m+2r}+J_{2r}-\sum_{s=1}^{r-1}B_{2r-2s}K_{2s}. \tag{48}$$

La double somme au premier membre s'écrit

$$\sum_{\nu=0}^{r}\frac{E_{m,\,2m+2\nu}}{2^{2r-2\nu}}\sum_{s=\nu}^{r}\frac{B_{2r-2s}\,2^{2r-2s}}{(2s-2\nu+1)!}=\sum_{\nu=0}^{r}\frac{E_{m,\,2m+2\nu}}{2^{2r-2\nu}}\sum_{s=0}^{r-\nu}\frac{B_{2s}\,2^{2s}}{(2r-2\nu-2s+1)!}$$

Cette dernière somme se réduit à l'unité pour $\nu=r$; pour $\nu<r$, elle s'écrit

$$\sum_{s=0}^{r-\nu}\frac{B_{2s}\,2^{2s}}{(2r-2\nu-2s+1)!}=\sum_{k=0}^{2r-2\nu}\frac{B_k\,2^k}{(2r-2\nu-k+1)!}-\frac{2B_1}{(2r-2\nu)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{2r-2\nu}\frac{B_k\,2^k}{(2r-2\nu-k+1)!}+\frac{1}{(2r-2\nu)!};$$

or des formules de Nörlund[1] nous apprennent que

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k\,2^k}{(n-k+1)!}=2^{n+1}\left[B_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)-B_{n+1}\right]=2\left(1-2^{n+1}\right)B_{n+1}; \tag{49}$$

par conséquent, pour $\nu<r$,

$$\sum_{s=0}^{r-\nu}\frac{B_{2s}\,2^{2s}}{(2r-2\nu-2s+1)!}=2\left(1-2^{2r-2\nu+1}\right)B_{2r-2\nu+1}+\frac{1}{(2r-2\nu)!}$$

$$=\frac{1}{(2r-2\nu)!},$$

[1] «Mémoire sur les polynômes de Bernoulli», Acta math., tome 43 (1920), p. 136—189.

l'égalité du premier et du dernier membre subsistant d'ailleurs pour $\nu = r$. On voit ainsi que le premier membre de (48) est égal à la première somme au second membre, et il reste l'identité remarquable

$$B_{m,\,2m+2r} - B_{2r} B_{m,\,2m} = J_{2r} - \sum_{s=1}^{r-1} B_{2r-2s} K_{2s},$$

ou encore, en explicitant le second membre,

$$(50) \qquad B_{m,\,2m+2r} - B_{2r} B_{m,\,2m} = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}}{(2m)!\, 2^{2m+2r}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{(2\nu+1)(2\nu+2)\cdots(2\nu+2r)} - \sum_{s=0}^{r-1} \frac{B_{2s}\, 2^{2s}}{(2\nu+1)(2\nu+2)\cdots(2\nu+2r-2s+1)} \right\}.$$

La quantité entre accolade peut être mise sous une forme plus simple. Remarquons en effet que pour $r \geq 1$, elle s'écrit

$$(2\nu)! \left\{ \frac{1}{(2\nu+2r)!} - \sum_{k=0}^{2r-1} \frac{B_k\, 2^k}{(2\nu+2r-k+1)!} + \frac{2B_1}{(2\nu+2r)!} \right\},$$

et par conséquent

$$-(2\nu)! \sum_{k=0}^{2r-1} \frac{B_k\, 2^k}{(2\nu+2r-k+1)!};$$

d'ailleurs la formule (49) de Nörlund permet de lui donner encore la forme

$$-(2\nu)! \sum_{k=0}^{2\nu+2r} \frac{B_k\, 2^k}{(2\nu+2r-k+1)!} + (2\nu)! \sum_{k=2r}^{2\nu+2r} \frac{B_k\, 2^k}{(2\nu+2r-k+1)!} =$$

$$= -2(2\nu)!\,(1-2^{2\nu+2r+1}) B_{2\nu+2r+1} + (2\nu)! \sum_{k=2r}^{2\nu+2r} \frac{B_k\, 2^k}{(2\nu+2r-k+1)!} =$$

$$= (2\nu)! \sum_{k=0}^{2\nu} \frac{B_{2r+k}\, 2^{2r+k}}{(2\nu-k+1)!}.$$

En définitive, (50) s'écrit encore

$$(51) \qquad B_{m,\,2m+2r} - B_{2r} B_{m,\,2m} = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}(2\nu)!}{(2m)!\, 2^{2m}} J_{2\nu,\,2r}$$

avec

$$(52) \qquad J_{2\nu,\,2r} = -\frac{1}{2^{2r}}\sum_{k=0}^{2r-1}\frac{B_k\, 2^k}{(2\nu+2r-k+1)!} = \sum_{k=0}^{2\nu}\frac{B_{2r+k}\, 2^k}{(2\nu-k+1)!} \qquad r \geq 1.$$

