DIOPHANTISCHE UNGLEICHUNGEN.

II. Rhythmische Systeme.

Abschnitte A und B.

VON

J. G. van der CORPUT

in GRONINGEN.

Herrn Professor Dr. EDMUND LANDAU gewidmet.

Inhaltsverzeichnis.

Verzeichnis der Definitionen.

A. Definition von rhythmischen Systemen und von absolut rhythmischen Funktionen.

§ 1. Einleitung zur Theorie der rhythmischen Systeme.

Das Ziel dieser der Theorie der Diophantischen Ungleichungen gewidmeten und aus drei Teilen bestehenden Arbeit ist: unter sehr allgemeinen Voraussetzungen bei gegebenen Systemen von Ungleichungen mit mehreren Unbekannten zu untersuchen, ob diese Systeme unendlich viele ganzzahlige Lösungen besitzen oder nicht. Aus dem ersten Teil, der den Untertitel »Zur Gleichverteilung modulo 1« trägt, geht hervor welche Bedeutung für die Theorie der Diophantischen Ungleichungen der von Herrn H. Weyl eingeführte Begriff der Gleichverteilung modulo 1 hat.

Um diesen zweiten Teil meiner Arbeit zu verstehen, braucht der Leser die Theorie der Diophantischen Ungleichungen nicht zu kennen; dazu braucht er nicht einmal Teil I gelesen zu haben.

Teil II ist in vier Abschnitte A, B, C und D verteilt:

A. Definition von rhythmischen Systemen und von absolut rhythmischen Funktionen.

B. Vergleichbare Systeme und Translationen.

C. Polynome und andere Funktionen.

D. Stetigkeitssätze.

Jeder dieser vier Abschnitte ist von einer Einleitung versehen; § 1 enthält die Einleitung von Abschnitt A.

Der Begriff der Gleichverteilung mod. 1 besitzt den Nachteil, dass er gegenüber den wichtigsten in der Theorie der Diophantischen Ungleichungen auftretenden Operationen nicht invariant ist. Um zu erklären, was ich hiermit meine, werde ich erst über die in dieser Theorie am häufigsten vorkommenden Operationen sprechen.

Definition 1: *In diesem Teil II bezeichnen m und n stets feste natürliche Zahlen, und bezeichnet $x = (x_1, \ldots, x_m)$ einen Gitterpunkt im m-dimensionalen Raum. Mit (f_ν) oder $(f_\nu(x))$ meine ich ein System von n Funktionen*

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Sage ich, dass (f_ν) in jedem Gitterpunkt x definiert ist, so meine ich natürlich, dass alle Funktionen $f_\nu(x)$ dieses Systems in jedem Gitterpunkt x des m-dimensionalen Raumes festgelegt sind.

Alles in Teil II ist reell.

$$\alpha < f < \beta \qquad (\text{mod. } 1)$$

soll heissen, dass bei geeignet gewähltem ganzzahligem y

$$\alpha < f - y < \beta$$

ist.

Obgleich ich in Teil II die Theorie der rhythmischen Systeme für m Variable, also für eine beliebige Anzahl von Veränderlichen entwickle, will ich mich bequemlichkeitshalber in dieser Einleitung, sofern nicht ausdrücklich der Gegenteil behauptet wird, auf dem Spezialfall mit $m = 1$, also auf Funktionen einer ganzzahligen Veränderlichen x beschränken.

Die Untersuchung eines Diophantischen Systems wird, wenn möglich, zurückgeführt auf der Untersuchung eines Systems der Gestalt

$$(1) \qquad \alpha_\nu < f_\nu(x) < \beta_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Das bedeutet

$$(2) \qquad \alpha_\nu < f_\nu(x) - y_\nu < \beta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

sodass wir dann ein System von n Ungleichungen mit $n + 1$ Unbekannten $x, y_1, \ldots, y_n$ haben.

Das einzige, was mich hier von den Funktionen $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ interessiert, ist ihr Rest modulo 1; denn das Problem ändert sich nicht, wenn $f_\nu(x)$ durch eine Funktion $\bar{f}_\nu(x)$ mit

$$(3) \qquad \bar{f}_\nu(x) \equiv f_\nu(x) \pmod{1}$$

ersetzt wird. Zwei Funktionen $f_\nu(x)$ und $\bar{f}_\nu(x)$ mit Eigenschaft (3) heissen kongruent mod. 1 oder, kürzer gesagt, kongruent. In der Theorie der Diophantischen Ungleichungen sind besonders diejenigen Operationen wichtig, bei denen das Resultat durch ein kongruentes ersetzt wird, wenn die Funktionen, auf die die Operationen angewendet werden, durch kongruente Funktionen ersetzt werden.

Als erste Operation mit dieser Eigenschaft nenne ich die Addition.

Die zweite Operation, die hier in Betracht kommt, ist die folgende:

Bei gegebenen Funktionen $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ bilde ich eine Funktion

$$\psi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)).$$

Unserer Verabredung gemäss soll sich das Resultat in ein kongruentes verwandeln, wenn die Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ durch kongruente ersetzt werden. Die Funktion $\psi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ erfüllt diese Bedingung, wenn aus

$$(4) \qquad v_\nu \equiv w_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

folgt

$$(5) \qquad \psi(v_1, v_2, \ldots, v_n) \equiv \psi(w_1, w_2, \ldots, w_n) \pmod{1}.$$

Mit Rücksicht hierauf liegt es nahe die folgende Definition einzuführen:

Definition 2: *Eine Funktion $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ nenne ich periodisch mod. 1, wenn aus (4) stets (5) folgt.*

Als zweite Operation bekomme ich auf diese Weise:

Die Bildung einer Funktion

$$\psi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

von Funktionen $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, wenn $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ periodisch mod. 1 ist.

Schliesslich betrachte ich noch eine dritte Operation. Ich nenne $f(x)$ eine Summenfunktion von $\varphi(x)$, wenn die Differenz $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ gleich $\varphi(x)$ ist; bei gegebenem $\varphi(x)$ ist die Summenfunktion $f(x)$ bis auf einer additiven Konstanten eindeutig bestimmt. Sind $\varphi(x)$ und $\bar{\varphi}(x)$ kongruent mod. 1, ist $f(x)$ eine Summenfunktion von $\varphi(x)$, und $\bar{f}(x)$ eine Summenfunktion von $\bar{\varphi}(x)$, dann sind $f(x)$ und $\bar{f}(x)$ bis auf einer geeignet gewählten additiven Konstanten c kongruent mod. 1, d. h. dann ist bei geeignet gewähltem konstantem c

$$f(x) \equiv \bar{f}(x) + c \pmod{1}.$$

Als dritte (und in der Theorie der Diophantischen Ungleichungen vielleicht wichtigste) Operation nenne ich nun die Bildung der Summenfunktionen einer gegebenen Funktion.

Ich werde jetzt zeigen, dass der Begriff der Gleichverteilung modulo 1 gegenüber diesen drei Operationen nicht invariant ist.

Addition: Sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gleichverteilt modulo 1, so braucht ihre Summe es noch nicht zu sein. Denn mit $f(x)$ ist auch $-f(x)$ gleichverteilt modulo 1, aber ihre Summe $f(x) + (-f(x)) = 0$ ist es keinesfalls.

Bildung von Funktionen von Funktionen. Es sei $f(x)$ gleichverteilt mod. 1, und es sei $\psi(v)$ eine stetige Funktion, die periodisch mod. 1 ist. Die Voraussetzung dass $f(x)$ gleichverteilt mod. 1 ist, besagt: die »Wahrscheinlichkeit», dass eine ganze Zahl x der Ungleichung

$$\alpha \leqq f(x) < \beta \pmod{1}$$

genügt, ist für jedes feste Zahlenpaar α, β mit

$$0 \leqq \beta - \alpha \leqq 1 \tag{6}$$

gleich $\beta - \alpha$. Die »Wahrscheinlichkeit», dass ein ganzes x der Beziehung

$$\alpha \leqq \psi(f(x)) < \beta \pmod{1}$$

genügt, ist dann, wie aus Satz 1 in § 9 von Teil I hervorgeht, für jedes Zahlenpaar α, β mit (6) gleich dem Jordanschen Inhalt $J(\alpha, \beta)$ der Menge der im Intervall $0 \leqq u < 1$ liegenden Punkte u mit

$$\alpha \leqq \psi(u) < \beta \quad (\text{mod. } 1),$$

vorausgesetzt dass diese Menge einen Inhalt im Jordanschen Sinne besitzt. Hieraus folgt, dass die Funktion $\psi(f(x))$ dann und nur dann gleichverteilt mod. 1 ist, wenn für jedes Zahlenpaar α, β mit (6)

$$J(\alpha, \beta) = \beta - \alpha$$

ist. Das ist nur bei sehr speziellen Funktionen $\psi(v)$ der Fall, sodass der Begriff der Gleichverteilung mod. 1 gegenüber der zweiten der genannten Operationen nicht invariant ist.

Bildung der Summenfunktion[1]: Setzt man

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{für ungerades } x \\ = x\sqrt{2} & \text{für gerades } x, \end{cases}$$

so ist

$$\begin{cases} \Delta f(x) = (x+1)\sqrt{2} & \text{für ungerades } x \\ = -x\sqrt{2} & \text{für gerades } x, \end{cases}$$

und wie man sich leicht überzeugt, ist $\Delta f(x)$ gleichverteilt mod. 1, aber $f(x)$ nicht.

Ich habe mir nun die Aufgabe gestellt, einen neuen Begriff einzuführen, der u. a. gegenüber den drei genannten Operationen invariant ist, und ausserdem natürlich noch das Desideratum erfüllt, dass er von praktischer Bedeutung für die Theorie der Diophantischen Ungleichungen ist.

Definition 3[2]: *Ist das System (f_ν) für jedes ganze $x \gtreqless 0$ definiert, bezeichnet ε irgend eine positive Zahl, x eine beliebige ganze Zahl, so nenne ich die ganze Zahl τ eine zu ε und x gehörige Verschiebungszahl von (f_ν), in Zeichen*

---

[1] Vergl. das Beispiel von Hilfssatz 1 in § 4.

[2] In Definition 2 von § 2 gebe ich die entsprechende Definition für beliebiges m.

$$\tau = \tau(\varepsilon, x, f_\nu),$$

wenn für jedes ganze h mit Absolutwert $|h| \leqq \frac{1}{\varepsilon}$ *die n Ungleichungen*

$$-\varepsilon < f_\nu(x+\tau+h) - f_\nu(x+h) < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten.

Definition 4[1]: *Ich nenne ein System* (f_ν) *rhythmisch, wenn jede Funktion* $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ *dieses Systems für jedes ganze* $x \gtreqless 0$ *definiert ist, und jedem positiven* ε *eine nur von* ε *abhängige Länge* L, *in Zeichen*

$$L = L(\varepsilon, f_\nu),$$

zugeordnet werden kann, derart dass für jedes ganze x jedes Intervall der Länge L wenigstens eine zu ε *und x gehörige Verschiebungszahl* $\tau = \tau(\varepsilon, x, f_\nu)$ *von* (f_ν) *enthält.*

Ist $n = 1$, *d. h. besteht ein System* (f_ν) *mit dieser Eigenschaft aus nur einer Funktion* $f_1(x)$, *so nenne ich diese Funktion rhythmisch.*

Eine Funktion, die gleich einer Konstanten ist, ist ein einfaches Beispiel einer rhythmischen Funktion.

Der Leser wird wohl einen Verband beachten zwischen den rhythmischen Funktionen einerseits, und den von Herrn H. Bohr[2] eingeführten fastperiodischen Funktionen andererseits. Ist $f(x)$ für jedes reelle x definiert, so heisst τ eine zur positiven Zahl ε gehörige Bohrsche Verschiebungszahl von f, wenn für jedes x

$$-\varepsilon < f(x+\tau) - f(x) < \varepsilon$$

ist; die Funktion $f(x)$ heisst fastperiodisch, wenn jedem positiven ε eine nur von ε abhängige Länge L zugeordnet werden kann, derart, dass jedes Intervall der Länge L wenigstens eine zu ε gehörige Bohrsche Verschiebungszahl τ von f enthält. Der charakteristische Unterschied zwischen den zwei von Herrn Bohr, bezw. von mir eingeführten Begriffe, ist, dass meine Verschiebungszahlen von x abhängen dürfen, während die Zahlen, die Herr Bohr Verschiebungszahlen nennt, unabhängig von x sind. Dieser Unterschied ist wesentlich; denn verallgemeinert man den Begriff der Fastperiodizität sinngemäss für die Theorie der Diophantischen

[1] Definition 3 in § 2 gibt die Erklärung von rhythmischen Systemen für beliebiges m.

[2] H. Bohr, Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. I. Acta, Bd. 45, S. 29—127; II. Acta, Bd. 46, S. 101—213; III. Acta, Bd. 47, S. 237—281.

Ungleichungen, so bekommt man einen Begriff, der gegenüber der dritten im Obigen genannten Operation nicht invariant ist.[1]

In wiefern der von mir eingeführte Begriff invariant ist gegenüber den drei erwähnten Operationen, geht aus den folgenden drei Sätzen hervor:

---

[1] Diese Verallgemeinerung würde folgendermassen lauten: Ist $f(x)$ für jedes ganze $x \gtreqless 0$ definiert, so nenne ich die ganze Zahl τ eine zur positiven Zahl ε gehörige Verschiebungszahl mod. 1 von f, wenn jedes ganze x der Ungleichung

$$-\varepsilon < f(x+\tau) - f(x) < \varepsilon \pmod{1}$$

genügt; ich nenne $f(x)$ fastperiodisch mod. 1, wenn jedem positiven ε eine nur von ε und f abhängige Länge L zugeordnet werden kann, derart, dass jedes Intervall der Länge L wenigstens eine zu ε gehörige Verschiebungszahl mod. 1 von f enthält.

Dass dieser Begriff nicht invariant gegenüber der dritten Operation ist, geht schon aus dem einfachen Beispiele

$$f(x) = \sqrt{2}\, x^2$$

hervor. Die Funktion

$$\Delta f(x) = \sqrt{2}\,(2x+1)$$

ist fastperiodisch mod. 1, da jede ganze Zahl τ mit

$$-\varepsilon < 2\sqrt{2}\,\tau < \varepsilon \pmod{1}$$

eine zu ε gehörige Verschiebungszahl mod. 1 von $\Delta f(x)$ ist, und bei geeignet gewählter, nur von ε abhängiger Länge L jedes Intervall der Länge L wenigstens eine ganze Zahl τ mit dieser Eigenschaft enthält. Aber die Funktion $f(x)$ ist nicht fastperiodisch mod. 1. Denn wäre sie das, dann würde man jedem positiven $\varepsilon < \frac{1}{2}$ eine ganze Zahl $\tau \neq 0$ zuordnen können, die für jedes ganze x der Ungleichung

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < \sqrt{2}\,(x+\tau)^2 - \sqrt{2}\,x^2 < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1},$$

also insbesondere (man setze $x = 0$) der Ungleichung

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < \sqrt{2}\,\tau^2 < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1}$$

genügt; aus diesen beiden Ungleichungen würde für jedes ganze x folgen

$$-\varepsilon < 2\sqrt{2}\,\tau x < \varepsilon \pmod{1}$$

und das ist wegen der Irrationalität von $2\sqrt{2}\,\tau$ unmöglich.

Satz 1 (*Additionstheorem*[1]): *Ist* (f_ν) *rhythmisch, so ist auch* $(f_\nu, f_1 + f_2)$ *rhythmisch.*[2]

Um Satz 2 bequem formulieren zu können, führe ich die folgende Definition ein:

Definition 5: *Eine in der Umgebung eines Punktes* $w = (w_1, \ldots, w_n)$ *definierte Funktion* $\psi(v) = \psi(v_1, \ldots, v_n)$ *heisst im Punkte* w *stetig mod.* 1, *wenn jedem* $v = (v_1, \ldots, v_n)$ *ein ganzes* y *mit*

$$\lim_{v \to w} (\psi(v) - y) = \psi(w)$$

zugeordnet werden kann. Dann schreibe ich

$$\psi(v) \to \psi(w) \quad (\text{mod. } 1),$$

und nenne ich w *einen Stetigkeitspunkt mod.* 1 *der Funktion* $\psi(v)$.

Satz 2 (*Erster Stetigkeitssatz*[3]): *Ist* (f_ν) *rhythmisch, ist* $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ *für jedes* $v = (v_1, \ldots, v_n)$ *definiert, periodisch mod.* 1 *und stetig mod.* 1, *dann ist auch*

$$(f_\nu, \psi(f_1, \ldots, f_n))$$

rhythmisch.[4]

Bemerkungen: 1. Setzt man in diesem Stetigkeitssatz

$$\psi(v_1, \ldots, v_n) = v_1 + v_2,$$

so verwandelt der Stetigkeitssatz sich in Satz 1.

2. (Sehr wichtig für die Anwendungen.) In diesem Stetigkeitssatz darf die Voraussetzung, dass $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ überall stetig mod. 1 ist, ersetzt werden durch die weniger forderende Voraussetzung, dass $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ in den Punkten

$$v = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)),$$

wo x alle ganzen Zahlen $\gtreqless 0$ durchläuft, stetig mod. 1 ist.

---

[1] Diesen Satz für beliebiges m statt für den Spezialfall mit $m = 1$ findet der Leser in Satz 4 von § 2.

[2] Mit $(f_\nu, f_1 + f_2)$ wird natürlich das System der $n+1$ Funktionen $f_1, \ldots, f_n, f_1 + f_2$ gemeint.

[3] Die Verallgemeinerung dieses Satzes für beliebiges m kommt in Satz 7 von § 2 vor.

[4] Mit $(f_\nu, \psi(f_1, \ldots, f_n))$ wird natürlich das System der $n+1$ Funktionen

$$f_1(x), \ldots, f_n(x), \psi(f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

gemeint.

Satz 3 (*Hauptsatz in der Theorie der rhythmischen Systeme*[1]): *(f_ν) ist dann und nur dann rhythmisch, wenn (Δf_ν) rhythmisch ist.*

Die Bedeutung der rhythmischen Systeme für die Theorie der Diophantischen Ungleichungen ergibt sich aus

Satz 4[2]: *Ist (f_ν) rhythmisch, und hat das System*

$$(7) \qquad \alpha_\nu < f_\nu(x) < \beta_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

wenigstens eine ganzzahlige Lösung x, so besitzt es unendlich viele ganzzahlige Lösungen x, und dann enthält sogar bei geeignet gewählter Länge L jedes Intervall der Länge L wenigstens ein ganzes x mit (7).

Um durch Beispiele die Bedeutung dieser Sätze zu zeigen, füge ich noch einen fünften Satz hinzu:

Satz 5[3]: *Ein Teilsystem eines rhythmischen Systems ist rhythmisch, d. h. kommen alle Funktionen $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ in demselben rhythmischen System vor, dann ist (f_ν) rhythmisch.*

Insbesondere: jede Funktion eines rhythmischen Systems ist rhythmisch.

Beispiel 1: Ist $P(x)$ ein Polynom, und hat die Ungleichung

$$(8) \qquad \alpha < P(x) < \beta \pmod{1},$$

wo α und β Konstanten bezeichnen, mindestens eine ganzzahlige Lösung x, so besitzt sie unendlich viele ganzzahlige Lösungen, und dann enthält sogar bei geeignet gewähltem L jedes Intervall der Länge L wenigstens ein ganzes x mit (8).

Beweis: Nach Satz 4, angewendet mit

$$(9) \qquad n = 1, \quad f_1(x) = P(x)$$

brauche ich nur zu zeigen, dass $P(x)$ rhythmisch ist. Diese Behauptung ist evident, falls $P(x)$ gleich einer Konstanten ist. Sonst ist der Grad k von $P(x)$ mindestens 1; ist dann die betreffende Behauptung mit $k-1$ statt k schon bewiesen, so ist $\Delta P(x)$ rhythmisch, sodass der Hauptsatz (Satz 3), mit (9) angewendet, besagt, dass auch $P(x)$ rhythmisch ist.

---

[1] Den Hauptsatz mit beliebigem m findet der Leser in Satz 9 von § 2.

[2] Die Verallgemeinerung dieses Satzes für beliebiges m findet der Leser in Satz 1 von § 2.

[3] Verallgemeinerung für beliebiges m in Satz 2 von § 2.

Definition 6: *Sind a und x ganze Zahlen, so setze ich ein für allemal*

$$\sum_{\xi=a}^{x} u(\xi) = 0 \qquad \text{für} \quad x = a-1$$

$$= -\sum_{\xi=x+1}^{a-1} \qquad \text{für} \quad x < a-1,$$

sodass für jedes ganze x

$$\Delta \sum_{\xi=a}^{x} u(\xi) = u(x+1)$$

ist.

Beispiel 2: Ist $P(x)$ ein Polynom, und bezeichnet ε eine positive Zahl, dann hat die Ungleichung

$$-\varepsilon < \sum_{\xi=1}^{x} \sqrt{P(x) - [P(x)]} < \varepsilon \quad (\text{mod. } 1)^{1} \tag{10}$$

unendlich viele ganzzahlige Lösungen x. Bei gegebenem Polynom P existiert eine nur von ε abhängige Länge L, derart dass jedes Intervall der Länge L mindestens ein ganzes x mit (10) enthält.

Beweis: Nach Beispiel 1 ist $P(x+1)$ rhythmisch. Man wende den ersten Stetigkeitssatz (Satz 2) mit

$$n = 1, \quad f_1(x) = P(x+1), \quad \psi(v) = \sqrt{v - [v]}$$

an und man beachte dabei, dass $\psi(v)$ für jedes $v \gtreqless 0$ definiert, periodisch mod. 1 und stetig mod. 1 (auch für ganzes v) ist. Man bekommt dann, dass die Funktionen $P(x+1)$ und $\psi(P(x+1))$ ein rhythmisches System bilden, sodass nach Satz 5 die Funktion

$$\psi(P(x+1)) = \sqrt{P(x+1) - [P(x+1)]} = \Delta \sum_{\xi=1}^{x} \sqrt{P(\xi) - [P(\xi)]}$$

rhythmisch ist. Aus dem Hauptssatz (Satz 3) folgt dann, dass

$$\sum_{\xi=1}^{x} \sqrt{P(\xi) - [P(\xi)]}$$

[1] $[u]$ bezeichnet die grösste ganze Zahl $\leqq u$.

rhythmisch ist. Da (10) die Lösung $x=0$ besitzt, zeigt Satz 4 nun die Richtigkeit der Behauptung von Beispiel 2.

Beispiel 3: Hat das Polynom $P(x)$ für kein einziges ganzes x einen ganzzahligen Wert, und bezeichnet s eine natürliche Zahl, so gibt es unendlich viele ganze x mit

$$\sum_{\xi=1}^{x}[P(\xi)] \equiv 0 \pmod{s}, \tag{11}$$

und dann ist es bei gegebenem Polynom P möglich eine nur von s abhängige Zahl L so zu bestimmen, dass jedes Intervall der Länge L wenigstens ein ganzes x mit (11) enthält.

Beweis: Die Voraussetzungen des ersten Stetigkeitssatzes (Satz 2; man vergleiche die zweite Bemerkung des ersten Stetigkeitssatzes) sind mit

$$n=1, \quad f_1(x)=\frac{1}{s}P(x+1), \quad \psi(v)=\frac{1}{s}[sv]$$

erfüllt. Denn $f_1(x)$ ist nach Beispiel 1 rhythmisch; $\psi(v)$ ist für jedes $v \gtreqless 0$ definiert, periodisch mod. 1, und für jedes ganze $x \gtreqless 0$ im Punkte $f_1(x)$ stetig, da $sf_1(x)=P(x+1)$ für kein einziges ganzes x einen ganzzahligen Wert annimmt.

Nach dem ersten Stetigkeitssatz bilden also die zwei Funktionen $\psi(f_1(x))$ und $f_1(x)$ ein rhythmisches System; nach Satz 5 ist dann

$$\psi(f_1(x))=\frac{1}{s}[P(x+1)]=\frac{1}{s}\Delta\sum_{\xi=1}^{x}[P(\xi)]$$

rhythmisch, und aus dem Hauptsatz folgt jetzt, dass

$$\frac{1}{s}\sum_{\xi=1}^{x}[P(\xi)]$$

eine rhythmische Funktion bezeichnet. Die Ungleichung

$$-\frac{1}{s}<\frac{1}{s}\sum_{\xi=1}^{x}[P(\xi)]<\frac{1}{s} \pmod{1} \tag{12}$$

hat die Lösung $x = 0$, also nach Satz 4 unendlich viele ganzzahlige Lösungen, und bei geeignet gewähltem L enthält jedes Intervall der Länge L wenigstens ein ganzes x mit (12). Hiermit ist alles bewiesen, da (11) aus (12) folgt.

Die folgenden zwei Behauptungen

B_1: »sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ rhythmisch, so ist auch ihre Summe rhythmisch»,

B_2: »sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ rhythmisch, so bilden sie ein rhythmisches System»

sind leider falsch. Denn die Funktionen $\frac{1}{2}[\sqrt{2}\,x]$ und $\frac{1}{2}[-\sqrt{2}\,x]$ sind, wie man sich leicht überzeugt, und wie ich übrigens im zum vierten Stetigkeitssatz (Abschnitt D) gehörigen Beispiel zeigen werde, rhythmisch, aber ihre Summe, die im Punkte $x = 0$ den Wert 0, und sonst den Wert $-\frac{1}{2}$ hat, ist es natürlich nicht. Hieraus folgt zugleich, dass die zwei rhythmischen Funktionen $\frac{1}{2}[\sqrt{2}\,x]$ und $\frac{1}{2}[-\sqrt{2}\,x]$ ein nicht-rhythmisches System bilden; denn wäre dieses System rhythmisch, dann würden nach Satz 1 die drei Funktionen $\frac{1}{2}[\sqrt{2}\,x] + \frac{1}{2}[-\sqrt{2}\,x]$, $\frac{1}{2}[\sqrt{2}\,x]$ und $\frac{1}{2}[-\sqrt{2}\,x]$ ein rhythmisches System bilden; dann wäre also nach Satz 5 die Funktion $\frac{1}{2}[\sqrt{2}\,x] + \frac{1}{2}[-\sqrt{2}\,x]$ rhythmisch, was nicht der Fall ist.

Die Tatsache, dass die Behauptungen B_1 und B_2 falsch sind, hat mich gezwungen einen zweiten neuen Begriff einzuführen, nämlich den Begriff einer absolut rhythmischen Funktion.

Definition 7[1]: *Ich nenne eine Funktion $f(x)$ absolut rhythmisch, wenn jedes rhythmische System (g_ϱ) die Eigenschaft besitzt, dass auch (g_ϱ, f) rhythmisch ist.*[2]

Nach dem Obigen ist die Funktion $\frac{1}{2}[\sqrt{2}\,x]$ zwar rhythmisch, aber nicht absolut rhythmisch.

Die absolut rhythmischen Funktionen besitzen einfache Eigenschaften.

---

[1] Ich gebe die entsprechende Erklärung mit beliebigem m in Definition 1 von § 3.

[2] Besteht (g_ϱ) aus den Funktionen

$$g_\varrho(x) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r),$$

so besteht (g_ϱ, f) natürlich aus den $r + 1$ Funktionen

$$g_1(x), \ldots, g_r(x), f(x).$$

Satz 6 (*Additionstheorem*[1]): *Die Summe von zwei absolut rhythmischen Funktionen ist absolut rhythmisch.*

Satz 7 (*Zweiter Stetigkeitssatz*[2]): *Sind die Funktionen*

$$f_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

absolut rhythmisch und ist $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ *für jedes* $v = (v_1, \ldots, v_n)$ *definiert, periodisch mod.* 1 *und stetig mod.* 1, *dann ist auch die Funktion*

$$\psi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

absolut rhythmisch.

Bemerkungen: 1. Setzt man in diesem Stetigkeitssatz

$$n = 2 \quad \text{und} \quad \psi(v_1, v_2) = v_1 + v_2,$$

so verwandelt dieser Stetigkeitssatz sich in Satz 6.

2. Genau wie beim ersten Stetigkeitssatz (Satz 2).

Satz 8[3]: *Die Funktion* $f(x)$ *ist dann und nur dann absolut rhythmisch, wenn* $\Delta f(x)$ *absolut rhythmisch ist.*

Satz 9[4]: *Ein System von absolut rhythmischen Funktionen ist rhythmisch. Insbesondere: eine absolut rhythmische Funktion ist rhythmisch.*

Natürlich nicht umgekehrt: $\frac{1}{2}[\sqrt{2}\,x]$ ist rhythmisch, nicht absolut rhythmisch.

Beispiel 4: Jedes Polynom ist absolut rhythmisch.

Vorbemerkung: Aus Satz 9 folgt also, dass jedes Polynomsystem rhythmisch ist.

Beweis: Ist das Polynom $P(x)$ gleich einer Konstanten, so ist die Behauptung evident. Ist der Grad k von $P(x)$ mindestens 1, und ist die Behauptung mit $k-1$ statt k schon bewiesen, so ist $\Delta P(x)$ absolut rhythmisch, also nach Satz 8 auch $P(x)$ absolut rhythmisch.

---

[1] Für beliebiges m in Satz 3 von § 3.

[2] Wortlaut für beliebiges m in Satz 5 von § 3.

[3] Satz 7 in § 3 gibt die Verallgemeinerung dieses Satzes für beliebiges m.

[4] Der entsprechende Satz für beliebiges m kommt in Satz 2 von § 3 vor.

Beispiel 5: Bezeichnen $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ Polynome, und hat $P_2(x)$ für kein einziges ganzes x einen ganzzahligen Wert, so besitzt das System

$$(13) \qquad \begin{cases} -\varepsilon < \sum_{\xi=1}^{x} \sqrt[s]{P_1(\xi) - [P_1(\xi)]} < \varepsilon \pmod{1} \\ -\varepsilon < \sum_{\xi=1}^{x} \log(1 + P_2(\xi) - [P_2(\xi)]) < \varepsilon \pmod{1} \\ -\varepsilon < P_3(x) - P_3(0) < \varepsilon \pmod{1} \\ x \equiv 0 \pmod{s} \end{cases}$$

für jedes positive ε und jedes positive ganze s unendlich viele ganzzahlige Lösungen x; bei geeignet gewählter Länge L enthält jedes Intervall der Länge L wenigstens ein ganzes x mit (13).

Beweis: Nach Beispiel 4 sind die Polynome

$$P_1(x+1), \quad P_2(x+1), \quad P_3(x) - P_3(0), \quad \frac{x}{s}$$

absolut rhythmisch. Der zweite Stetigkeitssatz (Satz 7), angewendet mit

$$f(x) = P_1(x+1), \qquad \psi(v) = \sqrt[s]{v - [v]}$$

liefert das Resultat, dass $\sqrt[s]{P_1(x+1) - [P_1(x+1)]}$ absolut rhythmisch ist. Derselbe Satz, angewendet mit

$$f(x) = P_2(x+1), \qquad \psi(v) = \log(1 + v - [v])$$

(man vergleiche die zum zweiten Stetigkeitssatz gehörige Bemerkung 2), gibt, dass $\log(1 + P_2(x+1) - [P_2(x+1)])$ absolut rhythmisch ist. Nach Satz 8 sind dann die zwei Funktionen

$$\sum_{\xi=1}^{x} \sqrt[s]{P_1(\xi) - [P_1(\xi)]} \quad \text{und} \quad \sum_{\xi=1}^{x} \log(1 + P_2(\xi) - [P_2(\xi)])$$

absolut rhythmisch, bilden also wegen Satz 9 mit den zwei Polynomen $P_3(x) - P_3(0)$ und $\frac{x}{s}$ ein aus vier Funktionen bestehendes rhythmisches System. Folglich kann Satz 4 mit $n = 4$ auf das System

$$(14)\quad \begin{cases} -\varepsilon < \sum\limits_{\xi=1}^{x} \sqrt[s]{P_1(\xi) - [P_1(\xi)]} < \varepsilon \quad (\text{mod. } 1) \\ -\varepsilon < \sum\limits_{\xi=1}^{x} \log(1 + P_2(\xi) - [P_2(\xi)]) < \varepsilon \quad (\text{mod. } 1) \\ -\varepsilon < P_3(x) - P_3(0) < \varepsilon \quad (\text{mod. } 1) \\ \quad -\frac{1}{s} < \frac{x}{s} < \frac{1}{s} \quad (\text{mod. } 1) \end{cases}$$

angewendet werden, da dieses System die Lösung $x = 0$ besitzt. Hiermit ist Beispiel 5 bewiesen; denn (13) folgt aus (14).

Die bis jetzt behandelten Resultate sind Spezialfälle der in den §§ 2 und 3 zu beweisenden Sätze. Ich gehe jetzt zu dem folgenden Paragraphen, d. h. § 4 über. Das System

$$(15)\quad -\varepsilon < \sqrt{2}\,x^2 - y < \varepsilon, \qquad -\varepsilon < \sqrt{3}\,y^2 - z < \varepsilon$$

gehört zu den in diesem Paragraphen 4 untersuchten Problemen. Der Beweis, dass (15) unendlich viele ganzzahlige Lösungen x, y, z besitzt, geht so:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich $\varepsilon < \frac{1}{2}$ annehmen. Gilt

$$(16)\quad -\varepsilon < \sqrt{2}\,x^2 - y < \varepsilon,$$

so ist wegen $\varepsilon < \frac{1}{2}$

$$0 < \frac{1}{2} - \varepsilon < \left(\sqrt{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\right) - y < \frac{1}{2} + \varepsilon < 1,$$

also

$$y = \left[\sqrt{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\right],$$

somit

$$(17)\quad -\varepsilon < \sqrt{2}\,x^2 < \varepsilon \ \ (\text{mod. } 1) \ \text{ und } \ y = \left[\sqrt{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\right].$$

Umgekehrt folgt (16) aus (17), sodass das System (15) äquivalent mit

$$(18)\quad \begin{cases} -\varepsilon < \sqrt{2}\,x^2 < \varepsilon \quad (\text{mod. } 1) \\ -\varepsilon < \sqrt{3}\left[\sqrt{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\right]^2 < \varepsilon \quad (\text{mod. } 1) \end{cases}$$

ist, d. h. aus (15) folgt (18), und aus (18) folgt (15) bei geeignet gewählten ganzzahligen y und z. Wir wissen schon, dass das Polynom $\sqrt{2}\,x^2$ absolut rhythmisch ist, aber ich werde in § 4 zeigen, dass auch $\sqrt{3}\left[\sqrt{2}\,x^2+\frac{1}{2}\right]^2$ absolut rhythmisch ist. Die zwei in (18) vorkommenden Funktionen bilden somit ein rhythmisches System. System (18) hat die Lösung $x=0$, also nach Satz 4 unendlich viele ganzzahlige Lösungen x.

Hiermit ist nicht nur bewiesen, dass (15) unendlich viele ganzzahlige Lösungen (x, y, z) besitzt, sondern sogar, dass bei geeignet gewählter, nur von ε abhängiger Länge L jedes Intervall der Länge L wenigstens ein ganzes x enthält, das bei geeignet gewählten ganzzahligen y und z dem System (15) genügt.

Dieses Beispiel ist nur ein sehr spezieller Fall eines Satzes, den ich in § 4 beweisen werde, und den ich den Polynomsatz nenne. Dieser Namen befremdet vielleicht den Leser, weil ich in jedem der drei Teile dieser Arbeit eine grosse Anzahl von Sätzen beweise, in denen nur Polynome auftreten und also mit demselben Recht Polynomsätze genannt werden können. Nichtsdestoweniger habe ich den Namen Polynomsatz reserviert für den Satz, der den Gegenstand von § 4 bildet, da dieser Satz m. E. der wichtigste ist von allen neuen in dieser Arbeit behandelten Sätzen, in denen nur Polynome vorkommen.

In Teil I habe ich Systeme der Gestalt

$$\alpha_\nu < f_\nu(x_1, \ldots, x_m) - y_\nu < \beta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

behandelt, wo m und n feste natürliche Zahlen, α_ν und β_ν Konstanten, $f_\nu(x_1, \ldots, x_m)$ Polynome bezeichnen. In diesem System treten $m+n$ Unbekannten $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_n$ auf. Man beachte, dass hierbei die Unbekannten $y_1, \ldots, y_n$ in keinem einzigen der Polynome f_ν vorkommen dürfen. In § 4 von Teil II dagegen betrachte ich das viel allgemeinere System

$$(19)\qquad \begin{cases} \alpha_1 < f_1(x_1, \ldots, x_m) - y_1 < \beta_1 \\ \alpha_2 < f_2(x_1, \ldots, x_m, y_1) - y_2 < \beta_2 \\ \alpha_3 < f_3(x_1, \ldots, x_m, y_1, y_2) - y_3 < \beta_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n < f_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-1}) - y_n < \beta_n, \end{cases}$$

wo wiederum m und n feste natürliche Zahlen, α_ν und β_ν Konstanten, f_ν Polynome bezeichnen. Erfreulich ist, dass y_1 in $f_2, \ldots, f_n$, dass y_2 in $f_3, \ldots, f_n, \ldots$, dass y_{n-1} in f_n vorkommen darf. Der Polynomsatz besagt nun:

Satz 10: *Besitzt System (19) wenigstens eine ganzzahlige Lösung, so hat es unendlich viele ganzzahlige Lösungen, und dann enthält sogar bei geeignet gewählter Länge L jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L wenigstens einen Gitterpunkt* $(x_1, \ldots, x_m)$, *der bei geeignet gewähltem Gitterpunkt* $(y_1, \ldots, y_n)$ *System (19) erfüllt.*

System (15) ist nur ein sehr spezieller Fall von (19), sodass System (15), das die Lösung $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ besitzt, unendlich viele ganzzahlige Lösungen (x, y, z) hat.

Der Polynomsatz kann oft mit Erfolg angewendet werden um gegebene Zahlen durch Brüche mit Nebenbedingungen zu approximieren. Aus dem Polynomsatz folgt u. a.

Satz 11: *Ist* $\varepsilon > 0$, n *ganz* $\geqq 2$, *bezeichnen* $\theta_1, \ldots, \theta_n$ *beliebige reelle Zahlen,* $\chi_2(x_1, y_1)$, $\chi_3(x_1, y_1, x_2, y_2), \ldots, \chi_n(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1})$ *ganzzahlige Polynome ohne konstantes Glied, dann gibt es unendlich viele Systeme von Brüchen* $\frac{y_1}{x_1}, \ldots, \frac{y_n}{x_n}$ *mit*

$$(20) \qquad \begin{cases} x_2 = \chi_2(x_1, y_1) \\ x_3 = \chi_3(x_1, y_1, x_2, y_2) \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = \chi_n(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1}) \end{cases}$$

und

$$(21) \qquad \left|\theta_\nu - \frac{y_\nu}{x_\nu}\right| < \frac{\varepsilon}{|x_\nu|} \quad \text{oder } x_\nu = y_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Dann enthält sogar, bei geeignet gewählter Länge L, jedes Intervall der Länge L wenigstens ein ganzes x_1, *dem man die ganzen* $x_2, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ *so zuordnen kann, dass (20) und (21) gelten.*

Beweis von Satz 11: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $\varepsilon \leqq 1$ annehmen. Definiert man $x_2, \ldots, x_n$ durch (20), dann findet man

$$(22) \qquad \begin{cases} \theta_2 x_2 = f_2(x_1, y_1), \\ \theta_3 x_3 = f_3(x_1, y_1, y_2), \\ \cdots\cdots\cdots \\ \theta_n x_n = f_n(x_1, y_1, \ldots, y_{n-1}), \end{cases}$$

wo $f_2, \ldots, f_n$ Polynome ohne konstantes Glied bezeichnen. Setze ich

$$\theta_1 x_1 = f_1(x_1), \tag{23}$$

so besitzt das System

$$\begin{cases} -\varepsilon < f_1(x_1) - y_1 < \varepsilon \\ -\varepsilon < f_2(x_1, y_1) - y_2 < \varepsilon \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\varepsilon < f_n(x_1, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) - y_n < \varepsilon \end{cases} \tag{24}$$

die ganzzahlige Lösung

$$x_1 = y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0,$$

somit nach dem Polynomsatz (angewendet mit $m = 1$) unendlich viele ganzzahlige Lösungen. Der Polynomsatz besagt, dass sogar, bei geeignet gewählter Länge L, jedes Intervall der Länge L wenigstens eine ganze Zahl x_1 enthält, die bei geeignet gewählten ganzen $y_1, \ldots, y_n$ eine Lösung von (24) ist. Wegen (23) und (22) verwandelt (24) sich in

$$-\varepsilon < \theta_\nu x_\nu - y_\nu < \varepsilon \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

sodass (21) gilt, also Satz 11 bewiesen ist.

Bemerkung: Sind die in Satz 11 auftretenden Zahlen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ positiv, sind in jedem der Polynome χ_ν alle Koeffizienten $\geqq 0$, und ist keines der Polynome χ_ν identisch gleich Null, dann gibt es unendlich viele Systeme von Brüchen $\frac{y_1}{x_1}, \ldots, \frac{y_n}{x_n}$ mit positiven Nennern, derart dass die Beziehungen (20) gelten, und

$$\left|\theta_\nu - \frac{y_\nu}{x_\nu}\right| < \frac{\varepsilon}{x_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{25}$$

ist. Bei geeignet gewählter Länge L enthält sogar jedes Intervall $a \leqq x < a + L$ der Länge L mit positivem a wenigstens ein ganzes x_1, das bei geeignet gewählten positiven ganzen $x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ den Beziehungen (20) und (25) genügt.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich $\varepsilon \leqq 1$ annehmen. Nach Satz 11 ist es möglich die Länge L so zu wählen, dass jedes Intervall der Länge L wenigstens ein ganzes x_1 enthält, derart dass bei geeignet gewählten ganzzahligen $x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ die Beziehungen (20) und (21) gelten. Ich betrachte jetzt ein beliebiges Intervall $a \leqq x_1 < a + L$ mit positivem a. Dann ist auch x_1 positiv, sodass aus (21), mit $\nu = 1$ angewendet, folgt

$$\left|\theta_1 - \frac{y_1}{x_1}\right| < \frac{\varepsilon}{x_1}. \tag{26}$$

Wäre $y_1 \leqq 0$, so wäre, da θ_1 und x_1 positiv sind,

$$\left|\theta_1 - \frac{y_1}{x_1}\right| \geqq \left|\frac{y_1}{x_1}\right| \geqq \frac{1}{x_1} \geqq \frac{\varepsilon}{x_1}$$

und das ist mit (26) in Widerspruch. Folglich ist y_1 positiv.

Ich nehme nun an, dass ich schon bewiesen habe, dass

$$x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ \ldots;\ x_{\nu-1}, y_{\nu-1}$$

positiv sind $(2 \leqq \nu \leqq n)$. Da

$$\chi_\nu(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{\nu-1}, y_{\nu-1})$$

ein nicht identisch verschwindendes Polynom mit Koeffizienten $\geqq 0$ bezeichnet, folgt aus (20), dass x_ν positiv ist. Wegen (21) ist dann

$$\left|\theta_\nu - \frac{y_\nu}{x_\nu}\right| < \frac{\varepsilon}{x_\nu}. \tag{27}$$

Wäre $y_\nu \leqq 0$, so wäre, da θ_ν und x_ν positiv sind,

$$\left|\theta_\nu - \frac{y_\nu}{x_\nu}\right| \geqq \left|\frac{y_\nu}{x_\nu}\right| \geqq \frac{1}{x_\nu} \geqq \frac{\varepsilon}{x_\nu}$$

und das ist mit (27) in Widerspruch. Folglich ist y_ν positiv. Dieses Resultat gilt für jedes $\nu \geqq 2$ und $\leqq n$, sodass die Zahlen $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ positiv sind, und (25) aus (21) folgt.

Beispiel 6: Ist n ganz $\geqq 2$, $\varepsilon > 0$, bezeichnen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ positive Zahlen, dann gibt es unendlich viele Systeme von Brüchen $\frac{y_1}{x_1}, \ldots, \frac{y_n}{x_n}$ mit positiven Nennern, derart dass

$$\left|\theta_\nu - \frac{y_\nu}{x_\nu}\right| < \frac{\varepsilon}{x_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_2 = x_1 y_1; \quad x_3 = x_1 y_1 x_2 y_2; \ldots; \quad x_n = x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots x_{n-1} y_{n-1}$$

ist.

Beispiel 7: Ist $\varepsilon > 0$, n ganz $\geqq 2$ und bezeichnen $\theta_1, \ldots, \theta_n$ beliebige Zahlen, dann gibt es unendlich viele Systeme von Brüchen $\frac{y_1}{x_1}, \ldots, \frac{y_n}{x_n}$ mit

(28) $$\left|\theta_\nu - \frac{y_\nu}{x_\nu}\right| < \frac{\varepsilon}{|x_\nu|} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

und

(29) $$x_\nu = 2 x_{\nu-1}^\nu - y_{\nu-1}^\nu \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n).$$

Beweis: Ich wende Satz 11 an, und zwar mit

$$\chi_\nu(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{\nu-1}, y_{\nu-1}) = 2 x_{\nu-1}^\nu - y_{\nu-1}^\nu \quad (\nu = 2, 3, \ldots, n).$$

Ich wähle dabei $x_1 \neq 0$. Dann gilt (29), und aus (29) folgt $x_\nu \neq 0$ $(\nu = 2, \ldots, n)$, sodass (28) aus (21) folgt.

§ 2. Rhythmische Systeme.

Definition 1: *Bezeichnen $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ und $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ zwei Punkte im m-dimensionalen Raum, so werde ich mit $u + v$ den Punkt mit den Koordinaten $u_\mu + v_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ bezeichnen; hängt die Funktion f von m Veränderlichen ab, so wird mit $f(u+v)$ die Zahl $f(u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_m+v_m)$ gemeint.*

Definition 2[1]: *Ist das System (f_ν) in jedem Gitterpunkt des m-dimensionalen Raumes definiert, bezeichnet ε irgend eine positive Zahl, und $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ einen beliebigen Gitterpunkt im m-dimensionalen Raum, so nenne ich den Gitterpunkt $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ einen zu ε und x gehörigen Verschiebungspunkt von (f_ν), in Zeichen*

$$\tau = \tau(\varepsilon, x, f_\nu),$$

wenn für jeden Gitterpunkt $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit

[1] In Definition 3 von § 1 habe ich die entsprechende Erklärung für den Spezialfall mit $m = 1$ gegeben.

(1) $$|h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

die n Ungleichungen

(2) $$-\varepsilon < f_\nu(x+\tau+h) - f_\nu(x+h) < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten. (Im Spezialfall mit $m = 1$ *nenne ich* τ *eine zu* ε *und* x *gehörige Verschiebungszahl von* (f_ν)*).*

Definition 3[1]: *Ich nenne ein System* (f_ν) *rhythmisch, wenn jede Funktion* $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *in jedem im m-dimensionalen Raum liegenden Gitterpunkt* x *definiert ist, und jedem positiven* ε *eine nur von* ε *abhängige Länge* L, *in Zeichen*

$$L = L(\varepsilon, f_\nu),$$

zugeordnet werden kann, derart dass jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L *für jeden Gitterpunkt* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *wenigstens einen zu* ε *und* x *gehörigen Verschiebungspunkt* τ *von* (f_ν) *enthält. Ist* $n = 1$, *d. h. besteht das rhythmische System nur aus einer Funktion* $f_1(x)$, *so nenne ich diese Funktion rhythmisch.*

Satz 1[2]: *Ist* (f_ν) *rhythmisch, und hat das System*

(3) $$\alpha_\nu < f_\nu(x) < \beta_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

wenigstens eine ganzzahlige Lösung $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$, *so besitzt* (3) *unendlich viele ganzzahlige Lösungen* x, *und dann gibt es sogar eine, nur von* α_ν, β_ν *und* f_ν *abhängige Länge* L, *derart, dass jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante* L *wenigstens eine ganzzahlige Lösung* x *von* (3) *enthält.*

Beweis: Nach der Voraussetzung ist

$$\alpha_\nu < f_\nu(\bar{x}) < \beta_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

sodass bei geeignet gewähltem positivem ε

(4) $$\alpha_\nu + \varepsilon < f_\nu(\bar{x}) < \beta_\nu - \varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist.

[1] Den Spezialfall dieser Definition mit $m = 1$ findet der Leser in Definition 4 von § 1.

[2] Satz 4 in § 1 ist der Spezialfall dieses Satzes mit $m = 1$.

Da die Funktionen $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ ein rhythmisches System bilden, existiert nach Definition 3 eine nur von ε abhängige Länge L, derart, dass jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L wenigstens einen Gitterpunkt x mit

$$-\varepsilon < f_\nu(x) - f_\nu(\bar{x}) < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

enthält. Dieser Gitterpunkt x erfüllt (3), womit der zu beweisende Satz bewiesen ist.

Satz 2[1]: *Ein Teilsystem eines rhythmischen Systems ist rhythmisch, d. h. kommen alle Funktionen $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ in demselben rhythmischen System vor, dann ist (f_ν) rhythmisch.*

Insbesondere: jede Funktion eines rhythmischen Systems ist rhythmisch.

Beweis: Folgt unmittelbar aus der Definition der rhythmischen Systeme.

Satz 3: *Ein in jedem Gitterpunkt x definiertes System (f_ν) ist rhythmisch, wenn jedem positiven ε ein positives δ und ein rhythmisches System (φ_ϱ) mit folgender Eigenschaft zugeordnet werden können: für jeden Gitterpunkt x ist jeder zu δ und x gehörige Verschiebungspunkt von (φ_ϱ) ein zu ε und x gehöriger Verschiebungspunkt von (f_ν).*

Beweis: Es sei ε eine beliebige positive Zahl und es werde diesem ε ein positives δ mit der genannten Eigenschaft zugeordnet. Da (φ_ϱ) rhythmisch ist, existiert eine (nur von δ, also nur von ε abhängige) Länge $L = L(\delta, \varphi_\varrho)$. Jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Länge L enthält dann, wie auch der Gitterpunkt x gewählt wird, wenigstens einen zu δ und x gehörigen Verschiebungspunkt von (φ_ϱ), also wenigstens einen zu ε und x gehörigen Verschiebungspunkt von (f_ν). Folglich ist (f_ν) rhythmisch.

Satz 4[2] *(Additionstheorem): Ist (f_ν) rhythmisch, so ist auch $(f_\nu, f_1 + f_2)$ rhythmisch.*[3]

Beweis: Ist $\varepsilon > 0$, x ein Gitterpunkt, so ist jeder zu $\frac{1}{2}\varepsilon$ und x gehörige Verschiebungspunkt τ von (f_ν) jedenfalls ein zu ε und x gehöriger Verschiebungspunkt von $(f_\nu, f_1 + f_2)$. Denn ist

[1] Der Spezialfall mit $m = 1$ kommt in Satz 5 von § 1 vor.

[2] Der Leser findet den Spezialfall dieses Satzes mit $m = 1$ in Satz 1 von § 1. Nach der Definition ist z. B. (f_1, f_1, f_1) ein Teilsystem von (f_1, f_2) und auch von (f_2).

[3] Mit $(f_\nu, f_1 + f_2)$ wird natürlich das System der $n+1$ Funktionen $f_1, \ldots, f_n, f_1 + f_2$ gemeint.

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < f_\nu(x+\tau+h) - f_\nu(x+h) < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

für jeden Gitterpunkt $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit

$$|h_\mu| \leqq \frac{2}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

so gelten die Ungleichungen

$$\begin{cases} -\varepsilon < \{f_1(x+\tau+h) + f_2(x+\tau+h)\} - \{f_1(x+h) + f_2(x+h)\} < \varepsilon \pmod{1} \\ -\varepsilon < f_\nu(x+\tau+h) - f_\nu(x+h) < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

a fortiori für jeden Gitterpunkt h mit (1).

Nach dem vorigen Satz, angewendet mit $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$, (f_ν, f_1+f_2) statt (f_ν) und (f_ν) statt (φ_ϱ), ist (f_ν, f_1+f_2) rhythmisch.

Satz 5: *Ist (f_ν) rhythmisch, und bezeichnet c eine ganzzahlige Konstante, so ist (f_ν, cf_1) rhythmisch.*

Beweis[1]: Ist $\varepsilon > 0$, x ein Gitterpunkt, so ist jeder zu $\frac{\varepsilon}{1+|c|}$ und x gehörige Verschiebungspunkt τ von (f_ν) jedenfalls ein zu ε und x gehöriger Verschiebungspunkt von (f_ν, cf_1). Denn ist

$$-\frac{\varepsilon}{1+|c|} < f_\nu(x+\tau+h) - f_\nu(x+h) < \frac{\varepsilon}{1+|c|} \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

für jeden Gitterpunkt $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit

$$|h_\mu| \leqq \frac{1+|c|}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

so gelten, da c ganzzahlig ist, die Ungleichungen

$$\begin{cases} -\varepsilon < cf_1(x+\tau+h) - cf_1(x+h) < \varepsilon \pmod{1} \\ -\varepsilon < f_\nu(x+\tau+h) - f_\nu(x+h) < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

für jeden Gitterpunkt h mit (1).

Nach Satz 3, angewendet mit (f_ν, cf_1) statt (f_ν), mit (f_ν) statt (φ_ϱ) und mit

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1+|c|},$$

ist (f_ν, cf_1) rhythmisch.

[1] Anderer Beweis: Satz 5 ist für $c = 0$ evident, ergibt sich für $c > 0$ durch $(c-1)$-malige Anwendung von Satz 4, und ist nun für $c < 0$ klar, da dann $(f_\nu, -cf_1)$ rhytmisch ist.

Ich werde jetzt einen Satz ableiten, der für die Theorie der rhythmischen Systeme sehr nützlich sein wird.

Satz 6: *Ist (f_ν) in jedem Gitterpunkt x definiert und kann man jedem positiven ε und jedem Gitterpunkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ eine von ε und x abhängige Länge Δ zuordnen, derart, dass jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante Δ wenigstens einen zu ε und x gehörigen Verschiebungspunkt τ von (f_ν) enthält, dann ist (f_ν) rhythmisch.*

Beweis: Es sei ε eine positive Zahl < 1; N die kleinste ganze Zahl $> \frac{2}{\varepsilon}$; k die Anzahl der Gitterpunkte $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit (1). Ich verteile den nk-dimensionalen Kubus

$$0 \leqq u_\nu^{(h)} < 1,$$

wo ν die Reihe $1, 2, \ldots, n$ und h die Menge der Gitterpunkte mit (1) durchläuft, in N^{nk} gleiche Teilkuben, die ich K nennen werde. Jedem dieser Teilkuben K ordne ich, wenn möglich, einen Gitterpunkt x' zu, derart, dass der Punkt mit den nk Koordinaten

$$f_\nu(x' + h) - [f_\nu(x' + h)]$$

in K liegt. Die Anzahl der zugeordneten Punkte x' ist somit höchstens N^{nk}. Nach der Voraussetzung kann man jedem dieser Gitterpunkte x' eine Länge Δ' zuordnen, derart, dass jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante Δ' wenigstens einen zu $\frac{1}{2}\varepsilon$ und x' gehörigen Verschiebungspunkt von (f_ν) enthält. Bezeichnet L die grösste dieser Längen Δ', so behaupte ich, dass jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L für jeden Gitterpunkt x wenigstens einen zu ε und x gehörigen Verschiebungspunkt von (f_ν) enthält (und ist das bewiesen, so ist auch Satz 6 bewiesen).

Denn es sei $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ irgend ein Gitterpunkt. Der Punkt mit den nk Koordinaten

$$f_\nu(x + h) - [f_\nu(x + h)]$$

liegt in einem der genannten Teilkuben K. Diesem Teilkubus K ist also ein Punkt x' zugeordnet, und der Punkt mit den nk Koordinaten

$$f_\nu(x'+h) - [f_\nu(x'+h)]$$

liegt auch in diesem Teilkubus. Die Kante von K ist $\frac{1}{N} < \frac{1}{2}\varepsilon$, sodass für jeden Gitterpunkt h mit (1) die n Ungleichungen

$$(5) \qquad -\frac{1}{2}\varepsilon < f_\nu(x+h) - f_\nu(x'+h) < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten. Jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante Δ', also a fortiori jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L enthält wenigstens einen Gitterpunkt τ', der für jeden Gitterpunkt h mit (1) den n Ungleichungen

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < f_\nu(x'+\tau'+h) - f_\nu(x'+h) < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügt. Wird

$$\tau = x' - x + \tau'$$

gesetzt, so gilt daher wegen (5)

$$-\varepsilon < f_\nu(x+\tau+h) - f_\nu(x+h) < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

für jeden Gitterpunkt h mit (1), und jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L enthält wenigstens einen Gitterpunkt τ mit dieser Eigenschaft, womit der Beweis geliefert ist.

Satz 7 (*Erster Stetigkeitssatz*[1]): *Ist* (f_ν) *rhythmisch, ist* $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ *für jedes* $v = (v_1, \ldots, v_n)$ *definiert, periodisch mod.* 1 *und stetig mod.* 1, *dann ist auch*

$$(f_\nu, \psi(f_1, \ldots, f_n))$$

rhythmisch.

Vorbemerkung: In diesem Stetigkeitssatz darf die Voraussetzung, dass $\psi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ überall stetig mod. 1 ist, ersetzt werden durch die weniger fordernde Bedingung, dass $\psi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ in den Punkten $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$, wo x alle Gitterpunkte im m-dimensionalen Raum durchläuft, stetig mod. 1 ist.

Beweis: Es bezeichne ε eine positive Zahl, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ einen Gitterpunkt. Da $\psi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ periodisch mod. 1 und in den Punkten

[1] Der Spezialfall mit $m = 1$ kommt in Satz 2 von § 1 vor.

$$\{f_1(x+h),\ f_2(x+h),\ \ldots,\ f_n(x+h)\}$$

für jeden Gitterpunkt h mit (1) stetig mod. 1 ist, gibt es eine nur von ε und x abhängige positive Zahl $\delta < \varepsilon$, derart, dass für jeden Gitterpunkt h mit (1) aus

$$-\delta < v_\nu - f_\nu(x+h) < \delta \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

folgt

$$-\varepsilon < \psi(v_1, v_2, \ldots, v_n) - \psi(f_1(x+h), f_2(x+h), \ldots, f_n(x+h)) < \varepsilon \pmod{1}.$$

Hieraus ergibt sich, dass jeder zu δ und x gehörige Verschiebungspunkt τ von (f_ν) ein zu ε und x gehöriger Verschiebungspunkt von $(f_\nu,\ \psi(f_1, \ldots, f_n))$ ist. Denn wird der Gitterpunkt τ so gewählt, dass für jeden Gitterpunkt h mit

$$|h_\mu| \leqq \frac{1}{\delta} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

die Ungleichungen

$$-\delta < f_\nu(x+\tau+h) - f_\nu(x+h) < \delta \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten, so gelten diese Ungleichungen wegen $\delta < \varepsilon$ a fortiori für jeden Gitterpunkt h mit (1), und nach dem Obigen genügt dann jeder Gitterpunkt h mit (1) den Beziehungen

$$-\varepsilon < \psi(f_1(x+\tau+h), \ldots, f_n(x+\tau+h)) - \psi(f_1(x+h), \ldots, f_n(x+h)) < \varepsilon \pmod{1},$$

sodass jeder zu δ und x gehörige Verschiebungspunkt τ von (f_ν) in der Tat ein zu ε und x gehöriger Verschiebungspunkt τ von $(f_\nu,\ \psi(f_1, \ldots, f_n))$ ist.

Da (f_ν) rhythmisch ist, existiert eine nur von δ, also eine nur von ε und x abhängige Länge Δ, derart, dass jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante Δ wenigstens einen zu δ und x gehörigen Verschiebungspunkt von (f_ν) enthält. Jeder derartige Kubus enthält somit mindestens einen zu ε und x gehörigen Verschiebungspunkt von $(f_\nu,\ \psi(f_1, \ldots, f_n))$, sodass dieses System nach dem vorigen Satz rhythmisch ist.