15. Ces identitités ne peuvent pas être considérées comme pratiques pour calculer les nombres $B_{m,\,2m+2r}$ puisqu'elles font intervenir les nombres de Bernoulli, dont l'expression est inconnue, et des sommes pour lesquelles on ne connait point non plus d'expression simple. Le seul procédé pratique dont nous disposons est toujours celui exposé au § 8. Pourtant il est intéressant de comparer ce que donnent les deux procédés pour les premières valeurs de r. Je me contenterai de faire le calcul pour $r=1$; les valeurs suivantes de r ne fournissant que des résultats qui se déduisent aisément du premier. Pour $r=1$, les deux premières égalités (23) donnent au premier membre de (51) la valeur

$$B_{m,\,2m+2} - B_2 B_{m,\,2m} = \frac{(-1)^m m!\,(m+1)!\,m}{6\,(2m)!\,(2m+3)!} + \frac{(-1)^m (m!)^2}{12\,(2m)!\,(2m+1)!}$$
$$= \frac{(-1)^m ((m+1)!)^2}{2\,(2m)!\,(2m+3)!};$$

on a donc l'identité

$$\sum_{\nu=0}^{m}\frac{(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}}{(2m)!\,2^{2m+2}(2\nu+1)(2\nu+3)} = \frac{(-1)^m((m+1)!)^2}{2\,(2m)!\,(2m+3)!}$$

ou encore

$$\sum_{\nu=0}^{m}\frac{(-1)^{\nu}\binom{m}{\nu}2}{(2\nu+1)(2\nu+3)} = \frac{((m+1)!)^2\,2^{2m+2}}{(2m+3)!}$$

Le premier membre s'écrit encore

$$\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{\nu}\binom{m}{\nu}\left(\frac{1}{2\nu+1}-\frac{1}{2\nu+3}\right) =$$
$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{m}\frac{(-1)^{\nu}}{2\nu+1}\left[\binom{m}{\nu}+\binom{m}{\nu-1}\right] - \frac{(-1)^m}{2m+3}$$

$$1+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{(-1)^\nu\binom{m+1}{\nu}}{2\nu+1}+\frac{(-1)^{m+1}}{2m+3}=\sum_{\nu=0}^{m+1}\frac{(-1)^\nu\binom{m+1}{\nu}}{2\nu+1},$$

et notre identité prend enfin, après le changement de m en $m-1$, la forme remarquable

$$\sum_{\nu=0}^{m}\frac{(-1)^\nu\binom{m}{\nu}}{2\nu+1}=\frac{(m!)^2 2^{2m}}{(2m+1)!}=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m+1)} \tag{53}$$

On peut étendre cette identité aux valeurs non entières de m, et la rattacher ainsi à des développements en série de Newton.

Posons $m=x-1$. La fonction au second membre de (53) s'écrit

$$\frac{2^{2x-2}\,\Gamma(x)^2}{\Gamma(2x)^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)},$$

de sorte que, pour les valeurs entières de $x\geq 1$, (53) peut s'écrire

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{2\nu+1}\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-\nu)}{\nu!}. \tag{54}$$

Or la fonction au premier membre est une fonction de la variable complexe x holomorphe dans le demi-plan $\Re(x)>0$, son pôle le plus à droite dans le plan de x étant l'origine; en outre, sa valeur asymptotique à l'infini du demi-plan d'holomorphie est de l'ordre de $x^{-\frac{1}{2}}$, ou, en posant $x=re^{i\theta}$, de $r^{-\frac{1}{2}}$. Il résulte alors d'un théorème de Carlson, précisé par Nörlund[1], que cette fonction est développable dans le demi plan en question en série de Newton, les coefficients de cette série étant déterminés par les valeurs que prend la fonction en question pour les valeurs entières et positives de x. Cette détermination est unique, donc l'identité des deux membres de (54) pour les valeurs entières de $x\geq 1$ entraîne leur identité pour toutes les valeurs de x de partie réelle >0. On vérifie d'ailleurs immédiatement que la série au second membre de (54) converge absolument pour $\Re(x)>0$.

[1] Cf. N. E. Nörlund: Leçons sur les séries d'interpolation, p. 131.