Satz 8 (*Konvergenzsatz*): *Es sei l ganz $\geqq 0$, es sei eine Folge S_ϱ $(\varrho = 1, 2, \ldots)$ von rhythmischen Systemen*

$$S_\varrho = (f_\lambda,\ \varphi_\varrho)$$

gegeben, und es mögen die Funktionen $\varphi_\varrho(x)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots)$ eine gleichmässig konver-

gente Funktionenfolge mit Grenzfunktion $\varphi(x)$ bilden. Dann ist (f_λ, φ) rhythmisch.[1]

Beweis: Wegen der gleichmässigen Konvergenz kann man jedem positiven ε eine natürliche Zahl r zuordnen, derart, dass für alle Gitterpunkte $\bar{x}$

$$|\varphi_r(\bar{x}) - \varphi(\bar{x})| < \frac{1}{3}\varepsilon \tag{6}$$

ist.

Jeder zu $\frac{1}{3}\varepsilon$ und einem Gitterpunkt x gehörige Verschiebungspunkt τ von (f_λ, φ_r) ist ein zu ε und x gehöriger Verschiebungspunkt von (f_λ, φ). Denn ist

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}\varepsilon < f_\lambda(x+\tau+h) - f_\lambda(x+h) < \frac{1}{3}\varepsilon \pmod{1} & (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \\ -\frac{1}{3}\varepsilon < \varphi_r(x+\tau+h) - \varphi_r(x+h) < \frac{1}{3}\varepsilon \pmod{1} & \end{cases}$$

für jeden Gitterpunkt $h = (h_1, \ldots, h_m)$ mit

$$|h_\mu| \leqq \frac{3}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

so gelten wegen (6), angewendet mit $\bar{x} = x + h$ und mit $\bar{x} = x + \tau + h$ die Ungleichungen

$$\begin{cases} -\varepsilon < f_\lambda(x+\tau+h) - f_\lambda(x+h) < \varepsilon \pmod{1} & (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \\ -\varepsilon < \varphi(x+\tau+h) - \varphi(x+h) < \varepsilon \pmod{1} & \end{cases}$$

für jeden Gitterpunkt h mit

$$|h_\mu| \leqq \frac{3}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

also a fortiori für jeden Gitterpunkt mit (1).

Da (f_λ, φ_r) rhythmisch ist, ist nach Satz 3 auch (f_λ, φ) rhythmisch.

Definition 4: *Ist (f_ν) in jedem Gitterpunkt des m-dimensionalen Raumes definiert, und bezeichnet x irgend einen Gitterpunkt in diesem Raume, so werde ich mit $M_x(f_\nu)$ die Menge der Punkte $u = (u_1, \ldots, u_n)$ mit folgender Eigenschaft*

---

[1] S_ϱ ist somit das System $(f_1, \ldots, f_l, \varphi_\varrho)$. Ist $l = 0$, so besteht S_ϱ nur aus der einen Funktion $\varphi_\varrho(x)$.

bezeichnen: jedem positiven ε *entspricht mindestens ein Gitterpunkt* $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$, *derart, dass für jeden Gitterpunkt* $h = (h_1, \ldots, h_m)$ *mit*

$$(7) \qquad |h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

die n *Ungleichungen*

$$(8) \qquad -\varepsilon < f_\nu(x + \tau + h) - f_\nu(x + h) - u_\nu < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten.

Ich schicke dem Hauptsatz sieben Hilfssätze voran. In diesen Hilfssätzen betrachte ich ein in jedem Gitterpunkt x definiertes System (f_ν) und das System $(\varDelta_\mu f_\nu)$, das aus den mn Funktionen

$$\varDelta_\mu f_\nu(x) = f_\nu(x_1, \ldots, x_{\mu-1}, x_\mu + 1, x_{\mu+1}, \ldots, x_m) - f_\nu(x_1, \ldots, x_m)$$
$$(\nu = 1, \ldots, n;\ \mu = 1, \ldots, m)$$

besteht, und ich setze voraus, dass $(\varDelta_\mu f_\nu)$ rhythmisch ist (der zu beweisende Hauptsatz besagt, dass (f_ν) dann und nur dann rhythmisch ist, wenn $(\varDelta_\mu f_\nu)$ es ist).

Hilfssatz 1: $M_x(f_\nu)$ *ist abgeschlossen.*

Beweis: Es sei $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ Häufungspunkt von $M_x(f_\nu)$, sodass jedem positiven ε ein Punkt $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ von $M_x(f_\nu)$ zugeordnet werden kann mit

$$(9) \qquad |u_\nu - v_\nu| < \frac{1}{2}\varepsilon \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Da u in $M_x(f_\nu)$ liegt, existiert ein Gitterpunkt τ, der für jeden Gitterpunkt h mit (7) den n Ungleichungen

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < f_\nu(x + \tau + h) - f_\nu(x + h) - u_\nu < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

also wegen (9) den n Ungleichungen

$$-\varepsilon < f_\nu(x + \tau + h) - f_\nu(x + h) - v_\nu < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügt, sodass v in $M_x(f_\nu)$ liegt, also $M_x(f_\nu)$ abgeschlossen ist.

Definition 5: *Ich sage, dass eine n-dimensionale Menge M periodisch ist, wenn jeder zu M gehörige Punkt* $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *die Eigenschaft besitzt, dass M alle Punkte* $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *mit*

$$v_\nu \equiv u_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

enthält.

Nach dieser Definition ist also jeder im n-dimensionalen Raum liegende Gitterpunkt eine Periode jeder n-dimensionalen periodischen Menge.

Hilfssatz 2: $M_x(f_\nu)$ *ist periodisch.*

Beweis: Folgt unmittelbar aus der Definition von $M_x(f_\nu)$.

Definition 6: *Ich nenne eine nicht-leere n-dimensionale Menge M einen Modul, wenn jedes Paar von in M liegenden Punkten* $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *und* $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *die Eigenschaft besitzt, dass auch* $u + v$ *und* $u - v$ *in M liegen.*

Enthält ein Modul M den Punkt $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, so enthält er also auch den Punkt $u - u$, d. h. den Koordinatenursprung, und gleichfalls den Punkt $(-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$.

Hilfssatz 3: *Besitzt jedes in einer abgeschlossenen periodischen Menge M liegende Punktepaar u und v die Eigenschaft, dass* $u + v$ *in M liegt, dann ist M ein Modul.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass jedes in M liegende Punktepaar $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ und $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ die Eigenschaft besitzt, dass $u - v$ in M liegt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich annehmen, dass v kein Gitterpunkt ist, da sonst die Behauptung unmittelbar aus der Periodizität von M folgt. Ich kann also die natürliche Zahl N so gross wählen, dass das System

$$(10) \qquad -\frac{1}{N} \leqq v_\nu \leqq \frac{1}{N} \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

nicht erfüllt ist.

Ich betrachte nun $N^n + 1$ Punkte $v^{(k)}$, wo k die Reihe $1, 2, \ldots, N^n + 1$ durchläuft, deren Koordinaten eindeutig durch

$$v_\nu^{(k)} \equiv k v_\nu \pmod{1}, \qquad 0 \leqq v_\nu^{(k)} < 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

festgelegt werden. Verteilen wir den Kubus

$$0 \leqq \omega_\nu < 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

in N^n gleiche Teilkuben $\left(\text{mit Kante } \frac{1}{N}\right)$, so enthält wenigstens einer dieser Teilkuben mindestens zwei dieser Punkte $v^{(k)}$. Es gibt also wenigstens zwei ganze Zahlen k und K mit

$$(11) \qquad 1 \leqq k < K \leqq N^n + 1; \; -\frac{1}{N} \leqq (K-k)v_\nu \leqq \frac{1}{N} \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Da (10) nicht gilt, so ist $K - k \neq 1$, also $\geqq 2$.

Die Menge M, die den Punkt $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ enthält, enthält nach der Voraussetzung auch die Punkte $(hv_1, hv_2, \ldots, hv_n)$, wo h positiv ganz ist. Wegen der Periodizität von M liegt dann in M auch der Punkt $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, definiert durch

$$w_\nu \equiv (K - k - 1)v_\nu \pmod{1}, \quad 0 \leqq w_\nu < 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus (11) folgt

$$(12) \qquad -\frac{1}{N} \leqq w_\nu - (-v_\nu) \leqq \frac{1}{N} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

sodass jedem hinreichend grossen ganzen N ein Punkt w von M mit (12) entspricht. Folglich ist der Punkt $-v = (-v_1, -v_2, \ldots, -v_n)$ Häufungspunkt der abgeschlossenen Menge M, liegt also in M. Die Menge M enthält dann die Punkte u und $-v$, somit auch deren Summe $u - v$, womit alles bewiesen ist.

Hilfssatz 4: *$M_x(f_\nu)$ ist ein Modul.*

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$. Liegt $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ in $M_x(f_\nu)$, dann existiert ein Gitterpunkt $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, der für jeden Gitterpunkt $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit

$$(13) \qquad |h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

den n Ungleichungen

$$(14) \qquad -\frac{1}{2}\varepsilon < f_\nu(x + \tau + h) - f_\nu(x + h) - u_\nu < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügt. Liegt $u' = (u'_1, u'_2, \ldots, u'_n)$ in $M_x(f_\nu)$, dann existiert nach Definition 4 (mit u'_ν statt u_ν, und mit der kleinsten der Zahlen $\dfrac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + |\tau_\mu|}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ und $\frac{1}{2}\varepsilon$ statt ε angewendet) ein Gitterpunkt $\tau' = (\tau'_1, \tau'_2, \ldots, \tau'_m)$, der für jeden Gitterpunkt $h' = (h'_1, h'_2, \ldots, h'_m)$ mit

$$(15) \qquad |h'_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} + |\tau_\mu| \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

den Ungleichungen

$$(16) \qquad -\frac{1}{2}\varepsilon < f_\nu(x+\tau'+h') - f_\nu(x+h') - u'_\nu < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügt. Setzt man $\tau + h = h'$, so gelten für jeden Gitterpunkt h mit (13) die Beziehungen (15), also auch die Relationen (16), die dann, wenn $\tau'' = \tau + \tau'$ gesetzt wird, die Gestalt

$$(17) \qquad -\frac{1}{2}\varepsilon < f_\nu(x+\tau''+h) - f_\nu(x+\tau+h) - u'_\nu < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

annehmen. Aus (14) und (17) folgt

$$(18) \qquad -\varepsilon < f_\nu(x+\tau''+h) - f_\nu(x+h) - (u_\nu + u'_\nu) < \varepsilon \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Hiermit ist bewiesen, dass jedem positiven ε ein Punkt τ'' zugeordnet werden kann, derart dass (18) für jeden Gitterpunkt h mit (13) gilt. Folglich liegt $u + u'$ in der Menge $M_x(f_\nu)$, sodass diese Menge nach den vorigen Hilfssätzen ein Modul ist.

Definition 7: *Ich nenne $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ Häufungspunkt mod. 1 einer Menge M, wenn jedem positiven ε unendlich viele Punkte $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ von M mit*

$$-\varepsilon < u_\nu - v_\nu < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

zugeordnet werden können.

Es ist klar, dass jede unendliche Menge wenigstens einen Häufungspunkt mod. 1 besitzt.

Hilfssatz 5: *Jedem positiven δ und jedem Gitterpunkt x kann man eine nur von δ und x abhängige positive Zahl $\alpha = \alpha(\delta, x)$ zuordnen, derart, dass jeder zu α und x gehörige Verschiebungspunkt τ von $(\Delta_\mu f_\nu)$ die Eigenschaft besitzt, dass der Punkt*

$$(19) \qquad (f_1(x+\tau) - f_1(x), f_2(x+\tau) - f_2(x), \ldots, f_n(x+\tau) - f_n(x))$$

weniger als δ vom Modul $M_x(f_\nu)$ entfernt ist.

Beweis: Ich nehme an, dass es möglich sei ein positives δ und einen Gitterpunkt x so zu wählen, dass die Behauptung nicht richtig ist. Dann entspricht jedem positiven α einer zu α und x gehöriger Verschiebungspunkt τ von $(\varDelta_\mu f_\nu)$ mit der Eigenschaft, dass der in (19) genannte Punkt eine Entfernung $\geqq \delta$ zu $M_x(f_\nu)$ besitzt.

Es strebe α nach Null. Die in (19) genannten Punkte, wo x fest, τ von α abhängig ist, bilden eine unendliche Menge. Es sei $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ein Häufungspunkt mod. 1 dieser Menge, und es bezeichne ε eine positive Zahl $< \delta$ und < 1. Dann existiert ein zu $\alpha = \frac{\varepsilon^2}{2m}$ und x gehöriger Verschiebungspunkt τ von $(\varDelta_\mu f_\nu)$ mit

$$(20) \qquad -\frac{1}{2}\varepsilon < f_\nu(x+\tau) - f_\nu(x) - u_\nu < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Da τ ein zu $\frac{\varepsilon^2}{2m}$ und x gehöriger Verschiebungspunkt von $(\varDelta_\mu f_\nu)$ ist, gelten für jeden Gitterpunkt $h^* = (h_1^*, h_2^*, \ldots, h_m^*)$ mit

$$|h_\mu^*| \leqq \frac{2m}{\varepsilon^2} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

also a fortiori für jeden Gitterpunkt h^* mit

$$(21) \qquad |h_\mu^*| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

die mn Ungleichungen

$$(22) \qquad -\frac{\varepsilon^2}{2m} < \varDelta_\mu f_\nu(x+\tau+h^*) - \varDelta_\mu f_\nu(x+h^*) < \frac{\varepsilon^2}{2m} \pmod{1}$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Nun kann

$$\{f_\nu(x+\tau+h) - f_\nu(x+h)\} - \{f_\nu(x+\tau) - f_\nu(x)\}$$

geschrieben werden als Summe von

$$(23) \qquad |h_1| + |h_2| + \cdots + |h_m|$$

Gliedern der Gestalt

$$\varDelta_\mu f_\nu(x+\tau+h^*) - \varDelta_\mu f_\nu(x+h^*) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

mit

$$|h_\mu{}^*| \leqq |h_\mu| \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m), \tag{24}$$

in Formel

$$\begin{aligned}\{f_\nu(x+\tau+h) - f_\nu(x+h)\} - \{f_\nu(x+\tau) - f_\nu(x)\} = \\ = \Sigma^{(\nu)}\{\Delta_\mu f_\nu(x+\tau+h^*) - \Delta_\mu f_\nu(x+h^*)\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).\end{aligned} \tag{25}$$

Wählen wir für h einen Gitterpunkt mit

$$|h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m), \tag{26}$$

so ist die in (23) genannte Gliederanzahl der Summe $\Sigma^{(\nu)}$ höchstens $\frac{m}{\varepsilon}$. Ausserdem gelten dann wegen (24) die Ungleichungen (21), also auch die Beziehungen (22) für jedes Glied der Summe $\Sigma^{(\nu)}$, sodass

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < \Sigma^{(\nu)} < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{27}$$

ist.

Aus (25), (20) und (27) folgt

$$-\varepsilon < f_\nu(x+\tau+h) - f_\nu(x+h) - u_\nu < \varepsilon \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

gültig für jeden Gitterpunkt h mit (26). Folglich liegt u in $M_x(f_\nu)$, und das kann nicht, da u Häufungspunkt mod. 1 einer Menge ist, deren Entfernung zu der periodischen Menge $M_x(f_\nu)$ grösser als oder gleich δ ist. Hiermit ist der Widerspruch gefunden.

Hilfssatz 6: *Jedem positiven δ und jedem Gitterpunkt x kann man eine, nur von δ und x abhängige positive Zahl $\beta = \beta(\delta, x)$ zuordnen mit folgender Eigenschaft: wird der Punkt $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ in $M_x(f_\nu)$ beliebig gewählt, so existiert ein Gitterpunkt $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ mit*

$$|\tau_\mu| \leqq \beta \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m), \tag{28}$$

der für jeden Gitterpunkt $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit

$$|h_\mu| \leqq \frac{1}{\delta} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{29}$$

den n Ungleichungen

$$(30) \qquad -\delta < f_\nu(x+\tau+h) - f_\nu(x+h) - u_\nu < \delta \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügt.

Beweis: Es sei N die kleinste ganze Zahl $> \frac{2}{\delta}$ und > 1. Ich verteile den n-dimensionalen Kubus

$$0 \leqq u_\nu < 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

in N^n gleiche Teilkuben K $\left(\text{mit Kante } \frac{1}{N}\right)$, und in jedem dieser Teilkuben K wähle ich, wenn möglich, einen Punkt v von $M_x(f_\nu)$. Die Anzahl der ausgewählten Punkte v ist somit höchstens N^n. Da jeder dieser Punkte v in $M_x(f_\nu)$ liegt, kann man jedem dieser v einen Gitterpunkt $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ zuordnen, der für jeden Gitterpunkt h mit (29) den n Ungleichungen

$$(31) \qquad -\frac{1}{2}\delta < f_\nu(x+\tau+h) - f_\nu(x+h) - v_\nu < \frac{1}{2}\delta \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügt. Die Anzahl der in Betracht kommenden Gitterpunkte τ ist somit höchstens N^n. Wird β so gewählt, dass für alle in Betracht kommenden Gitterpunkte τ

$$(32) \qquad |\tau_\mu| \leqq \beta \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

ist, dann behaupte ich, dass dieses β die verlangte Eigenschaft besitzt.

Denn es sei $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ irgend ein Punkt der Menge $M_x(f_\nu)$. Wegen der Periodizität dieser Menge gehört dann der Punkt $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, definiert durch

$$w_\nu \equiv u_\nu \pmod{1}, \quad 0 \leqq w_\nu < 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

auch dieser Menge an. Dieser Punkt w von $M_x(f_\nu)$ liegt in einem der Teilkuben K, und dieser Teilkubus K enthält verabredetermassen einen ausgewählten Punkt v von $M_x(f_\nu)$. Dann ist

$$(33) \qquad |w_\nu - v_\nu| < \frac{1}{N} < \frac{1}{2}\delta \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Bezeichnet τ den dem Punkte v zugeordneten Gitterpunkt, so folgt (28) aus (32); (30) aus (31), (33) und $w_\nu \equiv u_\nu \pmod{1}$.

Hilfssatz 7: *Jedem positiven ε und jedem Gitterpunkt x kann man eine, nur von ε und x abhängige Länge Δ zuordnen, derart, dass jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante Δ, für jeden Punkt u von $M_x(f_\nu)$ einen Gitterpunkt $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ enthält, der für jeden Gitterpunkt $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit*

$$(34) \qquad |h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

den n · Ungleichungen

$$(35) \qquad -\varepsilon < f_\nu(x+\tau+h) - f_\nu(x+h) - u_\nu < \varepsilon \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügt.

Beweis von Hilfssatz 7.

Ich darf $\varepsilon < 1$ annehmen, da sonst (35) klar ist.

Erster Schritt: Es bezeichne $\alpha = \alpha\left(\frac{1}{3}\varepsilon, x\right)$ die in Hilfssatz 5, $\beta = \beta\left(\frac{1}{3}\varepsilon, x\right)$ die in Hilfssatz 6 genannte Zahl, und es sei γ die kleinste der zwei Zahlen α und $\dfrac{\varepsilon}{3m\left(\beta + \frac{1}{\varepsilon}\right)}$, sodass

$$(36) \qquad \gamma \leqq \alpha, \qquad \gamma m\left(\beta + \frac{1}{\varepsilon}\right) \leqq \frac{1}{3}\varepsilon$$

ist.

Nach der Voraussetzung, die Hilfssatz 1 vorangeht, ist $(\Delta_\mu f_\nu)$ rhythmisch, sodass eine nur von γ, also nur von ε und x abhängige Länge Δ' existiert, derart, dass jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante Δ' wenigstens einen zu γ und x gehörigen Verschiebungspunkt τ' von $(\Delta_\mu f_\nu)$ enthält. Ich werde zeigen, dass die Länge $\Delta = \Delta' + 2\beta$ die verlangte Eigenschaft besitzt.

Zweiter Schritt: Jedem zu γ und x gehörigen Verschiebungspunkt τ' von $(\Delta_\mu f_\nu)$ kann mindestens ein Punkt $u' = (u'_1, u'_2, \ldots, u'_n)$ von $M_x(f_\nu)$ zugeordnet werden, derart, dass jeder Gitterpunkt $h' = (h'_1, h'_2, \ldots, h'_m)$ mit

$$(37) \qquad |h'_\mu| \leqq \beta + \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

den Ungleichungen

$$(38) \qquad -\frac{2}{3}\varepsilon < f_\nu(x+\tau'+h') - f_\nu(x+h') - u'_\nu < \frac{2}{3}\varepsilon \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügt.

Beweis: Der Verschiebungspunkt τ' gehört zu γ und x, also wegen (36) zu α und x. Wegen

$$\alpha = \alpha\left(\frac{1}{3}\varepsilon, x\right)$$

ist nach Hilfssatz 5 der Punkt mit den n Koordinaten

$$f_\nu(x+\tau') - f_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

weniger als $\frac{1}{3}\varepsilon$ von $M_x(f_\nu)$ entfernt, sodass in $M_x(f_\nu)$ wenigstens ein Punkt $u' = (u'_1, u'_2, \ldots, u'_n)$ mit

(39) $$|f_\nu(x+\tau') - f_\nu(x) - u'_\nu| < \frac{1}{3}\varepsilon \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

liegt. Bezeichnet $h' = (h'_1, h'_2, \ldots, h'_m)$ irgend einen Gitterpunkt mit (37), so kann die Zahl

$$\{f_\nu(x+\tau'+h') - f_\nu(x+h')\} - \{f_\nu(x+\tau') - f_\nu(x)\}$$

geschrieben werden als Summe von

(40) $$|h'_1| + |h'_2| + \cdots + |h'_m|$$

Gliedern der Gestalt

$$\Delta_\mu f_\nu(x+\tau'+h) - \Delta_\mu f_\nu(x+h) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

mit

(41) $$|h_\mu| \leqq |h'_\mu| \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

in Formel

(42) $$\{f_\nu(x+\tau'+h') - f_\nu(x+h')\} - \{f_\nu(x+\tau') - f_\nu(x)\} = \\ = \Sigma^{(\nu)}\{\Delta_\mu f_\nu(x+\tau'+h) - \Delta_\mu f_\nu(x+h)\} \\ (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Die in (40) angegebene Gliederanzahl der Summe $\Sigma^{(\nu)}$ ist wegen (37) höchstens $m\left(\beta + \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Da τ' ein zu γ und x gehöriger Verschiebungspunkt von $(\Delta_\mu f_\nu)$ ist und wegen (41), (37), (36) und $\varepsilon < 1$

$$|h_\mu| \leqq \frac{1}{\gamma} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

ist, liegt jedes Glied der Summe $\Sigma^{(\nu)}$, mod. 1 genommen, zwischen $-\gamma$ und γ, sodass wegen (36)

$$(43) \qquad -\frac{1}{3}\varepsilon < \Sigma^{(\nu)} < \frac{1}{3}\varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Aus (42), (43) und (39) folgt (38).

Dritter Schritt: Jedem Punkt u von $M_x(f_\nu)$ und jedem zu ε und x gehörigen Verschiebungspunkt τ' von $(\Delta_\mu f_\nu)$ kann man einen Gitterpunkt $\tau'' = (\tau''_1, \tau''_2, \ldots, \tau''_m)$ mit

$$(44) \qquad |\tau''_\mu| \leqq \beta \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

zuordnen, derart, dass jeder Gitterpunkt h mit (34) den n Ungleichungen

$$(45) \qquad -\varepsilon < f_\nu(x+\tau'+\tau''+h) - f_\nu(x+h) - u_\nu < \varepsilon \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügt.

Beweis: Ich wähle den Punkt u' von $M_x(f_\nu)$, wie im zweiten Schritt angegeben. Der Modul $M_x(f_\nu)$ enthält dann die Punkte u und u', also auch $u - u'$. Wegen $\beta = \beta\left(\frac{1}{3}\varepsilon, x\right)$ existiert nach Hilfssatz 6 ein Gitterpunkt τ'' mit (44), der für alle Gitterpunkte h mit

$$|h_\mu| \leqq \frac{3}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

also a fortiori für jeden Gitterpunkt h mit (34) den Ungleichungen

$$(46) \qquad -\frac{1}{3}\varepsilon < f_\nu(x+\tau''+h) - f_\nu(x+h) - (u_\nu - u'_\nu) < \frac{1}{3}\varepsilon \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügt.

Wird $\tau'' + h = h'$ gesetzt, so gelten für jeden Gitterpunkt h mit (34) wegen (44) die Ungleichungen (37), also die Beziehungen (38), die dann die Gestalt

$$-\frac{2}{3}\varepsilon < f_\nu(x+\tau'+\tau''+h) - f_\nu(x+\tau''+h) - u'_\nu < \frac{2}{3}\varepsilon \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

annehmen. Mit Rücksicht auf (46) folgt hieraus (45).

Vierter und letzter Schritt: Beweis, dass $\Delta = \Delta' + \beta$ die verlangte Eigenschaft besitzt.

Beweis: Es sei K ein beliebiger m-dimensionaler, den Koordinatenachsen parallel orientierter Kubus mit Kante Δ, und es bezeichne K' den m-dimensionalen, den Koordinatenachsen parallel orientierten Kubus mit Kante Δ' und mit demselben Mittelpunkt wie K. Nach dem ersten Schritt enthält K' wenigstens einen zu γ und x gehörigen Verschiebungspunkt τ' von $(\Delta_\mu f_\nu)$. Wegen (44) liegt dann der im dritten Schritt definierte Punkt $\tau = \tau' + \tau''$ in K, und aus (45) folgt, dass dann (35) für jeden Gitterpunkt h mit (34) gilt.

Hiermit ist Hilfssatz 7 vollständig bewiesen.

Wir sind jetzt mit unseren sieben Hilfssätzen fertig und können nun zum Beweis des Hauptsatzes übergehen.

Satz 9 (*Hauptsatz*[1]): *(f_ν) ist dann und nur dann rhythmisch, wenn $(\Delta_\mu f_\nu)$ rhythmisch ist.*

Vorbemerkung: Ich werde zugleich beweisen: ist (f_ν) rhythmisch, so ist auch $(f_\nu, \Delta_\mu f_\nu)$ rhythmisch.[2]

Beweis: 1. Es sei (f_ν) rhythmisch. Dann ist $f_\nu(x)$, also auch $\Delta_\mu f_\nu(x)$ in jedem Gitterpunkt x definiert. Ist $\varepsilon > 0$ und bezeichnet x irgend einen Gitterpunkt, so ist jeder zu $\frac{1}{2}\varepsilon$ und x gehörige Verschiebungspunkt τ von (f_ν) ein zu ε und x gehöriger Verschiebungspunkt von $(f_\nu, \Delta_\mu f_\nu)$. Denn ist

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < f_\nu(x+\tau+h) - f_\nu(x+h) < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

für jeden Gitterpunkt $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit

$$|h_\mu| \leqq \frac{2}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

dann gelten die Ungleichungen

$$(47) \qquad -\varepsilon < \Delta_\mu f_\nu(x+\tau+h) - \Delta_\mu f_\nu(x+h) < \varepsilon \pmod{1}$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

für jeden Gitterpunkt $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit

$$(48) \qquad |h_\mu| \leqq \frac{2}{\varepsilon} - 1 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

[1] Den Spezialfall dieses Satzes mit $m = 1$ habe ich in Satz 3 von § 1 formuliert.

[2] Das System $(f_\nu, \Delta_\mu f_\nu)$ besteht natürlich aus den $n + mn$ Funktionen f_ν und $\Delta_\mu f_\nu$.

Ist $\varepsilon > \frac{1}{2}$, so gilt (47) für jeden Gitterpunkt h; ist $\varepsilon \leqq \frac{1}{2}$, so gilt (47) für jeden Gitterpunkt h mit (48), also a fortiori für jeden Gitterpunkt h mit

$$|h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \tag{49}$$

Hiermit ist bewiesen, dass jedenfalls (47) für jeden Gitterpunkt h mit (49) gilt, sodass τ ein zu ε und x gehöriger Verschiebungspunkt von $(f_\nu, \Delta_\mu f_\nu)$ ist.

Da (f_ν) rhythmisch ist, ist nach Satz 3, angewendet mit $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$, auch $(f_\nu, \Delta_\mu f_\nu)$ rhythmisch. Folglich ist auch das Teilsystem $(\Delta_\mu f_\nu)$ von $(f_\nu, \Delta_\mu f_\nu)$ nach Satz 2 rhythmisch.

2. Es sei $(\Delta_\mu f_\nu)$ rhythmisch. Nach Hilfssatz 7, angewendet für den Spezialfall, dass u mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt, kann man jedem positiven ε und jedem Gitterpunkt x eine, nur von ε und x abhängige Länge Δ zuordnen, derart, dass jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante Δ wenigstens einen Gitterpunkt τ enthält, der für jeden Gitterpunkt h mit

$$|h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

den Ungleichungen

$$-\varepsilon < f_\nu(x+\tau+h) - f_\nu(x+h) < \varepsilon \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügt. Dann ist τ ein zu ε und x gehöriger Verschiebungspunkt von (f_ν), sodass (f_ν) nach Satz 6 rhythmisch ist.

§ 3. Absolut rhythmische Funktionen.

Definition 1[1]: *Ich nenne eine Funktion*

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$$

absolut rhythmisch, wenn jedes rhythmische System (g_ϱ), *bestehend aus* r *Funktionen*

$$g_\varrho(x) = g_\varrho(x_1, \ldots, x_m) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

die Eigenschaft besitzt, dass auch das System (g_ϱ, f) *rhythmisch ist.*

[1] Den Spezialfall dieser Erklärung mit $m = 1$ findet der Leser in Definition 7 von § 1.

Satz 1: *Ist* (g_ϱ) *rhythmisch, und sind die* n *Funktionen* $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ *absolut rhythmisch, so ist* (g_ϱ, f_ν) *rhythmisch.*[1]

Beweis: Der Spezialfall mit $n = 1$ folgt unmittelbar aus der Definition der absolut rhythmischen Funktionen. Ist $n \geqq 2$, und ist der Satz mit $n - 1$ statt n schon bewiesen, dann ist das System der Funktionen

$$g_1(x),\, g_2(x),\, \ldots,\, g_r(x),\;\; f_1(x),\, f_2(x),\, \ldots,\, f_{n-1}(x)$$

rhythmisch. Wegen des absoluten Rhythmus von $f_n(x)$ ist dann auch das System (g_ϱ, f_ν) rhythmisch.

Satz 2[2]**:** *Ein System, das aus einer endlichen Anzahl von absolut rhythmischen Funktionen besteht, ist rhythmisch.*

Vorbemerkung: Im Spezialfall, dass das System aus nur einer Funktion besteht, bekommt man den Satz:

Eine absolut rhythmische Funktion ist rhythmisch.

Beweis: Es sei

$$g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

irgend eine rhythmische Funktion. Sind die Funktionen

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

absolut rhythmisch, dann bilden nach dem vorigen Satze, angewendet mit $r = 1$, die Funktionen

$$g(x),\, f_1(x),\, f_2(x),\, \ldots,\, f_n(x)$$

ein rhythmisches System, und Satz 2 von § 2 besagt, dass dann auch das Teilsystem

$$f_1(x),\, f_2(x),\, \ldots,\, f_n(x)$$

rhythmisch ist.

Hiermit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Satz 3 (*Additionstheorem*[3]): *Die Summe von zwei absolut rhythmischen Funktionen ist absolut rhythmisch.*

---

[1] (g_ϱ, f_ν) besteht natürlich aus den $r + n$ Funktionen g_ϱ und f_ν $(\varrho = 1, \ldots, r;\; \nu = 1, \ldots, n)$.

[2] Satz 9 von § 1 enthält den Spezialfall mit $m = 1$.

[3] Den Spezialfall mit $m = 1$ findet man in Satz 6 von § 1.

Beweis: Ich wähle ein beliebiges rhythmisches System (g_ϱ) und zwei absolut rhythmische Funktionen f_1 und f_2.

Nach Satz 1, angewendet mit $n=2$, ist (g_ϱ, f_1, f_2) rhythmisch. Das Additionstheorem des vorigen Paragraphen (Satz 4 von § 2) besagt, dass dann auch $(g_\varrho, f_1, f_2, f_1+f_2)$ rhythmisch ist. Nach Satz 2 von § 2 ist dann auch das Teilsystem (g_ϱ, f_1+f_2) rhythmisch, woraus sich ergibt, dass f_1+f_2 absolut rhythmisch ist.

Satz 4: *Ist $f(x)$ absolut rhythmisch, und bezeichnet c eine ganzzahlige Konstante, so ist auch $cf(x)$ absolut rhythmisch.*

Beweis: Ich wähle ein beliebiges rhythmisches System (g_ϱ).

Nach Definition 1 ist (g_ϱ, f) rhythmisch. Satz 5 von § 2 besagt, dass dann auch das System (g_ϱ, f, cf) rhythmisch ist. Nach Satz 2 von § 2 ist dann auch das Teilsystem (g_ϱ, cf) rhythmisch, woraus sich ergibt, dass cf absolut rhythmisch ist.

Satz 5 (*Zweiter Stetigkeitssatz*[1]): *Sind die Funktionen*

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

absolut rhythmisch und ist $\psi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ für jedes $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ definiert, periodisch mod. 1 und stetig mod. 1, so ist auch $\psi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ absolut rhythmisch.

Vorbemerkung: In diesem Stetigkeitssatz darf die Voraussetzung, dass $\psi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ überall stetig mod. 1 ist, ersetzt werden durch die weniger fordernde Bedingung, dass $\psi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ in den Punkten $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$, wo x alle Gitterpunkte des m-dimensionalen Raumes durchläuft, stetig mod. 1 ist.

Beweis: Ich wähle irgend ein rhythmisches System (g_ϱ).

Nach Satz 1 ist (g_ϱ, f_ν) rhythmisch. Der erste Stetigkeitssatz (Satz 7 von § 2) besagt, dass dann auch $(g_\varrho, f_\nu, \psi(f_1, \ldots, f_n))$ rhythmisch ist.[2] Folglich ist nach Satz 2 von § 2 das Teilsystem $(g_\varrho, \psi(f_1, \ldots, f_n))$ gleichfalls rhythmisch, sodass $\psi(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ absolut rhythmisch ist.

Satz 6 (*Konvergenzsatz*): *Bilden die absolut rhythmischen Funktionen*

$$f_\lambda(x) = f_\lambda(x_1, \ldots, x_m) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

[1] Den Spezialfall mit $m=1$ findet der Leser in Satz 7 von § 1.

[2] Ich wende hier den Spezialfall des ersten Stetigkeitssatzes an, wobei ψ nicht von allen $r+n$ Funktionen g_ϱ und f_ν, sondern nur von den Funktionen f_ν abhängt

eine gleichmässig konvergente Funktionenfolge, so ist auch die Grenzfunktion $f(x)$ *dieser Folge absolut rhythmisch.*

Beweis: Ist (g_ϱ) ein rhythmisches System, dann ist, da $f_\lambda(x)$ absolut rhythmisch ist, das System der $r+1$ Funktionen (g_ϱ, f_λ) für jedes ganze $\lambda \geqq 1$ rhythmisch. Der Konvergenzsatz aus der Theorie der rhythmischen Systeme (Satz 8 des vorigen Paragraphen) besagt, dass das System (g_ϱ, f) dann rhythmisch ist. Folglich ist $f(x)$ absolut rhythmisch.

Satz 7[1]**:** *Die Funktion*

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

ist dann und nur dann absolut rhythmisch, wenn die m *Funktionen*

$$\Delta_\mu f(x) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

absolut rhythmisch sind.

Beweis: Ich wähle irgend ein rhythmisches System (g_ϱ).

1. Es sei $f(x)$ absolut rhythmisch. Dann ist (g_ϱ, f) rhythmisch. Nach der Vorbemerkung beim Hauptsatz (Satz 9 des vorigen Paragraphen) ist das aus $(m+1)(r+1)$ Funktionen bestehende System $(\Delta_\mu g_\varrho, g_\varrho, f, \Delta_\mu f)$ rhythmisch. Folglich ist auch das aus $r+1$ Funktionen bestehende Teilsystem $(g_\varrho, \Delta_\mu f)$ (wo μ jetzt fest gedacht wird) rhythmisch. Hieraus folgt, dass $\Delta_\mu f(x)$ absolut rhythmisch ist.

2. Es sei $\Delta_\mu f(x)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ absolut rhythmisch. Nach dem Hauptsatz (Satz 9 von § 2) bilden die mr Funktionen

$$\Delta_\mu g_\varrho(x) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m;\ \varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

ein rhythmisches System. Aus Satz 1 folgt dann, dass das System

$$(\Delta_\mu g_\varrho(x), \Delta_\mu f(x)) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m;\ \varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

rhythmisch ist, sodass wir nur den Hauptsatz anzuwenden brauchen, um zu finden, dass die Funktionen $g_1(x), \ldots, g_r(x), f(x)$ ein rhythmisches System bilden, also $f(x)$ absolut rhythmisch ist.

---

[1] Der Spezialfall mit $m = 1$ kommt in Satz 8 von § 1 vor.

Satz 8: *Jedes Polynom*

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

ist absolut rhythmisch.

Beweis: Dass ein konstantes Polynom absolut rhythmisch ist, folgt unmittelbar aus der Definition der absolut rhythmischen Funktionen. Ist $f(x)$ ein Polynom k^{ten} Grades $(k \geqq 1)$, und ist Satz 8 mit $k-1$ statt k schon bewiesen, dann sind die Polynome $\Delta_\mu f(x)$, die einen Grad $< k$ besitzen, absolut rhythmisch, sodass nach dem vorigen Satz auch $f(x)$ absolut rhythmisch ist.

Satz 9: *Bilden die Funktionen*

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ein rhythmisches System, bezeichnen $s, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ *ganze Zahlen mit* $s > 0$, *und besitzt das System*

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha_\nu < f_\nu(x) < \beta_\nu \pmod{1} & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ x_\mu \equiv \sigma_\mu \pmod{s} & (\mu = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

wenigstens eine ganzzahlige Lösung $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, *so hat es unendlich viele ganzzahlige Lösungen* x, *und dann enthält sogar bei geeignet gewählter, nur von* α_ν, β_ν, s *und der Wahl der Funktionen* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *abhängiger Länge* L *jeder* m*-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante* L *wenigstens einen Gitterpunkt* x *mit* (1).

Beweis: Nach dem vorigen Satz sind die Funktionen

$$\frac{x_1 - \sigma_1}{s}, \frac{x_2 - \sigma_2}{s}, \ldots, \frac{x_m - \sigma_m}{s}$$

absolut rhythmisch, sodass nach Satz 1 die $n + m$ Funktionen

$$(2) \qquad f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \frac{x_1 - \sigma_1}{s}, \frac{x_2 - \sigma_2}{s}, \ldots, \frac{x_m - \sigma_m}{s}$$

ein rhythmisches System bilden. Ich habe vorausgesetzt, dass das System

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha_\nu < f_\nu(x) < \beta_\nu \pmod{1} & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ -\frac{1}{s} < \frac{x_\mu - \sigma_\mu}{s} < \frac{1}{s} \pmod{1} & (\mu = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

wenigstens eine ganzzahlige Lösung besitzt. Nach Satz 1 des vorigen Paragraphen, angewendet mit den $n+m$ in (2) genannten Funktionen statt $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$, besitzt (3) unendlich viele ganzzahlige Lösungen, und enthält bei geeignet gewählter Länge L jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L wenigstens eine ganzzahlige Lösung $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ von (3). Diese Lösungen genügen auch dem System (1), womit Satz 9 bewiesen ist.

§ 4. Der Polynomsatz.

In Teil I habe ich nur sehr spezielle Polynomsysteme untersucht. Denn fast jedes im ersten Teil betrachtete System von Ungleichungen, das nur Polynome enthält, hat die Gestalt

$$\alpha_\nu < f_\nu(x_1, \ldots, x_m) - y_\nu < \beta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wo $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ die Unbekannten bezeichnen. Dabei wird somit vorausgesetzt, dass die Unbekannten $y_1, \ldots, y_n$ nicht in den Polynomen f_ν auftreten. Die Theorie der rhythmischen Systeme hat den Vorteil, dass sie uns in den Stand setzt viel allgemeinere Systeme zu behandeln, nämlich alle Systeme der Gestalt

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha_1 < f_1(x_1, \ldots, x_m) - y_1 < \beta_1 \\ \alpha_2 < f_2(x_1, \ldots, x_m, y_1) - y_2 < \beta_2 \\ \alpha_3 < f_3(x_1, \ldots, x_m, y_1, y_2) - y_3 < \beta_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n < f_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-1}) - y_n < \beta_n, \end{cases}$$

wo f_ν Polynome, α_ν und β_ν Konstanten bezeichnen. Man beachte, dass in diesem System das Polynom f_ν $(\nu = 2, 3, \ldots, n)$ nicht nur die Unbekannten $x_1, \ldots, x_m$, sondern auch die Unbekannten $y_1, \ldots, y_{\nu-1}$ enthalten darf.

Der wichtigste Satz, den ich in diesem Paragraphen beweisen werde, besagt folgendes:

Satz 1 (*Polynomsatz*): *Hat das System* (1) *wenigstens eine ganzzahlige Lösung, so besitzt es unendlich viele ganzzahlige Lösungen, und dann enthält sogar bei geeignet gewählter Länge L jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L wenigstens einen Gitterpunkt* $x = (x_1, \ldots, x_m)$, *der bei geeignet gewähltem Gitterpunkt* $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *dem System* (1) *genügt.*

Ich würde dieses Resultat in einigen Zeilen beweisen können, wenn das Produkt von zwei beliebigen absolut rhythmischen Funktionen wiederum absolut rhythmisch wäre, aber das ist nicht stets der Fall. Denn hat $f(x)$ für jedes ganze $x \gtreqless 0$ den Wert $\frac{1}{2}$, und ist

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1, \\ \varphi(x) = 0 \quad \text{für jedes ganze } x \gtrless 0, \end{cases}$$

so sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ absolut rhythmisch, aber ihr Produkt

$$\begin{aligned} f(x)\,\varphi(x) &= 0 \quad \text{für jedes ganze } x \gtrless 0, \\ &= \frac{1}{2} \quad \text{für } x = 0, \end{aligned}$$

ist nicht rhythmisch, also a fortiori nicht absolut rhythmisch.

Betrachtet man eine Menge E von absolut rhythmischen Funktionen, so braucht also der kleinste Ring $\mathfrak{R}^*$, der alle Funktionen von E enthält, noch nicht die Eigenschaft zu besitzen, dass jede ihrer Funktionen absolut rhythmisch ist.[1] Ein für die Theorie der rhythmischen Systeme sehr wichtiges Problem ist meines Erachtens, möglichst ausgedehnte Ringe von absolut rhythmischen Funktionen zu konstruieren. Die Menge aller Polynome ist ein einfaches Beispiel eines Ringes mit der Eigenschaft, dass jede ihrer Funktionen absolut rhythmisch ist. Ein viel ausgedehnterer Ring mit dieser Eigenschaft ist die kleinste Funktionenmenge $\mathfrak{R}$, die durch die folgenden 5 Bedingungen definiert wird:

1. $\mathfrak{R}$ enthält nur Funktionen der Gestalt

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_m),$$

die für jeden Gitterpunkt $x = (x_1, \ldots, x_m)$ definiert sind; hierin bezeichnet m eine beliebige, aber fest vorgeschriebene natürliche Zahl.

2. $\mathfrak{R}$ enthält die Funktion, die für jeden Gitterpunkt $x = (x_1, \ldots, x_m)$ den Wert 0 besitzt.

3. Enthält die Menge $\mathfrak{R}$ zwei Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$, so enthält sie auch ihre Summe $f(x) + \varphi(x)$.

4. Hat

$$g(x) = g(x_1, \ldots, x_m)$$

[1] $\mathfrak{R}^*$ heisst ein Ring, wenn jedes zu $\mathfrak{R}^*$ gehörige Funktionenpaar f und φ die Eigenschaft besitzt, dass $\mathfrak{R}^*$ auch die Funktionen $f+\varphi$, $f-\varphi$ und $f\varphi$ enthält.

für jeden Gitterpunkt x einen ganzzahligen beschränkten Wert, mit der Eigenschaft, dass das Produkt $cg(x)$ für jedes konstante c absolut rhythmisch ist, und enthält die Menge $\mathfrak{R}$ eine Funktion $f(x)$, so enthält sie auch das Produkt $f(x)\,g(x)$.

5. Hat die Funktion

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$$

die Eigenschaft, dass die m Differenzen

$$\Delta_\mu f(x) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

in $\mathfrak{R}$ vorkommen, dann kommt auch die Funktion $f(x)$ in $\mathfrak{R}$ vor.

Ich habe diese Menge $\mathfrak{R}$ eingeführt, weil sie, wie ich beweisen werde, die folgenden 4 merkwürdigen Eigenschaften besitzt:

I. $\mathfrak{R}$ ist ein Ring.
II. Jede in $\mathfrak{R}$ auftretende Funktion ist absolut rhythmisch.
III. Jedes Polynom in m Veränderlichen kommt in $\mathfrak{R}$ vor.
IV. Ist $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$ eine Funktion von $\mathfrak{R}$, die für keinen Gitterpunkt $x = (x_1, \ldots, x_m)$ einen ganzen Wert besitzt, so kommt auch die Funktion $[f(x)]$ in $\mathfrak{R}$ vor.

Wie man sehen wird, brauche ich gerade diese vier Eigenschaften für den Beweis von Satz 1.

Hilfssatz 1: *Bezeichnet $g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ eine für jeden Gitterpunkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ definierte beschränkte ganze Zahl, mit der Eigenschaft, dass das Produkt $cg(x)$ für jedes konstante c absolut rhythmisch ist, dann ist das Produkt $f(x)\,g(x)$ für jede absolut rhythmische Funktion $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ absolut rhythmisch.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass jedes rhythmische System (g_ϱ) die Eigenschaft besitzt, dass (g_ϱ, fg) rhythmisch ist.

Da $g(x)$ beschränkt ist, können wir die feste Zahl $G \geqq 1$ so bestimmen, dass für jeden Gitterpunkt x

$$(2) \qquad |g(x)| \leqq \frac{1}{2}\, G$$

ist. Ich wähle jetzt eine positive Zahl $\varepsilon < 1$, und eine positive Zahl

$$\gamma < \frac{1 - \frac{1}{2}\varepsilon}{G} \quad (\text{also} < 1). \tag{3}$$

Bei gegebenem Gitterpunkt x können wir dann die von ε und x abhängige Zahl $X \geqq 1$ und $\geqq \frac{1}{2} G\gamma$ so wählen, dass für jeden Gitterpunkt $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit

$$|h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{4}$$

die Ungleichung

$$|f(x+h)| \leqq X \tag{5}$$

gilt. Ich setze

$$\delta = \frac{\varepsilon\gamma}{2X} \quad (\text{also} < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ wegen (3) und } X \geqq 1).$$

Nach der Voraussetzung des zu beweisenden Hilfssatzes sind die Funktionen $f(x)$ und $\gamma g(x)$ absolut rhythmisch. Da die Funktionen $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_r(x)$ ein rhythmisches System bilden, ist also nach Satz 1 des vorigen Paragraphen das System $(g_\varrho, f, \gamma g)$ rhythmisch.

Ich werde zunächst zeigen, dass jeder zu δ und x gehörige Verschiebungspunkt τ von $(g_\varrho, f, \gamma g)$ ein zu ε und x gehöriger Verschiebungspunkt von (g_ϱ, fg) ist. Ist τ ein zu δ und x gehöriger Verschiebungspunkt von $(g_\varrho, f, \gamma g)$, dann ist

$$-\delta < g_\varrho(x+\tau+h) - g_\varrho(x+h) < \delta \pmod{1} \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, r) \tag{6}$$

$$-\delta < f(x+\tau+h) - f(x+h) < \delta \pmod{1} \tag{7}$$

und

$$-\delta < \gamma g(x+\tau+h) - \gamma g(x+h) < \delta \pmod{1} \tag{8}$$

für jeden Gitterpunkt $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit

$$|h_\mu| \leqq \frac{1}{\delta} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Man hat dann

$$\begin{aligned} |\gamma g(x+\tau+h) - \gamma g(x+h)| &\leqq \gamma \cdot \frac{1}{2} G + \gamma \cdot \frac{1}{2} G && \text{wegen (2)} \\ &= \gamma G < 1 - \frac{1}{2}\varepsilon && \text{wegen (3)} \\ &< 1 - \delta && \text{wegen } \delta < \frac{1}{2}\varepsilon, \end{aligned}$$

sodass aus (8) folgt

$$|\gamma g(x+\tau+h)-\gamma g(x+h)|<\delta=\frac{\varepsilon\gamma}{2X},$$

also

(9) $$|g(x+\tau+h)-g(x+h)|<\frac{\varepsilon}{2X}\cdot$$

Nach (7) existiert eine ganze Zahl p mit

(10) $$|f(x+\tau+h)-f(x+h)-p|<\delta=\frac{\varepsilon\gamma}{2X}<\varepsilon\gamma<\frac{\varepsilon}{G},$$

wegen $X\geqq 1$ und (3). Wird

$$pg(x+\tau+h)=q$$

gesetzt, dann ist q ganz, da nach der Voraussetzung des zu beweisenden Hilfssatzes $g(x+\tau+h)$ ganz ist. Man hat nun

$$|f(x+\tau+h)\,g(x+\tau+h)-f(x+h)\,g(x+h)-q|=$$
$$|\{f(x+\tau+h)-f(x+h)-p\}\,g(x+\tau+h)+\{g(x+\tau+h)-g(x+h)\}f(x+h)|$$
$$<\frac{\varepsilon}{G}\cdot\frac{1}{2}G+\frac{\varepsilon}{2X}\cdot X=\varepsilon,$$

wegen (10), (2), (9) und (5). Hieraus folgt

(11) $$-\varepsilon<f(x+\tau+h)\,g(x+\tau+h)-f(x+h)\,g(x+h)<\varepsilon \pmod{1}.$$

Wegen $\delta<\varepsilon$ folgt aus (6)

(12) $$-\varepsilon<g_\varrho(x+\tau+h)-g_\varrho(x+h)<\varepsilon \pmod{1} \qquad (\varrho=1,2,\ldots,r).$$

Die Ungleichungen (11) bezw. (12) gelten für jeden Gitterpunkt h mit (4), bezw.

$$|h_\mu|\leqq\frac{1}{\delta} \qquad (\mu=1,2,\ldots,m),$$

also wegen $\delta<\varepsilon$ a fortiori für jeden Gitterpunkt h mit (4), sodass τ in der Tat ein zu ε und x gehöriger Verschiebungspunkt von (g_ϱ, fg) ist.

Da $(g_\varrho, f, \gamma g)$ rhythmisch ist, existiert eine, nur von δ und x, also nur von ε und x abhängige Länge $\varDelta$ derart, dass jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante $\varDelta$ wenigstens einen zu δ und

x gehörigen Verschiebungspunkt von $(g_\varrho, f, \gamma g)$ enthält. Jeder derartige Kubus enthält somit mindestens einen zu ε und x gehörigen Verschiebungspunkt von (g_ϱ, fg), sodass (g_ϱ, fg) nach Satz 6 von § 2 rhythmisch ist. Folglich ist $f(x)\,g(x)$ absolut rhythmisch.

Beispiel: Die in der Einleitung genannte Funktion

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad \text{für ungerades } x, \\ &= x\sqrt{2} \quad \text{für gerades } x, \end{aligned}$$

ist absolut rhythmisch.

Beweis: Die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 sind mit $m = 1$,

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \quad \text{für ungerades } x, \\ &= 1 \quad \text{für gerades } x, \end{aligned}$$

erfüllt. Da $x\sqrt{2}$ ein Polynom, also absolut rhythmisch ist, ist nach Hilfssatz 1 auch $f(x)$ absolut rhythmisch.

Satz 2: *Jede Funktion von $\mathfrak{R}$ ist absolut rhythmisch.*

Vorbemerkung: Jeder Funktion $f(x)$ von $\mathfrak{R}$, die nicht in jedem Gitterpunkt $x = (x_1, \ldots, x_m)$ den Wert Null besitzt, kann man eine endliche Anzahl von zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Funktionen

$$F_1(x),\, F_2(x),\, \ldots,\, F_l(x) \tag{13}$$

zuordnen, derart, dass $F_1(x)$ in jedem Gitterpunkt x verschwindet, und, wenn $F_{l+1}(x) = f(x)$ gesetzt wird, für jedes λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ wenigstens eine der folgenden drei Eigenschaften gilt:

1. In der Reihe $F_1, F_2, \ldots, F_\lambda$ kommen zwei Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ mit

$$F_{\lambda+1}(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

vor.

2. Es ist möglich eine, für jeden Gitterpunkt x definierte, beschränkte ganzzahlige Funktion $g(x)$ zu finden, derart, dass $cg(x)$ für jedes konstante c absolut rhythmisch ist, und in der Reihe $F_1, F_2, \ldots, F_\lambda$ eine Funktion $f_1(x)$ mit

$$F_{\lambda+1}(x) = f_1(x)\,g(x)$$

vorkommt.

3. Die m Differenzen

$$\Delta_\mu F_{\lambda+1}(x) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

treten in der Reihe $F_1, F_2, \ldots, F_\lambda$ auf.

Ist $f(x)$ gegeben, dann wähle ich das System (13) derart, dass die Anzahl l der in (13) vorkommenden Funktionen möglichst klein sei. Diese durch $f(x)$ eindeutig bestimmte Zahl l nenne ich den Index von $f(x)$. Gebe ich der Funktion, die in jedem Gitterpunkt x verschwindet, den Index Null, so besitzt jede Funktion $f(x)$ von $\mathfrak{R}$ einen Index $\geqq 0$. Der Index von $F_\lambda(x)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ ist höchstens $\lambda - 1$, also kleiner als l.

Um eine Eigenschaft, die für die Funktion, die in jedem Gitterpunkt $x = (x_1, \ldots, x_m)$ verschwindet, gültig ist, für alle übrigen Funktionen $f(x)$ von $\mathfrak{R}$ zu beweisen, darf man annehmen, dass diese Eigenschaft für alle Funktionen von $\mathfrak{R}$ mit kleinerem Index, somit insbesondere für die l in der Reihe (13) auftretenden Funktionen $F_\lambda(x)$ schon bewiesen ist.

Beweis von Satz 2: Ich brauche nur eine Funktion $f(x)$ von $\mathfrak{R}$ zu untersuchen, die nicht in jedem Gitterpunkt $x = (x_1, \ldots, x_m)$ verschwindet, da sonst die Behauptung evident ist. Nach der Vorbemerkung darf ich annehmen, dass die l in (13) genannten Funktionen $F_\lambda(x)$ absolut rhythmisch sind, und brauche ich nur drei Fälle zu unterscheiden.

1. Es sei

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

wo $f_1(x)$ und $f_2(x)$ im System (13) vorkommen, also absolut rhythmisch sind. Dann ist nach dem Additionstheorem (Satz 3) des vorigen Paragraphen auch die Summe $f_1(x) + f_2(x)$ absolut rhythmisch.

2. Man hat

$$f(x) = f_1(x)\, g(x);$$

hierin ist $f_1(x)$ eine der Funktionen $F_\lambda(x)$, also absolut rhythmisch, und $g(x)$ ist für jeden Gitterpunkt x definiert, ganzzahlig und beschränkt, mit der Eigenschaft, dass für jedes konstante c das Produkt $cg(x)$ absolut rhythmisch ist. Nach Hilfssatz 1 ist dann auch das Produkt $f_1(x)\, g(x)$ absolut rhythmisch.

3. Die Differenzen

$$\Delta_\mu f(x) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

kommen im System (13) vor, sind somit absolut rhythmisch. Nach Satz 7 des vorigen Paragraphen ist dann $f(x)$ absolut rhythmisch.

Hilfssatz 2: *Ist*

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$$

eine Funktion von $\mathfrak{R}$, *und bezeichnet* $a = (a_1, \ldots, a_m)$ *einen Gitterpunkt, so gehört auch*

$$f(x + a) = f(x_1 + a_1, \ldots, x_m + a_m)$$

zu $\mathfrak{R}$.

Beweis: Ich darf annehmen, dass $f(x)$ nicht in jedem Gitterpunkt $x = (x_1, \ldots, x_m)$ verschwindet, da sonst die Behauptung evident ist. Nach der Vorbemerkung von Satz 2 darf ich annehmen, dass die Behauptung schon bewiesen ist, wenn $f(x)$ durch $F_\lambda(x)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ ersetzt wird. Ich unterscheide wiederum drei Fälle:

1. Es sei

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

wo $f_1(x)$ und $f_2(x)$ im System (13) vorkommen. Nach unserer Annahme gehören dann $f_1(x + a)$ und $f_2(x + a)$ der Menge $\mathfrak{R}$ an, sodass nach der Definition von $\mathfrak{R}$ (vergl. Punkt 3) auch

$$f(x + a) = f_1(x + a) + f_2(x + a)$$

in $\mathfrak{R}$ vorkommt.

2. Man hat

$$f(x) = f_1(x)\, g(x);$$

hierin ist $f_1(x)$ eine der Funktionen $F_\lambda(x)$, und $g(x)$ ist für jeden Gitterpunkt x definiert, ganzzahlig und beschränkt, mit der Eigenschaft, dass für jedes konstante c das Produkt $cg(x)$ absolut rhythmisch ist. Nach unserer Annahme gehört $f_1(x+a)$ der Menge $\mathfrak{R}$ an. Die Funktion $g(x+a)$ ist für jeden Gitterpunkt x definiert, ganzzahlig und beschränkt, mit der Eigenschaft, dass für jedes konstante c das Produkt $cg(x + a)$ absolut rhythmisch ist. Nach der Definition der Menge $\mathfrak{R}$ (vergl. Punkt 4) gehört dann

$$f(x + a) = f_1(x + a)\, g(x + a)$$

dieser Menge an.

3. Die Differenzen

$$\Delta_\mu f(x) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

kommen im System (13) vor, sodass die Menge $\mathfrak{R}$ nach unserer Annahme die Differenzen

$$\Delta_\mu f(x+a) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

also nach ihrer Definition (vergl. Punkt 5) die Funktion $f(x+a)$ enthält.

Satz 3: *Enthält die Menge* $\mathfrak{R}$ *zwei Funktionen* $f(x)$ *und* $\varphi(x)$, *so enthält sie auch ihr Produkt* $f(x)\varphi(x)$.

Beweis: Ich werde zeigen: bezeichnen a und α zwei Gitterpunkte, und enthält die Menge $\mathfrak{R}$ zwei Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$, so enthält sie auch das Produkt $f(x+a)\ \varphi(x+\alpha)$. Ich darf dabei annehmen, dass die Funktion $f(x)$ nicht in jedem Gitterpunkt verschwindet, da sonst die Behauptung evident ist. Nach der Vorbemerkung von Satz 2 darf ich ausserdem annehmen, dass die Behauptung schon bewiesen ist, wenn $f(x)$ durch eine der in (13) genannten Funktionen $F_\lambda(x)$ ersetzt wird. Wenigstens einer der folgenden drei Fälle tritt auf:

1. Es ist

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

wo $f_1(x)$ und $f_2(x)$ im System (13) vorkommen. Nach unserer Annahme gehören dann $f_1(x+a)\,\varphi(x+\alpha)$ und $f_2(x+a)\,\varphi(x+\alpha)$ der Menge $\mathfrak{R}$ an, sodass diese Menge nach ihrer Definition (vergl. Punkt 3) die Summe

$$f_1(x+a)\,\varphi(x+\alpha) + f_2(x+a)\,\varphi(x+\alpha) = f(x+a)\,\varphi(x+\alpha)$$

enthält.