Ce développement en série est un cas particulier de la formule générale

$$B(\alpha, x) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(x)}{\Gamma(x+\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu+\alpha} \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-\nu)}{\nu!}; \tag{55}$$

en effet pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$; d'autre part la fonction au premier membre est holomorphe dans le demi-plan $\Re(x) > 0$, et sa valeur asymptotique est, dans ce demi-plan, de l'ordre de $x^{-\alpha}$, c'est-à-dire de l'ordre de $r^{-\Re(\alpha)}$ si $x = re^{i\theta}$. On sait donc qu'elle est développable suivant la série de Newton

$$B(\alpha, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overset{\nu}{\triangle} B(\alpha, 1) \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-\nu)}{\nu!},$$

au moins dans le demi-plan $\Re(x) > 0$, $\Re(x) > \frac{1}{2} - \Re(\alpha)$. Or on vérifie tout de suite que

$$\triangle B(\alpha, x) = -B(\alpha+1, x)$$

donc

$$\overset{\nu}{\triangle} B(\alpha, x) = (-1)^\nu B(\alpha+\nu, x),$$

et

$$\overset{\nu}{\triangle} B(\alpha, 1) = (-1)^\nu \frac{\Gamma(\nu+\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)} = \frac{(-1)^\nu}{\nu+\alpha},$$

ce qui démontre (55). La série au second membre converge d'ailleurs absolument dans le demi-plan $\Re(x) > 0$, et représente donc la fonction au premier membre dans tout ce demi-plan.

Enfin par un calcul et un raisonnement analogues, on démontre que l'on a

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(x+\beta)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(x+\alpha+\beta)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \Gamma(\nu+\alpha)}{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)} \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-\nu)}{\nu!} \tag{56}$$

dans le demi-plan $\Re(x) > \Re(-\beta)$. Cette identité se déduit d'ailleurs de (55), pour β entier > 0, en prenant la différence finie d'ordre β des deux membres de ce développement particulier.

Par le procédé des différences finies, on peut déduire de (54) beaucoup d'autres développements en série de Newton. Contentons-nous de signaler encore ceux que l'on obtient avec les différences finis, relatives à la variable α, d'écart α. On a en effet[1]

$$\overset{r}{\underset{\alpha}{\Delta}} \frac{1}{\nu + \alpha} = \frac{(-1)^r r!}{(\nu+\alpha)(\nu+2\alpha)\cdots(\nu+(r+1)\alpha)} \qquad r = 0, 1, 2, \ldots,$$

et, par conséquent

$$(57) \qquad \overset{r}{\underset{\alpha}{\Delta}}_\alpha \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(x)}{\Gamma(x+\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r-\nu} r!}{(\nu+\alpha)(\nu+2\alpha)\cdots(\nu+(r+1)\alpha)} \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-\nu)}{\nu!}.$$

16. Cette dernière formule peut être utilisée pour remplacer les sommes que nous avons désignées par K_{2s} par d'autres expressions. La comparaison des seconds membres de (46′) et de (57) où l'on remplace α par $\frac{1}{2}$ donne en effet

$$(58) \qquad K_{2s} = \frac{(-1)^m}{(2m)!(2s)!\,2^{2m+4s+1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2s-\nu}(2s)!}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\nu+1)\cdots\left(\nu+\frac{2s+1}{2}\right)} \cdot \frac{m(m-1)\cdots(m-\nu+1)}{\nu!}$$

$$= \frac{(-1)^m}{(2m)!(2s)!\,2^{2m+4s+1}} \left[\overset{2s}{\underset{\alpha}{\Delta}}_\alpha \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)}\right]_{\alpha=\frac{1}{2}}.$$

On peut encore expliciter ce dernier membre à l'aide de l'identité

$$\overset{r}{\underset{\omega}{\Delta}} f(x) = \frac{1}{\omega^r} \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^{r-\nu} \binom{r}{\nu} f(x+\nu\omega),$$

et il vient ainsi

$$(59) \qquad K_{2s} = \frac{(-1)^m m!}{(2m)!(2s)!\,2^{2m+2s+1}} \sum_{\nu=0}^{2s} \frac{(-1)^\nu \binom{2s}{\nu} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}+m+1\right)}$$

$$= \frac{(-1)^m m!}{(2m)!\,2^{m+2s}} \sum_{\nu=0}^{2s} \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(2s-\nu)!} \frac{1}{(\nu+1)(\nu+3)\cdots(\nu+2m+1)}.$$

---

[1] On pose $\underset{\omega}{\Delta} f(\alpha) = \frac{f(\alpha+\omega)-f(\alpha)}{\omega}$, $\overset{r}{\underset{\omega}{\Delta}} f(\alpha) = \underset{\omega}{\Delta}\overset{r-1}{\underset{\omega}{\Delta}} f(\alpha)$.