2. Man hat

$$f(x) = f_1(x)\,g(x);$$

hierin ist $f_1(x)$ eine der Funktionen $F_\lambda(x)$, und $g(x)$ ist für jeden Gitterpunkt x definiert, ganzzahlig und beschränkt, mit der Eigenschaft, dass für jedes konstante c das Produkt $cg(x)$ absolut rhythmisch ist. Nach unserer Annahme liegt $f_1(x+a)\,\varphi(x+\alpha)$ in $\mathfrak{R}$. Da $g(x+a)$ für jeden Gitterpunkt x definiert, ganzzahlig und beschränkt ist, und $cg(x+a)$ für jedes konstante c absolut rhythmisch ist, enthält die Menge $\mathfrak{R}$ nach ihrer Definition (vergl. Punkt 4) das Produkt

$$f_1(x+a)\,\varphi(x+\alpha)\,g(x+a) = f(x+a)\,\varphi(x+\alpha).$$

3. Die m Differenzen

$$\Delta_\mu f(x) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

kommen im System (13) vor.

Ich darf annehmen, dass $\varphi(x)$ nicht in jedem Gitterpunkt x verschwindet, da sonst die Behauptung evident ist. Wie aus der Vorbemerkung von Satz 2, mit $\varphi(x)$ statt $f(x)$ angewendet, hervorgeht, existiert ein System von endlich vielen in $\mathfrak{R}$ liegenden Funktionen

$$\Phi_1(x),\ \Phi_2(x),\ \ldots,\ \Phi_L(x), \tag{14}$$

wo $\Phi_1(x)$ in jedem Gitterpunkt x verschwindet, wo L den Index von $\varphi(x)$ bezeichnet, und wo wenigstens einer der folgenden drei Fälle auftritt:

I. In der in (14) genannten Reihe kommen zwei Funktionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ mit

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

vor.

II. Es ist möglich eine Funktion $\varphi_1(x)$ im System (14) und eine Funktion $\chi(x)$ zu finden, die für jeden Gitterpunkt x definiert, ganzzahlig und beschränkt ist, derart, dass für jedes konstante γ das Produkt $\gamma\chi(x)$ absolut rhythmisch ist, und ausserdem

$$\varphi(x) = \varphi_1(x)\,\chi(x)$$

ist.

III. Die Differenzen

$$\Delta_\mu \varphi(x) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

kommen im System (14) vor.

Ich darf annehmen, dass die Behauptung schon bewiesen ist, wenn $\varphi(x)$ durch eine der in (14) genannten Funktionen ersetzt wird.

Gilt I, so enthält $\mathfrak{R}$ nach unserer Annahme die Funktionen $f(x+a)\,\varphi_1(x+\alpha)$ und $f(x+a)\,\varphi_2(x+\alpha)$, also auch die Summe

$$f(x+a)\,\varphi_1(x+\alpha) + f(x+a)\,\varphi_2(x+\alpha) = f(x+a)\,\varphi(x+\alpha).$$

Gilt II, so liegt nach unserer Annahme $f(x+a)\,\varphi_1(x+\alpha)$ in $\mathfrak{R}$. Da $\chi(x+\alpha)$ ganz und beschränkt, $\gamma\chi(x+\alpha)$ für jedes konstante γ absolut rhythmisch ist, enthält $\mathfrak{R}$ auch das Produkt

$$f(x+a)\,\varphi_1(x+\alpha)\,\chi(x+\alpha) = f(x+a)\,\varphi(x+\alpha).$$

Gilt schliesslich III, so ist

$$\begin{cases} \Delta_\mu f(x+a)\,\varphi(x+\alpha) = \\ \qquad \varphi(x+\alpha)\,\Delta_\mu f(x+a) + f(x+b_\mu)\,\Delta_\mu \varphi(x+\alpha), \end{cases} \tag{15}$$

wo ich

$$b_\mu = (a_1, \ldots, a_{\mu-1}, a_\mu + 1, a_{\mu+1}, \ldots, a_m)$$

gesetzt habe. In diesem Falle ist $\varDelta_\mu f(x)$ eine der Funktionen $F_1(x), \ldots, F_l(x)$, sodass nach der ersten Annahme $\varphi(x+\alpha)\varDelta_\mu f(x+a)$ in $\mathfrak{R}$ liegt. Ausserdem ist $\varDelta_\mu \varphi(x)$ eine der Funktionen $\Phi_1(x), \ldots, \Phi_L(x)$, sodass nach der zweiten Annahme (angewendet mit b_μ statt a) auch $f(x+b_\mu)\varDelta_\mu\varphi(x+\alpha)$ in $\mathfrak{R}$ liegt. Wegen (15) gehört dann

$$\varDelta_\mu f(x+a)\,\varphi(x+\alpha)$$

gleichfalls der Menge $\mathfrak{R}$ an. Das gilt für $\mu = 1, 2, \ldots, m$, sodass $f(x+a)\,\varphi(x+\alpha)$ in $\mathfrak{R}$ liegt.

Hilfssatz 3: *$\mathfrak{R}$ enthält jede Funktion, die gleich einer Konstanten ist.*

Beweis: Ist γ konstant, so enthält $\mathfrak{R}$ die m Funktionen

$$\varDelta_\mu \gamma = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

also auch die Funktion γ.

Satz 4: *Sind $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_q(x)$ Funktionen von $\mathfrak{R}$, so enthält $\mathfrak{R}$ jede ganze rationale Funktion von $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_q(x)$.*

Beweis: Nach dem vorigen Hilfssatz enthält $\mathfrak{R}$ jede Konstante. Enthält die Menge $\mathfrak{R}$ zwei Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$, so enthält sie auch ihre Summe und (nach dem vorigen Satz) ihr Produkt.

Hiermit ist Satz 4 bewiesen.

Satz 5: *$\mathfrak{R}$ ist ein Ring.*

Beweis: Folgt unmittelbar aus dem vorigen Satz.

Satz 6: *$\mathfrak{R}$ enthält jedes Polynom in $x_1, x_2, \ldots, x_m$.*

Beweis: Es ist

$$\left.\begin{aligned} \varDelta_\mu x_\nu &= 1 \quad \text{für } \mu = \nu \\ &= 0 \quad \text{für } \mu \neq \nu \end{aligned}\right\} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, m),$$

sodass $\mathfrak{R}$ nach Hilfssatz 3 die m Funktionen $\varDelta_\mu x_\nu$, also auch die Funktion x_ν enthält. Das gilt für $\nu = 1, 2, \ldots, m$, sodass nach Satz 4 jedes Polynom in $x_1, \ldots, x_m$ dem Ringe $\mathfrak{R}$ angehört.

Hilfssatz 4: *Enthält $\mathfrak{R}$ eine Funktion*

$$u(x) = u(x_1, \ldots, x_m),$$

die für keinen Gitterpunkt $x = (x_1, \ldots, x_m)$ ganzzahlig ist, so ist $c[u(x)]$ für jedes konstante c absolut rhythmisch.

Beweis: Wird

$$\psi(v) = v - [v]$$

gesetzt, so ist

$$c[u(x)] = cu(x) - c\psi(u(x)). \tag{16}$$

Da $u(x)$ der Menge $\mathfrak{R}$ angehört, also absolut rhythmisch ist, ausserdem für keinen einzigen Gitterpunkt x mit einem Unstetigkeitspunkt mod. 1 von $c\psi(v)$ zusammenfällt und $c\psi(v)$ periodisch ist, ist nach dem zweiten Stetigkeitssatz mit $n = 1$ (Satz 5 von § 3; vergl. die zum zweiten Stetigkeitssatz gehörige Vorbemerkung) $c\psi(u(x))$ absolut rhythmisch. $\mathfrak{R}$ enthält $u(x)$, also auch $cu(x)$, sodass $cu(x)$ absolut rhythmisch ist. Aus (16) folgt, dass dann $c[u(x)]$ gleich der Summe von zwei absolut rhythmischen Funktionen, also auch absolut rhythmisch ist.

Hilfssatz 5: *$\mathfrak{R}$ enthält jede Funktion*

$$g(x) = g(x_1, \ldots, x_m),$$

die für jeden Gitterpunkt $x = (x_1, \ldots, x_m)$ ganz und beschränkt ist, und die Eigenschaft besitzt, dass $cg(x)$ für jedes konstante c absolut rhythmisch ist.

Beweis: $\mathfrak{R}$ enthält nach Hilfssatz 3 die Funktion 1, also auch die Funktion

$$1 \,.\, g(x) = g(x).$$

Satz 7: *Gehört $f(x)$ dem Ringe $\mathfrak{R}$ an, und ist $f(x)$ für keinen Gitterpunkt $x = (x_1, \ldots, x_m)$ ganz, so liegt auch $[f(x)]$ in $\mathfrak{R}$.*

Beweis: Ich werde beweisen: gehört $f(x)$ dem Ringe $\mathfrak{R}$ an, und wird die Konstante γ so gewählt, dass $f(x) + \gamma$ für keinen Gitterpunkt $x = (x_1, \ldots, x_m)$ ganz ist, so liegt auch $[f(x) + \gamma]$ in $\mathfrak{R}$. Ich darf dabei voraussetzen, dass $f(x)$ nicht identisch verschwindet, da sonst die Behauptung evident ist. Nach der Vorbemerkung von Satz 2 darf ich ausserdem annehmen, dass die Behauptung schon bewiesen ist, wenn $f(x)$ durch eine der in (13) genannten Funktionen $F_1(x), \ldots, F_l(x)$ ersetzt wird. Wie schon öfters bemerkt wurde, tritt dann wenigstens einer der folgenden drei Fälle auf:

1. Man hat

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \tag{17}$$

wo $f_1(x)$ und $f_2(x)$ in der Reihe $F_1(x), \ldots, F_l(x)$ vorkommen. Die Zahlen γ_1 mit der Eigenschaft, dass $f_1(x) + \gamma_1$ für wenigstens einen Gitterpunkt x ganzzahlig ist, bilden eine abzählbare Menge, sodass γ_1 so gewählt werden kann, dass $f_1(x) + \gamma_1$ für keinen Gitterpunkt x ganz ist. Auf dieselbe Art findet man, dass bei geeignet gewähltem konstantem γ_2 auch $f_2(x) + \gamma_2$ für keinen einzigen Gitterpunkt einen ganzzahligen Wert besitzt. Nach unserer Annahme gehören dann $[f_1(x) + \gamma_1]$ und $[f_2(x) + \gamma_2]$ dem Ringe $\mathfrak{R}$ an. Nach Hilfssatz 4 sind die drei Funktionen

$$c[f(x) + \gamma], \; c[f_1(x) + \gamma_1] \text{ und } c[f_2(x) + \gamma_2]$$

für jedes konstante c absolut rhythmisch. Wird

$$g_1(x) = [f(x) + \gamma] - [f_1(x) + \gamma_1] - [f_2(x) + \gamma_2]$$

gesetzt, dann ist $g_1(x)$ ganz und wegen (17) beschränkt. Ausserdem ist dann $cg_1(x)$ gleich der Summe von drei absolut rhythmischen Funktionen, somit gleichfalls absolut rhythmisch. Nach dem vorigen Hilfssatz gehört $g_1(x)$ dann dem Ringe $\mathfrak{R}$ an, sodass

$$[f(x) + \gamma] = [f_1(x) + \gamma_1] + [f_2(x) + \gamma_2] + g_1(x)$$

die Summe von drei in $\mathfrak{R}$ liegenden Funktionen ist, also in $\mathfrak{R}$ liegt.

2. Man hat

$$f(x) = f_1(x)\, g(x), \tag{18}$$

wo $f_1(x)$ eine der Funktionen $F_1(x), \ldots, F_l(x)$ ist, $g(x)$ eine ganze und beschränkte Funktion bezeichnet und $cg(x)$ für jedes konstante c absolut rhythmisch ist. Ich wähle γ_1 wiederum so, dass $f_1(x) + \gamma_1$ für keinen einzigen Gitterpunkt x ganz ist, sodass nach unserer Annahme $[f_1(x) + \gamma_1]$, somit auch $[f_1(x) + \gamma_1]\, g(x)$ dem Ringe $\mathfrak{R}$ angehört. Nach Hilfssatz 4 sind die zwei Funktionen

$$c[f(x) + \gamma] \text{ und } c[f_1(x) + \gamma_1]$$

für jedes konstante c absolut rhythmisch. Hilfssatz 1 besagt, dass dann auch

$$c[f_1(x) + \gamma_1]\, g(x)$$

absolut rhythmisch ist. Wird

$$g_2(x) = [f(x) + \gamma] - [f_1(x) + \gamma_1]\, g(x)$$

gesetzt, dann ist also $cg_2(x)$ für jedes konstante c gleich der Differenz von zwei absolut rhythmischen Funktionen, somit absolut rhythmisch. Natürlich ist $g_2(x)$ ganzwertig, weil $g(x)$ nur ganze Werte besitzt; da $g(x)$ beschränkt ist, folgt aus (18), dass auch $g_2(x)$ beschränkt ist. Aus Hilfssatz 5 geht hervor, dass $g_2(x)$ in $\mathfrak{R}$ liegt. Dann ist

$$[f(x)+\gamma] = [f_1(x)+\gamma_1]\, g(x) + g_2(x)$$

die Summe von zwei in $\mathfrak{R}$ liegenden Funktionen und liegt somit in $\mathfrak{R}$.

3. Die m Funktionen $\Delta_\mu f(x)$ kommen im System (13) vor. Bei geeignet gewähltem konstantem γ_μ ist $\Delta_\mu f(x)+\gamma_\mu$ für keinen einzigen Gitterpunkt x ganz, sodass die m Funktionen

$$[\Delta_\mu f(x) + \gamma_\mu] \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

unserer Annahme nach dem Ringe $\mathfrak{R}$ angehören. Nach Hilfssatz 4 sind die $m+1$ Funktionen

$$c[f(x)+\gamma] \quad \text{und} \quad c[\Delta_\mu f(x) + \gamma_\mu] \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

für jedes konstante c absolut rhythmisch. Aus Satz 7 des vorigen Paragraphen geht dann hervor, dass auch die m Funktionen

$$c\Delta_\mu [f(x)+\gamma] \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

absolut rhythmisch sind. Wird

$$g_\mu{}^*(x) = \Delta_\mu[f(x)+\gamma] - [\Delta_\mu f(x) + \gamma_\mu] \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

gesetzt, so besitzt $g_\mu{}^*(x)$ nur ganzzahlige und beschränkte Werte, und dann ist $cg_\mu{}^*(x)$ für jedes konstante c gleich der Differenz von zwei absolut rhythmischen Funktionen, ist also absolut rhythmisch. Nach Hilfssatz 5 gehört $g_\mu{}^*(x)$ dem Ringe $\mathfrak{R}$ an, sodass

$$\Delta_\mu [f(x)+\gamma] = [\Delta_\mu f(x) + \gamma_\mu] + g_\mu{}^*(x) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

die Summe von zwei in $\mathfrak{R}$ liegenden Funktionen ist und somit in $\mathfrak{R}$ liegt. Das gilt für $\mu = 1, 2, \ldots, m$, sodass $\mathfrak{R}$ auch die Funktion $[f(x)+\gamma]$ enthält.

Beweis von Satz 1.

Nach der Voraussetzung besitzt (1) wenigstens eine ganzzahlige Lösung. Wir können die $2n$ Zahlen α'_ν und β'_ν mit

$$(19) \qquad \alpha_\nu \leqq \alpha'_\nu < \beta'_\nu \leqq \beta_\nu, \quad \beta'_\nu - \alpha'_\nu < \frac{1}{2} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

so wählen, dass auch das System

$$(20)\qquad \alpha'_\nu < f_\nu(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{\nu-1}) - y_\nu < \beta'_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$ [1]

diese Lösung besitzt.

Bei gegebenem ν bilden die Zahlen c_ν mit der Eigenschaft, dass für wenigstens einen Gitterpunkt $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{\nu-1})$

$$(21)\qquad f_\nu(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{\nu-1}) + c_\nu$$

ganz ist, eine abzählbare Menge. Bei geeignet gewähltem c_ν mit

$$(22)\qquad \frac{1}{4} - \frac{\alpha'_\nu + \beta'_\nu}{2} < c_\nu < \frac{3}{4} - \frac{\alpha'_\nu + \beta'_\nu}{2}$$

besitzt also das in (21) genannte Polynom für keinen einzigen Gitterpunkt $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{\nu-1})$ einen ganzzahligen Wert.

Aus (22) und (19) folgt

$$(23)\qquad \begin{cases} \beta'_\nu + c_\nu < \dfrac{3}{4} + \dfrac{\beta'_\nu - \alpha'_\nu}{2} < 1 & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ \alpha'_\nu + c_\nu > \dfrac{1}{4} - \dfrac{\beta'_\nu - \alpha'_\nu}{2} > 0 & (\nu = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Ich definiere $n - 1$ Funktionen

$$\varphi_\nu(x) = \varphi_\nu(x_1, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n - 1)$$

durch

$$(24)\qquad \begin{cases} \varphi_1(x) = [f_1(x_1, \ldots, x_m) + c_1], \\ \varphi_\nu(x) = [f_\nu(x_1, \ldots, x_m, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{\nu-1}(x)) + c_\nu] \quad (\nu = 2, 3, \ldots, n - 1). \end{cases}$$

Ich behaupte, dass (20) genau dieselben ganzzahligen Lösungen wie

$$(25)\qquad \alpha'_\nu < f_\nu(x_1, \ldots, x_m, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{\nu-1}(x)) - y_\nu < \beta'_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

besitzt. Um das zu beweisen, unterscheide ich zwei verschiedene Fälle:

1. Es sei $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ eine ganzzahlige Lösung von (20). Aus (20) und (23) folgt

---

[1] Für $\nu = 1$ wird natürlich die Ungleichung

$$\alpha'_1 < f_1(x_1, \ldots x_m) - y_1 < \beta'_1$$

gemeint.

$$0 < f_\nu(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{\nu-1}) + c_\nu - y_\nu < 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

also

$$y_\nu = [f_\nu(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{\nu-1}) + c_\nu] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Wegen (24) ist dann

$$\varphi_1(x) = y_1;$$

aus (24) geht dann ausserdem noch mit dem Prinzip der vollständigen Induktion hervor, dass

$$\varphi_\nu(x) = y_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

ist. Aus (20) folgt nun (25).

2. Es sei $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ eine ganzzahlige Lösung von (25). Aus (25) und (23) ergibt sich

$$0 < f_\nu(x_1, \ldots, x_m, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{\nu-1}(x)) + c_\nu - y_\nu < 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

also

$$\begin{aligned} y_\nu &= [f_\nu(x_1, \ldots, x_m, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{\nu-1}(x)) + c_\nu] \\ &= \varphi_\nu(x) \qquad\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1) \end{aligned}$$

wegen (24). Aus (25) folgt nun (20).

Hiermit ist bewiesen, dass (20) und (25) dieselben ganzzahligen Lösungen besitzen. Wir wissen schon, dass (20) wenigstens eine ganzzahlige Lösung hat. Folglich hat auch (25) mindestens eine ganzzahlige Lösung.

Die Funktionen $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ gehören dem Ringe $\mathfrak{R}$ an. Denn $\mathfrak{R}$ enthält nach Satz 6 das Polynom $f_1(x_1, \ldots, x_m) + c_1$, also nach Satz 7 auch die durch (24) definierte Funktion $\varphi_1(x)$; liegen $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{\nu-1}(x)$ in $\mathfrak{R}$, dann enthält $\mathfrak{R}$ nach Satz 4 auch die Funktion

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_m, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{\nu-1}(x)) + c_\nu,$$

sodass dann wiederum nach Satz 7 auch die durch (24) festgelegte Funktion $\varphi_\nu(x)$ dem Ringe $\mathfrak{R}$ angehört. Hiermit ist bewiesen, dass $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ in $\mathfrak{R}$ liegen.

Satz 4 liefert nun das Resultat, dass die n Funktionen

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_m, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{\nu-1}(x)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

in $\mathfrak{R}$ liegen, also mit Rücksicht auf Satz 2 absolut rhythmisch sind. Die im System (25) auftretenden Funktionen f_ν sind also absolut rhythmisch, und dieses System besitzt nach dem Obigen wenigstens eine ganzzahlige Lösung. Folglich hat dieses System nach Satz 2 auf S. 249 und Satz 1 auf S. 230 unendlich viele ganzzahlige Lösungen $x = (x_1, \ldots, x_m)$, und enthält bei geeignet gewählter Länge L jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L wenigstens eine ganzzahlige Lösung $x = (x_1, \ldots, x_m)$ von (25). Diese Lösung genügt auch dem System (20), somit gleichfalls dem System (1).

Hiermit ist der »Polynomsatz» vollständig bewiesen.

B. Vergleichbare Systeme und Translationen.

§ 5. Einleitung zur Theorie der vergleichbaren Systeme und der Translationen.

Die in § 1 gegebenen Beispiele zeigen nicht nur die starken, sondern verraten auch die schwachen Punkte der bis jetzt entwickelten Theorie. Diese Theorie besitzt drei in die Augen fallende Nachteile:

Erster Nachteil: Die unangenehme Voraussetzung im ersten Stetigkeitssatz (Satz 2 von § 1 oder Satz 7 von § 2), dass $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ in jedem Punkte $v = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, wo x alle ganzen Zahlen, bezw. alle Gitterpunkte im m-dimensionalen Raum durchläuft, stetig mod. 1 ist. Nehmen wir z. B. Beispiel 3 von § 1, das besagt, dass die Kongruenz

$$\sum_{\xi=1}^{x} [P(\xi)] \equiv 0 \pmod{s} \tag{1}$$

für jedes ganze $s > 0$ unendlich viele ganzzahlige Lösungen x besitzt, wenn nur das Polynom $P(x)$ für kein einziges ganzes x einen ganzzahligen Wert hat. Wie wir später in Abschnitt D sehen werden, ist diese Bedingung überflüssig, aber lassen wir diese Voraussetzung weg, so können wir den ersten Stetigkeitssatz nicht anwenden, sind also vorläufig machtlos.

Zweiter Nachteil: Satz 4 von § 1 besagt nur, dass das in diesem Satz auftretende System null oder unendlich viele ganzzahlige Lösungen besitzt, aber wenn wir nicht auf irgend eine Weise eine ganzzahlige Lösung angeben können, dann können wir nicht entscheiden, welcher von den zwei Fällen auftritt. Betrachten wir wiederum Beispiel 3 von § 1. In diesem Beispiel liegt die Frage nahe, wie es mit der Kongruenz

$$\sum_{\xi=1}^{x} [P(\xi)] \equiv 1 \pmod{s}$$

steht, aber diese Frage können wir noch nicht beantworten; wir wissen bis jetzt nur, dass diese Kongruenz entweder null oder unendlich viele ganzzahlige Lösungen hat.

Eine andere Frage: gibt es unendlich viele Brüchepaare $\frac{y_1}{x_1}$ und $\frac{y_2}{x_2}$ mit positiven Nennern, derart, dass

$$(2) \qquad \left|\pi - \frac{y_1}{x_1}\right| < \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{x_1}; \quad \left|\sqrt{5} - \frac{y_2}{x_2}\right| < \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{x_2}; \quad x_2 = 2x_1y_1 - 3$$

ist? Wollen wir diese Frage jetzt schon beantworten, dann sind wir verpflichtet versuchsweise eine Lösung von (2) zu bestimmen. Bekanntlich gilt die Ungleichung

$$\left|\pi - \frac{y_1}{x_1}\right| < \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{x_1}$$

mit

$$x_1 = 7, \quad y_1 = 22.$$

Versuchen wir

$$x_2 = 2x_1y_1 - 3 = 2 \cdot 7 \cdot 22 - 3 = 305,$$

dann ist

$$5x_2^2 = 5 \cdot 305^2 = 465\,125 = 682^2 + 1,$$

sodass es auf der Hand liegt

$$x_2 = 305, \quad y_2 = 682$$

zu versuchen. Dann ist

$$\left|\sqrt{5} - \frac{y_2}{x_2}\right| = \frac{\sqrt{5}x_2 - y_2}{x_2} = \frac{1}{x_2(\sqrt{5}x_2 + y_2)} < \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{x_2},$$

sodass (2) in der Tat die Lösung

$$(3) \qquad x_1 = 7, \quad y_1 = 22, \quad x_2 = 305, \quad y_2 = 682$$

besitzt. System (2) ist äquivalent mit

$$(4) \qquad -\frac{1}{100} < \pi x_1 - y_1 < \frac{1}{100}; \quad -\frac{1}{100} < \sqrt{5}(2x_1y_1 - 3) - y_2 < \frac{1}{100}.$$

Dieses System besitzt die in (3) angegebene Lösung, hat also nach dem Polynomsatz (angewendet mit $m = 1$ und $n = 2$) unendlich viele ganzzahlige Lösungen mit $x_1 > 0$; aus (4) folgt dann, dass auch y_1 und $x_2 = 2x_1y_1 - 3$ positiv sind, sodass wirklich unendlich viele Brüchepaare $\frac{y_1}{x_1}$ und $\frac{y_2}{x_2}$ mit positiven Nennern existieren, die dem System (2) genügen.

Mit Absicht habe ich hier ein Beispiel gewählt, bei dem eine ganzzahlige Lösung fast unmittelbar in die Augen springt, aber die Methode hat doch etwas sehr unbefriedigends. Denn ersetze ich in (2) die Zahl 100 durch 10^6, sodass ich das System

$$(5) \qquad \left|\pi - \frac{y_1}{x_1}\right| < \frac{1}{10^6} \cdot \frac{1}{x_1}; \quad \left|\sqrt{5} - \frac{y_2}{x_2}\right| < \frac{1}{10^6} \cdot \frac{1}{x_2}; \quad x_2 = 2x_1y_1 - 3$$

untersuche, dann brauche ich eine neue, und wahrscheinlich sehr lange und langweilige Rechnerei.

Zwar kann man durch eine endliche Anzahl von Operationen entscheiden, ob (5) eine Lösung besitzt oder nicht, aber praktisch ist das nicht ausführbar. Nach § 1 existiert nämlich, wenn (5) überhaupt eine ganzzahlige Lösung besitzt, eine Länge L, derart, dass jedes Intervall $a \leqq x_1 < a + L$ der Länge L mit positivem a wenigstens ein ganzes x_1 enthält, das bei geeignet gewählten positiven ganzen x_2, y_1, y_2 dem System (5) genügt. Es ist möglich den Wert einer Zahl L mit dieser Eigenschaft numerisch zu bestimmen, und dann braucht man nur die natürlichen Zahlen $x_1 < L + 1$ zu untersuchen. Aber wie gesagt, praktisch ist das nicht ausführbar. Denn zunächst fordert die Bestimmung der Zahl L schon eine sehr umständliche Berechnung. Aber das ist noch nicht das Schlimmste. Die Hauptschwierigkeit ist die, dass L jedenfalls einen ungeheuer grossen Wert besitzt, sodass die Methode, alle natürlichen Zahlen $x_1 < L + 1$ zu probieren, praktisch unmöglich ist. Übrigens ist diese Methode überhaupt nicht anwendbar, falls ich in (2) den Koeffizienten $\frac{1}{100}$ durch eine beliebige positive Zahl ε ersetze, da dann L von ε abhängt und bei nach Null strebendem ε unbeschränkt wächst. Zur Behandlung des Systems

$$(6) \qquad \left|\pi - \frac{y_1}{x_1}\right| < \frac{\varepsilon}{x_1}; \quad \left|\sqrt{5} - \frac{y_2}{x_2}\right| < \frac{\varepsilon}{x_2}; \quad x_2 = 2x_1y_1 - 3$$

brauche ich also neue Hilfsmittel. In Abschnitt C werde ich zeigen, dass, wie klein auch die feste positive Zahl ε gewählt wird, unendlich viele Brüchepaare $\frac{y_1}{x_1}$ und $\frac{y_2}{x_2}$ mit (6) existieren.

Dritter Nachteil: Zwar ist die Menge der rhythmischen Systeme ziemlich ausgedehnt, aber der Begriff der rhythmischen Systeme ist nichtsdestoweniger sehr subtil. Ändert man z. B. eine der Funktionen eines rhythmischen Systems in nur einem Punkt ein wenig, dann ist das neue System nur in sehr speziellen Fällen wiederum rhythmisch. Natürlich existieren sehr einfache, für jedes ganze $x \gtreqless 0$ definierte, nicht-rhythmische Funktionen, z. B. die Funktion $x\sqrt[3]{x}$, sodass das bis jetzt in Teil II behandelte uns noch nicht in den Stand setzt zu beweisen, dass die einfache Ungleichung

$$-\frac{1}{4} < x\sqrt[3]{x} < \frac{1}{4} \pmod{1}$$

unendlich viele ganzzahlige Lösungen x besitzt.

Da diese drei Beschwerden mich hindern, Probleme, auf deren Lösung ich Wert lege, zu behandeln, führe ich in diesem Abschnitt B zwei neue Begriffe ein, nämlich den Begriff der vergleichbaren Systeme und den Begriff der Translationen.

Definition 1: *Ich betrachte zwei Systeme* (a_ν) *und* (r_ν). *Ist* $\varepsilon > 0$, *und* $x = (x_1, \ldots, x_m)$ *ein Gitterpunkt, so nenne ich die Menge der Zahlen*

$$a_\nu(x + h),$$

wo ν *eine ganze Zahl,* $h = (h_1, \ldots, h_m)$ *einen Gitterpunkt mit*

$$1 \leqq \nu \leqq n; \quad |h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m); \quad a_\nu(x+h) \text{ definiert,} \tag{7}$$

bezeichnen, eine Welle vom System (a_ν), *und zwar eine Welle mit Mittelpunkt* x *und Breite* $\frac{2}{\varepsilon}$. *Ich sage, dass diese Welle bis auf höchstens* ε *mod.* 1 *im System* (r_ν) *vorkommt, wenn ein Gitterpunkt* $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ *mit folgender Eigenschaft besteht: für jedes Paar* ν *und* h *mit* (7) *ist* $r_\nu(x + \tau + h)$ *definiert, und gilt die Ungleichung*

$$-\varepsilon < r_\nu(x + \tau + h) - a_\nu(x + h) < \varepsilon \pmod{1}. \tag{8}$$

Gilt (7) *für kein einziges Paar* ν *und* h, *so sage ich, dass die genannte Eigenschaft für jeden Gitterpunkt* τ *gilt.*

Ich betrachte nun den Fall, dass jede Welle von (a_ν) *mit Breite* $\frac{2}{\varepsilon}$ *bis auf höchstens* ε, *wie klein auch die positive Zahl* ε *gewählt wird, mod.* I *in* (r_ν) *vorkommt. Ich sage dann, dass* (a_ν) *und* (r_ν) *vergleichbar sind, dass* (a_ν) *ärmer als oder ebenso reich wie* (r_ν) *ist, dass* (r_ν) *reicher als oder ebenso reich wie* (a_ν) *ist, und ich schreibe dann*

$$(a_\nu) \lesssim (r_\nu); \qquad (r_\nu) \gtrsim (a_\nu).$$

Der Fall, dass $a_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *für keinen einzigen Gitterpunkt* x *definiert ist, ist in dieser Definition zugelassen; nach der Definition ist dann für jedes System* (r_ν)

$$(a_\nu) \lesssim (r_\nu).$$

Hat man zugleicherzeit

$$(a_\nu) \lesssim (r_\nu) \quad \textit{und} \quad (a_\nu) \gtrsim (r_\nu),$$

so nenne ich (a_ν) *und* (r_ν) *gleich reich, und schreibe ich*

$$(a_\nu) \gtrsim \lesssim (r_\nu).$$

Ist $(a_\nu) \lesssim (r_\nu)$, *und sind* (a_ν) *und* (r_ν) *nicht gleich reich, so nenne ich* (a_ν) *ärmer als* (r_ν), *und* (r_ν) *reicher als* (a_ν).

Ist $n = 1$, *und hat man*

$$(a_1) \lesssim (r_1),$$

so nenne ich die Funktion $a_1(x)$ *ärmer als oder ebenso reich wie* $r_1(x)$, *und dann schreibe ich*

$$a_1(x) \lesssim r_1(x).$$

Satz 1: *Aus*

$$(a_\nu) \lesssim (b_\nu) \quad \textit{und} \quad (b_\nu) \lesssim (c_\nu) \tag{9}$$

folgt

$$(a_\nu) \lesssim (c_\nu). \tag{10}$$

Beweis: Ist $\varepsilon > 0$, so folgt aus (9), dass jede Welle von (a_ν), bis auf höchstens $\frac{1}{2}\varepsilon$, mod. I in (b_ν) vorkommt, und dass die entsprechende Welle von (b_ν), bis auf höchstens $\frac{1}{2}\varepsilon$, mod. 1 in (c_ν) auftritt, sodass in der Tat die ursprüngliche Welle von (a_ν), bis auf höchstens ε, mod. 1 in (c_ν) vorkommt.

Satz 2: *Aus*

$$(a_\nu) \gtrless (b_\nu) \quad \textit{und} \quad (b_\nu) \gtrless (c_\nu)$$

folgt

$$(a_\nu) \gtrless (c_\nu).$$

Beweis: Nach dem vorigen Satz gilt (10). Da (a_ν) und (c_ν) in Satz 2 vertauscht werden können, gilt ausserdem

$$(c_\nu) \lessgtr (a_\nu),$$

sodass (a_ν) und (c_ν) wirklich gleich reich sind.

Welche Bedeutung der Begriff von vergleichbaren Systemen für die Theorie der Diophantischen Ungleichungen hat, geht aus dem folgenden Satz hervor.

Satz 3: *Ist*

$$(a_\nu) \lessgtr (r_\nu), \tag{11}$$

so hat das System

$$\alpha_\nu < r_\nu(x) < \beta_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

wo α_ν, β_ν *Konstanten bezeichnen, wenigstens eben so viele ganzzahlige Lösungen wie*

$$\alpha_\nu < a_\nu(x) < \beta_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

Beweis: Sind $x', x'', \ldots, x^{(l)}$ verschiedene ganzzahlige Lösungen von (13), so ist bei geeignet gewähltem positivem δ

$$\alpha_\nu + \delta < a_\nu(x^{(\lambda)}) < \beta_\nu - \delta \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, \ldots, l). \tag{14}$$

Wegen (11) folgt aus Definition 1 (mit $x=0$, und mit einem $\varepsilon \leqq \delta$, das den Ungleichungen

$$\frac{1}{\varepsilon} \geqq \left|x_\mu^{(\lambda)}\right| \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l;\ \mu = 1, 2, \ldots, m)$$

genügt, angewendet), dass ein Gitterpunkt z mit

$$-\delta < r_\nu(x^{(\lambda)} + z) - a_\nu(x^{(\lambda)}) < \delta \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, \ldots, l) \tag{15}$$

existiert. Aus (14) und (15) folgt

$$\alpha_\nu < r_\nu(x^{(\lambda)} + z) < \beta_\nu \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, \ldots, l),$$

sodass (12) die l verschiedenen Lösungen $x^{(\lambda)} + \tau$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ besitzt. Hiermit ist bewiesen, dass (12) wenigstens eben so viele ganzzahlige Lösungen wie (13) hat.

Im Anhang von Teil II werde ich für ein beliebiges Paar von natürlichen Zahlen m und n ein System konstruieren, das reicher als oder ebenso reich wie jedes System ist. Im Spezialfall mit $m = n = 1$ bekommt man eine Funktion einer Variabeln, die reicher als oder ebenso reich wie jede Funktion einer Veränderlichen ist. Übrigens werde ich in Teil III mittels Abschätzungen beweisen, dass u. a. die Funktion

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^h}{h^{2^h}}$$

diese Eigenschaft besitzt.

In § 7 (und zwar in den Sätzen 1 und 2 von § 7) werde ich den folgenden Satz beweisen:

Satz 4: *Ärmere Systeme als rhythmische gibt es nicht. Genauer gesagt: ist* (a_ν) *in jedem Gitterpunkt des m-dimensionalen Raumes definiert, und ist* (r_ν) *rhythmisch, so ist* (a_ν) *ebenso reich wie* (r_ν), *oder reicher als* (r_ν), *oder mit* (r_ν) *unvergleichbar, aber es ist ausgeschlossen dass* (a_ν) *ärmer als* (r_ν) *ist.*

Ist (a_ν) *ebenso reich wie* (r_ν), *so ist auch* (a_ν) *rhythmisch.*

M. a. W.: ist (a_ν) *für jeden Gitterpunkt des m-dimensionalen Raumes definiert, ist* (r_ν) *rhythmisch, und hat man*

$$(a_\nu) \precsim (r_\nu),$$

so ist auch (a_ν) *rhythmisch, und gilt*

$$(a_\nu) \succsim\precsim (r_\nu).$$

Mit Satz 3 ist die Frage beantwortet, wie man die Theorie der rhythmischen Systeme auch auf nicht-rhythmische Systeme anwenden kann. Es werde z. B. die Ungleichung

$$(16) \qquad -\varepsilon < x\sqrt[3]{x} < \varepsilon \pmod{1}$$

betrachtet. Zwar ist die Funktion $x\sqrt[3]{x}$ nicht rhythmisch, aber es ist möglich eine rhythmische Funktion zu bestimmen, die ärmer als $x\sqrt[3]{x}$ ist. Wie ich nämlich in § 12 beweisen werde, ist jede lineare Funktion $px + q$ ärmer als $x\sqrt[3]{x}$.[1] Statt (16) brauche ich also nur das System

[1] Hieraus folgt mit Rücksicht auf Satz 4, dass $x\sqrt[3]{x}$ nicht rhytmisch ist.

$$(17) \qquad -\varepsilon < px + q < \varepsilon \pmod{1}$$

zu untersuchen, wobei ich die Konstanten p und q beliebig wählen kann. Ich wähle $p = q = 0$. Dann besitzt (17) unendlich viele ganzzahlige Lösungen, sodass nach Satz 3 auch (16) unendlich viele ganzzahlige Lösungen x besitzt.

Um mittels Satz 3 System (12) behandeln zu können, braucht man ein System (a_ν), das ärmer als oder ebenso reich wie (r_ν) ist. Hieraus geht hervor, dass es für die Theorie der Diophantischen Ungleichungen wichtig ist, Sätze abzuleiten, mittels deren man einem gegebenen System (r_ν) ein oder mehrere Systeme (a_ν) mit

$$(a_\nu) \preccurlyeq (r_\nu)$$

zuordnen kann. Dazu habe ich den Begriff einer Translation eingeführt.

Definition 2: *Ist (t_ν) in jedem Gitterpunkt x des m-dimensionalen Raumes definiert, dann sage ich, dass ein System (f_ν) durch die Translation (t_ν) in das System $(f_\nu + t_\nu)$ übergeht. Ich nenne (t_ν) kurzweg eine Translation von (f_ν), wenn das System (f_ν) durch die Translation (t_ν) in ein System übergeht, das ärmer als oder ebenso reich wie (f_ν) ist. M. a. W. eine Translation von (f_ν) ist ein in jedem Gitterpunkt x definiertes System (t_ν) mit der Eigenschaft*

$$(18) \qquad (f_\nu + t_\nu) \preccurlyeq (f_\nu).$$

Im Spezialfall mit $n = 1$ nenne ich $t_1(x)$ eine Translation von $f_1(x)$.

Die Translationen besitzen verschiedene einfache Eigenschaften, von denen ich hier nur eine, für die Theorie der Diophantischen Ungleichungen übrigens sehr wichtige, hervorhebe.

Satz 5[1]: *Es sei m ganz $\geqq 1$, z ganz $\geqq 0$; es bezeichne (f, f_ζ) ein rhythmisches System*[2], *und es sei möglich jedem positiven δ ein System (T, T_ζ) mit den folgenden zwei Eigenschaften zuzuordnen:*

1. *$(\Delta_\mu T, T_\zeta)$ ist eine Translation von $(\Delta_\mu f, f_\zeta)$.*[3]
2. *Jedem γ entspricht mindestens ein Gitterpunkt $X = (X_1, \ldots, X_m)$ mit*

$$\begin{cases} -\delta < T(X+H) - \gamma < \delta \pmod{1} \\ -\delta < T_\zeta(X+H) < \delta \pmod{1} \qquad (\zeta = 1, 2, \ldots, z), \end{cases}$$

[1] Den Beweis dieses Satzes findet der Leser in der Schlussbemerkung von § 9.

[2] (f, f_ζ) besteht natürlich aus den $z+1$ Funktionen $f(x), f_1(x), \ldots, f_z(x)$; ist $z = 0$, so besteht (f, f_ζ) nur aus der Funktion $f(x)$.

[3] $(\Delta_\mu f, f_\zeta)$ besteht aus den $m+z$ Funktionen $\Delta_\mu f$ und f_ζ.

gültig für jeden Gitterpunkt $H = (H_1, \ldots, H_m)$ *mit*

$$|H_\mu| \leqq \frac{1}{\delta} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Jedes System (t, t_ζ) *mit der Eigenschaft, dass* $(\Delta_\mu t, t_\zeta)$ *eine Translation von* $(\Delta_\mu f, f_\zeta)$ *ist, ist dann eine Translation von* (f, f_ζ).

Abschnitt B, der aus den Paragraphen 5, 6, 7, 8 und 9 besteht, liefert nur die Hilfsmittel, Abschnitt C dagegen behandelt die Anwendungen dieser Hilfsmittel auf Polynome und auf andere Funktionen. Nichtsdestoweniger will ich hier doch den obigen Satz auf ein sehr spezielles Problem anwenden, um jetzt schon seine Bedeutung für die Theorie der Diophantischen Ungleichungen ans Licht kommen zu lassen.

Satz 6: *Ist* $f(x)$ *ein Polynom in einer Variabeln* x, *das ein Glied von einem Grade* $q \geqq 1$ *mit irrationalem Koeffizienten enthält, und bezeichnet* $P(x)$ *irgend ein Polynom in* x *höchstens* $(q-1)^{\text{ten}}$ *Grades, dann sind die Polynome* $f(x)$ *und* $f(x) + P(x)$ *gleich reich.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass $P(x)$ eine Translation von $f(x)$ ist. Denn dann ist

$$f(x) + P(x) \prec f(x). \tag{19}$$

Beide Seiten bezeichnen Polynome, also rhythmische Funktionen. Nach Satz 4 folgt dann aus (19), dass die zwei in (19) auftretenden Funktionen gleich reich sind.

Ich kann q so wählen, dass jedes Glied in $f(x)$ von einem Grade $> q$ einen rationalen Koeffizienten besitzt. Ist $q \geqq 2$, so darf ich annehmen, dass der zu beweisende Satz mit $q - 1$ statt q schon bewiesen ist.

Ich unterscheide zwei verschiedene Fälle, je nachdem $q = 1$ oder > 1 ist.

1. Es sei $q = 1$. Bezeichnet c den Koeffizienten von x in $f(x)$, dann ist c irrational, und dann ist $f(x) - cx$ rationalzahlig (d. k. G. a. B. g.[1]), sodass bei geeignet gewähltem positivem ganzem s aus

$$x'' \equiv x' \pmod{s}$$

folgt

$$\{f(x'') - cx''\} - \{f(x') - cx'\} \equiv 0 \pmod{1}. \tag{20}$$

[1] (d. k. G. a. B. g.) soll heissen: das konstante Glied, oder die konstanten Glieder ausser Betracht gelassen.

Da $q = 1$ ist, ist $P(x)$ gleich einer Konstanten, die ich P nennen werde. Wegen der Irrationalität von sc entspricht jedem positiven ε mindestens ein ganzes η mit

$$(21) \qquad -\varepsilon < sc\eta - P < \varepsilon \pmod{1}.$$

Setzt man $s\eta = \tau$, und wählt man die ganzen Zahlen x und h beliebig, dann ist

$$x + \tau + h \equiv x + h \pmod{s},$$

also wegen (20), angewendet mit $x' = x + h$ und $x'' = x + \tau + h$,

$$f(x + \tau + h) - (f(x + h) + c\tau) \equiv 0 \pmod{1},$$

sodass aus (21) und $s\eta = \tau$ folgt

$$-\varepsilon < f(x + \tau + h) - (f(x + h) + P) < \varepsilon \pmod{1},$$

gültig für jedes Paar von ganzen Zahlen x und h. Hieraus folgt

$$f(x) + P \lessdot f(x),$$

sodass P in der Tat eine Translation von $f(x)$ ist.

2. Es sei $q \geqq 2$. Das Polynom $\Delta f(x)$ enthält ein Glied vom Grade $q - 1$ mit irrationalem Koeffizienten, und $\Delta P(x)$ ist ein Polynom höchstens $(q-2)^{\text{ten}}$ Grades. Nach dem zu beweisenden Satz, angewendet mit $q - 1$ statt q, ist somit $\Delta P(x)$ eine Translation von $\Delta f(x)$. Insbesondere besitzt $\Delta f(x)$ alle Translationen Θ, wo Θ eine beliebige Konstante bezeichnet.

Die Voraussetzungen von Satz 5 sind hier mit $m = 1$, $z = 0$ erfüllt. Denn $f(x)$ ist ein Polynom, ist also rhythmisch; jedem positiven δ kann man ein positives $\Theta < \delta$ und $< \frac{1}{2}\delta^2$ zuordnen; wird dann

$$T(x) = \Theta x$$

gesetzt, so ist $\Delta T(x) = \Theta$ eine Translation von $\Delta f(x)$; wegen $\Theta < \delta$ entspricht jedem γ mindestens ein ganzes X mit

$$-\frac{1}{2}\delta < \Theta X - \gamma < \frac{1}{2}\delta,$$

und wegen $\Theta < \frac{1}{2}\delta^2$ ist für jedes ganze H mit Absolutwert $|H| \leqq \frac{1}{\delta}$

$$-\frac{1}{2}\delta < \Theta H < \frac{1}{2}\delta,$$

somit

$$-\delta < T(X+H) - \gamma = \Theta(X+H) - \gamma < \delta.$$

Ich habe also bewiesen, dass die Voraussetzungen von Satz 5 hier mit $m=1$, $z=0$ erfüllt sind.

Da $\Delta P(x)$ eine Translation von $\Delta f(x)$ ist, behauptet Satz 5, dass $P(x)$ eine Translation von $f(x)$ ist, womit der zu beweisende Satz vollständig bewiesen ist.

Man beachte, dass aus Satz 6 unmittelbar folgt:

Satz 7: *Enthält das Polynom $f(x)$ in einer Variabeln x mindestens ein nichtkonstantes Glied mit irrationalem Koeffizienten, so hat die Ungleichung*

$$-\varepsilon < f(x) < \varepsilon \pmod{1}$$

für jedes positive ε unendlich viele positive ganzzahlige Lösungen x.

Beweis: Die Ungleichung

$$f(0) - \varepsilon < f(x) < f(0) + \varepsilon \pmod{1}$$

besitzt die Lösung $x=0$. Nach Satz 6, angewendet mit $P(x)=f(0)$, ist

$$f(x) \lessdot f(x) + f(0),$$

sodass nach Satz 3 auch das System

$$f(0) - \varepsilon < f(x) + f(0) < f(0) + \varepsilon \pmod{1}$$

wenigstens eine ganzzahlige Lösung hat. Da $f(x)$ ein Polynom, also rhythmisch ist, besitzt die letzte Ungleichung unendlich viele positive ganzzahlige Lösungen, womit Satz 7 bewiesen ist.

Der Leser, der Teil I kennt, weiss, dass Satz 7 nur ein Korollar ist des bekannten Weylschen Theorems, dessen Wortlaut man auch in Teil II, und zwar in § 10 finden kann. Mit Rücksicht auf Satz 7 wird der Leser sich wohl nicht wundern, wenn ich sage, dass Satz 5 mich in den Stand setzt nebenbei einen neuen Beweis für das Weylsche Theorem zu geben, und damit für alle in § 6 von Teil I vorkommenden Sätze. Diesen Beweis gebe ich erst in § 11, also in Abschnitt C.

§ 6. Eigenschaften von vergleichbaren Systemen.

Satz 1: *Es seien* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *konstant.*

$$\textit{Aus } (a_\nu) \lessgtr (r_\nu) \quad \textit{folgt } (a_\nu + c_\nu) \lessgtr (r_\nu + c_\nu).$$

$$\textit{Aus } (a_\nu) \gtrdot (r_\nu) \quad \textit{folgt } (a_\nu + c_\nu) \gtrdot (r_\nu + c_\nu).$$

$$\textit{Aus } (a_\nu) \gtrdot \lessdot (r_\nu) \quad \textit{folgt } (a_\nu + c_\nu) \gtrdot \lessdot (r_\nu + c_\nu).$$

Beweis: Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Definition von vergleichbaren Systemen.

Satz 2: *Ist*

$$(a_\nu) \lessdot (r_\nu), \tag{1}$$

so ist jedes Teilsystem von (a_ν) *ärmer als oder ebenso reich wie das entsprechende Teilsystem von* (r_ν); *d. h. bezeichnen* $\nu_1, \ldots, \nu_l$ *natürliche Zahlen* $\leqq n$, *so folgt aus* (1)

$$(a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_l}) \lessdot (r_{\nu_1}, \ldots, r_{\nu_l}). \tag{2}$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus der Definition von vergleichbaren Systemen.

Satz 3: *Ist*

$$(a_\nu) \gtrdot \lessdot (r_\nu), \tag{3}$$

so ist jedes Teilsystem von (a_ν) *ebenso reich wie das entsprechende Teilsystem von* (r_ν); *d. h. bezeichnen* $\nu_1, \ldots, \nu_l$ *natürliche Zahlen* $\leqq n$, *so folgt aus* (3)

$$(a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_l}) \gtrdot \lessdot (r_{\nu_1}, \ldots, r_{\nu_l}).$$

Beweis: Nach Satz 2 gilt (2); da in Satz 3 (a_ν) und (r_ν) vertauscht werden können, folgt aus Satz 2 ausserdem noch

$$(a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_l}) \gtrdot (r_{\nu_1}, \ldots, r_{\nu_l}),$$

womit der zu beweisende Satz bewiesen ist.

Satz 4 (*Additionstheorem*): *Ist*

$$(a_\nu) \lessdot (r_\nu), \tag{1}$$

so ist

$$(a_\nu, a_1 + a_2) \lessdot (r_\nu, r_1 + r_2). \tag{4}$$

Vorbemerkung: Sind (a_ν) und (r_ν) gleich reich, dann können diese zwei Systeme unter einander vertauscht werden, sodass dann

$$(a_\nu,\ a_1 + a_2) \succ \prec (r_\nu,\ r_1 + r_2)$$

ist.

Beweis: Wegen (1) kann man jedem positiven ε und jedem Gitterpunkt x einen Gitterpunkt τ mit folgender Eigenschaft zuordnen: für jeden Gitterpunkt $h = (h_1, \ldots, h_m)$ mit

$$(5) \qquad |h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

und für jedes ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$ mit der Eigenschaft, dass $a_\nu(x+h)$ definiert ist, ist auch $r_\nu(x + \tau + h)$ festgelegt, und gilt die Ungleichung

$$(6) \qquad -\frac{1}{2}\varepsilon < r_\nu(x + \tau + h) - a_\nu(x+h) < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1}.$$

Für jeden dieser Gitterpunkte h und für jedes dieser ν gilt somit

$$(7) \qquad -\varepsilon < r_\nu(x + \tau + h) - a_\nu(x+h) < \varepsilon \pmod{1}.$$

Falls $a_1(x+h) + a_2(x+h)$ definiert ist, ist jede der beiden Zahlen $a_1(x+h)$ und $a_2(x+h)$, also nach dem Obigen auch $r_1(x+\tau+h)$ und $r_2(x+\tau+h)$, folglich auch die Summe $r_1(x+\tau+h) + r_2(x+\tau+h)$ festgelegt; dann gilt also für jeden Gitterpunkt h mit (5) Ungleichung (6) mit $\nu = 1$ und mit $\nu = 2$, sodass dann

$$(8) \qquad -\varepsilon < \{r_1(x+\tau+h) + r_2(x+\tau+h)\} - \{a_1(x+h) + a_2(x+h)\} < \varepsilon \pmod{1}$$

ist. Aus (7) und (8) folgt (4).

Satz 5: *Voraussetzungen.* 1. *Es ist*

$$(9) \qquad (a_\nu) \prec (r_\nu).$$

2. *Die Funktion*

$$g(x) = g(x_1, \ldots, x_m)$$

hat in jedem Gitterpunkt x einen eindeutig definierten beschränkten ganzzahligen Wert.

3. *Jedem positiven ε und jedem Gitterpunkt x kann man ein positives δ zuordnen mit folgender Eigenschaft: wird der Gitterpunkt $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ so gewählt,*

dass aus

$$(10) \qquad 1 \leqq \nu \leqq n; \quad |h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m); \quad a_\nu(x+h) \textit{ definiert,}$$

folgt

$$(11) \qquad r_\nu(x+\tau+h) \textit{ definiert; } -\delta < r_\nu(x+\tau+h) - a_\nu(x+h) < \delta \pmod{1},$$

so ist

$$(12) \qquad g(x+\tau+h) = g(x+h)$$

für jeden Gitterpunkt h *mit*

$$(13) \qquad |h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Unter diesen Voraussetzungen ist

$$(14) \qquad (a_\nu, a_1 g) \prec (r_\nu, r_1 g).$$

Vorbemerkung: Die Voraussetzungen 2 und 3 sind erfüllt, wenn $g(x)$ gleich einer ganzzahligen Konstante c ist, sodass für jedes ganze konstante c aus (9) folgt

$$(a_\nu, c a_1) \prec (r_\nu, c r_1).$$

Beweis: Nach der zweiten Voraussetzung ist bei geeignet gewähltem positivem G für jeden Gitterpunkt $\bar{x}$

$$(15) \qquad |g(\bar{x})| \leqq G.$$

Ich wähle irgend eine positive Zahl ε und einen beliebigen Gitterpunkt x. Es werde die Zahl δ bestimmt, wie in der dritten Voraussetzung angegeben, und es bezeichne η die kleinste der drei Zahlen ε, $\frac{\varepsilon}{G}$ und δ. Wegen (9) existiert ein Gitterpunkt τ, derart, dass aus (10) folgt

$$(16) \qquad -\eta < r_\nu(x+\tau+h) - a_\nu(x+h) < \eta \pmod{1}.$$

Wegen $\eta \leqq \delta$ gilt dann (11), somit (12). Da g stets ganzzahlig ist, folgt aus (16) (angewendet mit $\nu = 1$), (12), (15) und $\eta \leqq \frac{\varepsilon}{G}$

$$(17) \qquad -\varepsilon < r_1(x+\tau+h) g(x+\tau+h) - a_1(x+h) g(x+h) < \varepsilon \pmod{1}.$$

Aus (16), $\eta \leqq \varepsilon$ und (17) folgt (14).

Satz 6 (*Dritter Stetigkeitssatz*): *Ist*

$$(a_\nu) \lessdot (r_\nu), \tag{18}$$

und sind die Funktionen

$$\psi_\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

in jedem Punkt $v = (v_1, \ldots, v_n)$ *des* n*-dimensionalen Raumes definiert, periodisch mod.* 1 *und stetig mod.* 1, *so ist*

$$(\psi_\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n)) \lessdot (\psi_\lambda(r_1, r_2, \ldots, r_n)).\text{[1]} \tag{19}$$

Vorbemerkungen: 1. In diesem Stetigkeitssatz darf die Voraussetzung, dass die l Funktionen $\psi_\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ überall stetig mod. 1 sind, ersetzt werden durch die weniger forderende Voraussetzung, dass die Funktionen $\psi_\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ stetig mod. 1 sind in den Punkten $(a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x))$, falls x alle Gitterpunkte im m-dimensionalen Raum durchläuft, wo die n Funktionen $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ definiert sind.

2. Sind (a_ν) und (r_ν) gleich reich, dann können diese zwei Systeme in diesem Satz untereinander vertauscht werden, sodass dann

$$(\psi_\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n)) \gtrdot \lessdot (\psi_\lambda(r_1, r_2, \ldots, r_n))$$

ist.

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$, und es bezeichne x einen Gitterpunkt. Wegen der Stetigkeitsbedingung kann man eine, nur von ε und x abhängige positive Zahl δ wählen, derart, dass aus

$$\begin{cases} |h_\mu| \leqq \dfrac{1}{\varepsilon} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m); \qquad a_\nu(x+h) \text{ definiert } (\nu = 1, \ldots, n), \\ \text{und} \qquad -\delta < v_\nu - a_\nu(x+h) < \delta \quad (\text{mod. } 1) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{20}$$

folgt

$$-\varepsilon < \psi_\lambda(v_1, \ldots, v_n) - \psi_\lambda(a_1(x+h), \ldots, a_n(x+h)) < \varepsilon \;\; (\text{mod. } 1) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, l).$$

[1] Das System $(\psi_\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n))$ besteht natürlich aus den l Funktionen

$$\psi_\lambda(a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l).$$

Wegen (18) folgt aus (20), dass bei geeignet gewähltem Gitterpunkt τ die Zahlen $r_\nu(x+\tau+h)$ $(\nu=1,\ldots,n)$ definiert sind und den Ungleichungen

$$-\delta < r_\nu(x+\tau+h) - a_\nu(x+h) < \delta \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

also den Ungleichungen

$$-\varepsilon < \psi_\lambda(r_1(x+\tau+h), \ldots, r_n(x+\tau+h)) - \psi_\lambda(a_1(x+h), \ldots, a_n(x+h)) < \varepsilon \pmod{1}$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

genügen. Hiermit ist (19) bewiesen.

Definition 1: *Ich sage, dass die Folge S_1, S_2, ... von Systemen*

$$S_\varrho = (f_{1\varrho}, f_{2\varrho}, \ldots, f_{n\varrho}),$$

wo n unabhängig von ϱ vorausgesetzt wird, mod. 1 konvergiert mit Grenzsystem

$$S = (f_1, f_2, \ldots, f_n),$$

wenn für jeden Gitterpunkt x und für jedes ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$, mit der Eigenschaft, dass $f_\nu(x)$ definiert ist, die Zahl $f_{\nu r}(x)$ bei hinreichend grossem r festgelegt ist, und bei unbeschränkt wachsendem ϱ

$$f_{\nu\varrho}(x) \to f_\nu(x) \pmod{1} \tag{21}$$

ist.

Satz 7 (*Erster Konvergenzsatz in der Theorie der vergleichbaren Systeme*): *Für jede mod. 1 konvergente Folge S_1, S_2, ... von Systemen S_ϱ mit Grenzsystem S und mit der Eigenschaft*

$$S_{\varrho+1} \prec S_\varrho \qquad (\varrho \geqq 1),$$

ist

$$S \prec S_\varrho \qquad (\varrho \geqq 1).$$

Vorbemerkung: Man beachte, dass in diesem Satz nicht gleichmässige Konvergenz mod. 1 gefordert wird.

Beweis: Es sei ε eine positive Zahl, x ein Gitterpunkt, γ eine natürliche Zahl. Ist

$$S_\varrho = (f_{1\varrho}, \ldots, f_{n\varrho}), \qquad S = (f_1, \ldots, f_n),$$

so gibt es nach Definition 1 eine ganze Zahl $r \geqq \gamma$, derart, dass für jedes Paar h und ν mit

$$(22) \qquad 1 \leqq \nu \leqq n; \ |h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m); \qquad f_\nu(x+h) \text{ definiert,}$$

$f_{\nu r}(x+h)$ festgelegt ist und der Ungleichung

$$(23) \qquad -\frac{1}{2}\varepsilon < f_{\nu r}(x+h) - f_\nu(x+h) < \frac{1}{2}\varepsilon \quad (\text{mod. } 1)$$

genügt.