Cette nouvelle expression est plus avantageuse que la somme au second membre de (46′) pour les valeurs de $2s$ inférieures à m. On transformerait de même J_{2r} à l'aide de l'identité

$$(60)\qquad J_{2r}+K_{2r}=\sum_{\nu=0}^{m}\frac{(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}}{(2m)!\,2^{2m+2r}(2\nu+1)(2\nu+2)\cdots(2\nu+2r)}$$

$$=\frac{(-1)^m}{(2m)!\,(2r-1)!\,2^{2m+4r}}\left[\underset{\alpha}{\overset{2r-1}{\triangle}}{}_{\alpha}\,\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)}\right]_{\alpha=\frac{1}{2}},$$

ou encore, en explicitant,

$$(61)\qquad J_{2r}+K_{2r}=\frac{(-1)^{m+1}\,m!}{(2m)!\,2^{m+2r}}\sum_{\nu=0}^{2r-1}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!\,(2r-1-\nu)!}\,\frac{1}{(\nu+1)(\nu+3)\cdots(\nu+2m+1)}.$$

CHAPITRE IV.

Étude du reste et applications.

17. Les inégalités démontrées au chapitre précédent permettent d'obtenir une valeur majorante du reste de la formule sommatoire spéciale (20) ch. I

$$(1)\qquad \int_0^1\varphi(x+\omega z)\,dz=-\sum_{\nu=1}^{m}B_{m,\nu}\,\omega^{\nu}\underset{\omega}{\square}\varphi^{(\nu-1)}(x)-$$

$$-\sum_{2r\doteq 2m}^{2r\leq n}B_{m,2r}\,\omega^{2r}\underset{\omega}{\triangle}\varphi^{(2r-1)}(x)+R_{m,n},$$

où, après une légère modification de la désignation du reste,

$$(2)\qquad R_{m,n}=\omega^{n}\int_0^1\overline{B}_{m,n}(-z)\,\varphi^{(n)}(x+\omega z)\,dz=(-\omega)^{n}\int_0^1 B_{m,n}(z)\,\varphi^{(n)}(x+\omega z)\,dz,$$

et même, du reste de la formule générale (19) ch. I

$$(3)\qquad \int_0^1 \varphi(x+\omega z)\,dz = \sum_{2r=0}^{2r\leq m-1} \lambda_{m,2r}\,\omega^{2r}\varphi^{(2r)}(x+\omega h) -$$

$$-\sum_{\nu=1}^{n} B_{m,\nu}(h)\,\omega^{\nu} \underset{\omega}{\triangle} \varphi^{(\nu-1)}(x) + R_{m,n}(h),$$

où

$$(4)\qquad R_{m,n}(h) = \omega^n \int_0^1 \overline{B}_{m,n}(h-z)\,\varphi^{(n)}(x+\omega z)\,dz \qquad 0 \leq h \leq 1.$$

Dans les deux cas, on suppose $n \geq 2m$, de sorte que, si n est pair, on a

$$(5)\qquad |\overline{B}_{m,n}(h-z)| < \frac{1}{2^{\frac{3n-2m}{2}}(2m)!} \qquad n \text{ pair } \geq 2m,$$

et, s'il est impair,

$$(6)\qquad |\overline{B}_{m,n}(h-z)| < \frac{\left| |h-z| - \frac{1}{2} \right|}{2^{\frac{3(n-1)-2m}{2}}(2m)!} < \frac{1}{2^{\frac{3n-2m-1}{2}}(2m)!} \quad \begin{cases} n \text{ impair} \geq 2m, \\ 0 \leq h \text{ et } z \leq 1. \end{cases}$$

Il est clair que l'on peut se borner à considérer les valeurs impaires de n dans le cas où $h=0$.

Si l'on désigne par $M^{(n)}(x, x+\omega)$ la borne supérieure de $|\varphi^{(n)}(z)|$ dans l'intervalle $(x, x+\omega)$, nous aurons donc, pour les valeurs paires de n,

$$(7)\qquad |R_{m,n}(h)| < \frac{M^{(n)}(x, x+\omega)\,\omega^n}{2^{\frac{3n-2m}{2}}(2m)!} \qquad n \text{ pair},$$

et, lorsque n est impair,

$$(8)\qquad |R_{m,n}(h)| < \frac{M^{(n)}(x, x+\omega)\,|\omega|^n}{2^{\frac{3n-2m-3}{2}}(2m)!} \int_0^1 \left| |h-z| - \frac{1}{2} \right| dz = \frac{M^{(n)}(x, x+\omega)\,|\omega|^n}{2^{\frac{3n-2m-1}{2}}(2m)!}.$$

Les valeurs majorantes ainsi trouvées ne dépendent pas de h, et s'appliquent telles quelles au reste (2).

On conclut de là que l'intégrale définie au premier membre de (1) peut être développée suivant l'une ou l'autre des deux séries

(9) $$\int_0^1 \varphi(x+\omega z)\,dz = \sum_{2r=0}^{2r\leq m-1} \lambda_{m,2r}\,\omega^{2r}\,\varphi^{(2r)}(x+\omega h) - \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{m,\nu}(h)\,\omega^{\nu} \mathop{\triangle}_{\omega} \varphi^{(\nu-1)}(x)$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{m} B_{m,\nu}\,\omega^{\nu} \mathop{\square}_{\omega} \varphi^{(\nu-1)}(x) - \sum_{r=m}^{\infty} B_{m,2r}\,\omega^{2r} \mathop{\triangle}_{\omega} \varphi^{(2r-1)}(x),$$

lorsque

(10) $$\lim_{n\to\infty} \frac{M^{(n)}(x, x+\omega)\,\omega^n}{2^{\frac{3n}{2}}} = 0.$$

Cette même condition de convergence est suffisante pour toutes les séries sommatoires spéciales. Elle est satisfaite, en particulier, s'il existe un nombre k positif, inférieur à $2\sqrt{2}$, tel que, à partir d'un certain rang n, on ait soit

$$\sqrt[n]{M^{(n)}(x, x+\omega)} < \frac{k}{|\omega|},$$

soit

$$\frac{M^{(n+1)}(x, x+\omega)}{M^{(n)}(x, x+\omega)} < \frac{k}{|\omega|}.$$

18. On peut obtenir, lorsque $h = 0$, une valeur majorante du reste de forme un peu différente. En changeant $\varphi(z)$ en $\varphi(x+\omega z)$, on déduit en effet de (31) ch. III que

(11) $$R_{m,2n+1} = R_{m,2n+2} = \omega^{2n} \int_0^1 B_{m,2n}(z)\,\varphi^{(2n)}(x+\omega z)\,dz$$

$$- \omega^{2n+1} \int_0^1 B_{m,2n+1}(z)\,\varphi^{(2n+1)}(x+\omega z)\,dz =$$

$$= \omega^{2n+2} \int_0^1 D_{m,2n+2}(z)\,\varphi^{(2n+2)}(x+\omega z)\,dz.$$

Le signe de $D_{m,2n+2}(z)$ étant constant dans l'intervalle (0, 1), la formule de la moyenne généralisée permet d'écrire

$$(12)\qquad R_{m,2n} = \omega^{2n}\varphi^{(2n)}(x+\theta\omega)\int_0^1 D_{m,2n}(z)\,dz$$

$$= - B_{m,2n}\,\omega^{2n}\varphi^{(2n)}(x+\theta\omega) \qquad 0<\theta<1.$$

Mais on peut encore utiliser l'imparité de $B_{m,2n+1}(z)$ par rapport à $z-\frac{1}{2}$, et la constance de son signe dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. On peut ainsi écrire

$$R_{m,2n} = -\omega^{2n-1}\int_0^{\frac{1}{2}} B_{m,2n-1}(z)\,\varphi^{(2n-1)}(x+\omega z)\,dz -$$

$$-\omega^{2n-1}\int_{\frac{1}{2}}^1 B_{m,2n-1}(z)\,\varphi^{(2n-1)}(x+\omega z)\,dz$$

$$= -\omega^{2n-1}\int_0^{\frac{1}{2}}[B_{m,2n-1}(z)\,\varphi^{(2n-1)}(x+\omega z) + B_{m,2n-1}(1-z)\,\varphi^{(2n-1)}(x+\omega-\omega z)]\,dz,$$

ou

$$(13)\qquad R_{m,2n} = \omega^{2n-1}\int_0^{\frac{1}{2}} B_{m,2n-1}(z)\,[\varphi^{(2n-1)}(x+\omega-\omega z)-\varphi^{(2n-1)}(x+\omega z)]\,dz.$$

D'ailleurs la formule de la moyenne généralisée donne encore

$$R_{m,2n} = \omega^{2n-1}[\varphi^{(2n-1)}(x+\omega-\theta\omega)-\varphi^{(2n-1)}(x+\theta\omega)]\int_0^{\frac{1}{2}} B_{m,2n-1}(z)\,dz \qquad 0<\theta<1,$$

c'est à dire

$$(13')\qquad R_{m,2n} = D_{m,2n}\,\omega^{2n-1}[\varphi^{(2n-1)}(x+\omega-\theta\omega)-\varphi^{(2n-1)}(x+\theta\omega)].$$

En posant

$$M'^{(2n-1)}(x, x+\omega) = \overline{\underset{(0,\,\omega)}{\text{borne}}}\left|\frac{\varphi^{(2n-1)}(x+\omega-z)-\varphi^{(2n-1)}(x+z)}{\omega}\right|,$$

on déduit de (24) ch. III que

$$(14) \qquad |R_{m,2n}| < \frac{M'^{(2n-1)}(x, x+\omega)\,\omega^{2n}}{2^{3n-m}(2m)!}.$$