Wegen $r \geqq \gamma$ und $S_{\varrho+1} \lesssim S_\varrho$ ist

$$S_r \lesssim S_\gamma,$$

sodass bei geeignet gewähltem Gitterpunkt τ für jedes Paar h und ν mit

$$(24) \qquad 1 \leqq \nu \leqq n; \ |h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m); \qquad f_{\nu r}(x+h) \text{ definiert,}$$

$f_{\nu\gamma}(x+\tau+h)$ festgelegt ist, und der Ungleichung

$$(25) \qquad -\frac{1}{2}\varepsilon < f_{\nu\gamma}(x+\tau+h) - f_{\nu r}(x+h) < \frac{1}{2}\varepsilon \quad (\text{mod. } 1)$$

genügt. Jedes Paar h und ν mit (22) besitzt somit die Eigenschaften (23), (24) und (25), besitzt also insbesondere die Eigenschaft, dass $f_{\nu\gamma}(x+\tau+h)$ definiert ist und der Ungleichung

$$(26) \qquad -\varepsilon < f_{\nu\gamma}(x+\tau+h) - f_\nu(x+h) < \varepsilon \quad (\text{mod. } 1)$$

genügt. Hieraus folgt für jede natürliche Zahl γ

$$S \lesssim S_\gamma.$$

Satz 8 (*Zweiter Konvergenzsatz in der Theorie der vergleichbaren Systeme*): *Bezeichnet E eine Menge von Gitterpunkten x, bilden die in jedem Punkte x von E definierten Systeme S_ϱ $(\varrho = 1, 2, \ldots)$ eine gleichmässig mod. 1 konvergente Folge mit dem in jedem Punkte von E definierten Grenzsystem S, und ist*

$$(27) \qquad S_\varrho \lesssim S_{\varrho+1} \qquad (\varrho \geqq 1),$$

dann ist

$$S_\varrho \lesssim S \qquad (\varrho \geqq 1).$$

Vorbemerkungen: 1. Wird in diesem Satz nicht nur

$$S_\varrho \preceq S_{\varrho+1} \qquad (\varrho \geqq 1),$$

sondern sogar

$$S_\varrho \succ\, \prec S_{\varrho+1} \qquad (\varrho \geqq 1)$$

vorausgesetzt, dann ist

$$S_\varrho \succ\, \prec S \qquad (\varrho \geqq 1).$$

Denn nach dem vorigen Satz ist in diesem Fall

$$S_\varrho \succ S \qquad (\varrho \geqq 1).$$

2. Die Voraussetzung der Gleichmässigkeit darf in Satz 8 nicht weggelassen werden. Denn z. B. im Spezialfall, wo $m = n = 1$ ist, E die Menge der ganzen Zahlen bezeichnet, und S_ϱ aus der Funktion $f_\varrho(x)$ mit

$$\begin{aligned} f_\varrho(x) &= 0 \qquad \text{für} \quad x \leqq \varrho \\ &= \frac{1}{2} \qquad \text{für} \quad x > \varrho \end{aligned}$$

besteht, sind die Systeme S_ϱ wegen

$$f_{\varrho+1}(x) = f_\varrho(x-1)$$

gleich reich, aber das Grenzsystem S besteht hier aus der Funktion, die identisch verschwindet, ist also ärmer als jedes System S_ϱ.

Beweis: Es sei ε eine positive Zahl, x ein Gitterpunkt, γ eine natürliche Zahl. Ist

$$S_\varrho = (f_{1\varrho}, \ldots, f_{n\varrho}), \qquad S = (f_1, \ldots, f_n),$$

dann existiert wegen der gleichmässigen Konvergenz eine, nur von ε und γ abhängige ganze Zahl $r \geqq \gamma$, derart, dass für alle Punkte $\bar{x}$ von E

$$(28) \qquad -\frac{1}{2}\varepsilon < f_\nu(\bar{x}) - f_{\nu r}(\bar{x}) < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Wegen $r \geqq \gamma$ und (27) ist

$$S_\gamma \preceq S_r,$$

sodass bei geeignet gewähltem Gitterpunkt $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ jeder Punkt $x + h$ von E mit

$$(29) \qquad |h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

die Eigenschaft besitzt, dass $x + \tau + h$ in E liegt, und

$$(30) \qquad -\frac{1}{2}\varepsilon < f_{\nu r}(x + \tau + h) - f_{\nu\gamma}(x + h) < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Aus (28) mit $\bar{x} = x + \tau + h$ und (30) folgt

$$-\varepsilon < f_\nu(x + \tau + h) - f_{\nu\gamma}(x + h) < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

gültig für jeden Gitterpunkt $x + h$ von E mit (29). Für jede natürliche Zahl γ ist somit

$$S_\gamma \lessdot S.$$

Satz 9 (*Dritter Konvergenzsatz in der Theorie der vergleichbaren Systeme*): *Bilden die Systeme S_ϱ $(\varrho = 1, 2, \ldots)$ eine mod. 1 konvergente Folge mit Grenzsystem S, und existiert ein System (φ_ν) mit*

$$S_\varrho \lessdot (\varphi_\nu) \qquad (\varrho \geqq 1),$$

dann ist

$$S \lessdot (\varphi_\nu).$$

Beweis: Es sei ε eine positive Zahl, x ein Gitterpunkt. Ist

$$S_\varrho = (f_{1\varrho}, \ldots, f_{n\varrho}), \qquad S = (f_1, \ldots, f_n),$$

so gibt es nach Definition 1 eine natürliche Zahl r, derart, dass für jedes Paar h und ν mit

$$(31) \qquad 1 \leqq \nu \leqq n; \quad |h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m); \quad f_\nu(x + h) \text{ definiert,}$$

$f_{\nu r}(x + h)$ festgelegt ist und der Ungleichung

$$(32) \qquad -\frac{1}{2}\varepsilon < f_{\nu r}(x + h) - f_\nu(x + h) < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1}$$

genügt. Wegen

$$S_r \lessdot (\varphi_\nu)$$

ist bei geeignet gewähltem Gitterpunkt $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ für jedes Paar h und ν mit

$$(33) \qquad 1 \leqq \nu \leqq n; \quad |h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m); \quad f_{\nu r}(x+h) \text{ definiert,}$$

auch $\varphi_\nu(x+\tau+h)$ festgelegt, und gilt

$$(34) \qquad -\frac{1}{2}\varepsilon < \varphi_\nu(x+\tau+h) - f_{\nu r}(x+h) < \frac{1}{2}\varepsilon \quad (\text{mod. } 1).$$

Jedes Paar h und ν mit (31) besitzt somit die Eigenschaften (32), (33) und (34), besitzt also insbesondere die Eigenschaft, dass $\varphi_\nu(x+\tau+h)$ definiert ist und der Ungleichung

$$-\varepsilon < \varphi_\nu(x+\tau+h) - f_\nu(x+h) < \varepsilon \quad (\text{mod. } 1)$$

genügt. Hiermit ist Satz 9 bewiesen.

Definition 2: *Ich setze*

$$(35) \qquad \Delta_\mu f(x) = f(x_1, \ldots, x_{\mu-1}, x_\mu + 1, x_{\mu+1}, \ldots, x_m) - f(x_1, \ldots, x_m),$$

falls die zwei Glieder rechts definiert sind (sage ich, dass $\Delta_\mu f(x)$ definiert ist, so meine ich also, dass die zwei in der rechten Seite von (35) auftretenden Glieder festgelegt sind, und dass (35) gilt). Ist $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$ ein System von ganzen Zahlen $k_\mu \geqq 0$, so setze ich

$$\Delta^k f(x) = \sum_{h_1=0}^{k_1} \sum_{h_2=0}^{k_2} \cdots \sum_{h_m=0}^{k_m} (-1)^{k_1+\cdots+k_m-h_1-\cdots-h_m} \binom{k_1}{h_1}\binom{k_2}{h_2}\cdots\binom{k_m}{h_m} f(x_1+h_1, \ldots, x_m+h_m),$$

wenn jedes Glied der rechten Seite definiert ist. Dann ist

$$\Delta^k \Delta^{k'} f(x) = \Delta^{k+k'} f(x),$$

wenn beide Seiten definiert sind.

Satz 10: *Es sei m ganz $\geqq 1$, z ganz $\geqq 0$.*

Behauptungen: 1. *Ist*

$$(36) \qquad (a, a_\zeta) \lessdot (r, r_\zeta),$$

dann ist

$$(a,\ \varDelta_\mu a,\ a_\zeta) \prec (r,\ \varDelta_\mu r,\ r_\zeta).\text{[1]} \tag{37}$$

2. *Ist*

$$(a,\ a_\zeta) \succ \prec (r,\ r_\zeta), \tag{38}$$

dann ist

$$(a,\ \varDelta_\mu a,\ a_\zeta) \succ \prec (r,\ \varDelta_\mu r,\ r_\zeta). \tag{39}$$

3. *Es ist möglich, dass* $(\varDelta_\mu a,\ a_\zeta)$ *und* $(\varDelta_\mu r,\ r_\zeta)$ *gleich reich sind, und doch* $(a,\ a_\zeta)$ *und* $(r,\ r_\zeta)$ *nicht vergleichbar sind.*

Beweis: 1. Es gelte (36). Es bezeichne ε eine beliebige positive Zahl, x irgend einen Gitterpunkt. Dann existiert ein Gitterpunkt $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ mit den folgenden zwei Eigenschaften:

Für jeden Gitterpunkt $g = (g_1, \ldots, g_m)$ mit

$$|g_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} + 1 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m); \quad a(x+g) \text{ definiert}, \tag{40}$$

ist auch $r(x+\tau+g)$ festgelegt, und gilt die Ungleichung

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < r(x+\tau+g) - a(x+g) < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1}.$$

Für jedes Paar g und ζ mit

$$1 \leqq \zeta \leqq z; \qquad |g_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} + 1 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m); \qquad a_\zeta(x+g) \text{ definiert}, \tag{41}$$

ist auch $r_\zeta(x+\tau+g)$ festgelegt, und gilt die Ungleichung

$$-\varepsilon < r_\zeta(x+\tau+g) - a_\zeta(x+g) < \varepsilon \pmod{1}$$

(in dieser zweiten Eigenschaft ist $1 \leqq \zeta \leqq z$, sodass diese Eigenschaft, falls $z = 0$ ist, nicht auftritt).

---

[1] $(a,\ a_\zeta)$ bezeichnet natürlich das System $(a,\ a_1, \ldots, a_z)$, und $(a,\ \varDelta_\mu a,\ a_\zeta)$ das System $(a,\ \varDelta_1 a, \ldots, \varDelta_m a,\ a_1, \ldots, a_z)$. Ist $z = 0$, so werden einfach die Systeme (a) und $(a,\ \varDelta_1 a, \ldots, \varDelta_m a)$ gemeint.

Ich betrachte jetzt irgend einen Gitterpunkt $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit

$$|h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

und ich setze

$$h^{(\mu)} = (h_1, \ldots, h_{\mu-1}, h_\mu + 1, h_{\mu+1}, \ldots, h_m) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Für jedes ζ $(\zeta = 1, 2, \ldots, z)$ mit der Eigenschaft, dass $a_\zeta(x+h)$ festgelegt ist, gilt (41) mit $g = h$, sodass dann auch $r_\zeta(x+\tau+h)$ definiert ist, und die Ungleichung

$$(42) \qquad -\varepsilon < r_\zeta(x+\tau+h) - a_\zeta(x+h) < \varepsilon \pmod{1}$$

gilt.

Für jedes μ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ mit der Eigenschaft, dass $\Delta_\mu a(x+h)$ definiert ist, sind nach Definition 2 auch $a(x+h)$ und $a(x+h^{(\mu)})$ festgelegt, sodass dann (40) mit $g = h$ und auch mit $g = h^{(\mu)}$ gilt. Für jedes dieser μ ist somit

$$(43) \qquad -\frac{1}{2}\varepsilon < r(x+\tau+h) - a(x+h) < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1}$$

und

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < r(x+\tau+h^{(\mu)}) - a(x+h^{(\mu)}) < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1},$$

also

$$(44) \qquad -\varepsilon < \Delta_\mu r(x+\tau+h) - \Delta_\mu a(x+h) < \varepsilon \pmod{1}.$$

Aus (43), (44) und (42) folgt (37).

2. In der zweiten Behauptung dürfen die Systeme (a, a_ζ) und (r, r_ζ) untereinander vertauscht werden, sodass die zweite Behauptung unmittelbar aus der ersten folgt.

3. Ich betrachte den Spezialfall mit

$$m = 1, \quad z = 0, \quad a(x) = 0, \quad r(x) = \frac{1}{2}.$$

Die Systeme (Δa) und (Δr) bestehen beide aus einer identisch verschwindenden Funktion, sind also gleich reich, aber die Systeme (a) und (r) sind nicht vergleichbar.

Satz 11: *Es bezeichne E eine endliche Menge von Zahlensystemen* $\varkappa = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m)$ *mit* $\varkappa_\mu$ *ganz* $\geqq 0$.

Behauptungen: 1. *Ist*

$$(a_\nu) \lessgtr (r_\nu),$$

so besitzen die zwei Systeme $(\Delta^\varkappa a_\nu)$ *und* $(\Delta^\varkappa r_\nu)$, *wo* ν *die Reihe* $1, 2, \ldots, n$ *und wo* $\varkappa$ *die Menge E durchläuft, die Eigenschaft*

$$(\Delta^\varkappa a_\nu) \lessgtr (\Delta^\varkappa r_\nu).$$

(*Ist N die Anzahl der Elemente von E, so besteht* $(\Delta^\varkappa a_\nu)$ *aus* nN *Funktionen.*)

2. *Ist*

$$(a_\nu) \gtrless\lessgtr (r_\nu),$$

so ist

$$(\Delta^\varkappa a_\nu) \gtrless\lessgtr (\Delta^\varkappa r_\nu).$$

Beweis: Man beweist diesen Satz durch wiederholte Anwendung des vorigen Satzes.

Satz 12: *Es seien l, m und z ganze Zahlen mit* $z \geqq 0$, $m \geqq l \geqq 1$, *und es sei die Funktion*

$$a(x) = a(x_1, \ldots, x_m),$$

falls sie in irgend einem Gitterpunkt $x = (x_1, \ldots, x_m)$ *festgelegt ist, in allen Gitterpunkten* $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$ *mit*

(45) $$\bar{x}_\lambda \geqq x_\lambda \quad (\lambda = 1, \ldots, l); \qquad \bar{x}_\mu = x_\mu \quad (\mu = l + 1, \ldots, m)$$

definiert. Ist dann

(46) $$(\Delta_\lambda a, a_\zeta) \lessgtr (\Delta_\lambda r, r_\zeta)^1,$$

so ist bei geeignet gewähltem (von $x_1, \ldots, x_l$ *unabhängigem)* $g(x_{l+1}, \ldots, x_m)$

(47) $$(a + g, a_\zeta) \lessgtr (r, r_\zeta)$$

(*ist* $l = m$, *so ist g eine geeignet gewählte Konstante*).

[1] $(\Delta_\lambda a, a_\zeta)$ bezeichnet natürlich das System $(\Delta_1 a, \ldots, \Delta_l a, a_1, \ldots, a_z)$. Ist $z = 0$, so wird das System $(\Delta_1 a, \ldots, \Delta_l a)$ gemeint.

Beweis von Satz 12.

Erster Schritt: Es bezeichne E die Menge der Gitterpunkte x, wo $a(x)$ definiert ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass E nicht leer ist.

Beweis: Falls E leer ist, so gilt, wie ich zeigen werde, die Behauptung von Satz 12 mit $g(x_{l+1}, \ldots, x_m) = 0$.

Ist $z = 0$, so bezeichnet die linke Seite von (47) mit $g = 0$ das System (a), das aus der Funktion $a(x)$ besteht, die in keinem einzigen Gitterpunkt x definiert ist. Nach der Definition von zwei vergleichbaren Systemen gilt dann (47), wie auch die Funktion $r(x)$ gewählt wird.

Ist $z \geqq 1$, so folgt aus (46) für die zwei Teilsysteme (a_ζ) und (r_ζ) die Beziehung

$$(a_\zeta) \preccurlyeq (r_\zeta),$$

sodass man jedem positiven ε und jedem Gitterpunkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ einen Gitterpunkt $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ mit den folgenden zwei Eigenschaften zuordnen kann: Für jeden Gitterpunkt $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit

$$(48) \qquad |h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

und für jedes ζ $(\zeta = 1, 2, \ldots, z)$ mit der Eigenschaft, dass $a_\zeta(x+h)$ definiert ist, ist auch $r_\zeta(x+\tau+h)$ festgelegt und gilt die Ungleichung

$$(49) \qquad -\varepsilon < r_\zeta(x+\tau+h) - a_\zeta(x+h) < \varepsilon \pmod{1}.$$

Für jeden Gitterpunkt h mit (48), der die Eigenschaft besitzt, dass $a(x+h)$ definiert ist, ist auch $r(x+\tau+h)$ festgelegt und gilt die Ungleichung

$$(50) \qquad -\varepsilon < r(x+\tau+h) - a(x+h) < \varepsilon \pmod{1};$$

denn da E leer ist, kommen solche Gitterpunkte h nicht vor.

Aus (49) und (50) folgt (47) mit $g = 0$.

Zweiter Schritt: Gehört ein Punkt x zu E, so gehört nach der Voraussetzung jeder Gitterpunkt $\bar{x}$ mit (45) zu E, sodass in jedem Punkt x von E auch die l Zahlen $\Delta_\lambda a(x)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ definiert sind.

Dritter Schritt: Es ist möglich in jedem Punkt x von E eine Funktion $G(x) = G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ so zu bestimmen, dass jedem positiven ε ein Gitterpunkt $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ mit den folgenden zwei Eigenschaften zugeordnet werden kann:

1. Für jeden Gitterpunkt x mit

(51) $$|x_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

und für jedes ζ ($\zeta = 1, 2, \ldots, z$) mit der Eigenschaft, dass $a_\zeta(x)$ definiert ist, ist $r_\zeta(\tau + x)$ festgelegt und gilt die Ungleichung

(52) $$-\varepsilon < r_\zeta(\tau + x) - a_\zeta(x) < \varepsilon \quad (\text{mod. } 1).$$

(Diese Eigenschaft tritt nicht auf, wenn $z = 0$ ist.)

2. Für jeden Punkt x von E mit (51) sind

$$r(\tau + x) \text{ und } \Delta_\lambda r(\tau + x) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

festgelegt, und gelten die Ungleichungen

(53) $$-\varepsilon < r(\tau + x) - a(x) - G(x) < \varepsilon \quad (\text{mod. } 1)$$

(54) $$-\varepsilon < \Delta_\lambda r(\tau + x) - \Delta_\lambda a(x) < \varepsilon \quad (\text{mod. } 1) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l).$$

Beweis: Nach der Definition von zwei vergleichbaren Systemen, angewendet mit $(\Delta_\lambda a, a_\zeta)$ und $(\Delta_\lambda r, r_\zeta)$ statt (a_ν) und (r_ν), mit dem Koordinatenursprung statt x, mit x statt h und mit δ statt ε, kann man wegen (46) jeder positiven Zahl δ einen Gitterpunkt $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ zuordnen mit folgenden Eigenschaften:

1*. Für jeden Gitterpunkt x mit

(55) $$|x_\mu| \leqq \frac{1}{\delta} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

und für jedes ζ ($\zeta = 1, 2, \ldots, z$) mit der Eigenschaft, dass $a_\zeta(x)$ definiert ist, ist $r_\zeta(\tau + x)$ festgelegt, und gilt die Ungleichung

(56) $$-\delta < r_\zeta(\tau + x) - a_\zeta(x) < \delta \quad (\text{mod. } 1).$$

2*. Für jeden Punkt x von E mit (55) ist $\Delta_\lambda r(\tau + x)$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, l$) festgelegt, und gelten die Ungleichungen

(57) $$-\delta < \Delta_\lambda r(\tau + x) - \Delta_\lambda a(x) < \delta \quad (\text{mod. } 1) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l).$$

Nach Definition 2 ist dann auch für jeden Punkt x von E mit (55) die Zahl $r(\tau + x)$ festgelegt. Ich setze

(58) $$r(\tau + x) - a(x) = F(x, \delta),$$

sodass $F(x, \delta)$ für jedes positive δ und für jeden Punkt x von E mit (55) definiert ist.

Es mögen $x', x'', x''', \ldots$ die Gitterpunkte von E, in irgend einer Folge aufgeschrieben, bezeichnen. Strebt δ nach Null, so bilden die Zahlen $F(x', \delta)$ eine Menge mit wenigstens einem Häufungspunkt mod. 1. Ich wähle einen dieser Häufungspunkte mod. 1 aus, und nenne denselben $G(x')$. Strebt δ nach Null, so bilden die Punkte $(F(x', \delta), F(x'', \delta))$ eine zweidimensionale Menge mit wenigstens einem Häufungspunkt mod. 1, dessen erste Koordinate $G(x')$ ist. Ich wähle einen dieser Häufungspunkte mod. 1 aus, und nenne denselben $(G(x'), G(x''))$, u. s. w. Auf diese Art definiere ich für jeden Punkt x von E die Zahl $G(x)$, derart, dass für jede natürliche Zahl s der Punkt $(G(x'), G(x''), \ldots, G(x^{(s)}))$ Häufungspunkt mod. 1 der Menge der Punkte $(F(x', \delta), F(x'', \delta), \ldots, F(x^{(s)}, \delta))$ ist, wo δ nach Null strebt. Ich werde zeigen, dass diese Funktion $G(x)$ die verlangte Eigenschaft besitzt.

Zunächst wähle ich die von ε abhängige natürliche Zahl s so gross, dass alle Punkte x von E mit (51) im System $x', x'', \ldots, x^{(s)}$ vorkommen. Dann wähle ich (und nach dem Obigen ist das möglich) die positive Zahl $\delta \leqq \varepsilon$ so, dass

$$(59) \qquad -\varepsilon < G(x^{(\sigma)}) - F(x^{(\sigma)}, \delta) < \varepsilon \quad (\text{mod. } 1) \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s)$$

ist und ich ordne diesem δ den Punkt τ mit den Eigenschaften 1*. und 2*. zu.

Wegen $\delta \leqq \varepsilon$ folgt 1. aus 1*; 2. aus 2*, (58) und (59).

Vierter Schritt: Bezeichnen $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ und $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ zwei Punkte von E mit

$$(60) \qquad X_{l+1} = x_{l+1}, \; X_{l+2} = x_{l+2}, \; \ldots, \; X_m = x_m,$$

dann besitzt die im dritten Schritt definierte Funktion G die Eigenschaft

$$G(X) \equiv G(x) \quad (\text{mod. } 1).$$

Beweis: Ist $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ ein Punkt von E, so liegen nach der Voraussetzung die l Punkte

$$\xi^{(\lambda)} = (\xi_1, \ldots, \xi_{\lambda-1}, \xi_\lambda + 1, \xi_{\lambda+1}, \ldots, \xi_m) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

auch in E. Wählen wir ε positiv und < 1, und ist ξ ein Punkt von E mit

$$(61) \qquad |\xi_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} - 1 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

so gelten bei geeignetem τ die Ungleichungen (53) und (54) mit $x = \xi$ und mit $x = \xi^{(\lambda)}$, also

$$(62) \qquad -\varepsilon < r(\tau + \xi) - a(\xi) - G(\xi) < \varepsilon \pmod{1}$$

$$(63) \qquad -\varepsilon < r(\tau + \xi^{(\lambda)}) - a(\xi^{(\lambda)}) - G(\xi^{(\lambda)}) < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

$$(64) \qquad -\varepsilon < \Delta_\lambda r(\tau + \xi) - \Delta_\lambda a(\xi) < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l).$$

Aus (62) und (63) folgt

$$-2\varepsilon < \Delta_\lambda r(\tau + \xi) - \Delta_\lambda a(\xi) - \Delta_\lambda G(\xi) < 2\varepsilon \pmod{1} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l),$$

somit wegen (64)

$$-3\varepsilon < \Delta_\lambda G(\xi) < 3\varepsilon \pmod{1} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l).$$

Diese Ungleichung gilt für jedes positive $\varepsilon < 1$, und für jeden Punkt ξ von E mit (61), sodass die l Zahlen $\Delta_\lambda G(\xi)$ für jeden Punkt ξ von E ganz sind. Wegen (60) ist $G(X) - G(x)$ die algebraische Summe von Gliedern der Gestalt $\Delta_\lambda G(\xi)$, wo ξ in E liegt. Jedes dieser Glieder ist ganz, sodass auch $G(X) - G(x)$ gleich einer ganzen Zahl ist.

Fünfter Schritt: Ich definiere die Funktion $g(x_{l+1}, \ldots, x_m)$ folgendermassen: ist es möglich in E einen Punkt $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ mit (60) zu finden, so setze ich

$$g(x_{l+1}, \ldots, x_m) = G(X),$$

und sonst

$$g(x_{l+1}, \ldots, x_m) = 0.$$

Diese Funktion $g(x_{l+1}, \ldots, x_m)$ besitzt die in Satz 12 verlangte Eigenschaft.

Beweis: Es sei $\gamma > 0$, $x' = (x'_1, \ldots, x'_m)$ ein Gitterpunkt. Ich wähle eine positive Zahl ε mit

$$\frac{1}{\varepsilon} \geqq |x'_\mu| + \frac{1}{\gamma} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

sodass $\varepsilon \leqq \gamma$ ist. Wende ich das Resultat des dritten Schrittes mit $x = x' + h$ an, so finde ich, dass es möglich ist einen Gitterpunkt τ zu bestimmen mit den folgenden zwei Eigenschaften:

1. Für jeden Gitterpunkt h mit

$$|h_\mu| \leqq \frac{1}{\gamma} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{65}$$

und für jedes ζ $(\zeta = 1, 2, \ldots, z)$ mit der Eigenschaft, dass $a_\zeta(x' + h)$ definiert ist, ist $r_\zeta(x' + \tau + h)$ festgelegt, und gilt die Ungleichung

$$-\gamma < r_\zeta(x' + \tau + h) - a_\zeta(x' + h) < \gamma \quad (\text{mod. } 1).$$

2. Für jeden Gitterpunkt h mit (65), der die Eigenschaft besitzt, dass $a(x' + h)$ definiert ist, ist auch $r(x' + \tau + h)$ festgelegt, und gilt die Ungleichung

$$-\gamma < r(x' + \tau + h) - a(x' + h) - G(x' + h) < \gamma \quad (\text{mod. } 1),$$

also nach dem vierten Schritt

$$-\gamma < r(x' + \tau + h) - a(x' + h) - g(x'_{l+1} + h_{l+1}, \ldots, x'_m + h'_m) < \gamma \quad (\text{mod. } 1).$$

Hiermit ist (47) bewiesen.

§ 7. Vergleichbare rhythmische Systeme.

Satz 1[1]: *Ärmere Systeme als rhythmische gibt es nicht. Genauer gesagt: ist (a_ν) für jeden Gitterpunkt x definiert, ist (r_ν) rhythmisch, und ist*

$$(a_\nu) \prec (r_\nu), \tag{1}$$

so ist

$$(a_\nu) \succ \prec (r_\nu).$$

Beweis: Ich wähle irgend eine positive Zahl ε und einen beliebigen Gitterpunkt x. Da (r_ν) rhythmisch ist, existiert eine Länge $L = L\left(\frac{1}{2}\varepsilon, x, r_\nu\right)$, derart, dass jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L wenigstens einen zu $\frac{1}{2}\varepsilon$ und x gehörigen Verschiebungspunkt von (r_ν) enthält.

Da (a_ν) in jedem Gitterpunkt x definiert ist, existiert wegen (1) ein Gitterpunkt $\tau' = (\tau'_1, \ldots, \tau'_m)$, der für jeden Gitterpunkt $l = (l_1, \ldots, l_m)$ mit

[1] Ich habe die Sätze 1 und 2 von § 7 schon in Satz 4 von § 5 zusammengefasst.

$$(2) \qquad |l_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} L \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

den Ungleichungen

$$(3) \qquad -\frac{1}{2}\varepsilon < r_\nu(x + \tau' + l) - a_\nu(x + l) < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügt. Nach dem Obigen enthält der m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L und mit Mittelpunkt τ' wenigstens einen zu $\frac{1}{2}\varepsilon$ und x gehörigen Verschiebungspunkt τ^* von (r_ν). Dann ist

$$(4) \qquad |\tau^*_\mu - \tau'_\mu| \leqq \frac{1}{2} L \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

und es gelten die Ungleichungen

$$(5) \qquad -\frac{1}{2}\varepsilon < r_\nu(x + \tau^* + h) - r_\nu(x + h) < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

für jeden Gitterpunkt h mit

$$|h_\mu| \leqq \frac{2}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

also a fortiori für jeden Gitterpunkt h mit

$$(6) \qquad |h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Setzt man

$$\tau = \tau^* - \tau', \qquad l = \tau + h,$$

so gelten für jeden Gitterpunkt h mit (6) wegen (4) die Ungleichungen (2), also auch die Ungleichungen (3), die hier die Gestalt

$$(7) \qquad -\frac{1}{2}\varepsilon < r_\nu(x + \tau^* + h) - a_\nu(x + \tau + h) < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

annehmen. Aus (5) und (7) folgt

$$-\varepsilon < a_\nu(x + \tau + h) - r_\nu(x + h) < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

gültig für jeden Gitterpunkt h mit (6). Hiermit ist bewiesen

$$(r_\nu) \lessdot (a_\nu),$$

sodass nun die Behauptung unmittelbar aus (1) folgt.

Satz 2[1]: *Ist (a_ν) in jedem Gitterpunkt x definiert, bezeichnet (r_ν) ein rhythmisches System, und ist*

$$(a_\nu) \lessdot (r_\nu),$$

dann sind (a_ν) und (r_ν) gleich reich, und dann ist auch (a_ν) rhythmisch.

Vorbemerkung: Ich werde sogar beweisen: gelten die Voraussetzungen des obigen Satzes, so kann man jedem positiven ε eine nur von ε und (r_ν), also nicht von (a_ν), abhängige Länge L zuordnen, derart, dass jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L für jeden Gitterpunkt x wenigstens einen zu ε und x gehörigen Verschiebungspunkt τ von (a_ν) enthält.