On peut transformer de manière analogue l'intégrale au 3[e] ou au 5[e] membre de (11). En changeant z en $1-z$ et se rappelant que $D_{m,2n}(z) = D_{m,2n}(1-z)$, il vient, par exemple,

$$(15) \qquad R_{m,2n} = \omega^{2n} \int_0^1 D_{m,2n}(z)\, \frac{\varphi^{(2n)}(x+\omega z) + \varphi^{(2n)}(x+\omega-\omega z)}{2}\, dz,$$

et, par suite,

$$(15') \qquad R_{m,2n} = -B_{m,2n}\,\omega^{2n}\, \frac{\varphi^{(2n)}(x+\theta\omega) + \varphi^{(2n)}(x+\omega-\theta\omega)}{2} \qquad 0<\theta<1.$$

On en déduit que

$$(16) \qquad |R_{m,2n}| < \frac{M'^{(2n)}(x, x+\omega)\,\omega^{2n}}{2^{3n-m}(2m)!},$$

avec

$$(17) \qquad M'^{(2n)}(x, x+\omega) = \overline{\underset{(0,\,\omega)}{\text{borne}}}\left|\frac{\varphi^{(2n)}(x+z) + \varphi^{(2n)}(x+\omega-z)}{2}\right|.$$

19. On peut évidemment considérer les formules sommatoires (1) et (3) comme des formules de développement d'une fonction; il suffit de poser $\varphi(z) = f'(z)$. Par exemple, après multiplication des deux membres par ω, (1) prend la forme

$$(18) \qquad f(x+\omega) - f(x) = -\sum_{\nu=1}^{m} B_{m,\nu}\,\omega^{\nu}\,[f^{(\nu)}(x+\omega) - (-1)^{\nu} f^{(\nu)}(x)] - $$
$$ - \sum_{2r=2m}^{2r\le n} B_{m,2r}\,\omega^{2r}\,[f^{(2r)}(x+\omega) - f^{(2r)}(x)] + \omega R_{m,n}.$$

La remarque faite par Darboux[1] que la formule sommatoire de Maclaurin est une formule de développement d'une fonction impaire s'étend à toutes les formules sommatoires (18). Supposons que n soit pair, et prenons le reste sous la forme (13), c'est à dire que

[1] loc. cit., p. 300.

$$\omega R_{m,2n} = \omega^{2n} \int_0^{\frac{1}{2}} B_{m,2n-1}(z)\left[f^{(2n)}(x+\omega-\omega z) - f^{(2n)}(x+\omega z)\right] dz.$$

En faisant ensuite $\omega = -2x$, (18) devient alors

$$f(-x) - f(x) = -\sum_{\nu=1}^{m} B_{m,\nu}(2x)^\nu\left[(-1)^\nu f^{(\nu)}(-x) - f^{(\nu)}(x)\right] -$$

$$-\sum_{2r=2m}^{2r\leq 2n} B_{m,2r}(2x)^{2r}\left[f^{(2r)}(-x) - f^{(2r)}(x)\right]$$

$$+(2x)^{2n}\int_0^{\frac{1}{2}} B_{m,2n-1}(z)\left[f^{(2n)}(-x+2xz) - f^{(2n)}(x-2xz)\right] dz,$$

et, par suite, en désignant par $F(x)$ la fonction impaire $f(-x)-f(x)$,

(19) $$F(x) = -\sum_{\nu=1}^{m} B_{m,\nu}(2x)^\nu F^{(\nu)}(x) - \sum_{2r=2m}^{2r\leq 2n} B_{m,2r}(2x)^{2r} F^{(2r)}(x) + R_{m,2n},$$

où

(20) $$R_{m,2n} = (2x)^{2n}\int_0^{\frac{1}{2}} B_{m,2n-1}(z) F^{(2n)}(x-2xz)\, dz$$

$$= D_{m,2n}(2x)^{2n} F^{(2n)}(\theta x) \qquad 0<\theta<1.$$

On en déduit que

$$|R_{m,2n}| < \frac{x^{2n}}{2^{n-m}(2m)!} \overline{\underset{(0,x)}{\mathrm{borne}}}\, |F^{(2n)}(z)|,$$

et, par conséquent, que l'on peut développer $F(x)$ suivant la série

(21) $$F(x) = -\sum_{\nu=1}^{m} B_{m,\nu} F^{(\nu)}(x)(2x)^{2\nu} - \sum_{r=m}^{\infty} B_{m,2r} F^{(2r)}(x)(2x)^{2r}$$

lorsque, dans l'intervalle $(0, x)$ on a uniformément

(22) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n F^{(2n)}(z) = 0.$$

20. Appliquons ces résultats à la fonction $\varphi(x) = e^x$. Pour cette fonction, $M^{(n)}(x, x+\omega)$ est constant, et le développement en série (9) s'applique lorsque $|\omega| < 2\sqrt{2}$. En multipliant les deux premiers membres par ωe^{-x}, le premier de ces développements donne

$$e^{\omega} - \text{I} = e^{\omega h} \sum_{2r=0}^{2r \leq m-1} \lambda_{m,2r}\, \omega^{2r+1} - (e^{\omega} - \text{I}) \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{m,\nu}(h)\, \omega^{\nu},$$

ou, en se rappelant que $B_{m,0}(h) = \text{I}$,

$$\frac{e^{\omega h}}{e^{\omega} - \text{I}} \sum_{2r=0}^{2r \leq m-1} \lambda_{m,2r}\, \omega^{2r+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{m,\nu}(h)\, \omega^{\nu}. \tag{23}$$

La fonction au premier membre est donc une fonction génératrice des polynômes $B_{m,\nu}(h)$. Pour $m = \text{I}$, elle se réduit à $\dfrac{\omega\, e^{\omega h}}{e^{\omega} - \text{I}}$, fonction génératrice des polynômes de Bernoulli. Dans le cas général, $\dfrac{\omega\, e^{\omega h}}{e^{\omega} - \text{I}}$ est multiplié par un polynôme pair dont le degré est égal à la partie paire de $m - \text{I}$. En posant

$$\varPi_m(\omega) = \sum_{2r=0}^{2r \leq m-1} \lambda_{m,2r}\, \omega^{2r} = \sum_{2r=0}^{2r \leq m-1} \frac{2m(m-\text{I})\cdots(m-2r)}{2m(2m-\text{I})\cdots(2m-2r)} \frac{\omega^{2r}}{(2r+\text{I})!},$$

(23) s'écrit

$$\frac{\omega\, e^{\omega h}}{e^{\omega} - \text{I}}\, \varPi_m(\omega) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{m,\nu}(h)\, \omega^{\nu}. \tag{24}$$

En remplaçant la fonction au premier membre par son développement en série entière en ω, l'identification des deux membres de (24) fournit l'expression du polynôme $B_{m,\nu}(h)$ à l'aide des polynômes de Bernoulli; cette expression résulte d'ailleurs immédiatement des préliminaires du premier chapitre, puisque (3) ch. I et (4) ch. I donnent immédiatement

$$[B_m(x)] = [B] \cdot [\lambda_m] \cdot [x, \text{o}] = [\lambda_m] \cdot [B(x)]. \tag{25}$$

Si l'on avait utilisé le développement (3), on aurait obtenu, avec $n \geq 2m$,

$$\frac{\omega\, e^{\omega h}}{e^{\omega} - \text{I}}\, \varPi_m(\omega) = \sum_{\nu=0}^{n} B_{m,\nu}(h)\, \omega^{\nu} - \frac{\omega^{n+1}}{e^{\omega} - \text{I}} \int_0^1 \overline{B}_{m,n}(h-z)\, e^{\omega z}\, dz. \tag{26}$$

Lorsque $h = 0$, l'égalité des résidus des deux membres au pôle $\omega = 2\nu\pi i$ ($\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots$) donne

$$\Pi_m(2\nu\pi i) = -(2\nu\pi i)^n \int_0^1 \overline{B}_{m,n}(-z)\, e^{2\nu\pi i z}\, dz$$

$$= (-1)^{n+1}(2\nu\pi i)^n \int_0^1 B_{m,n}(z)\, e^{2\nu\pi i z}\, dz,$$

ou enfin

$$\int_0^1 B_{m,n}(z)\, e^{2\nu\pi i z}\, dz = \frac{(-1)^{n+1}\, \Pi_m(2\nu\pi i)}{(2\nu\pi i)^n}.$$

D'ailleurs on obtient la même identité quel que soit h. En donnant à n des valeurs paires ou impaires, on conclut de là que, pour $\nu \geq 1$,

$$\int_0^1 B_{m,2n}(z) \cos 2\nu\pi z\, dz = \frac{(-1)^{n+1}}{(2\nu\pi)^{2n}}\, \Pi_m(2\nu\pi i) \qquad n \geq m,$$

$$\int_0^1 B_{m,2n+1}(z) \sin 2\nu\pi z\, dz = \frac{(-1)^{n+1}}{(2\nu\pi)^{2n+1}}\, \Pi_m(2\nu\pi i) \qquad n \geq m,$$

les deux intégrales obtenues en permutant le sinus et le cosinus étant nulles. Remarquons que le dernier terme au second membre est réel, et que ces résultats se rattachent, par (25), à la forme qu'ils prennent pour $m = 1$, c'est-à-dire aux résultats classiques relatifs aux polynômes de Bernoulli.

Les valeurs de ces intégrales fournissent les développements en série de Fourier de $B_{m,\nu}(x)$, savoir[1]

$$(27) \qquad \begin{cases} B_{m,2n}(x) = \dfrac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Pi_m(2\nu\pi i)}{\nu^{2n}} \cos 2\nu\pi x, \\[2ex] B_{m,2n+1}(x) = \dfrac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n+1}} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Pi_m(2\nu\pi i)}{\nu^{2n+1}} \sin 2\nu\pi x; \end{cases}$$

[1] N'oublions pas que $\int_0^1 B_{m,n}(x)\, dx = 0$, $n \geq 2m$.

en particulier, lorsque n croît indéfiniment, on voit que

$$(28) \qquad \begin{cases} B_{m,2n}(x) \sim \dfrac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}} \Pi_m(2\pi i) \cos 2\pi x, \\ B_{m,2n+1}(x) \sim \dfrac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n+1}} \Pi_m(2\pi i) \sin 2\pi x. \end{cases}$$

On peut déduire de là une condition nécessaire pour que l'intégrale (1) soit développable suivant une série (9); en effet, il est nécessaire que le terme général de cette série

$$B_{m,\nu}(h)\,\omega^\nu \underset{\omega}{\Delta} \varphi^{(\nu-1)}(x) = B_{m,\nu}(h)\,\omega^{\nu-1} \int_x^{x+\omega} \varphi^{(\nu)}(z)\,dz$$

tende vers zéro lorsque ν croît indéfiniment, et, par conséquent, que

$$(29) \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^n \underset{\omega}{\Delta} \varphi^{(n-1)}(x) = 0.$$

Cette condition est indépendante de m, et est à rapprocher de la condition suffisante (10)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\omega}{2\sqrt{2}}\right)^n \overline{\underset{(x,x+\omega)}{\text{borne}}} \,|\varphi^{(n)}(z)| = 0.$$

En résumé, toutes les remarques que l'on est conduit à faire sur la série d'Euler-Maclaurin peuvent être reproduites pour la série générale (9) que nous avons obtenue ici, et il serait fastidieux d'insister.

21. Jusqu'ici, nous n'avons examiné que ce que devenait une même formule sommatoire spéciale lorsqu'on la prolongeait indéfiniment. On peut se proposer encore de faire tendre l'indice m lui-même vers l'infini. Remarquons que ça revient à examiner ce que devient dans ces conditions la formule de Darboux (3) ch. III. Le résultat n'est pas nouveau,[1] et il nous suffira de rappeler sommairement ce que l'on obtient. En nous reportant à cette formule, supposons que J_m tend vers zéro lorsque m croît indéfiniment, ce qui a lieu, par exemple, en vertu de (5) ch. III et (6) ch. III, si

[1] Cf. Whittaker, loc. cit., p. 125.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(m!)^2}{(2m)!\,(2m+1)!}\,\overline{\underset{(0,1)}{\text{borne}}}\,|\varphi^{(2m)}(x)| = 0,$$

donc si

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{e}{4m}\right)^{2m+1} \overline{\underset{(0,1)}{\text{borne}}}\,|\varphi^{(2m)}(x)| = 0,$$

autrement dit, si

$$\overline{\underset{(0,1)}{\text{borne}}}\,|\varphi^{(2m)}(x)| = o\left(\left(\frac{4m}{e}\right)^{2m+1}\right). \tag{30}$$

On peut écrire, dans ces conditions,

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = -\lim_{m\to\infty} \sum_{\nu=1}^{m} B_{m,\nu} \underset{1}{\Box}\, \varphi^{(\nu-1)}(0). \tag{31}$$

D'autre part, lorsque m croît indéfiniment, ν restant fixe, on a

$$\lim_{m\to\infty} B_{m,\nu} = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \lim_{m\to\infty} \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(2m-\nu+1)}{\Gamma(m-\nu+1)\,\Gamma(2m+1)} = \frac{(-1)^\nu}{2^\nu\,\nu!},$$

et $B_{m,\nu}$ tend vers cette limite par valeurs absolues croissantes, comme le montre le rapport

$$\begin{aligned}\frac{B_{m+1,\nu}}{B_{m,\nu}} &= \frac{(m+1)(2m-\nu+1)(2m-\nu+2)}{(m-\nu+1)(2m+1)(2m+2)} = \frac{(2m-\nu+1)(2m-\nu+2)}{(2m-2\nu+2)(2m+1)} \\ &= \frac{(2m)^2-(2\nu-3)\,2m+(\nu-1)(\nu-2)}{(2m)^2-(2\nu-3)\,2m-2(\nu-1)} = 1 + \frac{\nu(\nu-1)}{2(2m+1)(m-\nu+1)} \geq 1\end{aligned}$$

puisque $m \geq \nu$; et l'on a

$$|B_{m,\nu}| < \frac{1}{2^\nu\,\nu!} \qquad m \geq \nu.$$

En appliquant le théorème de Tannery, on peut donc remplacer (31) par

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{2^\nu\,\nu!} \underset{1}{\Box}\, \varphi^{(\nu-1)}(0), \tag{32}$$

pourvu que la série au second membre soit absolument convergente.