Beweis: Dass (a_ν) und (r_ν) gleich reich sind, folgt unmittelbar aus dem vorigen Satz.

Da (r_ν) rhythmisch ist, kann man jedem positiven ε eine, nur von ε und vom System (r_ν) abhängige Länge L zuordnen mit folgender Eigenschaft: jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante $L - 1$ enthält für jeden Gitterpunkt x^* wenigstens einen zu $\frac{1}{3}\varepsilon$ und x^* gehörigen Verschiebungspunkt τ^* von (r_ν). Ich werde zeigen, dass diese Länge L die in der Vorbemerkung verlangte Eigenschaft besitzt.

Um das zu beweisen, wähle ich zwei beliebige Gitterpunkte $x = (x_1, \ldots, x_m)$ und $b = (b_1, \ldots, b_m)$. Da die Systeme (a_ν) und (r_ν) gleich reich sind, und in jedem Gitterpunkt des m-dimensionalen Raumes festgelegt sind, existieren zwei Gitterpunkte $\tau' = (\tau'_1, \ldots, \tau'_m)$ und $\tau'' = (\tau''_1, \ldots, \tau''_m)$, derart, dass für alle Gitterpunkte $h = (h_1, \ldots, h_m)$ mit

$$(8) \qquad |h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

die Ungleichungen

$$(9) \qquad -\frac{1}{3}\varepsilon < r_\nu(x + \tau' + h) - a_\nu(x + h) < \frac{1}{3}\varepsilon \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

und für alle Gitterpunkte $l = (l_1, \ldots, l_m)$ mit

[1] Vergl. die Fussnote bei Satz 1.

$$|l_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}(L-1) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{10}$$

die Ungleichungen

$$-\frac{1}{3}\varepsilon < r_\nu(x+b+\tau''+l) - a_\nu(x+b+l) < \frac{1}{3}\varepsilon \ (\mathrm{mod.}\ 1) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

gelten.

Nach dem Obigen enthält der m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante $L-1$ und mit Mittelpunkt $b+\tau''-\tau'$ wenigstens einen zu $\frac{1}{3}\varepsilon$ und $x+\tau'$ gehörigen Verschiebungspunkt $\tau^* = (\tau^*_1, \ldots, \tau^*_m)$ von (r_ν), sodass

$$|\tau^*_\mu - b_\mu - \tau''_\mu + \tau'_\mu| \leqq \frac{1}{2}(L-1) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{12}$$

und für jeden Gitterpunkt h mit (8)

$$-\frac{1}{3}\varepsilon < r_\nu(x+\tau'+\tau^*+h) - r_\nu(x+\tau'+h) < \frac{1}{3}\varepsilon \ (\mathrm{mod.}\ 1) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

ist. Setzt man für $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} T_\nu &= r_\nu(x+\tau'+\tau^*+h) - a_\nu(x+\tau'+\tau^*-\tau''+h), \\ U_\nu &= r_\nu(x+\tau'+\tau^*+h) - r_\nu(x+\tau'+h), \\ V_\nu &= r_\nu(x+\tau'+h) - a_\nu(x+h), \end{aligned}$$

so hat man

$$a_\nu(x+\tau'+\tau^*-\tau''+h) - a_\nu(x+h) = -T_\nu + U_\nu + V_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Setzt man ausserdem noch

$$l = \tau^* - b - \tau'' + \tau' + h,$$

so gelten für jeden Gitterpunkt h mit (8) wegen (12) die Ungleichungen (10), somit auch die Ungleichungen (11), die jetzt auf die Gestalt

$$-\frac{1}{3}\varepsilon < T_\nu < \frac{1}{3}\varepsilon \quad (\mathrm{mod.}\ 1) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{15}$$

gebracht werden können. Wegen (13) und (9) ist

$$-\frac{1}{3}\varepsilon < U_\nu < \frac{1}{3}\varepsilon \ (\mathrm{mod.}\ 1) \ \text{und} \ -\frac{1}{3}\varepsilon < V_\nu < \frac{1}{3}\varepsilon \ (\mathrm{mod.}\ 1) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Aus (14), (15) und (16) folgt für jeden Gitterpunkt h mit (8)

$$-\varepsilon < a_\nu(x+\tau'+\tau^*-\tau''+h) - a_\nu(x+h) < \varepsilon \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Der Gitterpunkt $\tau = \tau' + \tau^* - \tau''$ ist also ein zu ε und x gehöriger Verschiebungspunkt von (a_ν), der wegen (12) den Ungleichungen

$$|\tau_\mu - b_\mu| \leqq \frac{1}{2}(L-1) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

genügt. Da b einen beliebigen Gitterpunkt im m-dimensionalen Raume bezeichnet, enthält jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L wenigstens einen zu ε und x gehörigen Verschiebungspunkt von (a_ν), womit der Satz bewiesen ist.

§ 8. Translationen.

Satz 1: *Ist (t_ν) eine Translation von (f_ν), so hat das System*

$$\alpha_\nu < f_\nu(x) < \beta_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wo α_ν und β_ν Konstanten bezeichnen, wenigstens eben so viele ganzzahlige Lösungen wie

$$\alpha_\nu < f_\nu(x) + t_\nu(x) < \beta_\nu \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Beweis: Nach Definition 2 von § 5 ist

$$(f_\nu + t_\nu) \lessdot (f_\nu), \tag{1}$$

sodass unserer Satz unmittelbar aus Satz 3 von § 5 folgt.

Satz 2: *Sind $\nu_1, \ldots, \nu_l$ natürliche Zahlen $\leqq n$, und ist (t_ν) eine Translation von (f_ν), so ist $(t_{\nu_1}, \ldots, t_{\nu_l})$ eine Translation von $(f_{\nu_1}, \ldots, f_{\nu_l})$.*

Beweis: Aus (1) folgt nach Satz 2 von § 6

$$(f_{\nu_1} + t_{\nu_1}, \ldots, f_{\nu_l} + t_{\nu_l}) \lessdot (f_{\nu_1}, \ldots, f_{\nu_l}).$$

Satz 3: *Sind $c_1, \ldots, c_n$ Konstanten, so besitzen die Systeme (f_ν) und $(f_\nu + c_\nu)$ dieselben Translationen.*

Beweis: Nach Satz 1 von § 6 folgt von den zwei Beziehungen

$$(f_\nu + t_\nu) \lessgtr (f_\nu) \quad \text{und} \quad (f_\nu + c_\nu + t_\nu) \lessgtr (f_\nu + c_\nu)$$

die eine aus der andern.

Satz 4 (*Additionstheorem*): *Ist* (t_ν) *eine Translation von* (f_ν), *so ist* $(t_\nu, t_1 + t_2)$ *eine Translation von* $(f_\nu, f_1 + f_2)$.

Beweis: Nach Satz 4 von § 6 folgt aus (1)

$$(f_\nu + t_\nu, f_1 + f_2 + t_1 + t_2) \lessgtr (f_\nu, f_1 + f_2).$$

Satz 5: *Ist* c *eine ganzzahlige Konstante, und ist* (t_ν) *eine Translation von* (f_ν), *so ist* $(t_\nu, c t_1)$ *eine Translation von* $(f_\nu, c f_1)$.

Beweis: Die Vorbemerkung von Satz 5 in § 6 liefert das Resultat, dass aus (1) folgt

$$(f_\nu + t_\nu, c f_1 + c t_1) \lessgtr (f_\nu, c f_1).$$

Satz 6: *Voraussetzungen.* 1. *Es ist* (t_ν) *eine Translation von* (f_ν).

2. *Die Funktion*

$$g(x) = g(x_1, \ldots, x_m)$$

hat in jedem Gitterpunkt x *einen eindeutig definierten beschränkten ganzzahligen Wert.*

3. *Jedem positiven* ε *und jedem Gitterpunkt* x *kann man ein positives* δ *zuordnen mit der folgenden Eigenschaft: wird der Gitterpunkt* $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ *so gewählt, dass aus*

$$(2) \qquad |h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m); \quad f_\nu(x+h) \text{ definiert,}$$

folgt

$$(3) \quad f_\nu(x+\tau+h) \text{ definiert;} \quad -\delta < f_\nu(x+\tau+h) - f_\nu(x+h) - t_\nu(x+h) < \delta \pmod{1},$$

so ist

$$g(x+\tau+h) = g(x+h)$$

für jeden Gitterpunkt h *mit*

$$|h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Unter diesen Voraussetzungen ist $(t_\nu, t_1 g)$ *eine Translation von* $(f_\nu, f_1 g)$.

Vorbemerkung: Die Voraussetzungen 2 und 3 sind erfüllt, wenn $g(x)$ gleich einer ganzzahligen Konstanten ist, sodass Satz 5 ein Spezialfall des obigen Satzes ist.

Beweis: Ich zeige zunächst, dass die drei Voraussetzungen von Satz 5 in § 6 mit $r_\nu = f_\nu$, $a_\nu = f_\nu + t_\nu$ erfüllt sind.

1. Da (t_ν) eine Translation von (f_ν) ist, ist

$$(f_\nu + t_\nu) \lessdot (f_\nu).$$

2. Die zweite Voraussetzung von Satz 5 in § 6 ist identisch mit der zweiten Voraussetzung des zu beweisenden Satzes.

3. Ist $f_\nu(x+h) + t_\nu(x+h)$ definiert, so ist auch $f_\nu(x+h)$ festgelegt, da $t_\nu(x+h)$ in jedem Gitterpunkt definiert ist. Die dritte Voraussetzung von Satz 5 in § 6 folgt also aus der dritten Voraussetzung des zu beweisenden Satzes.

Satz 5 von § 6, angewendet mit $r_\nu = f_\nu$, $a_\nu = f_\nu + t_\nu$ besagt, dass

$$(f_\nu + t_\nu, f_1 g + t_1 g) \lessdot (f_\nu, f_1 g),$$

d. h. dass $(t_\nu, t_1 g)$ eine Translation von $(f_\nu, f_1 g)$ ist.

Satz 7: *Bezeichnet E eine endliche Menge von Zahlensystemen $\varkappa = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m)$ mit $\varkappa_\mu$ ganz $\geqq 0$, und ist (t_ν) eine Translation eines Systems (f_ν), so ist $(\Delta^\varkappa t_\nu)$, wo ν die Reihe $1, 2, \ldots, n$ und wo $\varkappa$ die Menge E durchläuft, eine Translation von $(\Delta^\varkappa f_\nu)$.*

Beweis: Da (t_ν) in jedem Gitterpunkt x definiert ist, ist auch $(\Delta^\varkappa t_\nu)$ in jedem x festgelegt. Mit Rücksicht auf Satz 11 in § 6 folgt aus $(f_\nu + t_\nu) \lessdot (f_\nu)$

$$(\Delta^\varkappa f_\nu + \Delta^\varkappa t_\nu) \lessdot (\Delta^\varkappa f_\nu).$$

Satz 8: *Ist (t_ν) eine Translation von (f_ν), bezeichnen $F_\lambda(x)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ lineare Komposita von $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten, und bezeichnen $T_\lambda(x)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ die entsprechenden Komposita von $t_1(x), \ldots, t_n(x)$, dann ist (T_λ) eine Translation von (F_λ).*

Beweis: Man braucht nur die Sätze 4 und 5 wiederholt anzuwenden, und Satz 2 in Betracht zu nehmen.

Satz 9: *Bezeichnet E eine endliche Menge von Zahlensystemen $\varkappa = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m)$ mit $\varkappa_\mu$ ganz $\geqq 0$, ist (t_ν) eine Translation eines Systems (f_ν), sind $F_\lambda(x)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$*

lineare Komposita, mit ganzzahligen Koeffizienten, von $\Delta^\varkappa f_\nu(x)$, *wo* ν *die Reihe* $1, 2, \ldots, n$, *und wo* $\varkappa$ *die Menge* E *durchläuft, und sind schliesslich* $T_\lambda(x)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ *die entsprechenden Komposita von* $\Delta^\varkappa t_\nu(x)$, *dann ist* (T_λ) *eine Translation von* (F_λ).

Beweis: Nach Satz 7 ist $(\Delta^\varkappa t_\nu)$ eine Translation von $(\Delta^\varkappa f_\nu)$. Der vorige Satz, mit $\Delta^\varkappa f_\nu(x)$ und $\Delta^\varkappa t_\nu(x)$ statt $f_\nu(x)$ und $t_\nu(x)$ angewendet, besagt dann, dass (T_λ) eine Translation von (F_λ) ist.

Satz 10: *Die Menge der Translationen eines Systems* (f_ν) *ist abgeschlossen mod.* 1; *d. h. betrachtet man eine mod.* 1 *konvergente Folge von Translationen von* (f_ν) *mit dem in jedem Gitterpunkt* x *definierten Grenzsystem* (t_ν), *so ist auch dieses Grenzsystem eine Translation von* (f_ν).

Beweis: Man betrachte eine mod. 1 konvergente Folge von Translationen

$$(t_{1\varrho}, t_{2\varrho}, \ldots, t_{n\varrho}) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots)$$

des Systems (f_ν). Dann ist

$$(f_\nu + t_{\nu\varrho}) \preccurlyeq (f_\nu) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots),$$

sodass nach dem dritten Konvergenzsatz in der Theorie der vergleichbaren Systeme (Satz 9 in § 6)

$$(f_\nu + t_\nu) \preccurlyeq (f_\nu)$$

ist. Folglich ist (t_ν) eine Translation von (f_ν).

Satz 11: *Für jede Translation* (t_ν) *eines rhythmischen Systems* (f_ν) *ist*

$$(f_\nu + t_\nu) \succ \prec (f_\nu). \tag{4}$$

Beweis: Nach der Definition der Translationen ist

$$(f_\nu + t_\nu) \preccurlyeq (f_\nu).$$

Das System in der linken Seite ist in jedem Gitterpunkt x definiert, das System in der rechten Seite ist rhythmisch. Nach Satz 1 von § 7 sind diese zwei Systeme dann gleich reich.

Bemerkung: Bei einem beliebigen System (f_ν) braucht (4) nicht für jede Translation (t_ν) von (f_ν) zu gelten. Denn es werde der Spezialfall mit $m = n = 1$,

(5)
$$\begin{cases} f_1(x) = 0 & \text{für} \quad x \neq 0 \\ \quad\;\; = \frac{1}{3} & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

betrachtet. Die Translationen (t_1) von (f_1) besitzen dann entweder die Gestalt

$$t_1(x) \equiv 0 \pmod{1},$$

oder

(6)
$$\begin{cases} t_1(x) \equiv 0 \pmod{1} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ \quad\;\; \equiv \frac{2}{3} \pmod{1} & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Für die letzte Translation ist

$$f_1(x) + t_1(x) \equiv 0 \pmod{1},$$

also $(f_1 + t_1)$ ärmer als (f_1).

Aus diesem Beispiel geht ausserdem noch hervor, dass die Menge der Translationen eines Systems kein Modul zu sein braucht. Denn das durch (5) definierte System (f_1) besitzt zwar die in (6) genannten Translationen, aber nicht die Translation

$$\begin{cases} t_1(x) = 0 & \text{für} \quad x \neq 0 \\ \quad\;\; = \frac{4}{3} & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Satz 12: *Ist z ganz $\geqq 0$, und besitzt das aus den $m+z$ Funktionen*

$$\Delta_1 f(x), \ldots, \Delta_m f(x), f_1(x), \ldots, f_z(x)$$

bestehende System $(\Delta_\mu f, f_\zeta)$ eine Translation (T_μ, t_ζ), dann existiert eine für jeden Gitterpunkt x des m-dimensionalen Raumes definierte Funktion $T(x)$ mit

$$\Delta_\mu T(x) \equiv T_\mu(x) \pmod{1} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Beweis: Erster Schritt. Ist $m \geqq 2$, und bezeichnen μ und σ zwei verschiedene natürliche Zahlen $\leqq m$, dann ist für jeden Gitterpunkt x

(7)
$$\Delta_\mu T_\sigma(x) \equiv \Delta_\sigma T_\mu(x) \pmod{1}.$$

Beweis. Die zwei Funktionen $T_\mu(x)$ und $T_\sigma(x)$ bilden eine Translation

(T_μ, T_σ) von $(\Delta_\mu f, \Delta_\sigma f)$. Aus Satz 9 folgt dann, dass $\Delta_\sigma T_\mu(x) - \Delta_\mu T_\sigma(x)$ eine Translation von

$$\Delta_\sigma(\Delta_\mu f(x)) - \Delta_\mu(\Delta_\sigma f(x)) = 0$$

ist, sodass (7) gilt.

Zweiter Schritt. Schluss des Beweises. Ich setze

$$T(x) = \sum_{\xi=1}^{x_1-1} T_1(\xi, x_2, \ldots, x_m) + \sum_{\xi=1}^{x_2-1} T_2(1, \xi, x_3, \ldots, x_m)$$
$$+ \sum_{\xi=1}^{x_3-1} T_3(1, 1, \xi, x_4, \ldots, x_m) + \cdots + \sum_{\xi=1}^{x_m-1} T_m(1, \ldots, 1, \xi).$$

Dann ist

$$\Delta_1 T(x) = T_1(x),$$

sodass Satz 12 für den Spezialfall mit $m = 1$ schon bewiesen ist. Ist $m \geqq 2$, dann ist

$$\begin{aligned} \Delta_2 T(x) &= \sum_{\xi=1}^{x_1-1} \Delta_2 T_1(\xi, x_2, \ldots, x_m) + T_2(1, x_2, \ldots, x_m) \\ &\equiv \sum_{\xi=1}^{x_1-1} \Delta_1 T_2(\xi, x_2, \ldots, x_m) + T_2(1, x_2, \ldots, x_m) \pmod{1} \quad (\text{wegen } (7)) \\ &= T_2(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 T(x) &= \sum_{\xi=1}^{x_1-1} \Delta_3 T_1(\xi, x_2, \ldots, x_m) + \sum_{\xi=1}^{x_2-1} \Delta_3 T_2(1, \xi, x_3, \ldots, x_m) + T_3(1, 1, x_3, \ldots, x_m) \\ &\equiv \sum_{\xi=1}^{x_1-1} \Delta_1 T_3(\xi, x_2, \ldots, x_m) + \sum_{\xi=1}^{x_2-1} \Delta_2 T_3(1, \xi, x_3, \ldots, x_m) + T_3(1, 1, x_3, \ldots, x_m) \\ &\qquad\qquad \pmod{1} \quad (\text{wegen } (7)) \\ &= \{T_3(x) - T_3(1, x_2, \ldots, x_m)\} + \{T_3(1, x_2, \ldots, x_m) - T_3(1, 1, x_3, \ldots, x_m)\} \\ &\qquad\qquad + T_3(1, 1, x_3, \ldots, x_m) \\ &= T_3(x); \end{aligned}$$

u. s. w.; schliesslich

$$\begin{aligned}\varDelta_m T(x) &= \sum_{\xi=1}^{x_1-1} \varDelta_m T_1(\xi, x_2, \ldots, x_m) + \cdots + \sum_{\xi=1}^{x_{m-1}-1} \varDelta_m T_{m-1}(1, \ldots, 1, \xi, x_m) \\ &\qquad + T_m(1, \ldots, 1, x_m) \\ &\equiv \sum_{\xi=1}^{x_1-1} \varDelta_1 T_m(\xi, x_2, \ldots, x_m) + \cdots + \sum_{\xi=1}^{x_{m-1}-1} \varDelta_{m-1} T_m(1, \ldots, 1, \xi, x_m) \\ &\qquad + T_m(1, \ldots, 1, x_m) \pmod{1} \quad (\text{wegen } (7)) \\ &= \{T_m(x) - T_m(1, x_2, \ldots, x_m)\} + \cdots + \{T_m(1, \ldots, 1, x_{m-1}, x_m) \\ &\qquad - T_m(1, \ldots, 1, x_m)\} + T_m(1, \ldots, 1, x_m) \\ &= T_m(x),\end{aligned}$$

womit Satz 12 bewiesen ist.

Eine für die Theorie der Diophantischen Ungleichungen wichtige Aufgabe ist, für ein gegebenes Funktionensystem (F_λ) alle Translationen, oder alle Translationen mit gegebenen Nebenbedingungen zu bestimmen, z. B. alle Translationen (T_λ) mit der Eigenschaft

$$T_1(x) = T_2(x) = \cdots = T_r(x) = 0,$$

wo r eine gegebene natürliche Zahl $\leqq l$ bezeichnet. Dazu braucht man nicht das System (F_λ) selbst zu untersuchen, aber genügt es (und das ist oft bequemer) ein beliebiges System (f_ν) zu betrachten, wenn nur (F_λ) ein Teilsystem von (f_ν) ist, und jede nicht im System (F_λ) vorkommende Funktion $f_\nu(x)$ in allen Gitterpunkten x des m-dimensionalen Raumes definiert ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man die natürlichen Zahlen $\nu_\lambda = \lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ wählen, so dass

$$F_\lambda(x) = f_\lambda(x) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \tag{8}$$

ist. Nach Satz 2 besitzt jede Translation (t_ν) von (f_ν) die Eigenschaft, dass (T_λ) eine Translation von (F_λ) ist, wenn nur

$$T_\lambda(x) = t_\lambda(x) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \tag{9}$$

gesetzt wird. Aber umgekehrt kann man, wie ich in Satz 13 zeigen werde, jeder Translation (T_λ) von (F_λ) mindestens eine Translation (t_ν) von (f_ν) mit (9) zuordnen. Sind also alle Translationen von (f_ν) (eventuell mit Nebenbedingungen) bekannt, so kennt man auch alle Translationen von (F_λ) (bezw. mit den entsprechenden Nebenbedingungen). Sind dagegen alle Translationen von (F_λ) gegeben, so brauchen natürlich noch nicht alle Translationen von (f_ν) bekannt zu sein.

Satz 13: *Gilt* (8), *und ist jede nicht im System* (F_λ) *vorkommende Funktion* $f_\nu(x)$ *in allen Gitterpunkten* x *des* m-*dimensionalen Raumes definiert, so kann man jeder Translation* (T_λ) *von* (F_λ) *eine Translation* (t_ν) *von* (f_ν) *mit* (9) *zuordnen.*

Beweis: Ist $n = l$, dann bezeichnen (F_λ) und (f_ν) dieselben Systeme, und ist somit die Behauptung klar. Ich darf also

$$n - l \geqq 1 \tag{10}$$

voraussetzen.

Ist $n - l \geqq 2$, so darf ich annehmen, dass der zu beweisende Satz bereits bewiesen ist, wenn $n - l$ durch eine kleinere natürliche Zahl ersetzt wird. Der zu beweisende Satz, mit $n - l - 1$ statt $n - l$ angewendet, liefert dann eine Translation $(t_1, \ldots, t_{n-1})$ von $(f_1, \ldots, f_{n-1})$ mit

$$T_\lambda(x) = t_\lambda(x) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \tag{11}$$

und mit Rücksicht hierauf liefert derselbe Satz, mit 1 statt $n - l$ angewendet, eine Translation (t_ν) von (f_ν); diese Translation besitzt Eigenschaft (11), sodass Satz 13 dann bewiesen ist. Folglich können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n - l = 1$ annehmen.

Kommt $f_n(x)$ im System $(F_\lambda(x))$ vor, dann ist (f_ν) ein Teilsystem von (F_λ), sodass dann die Behauptung unmittelbar aus Satz 2 folgt. Wir dürfen also annehmen, dass $f_n(x)$ nicht im System (F_λ) vorkommt; nach der Voraussetzung ist dann $f_n(x)$ in jedem Gitterpunkt x des m-dimensionalen Raumes definiert.

Ich definiere $t_1(x), t_2(x), \ldots, t_l(x)$ durch (11), sodass nach der Voraussetzung (t_λ) eine Translation von (f_λ) ist. Folglich kann man jedem positiven δ einen Gitterpunkt $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ zuordnen, derart, dass für jedes Paar λ und $H = (H_1, \ldots, H_m)$ mit

$$1 \leqq \lambda \leqq l, \quad |H_\mu| \leqq \frac{1}{\delta} \; (\mu = 1, 2, \ldots, m), \quad f_\lambda(H) \text{ definiert,} \tag{12}$$

auch $f_\lambda(\tau + H)$ festgelegt ist, und die Ungleichung

$$-\delta < f_\lambda(\tau + H) - f_\lambda(H) - t_\lambda(H) < \delta \quad (\text{mod. } 1) \tag{13}$$

gilt. Ich setze

$$f_n(\tau + H) - f_n(H) = u(H, \delta); \tag{14}$$

da $f_n(x)$ in jedem Gitterpunkt x des m-dimensionalen Raumes definiert ist, ist $u(H, \delta)$ für jedes positive δ und jeden im m-dimensionalen Raum liegenden Gitterpunkt H mit $|H_\mu| \leqq \frac{1}{\delta}$ festgelegt.

Ich betrachte jetzt eine Folge $\varDelta$ von positiven, nach Null strebenden Zahlen δ, und ausserdem die Folge $H', H'', H''', \ldots$ aller im m-dimensionalen Raum liegenden Gitterpunkte. Die Folge $u(H', \delta)$, wo δ die Folge $\varDelta$ durchläuft, und H' einen festen Gitterpunkt bezeichnet, besitzt wenigstens einen Häufungspunkt p' mod. 1; diesen Häufungspunkt mod. 1 nenne ich $t_n(H')$. Die Folge $(u(H', \delta), u(H'', \delta))$ (δ durchläuft wiederum $\varDelta$), besitzt wenigstens einen Häufungspunkt (p', p'') mod. 1; diesen Häufungspunkt mod. 1 nenne ich $(t_n(H'), t_n(H''))$, u. s. w. Für jede beliebig, aber fest gewählte natürliche Zahl z besitzt dann die Folge

$$(u(H', \delta), u(H'', \delta), \ldots, u(H^{(z)}, \delta)) \tag{15}$$

(δ durchläuft $\varDelta$) wenigstens einen Häufungspunkt $(p', p'', \ldots, p^{(z)})$ mod. 1, und die Koordinaten dieses Häufungspunktes mod. 1 werden mit

$$t_n(H^{(\zeta)}) \qquad (\zeta = 1, 2, \ldots, z) \tag{16}$$

bezeichnet. Auf diese Art und Weise ist $t_n(H)$ für jeden Gitterpunkt H des m-dimensionalen Raumes definiert. Ich werde zeigen, dass das System (t_ν) die verlangte Eigenschaft besitzt. Um das zu beweisen, führe ich eine beliebige positive Zahl ε und einen beliebigen, im m-dimensionalen Raum liegenden Gitterpunkt $x = (x_1, \ldots, x_m)$ ein. Ich wähle die natürliche Zahl z so gross, dass alle Gitterpunkte $H = (H_1, H_2, \ldots, H_m)$ mit

$$|H_\mu - x_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{17}$$

im System $(H', H'', \ldots, H^{(z)})$ vorkommen. Die in (15) erwähnte Folge besitzt einen Häufungspunkt mod. 1 mit den in (16) genannten Koordinaten. Folglich liegt in $\varDelta$ ein δ mit

$$\frac{1}{\delta} \geqq |x_\mu| + \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m), \tag{18}$$

und

$$(19)\qquad -\varepsilon < u(H^{(\zeta)}, \delta) - t_n(H^{(\zeta)}) < \varepsilon \pmod{1} \quad (\zeta = 1, 2, \ldots, z).$$

Ich betrachte jetzt einen beliebigen Gitterpunkt $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit

$$(20)\qquad |h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

und ich setze

$$(21)\qquad H = x + h.$$

Aus (21) und (20) folgt (17); da alle Gitterpunkte H mit (17) im System $(H', H'', \ldots, H^{(z)})$ vorkommen, liefert (19) insbesondere

$$(22)\qquad -\varepsilon < u(x + h, \delta) - t_n(x + h) < \varepsilon \pmod{1}.$$

Im Obigen ist der Zahl δ ein Gitterpunkt τ mit den Eigenschaften (13) und (14) zugeordnet. Wegen (14) verwandelt (22) sich in

$$(23)\qquad -\varepsilon < f_n(x + \tau + h) - f_n(x + h) - t_n(x + h) < \varepsilon \pmod{1}.$$

Für jedes Paar λ und $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit

$$1 \leqq \lambda \leqq l, \quad |h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m), \qquad f_\lambda(x + h) \text{ definiert},$$

gilt (12) wegen (21), (20) und (18); folglich ist dann $f_\lambda(x + \tau + h)$ festgelegt, und zwar mit

$$(24)\qquad -\varepsilon < f_\lambda(x + \tau + h) - f_\lambda(x + h) - t_\lambda(x + h) < \varepsilon \pmod{1}.$$

Aus (24), (23) und $n = l + 1$ folgt, dass (t_ν) eine Translation von (f_ν) ist, womit Satz 13 vollständig bewiesen ist.

§ 9. Konstante Translationen.

Definition 1: *Ich nenne eine Translation (u_ν) konstant, wenn jede der Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ konstant, d. h. unabhängig von x ist.*

Satz 1: *Ist (t_ν) eine beliebige, (u_ν) eine konstante Translation eines Systems (f_ν), so ist auch $(t_\nu + u_\nu)$ eine Translation von (f_ν).*

Beweis: Da (t_ν) und (u_ν) Translationen von (f_ν) sind, ist nach der Definition einer Translation (Definition 2 von § 5 auf S. 276)

$$(f_\nu + t_\nu) \lessdot (f_\nu) \tag{1}$$

und

$$(f_\nu + u_\nu) \lessdot (f_\nu). \tag{2}$$

Mit Rücksicht auf Satz 1 von § 6 (S. 280) folgt aus (1)

$$(f_\nu + t_\nu + u_\nu) \lessdot (f_\nu + u_\nu),$$

sodass wegen (2)

$$(f_\nu + t_\nu + u_\nu) \lessdot (f_\nu) \tag{3}$$

ist. Die Systeme (t_ν) und (u_ν), also auch $(t_\nu + u_\nu)$ sind in jedem Gitterpunkt x definiert, sodass $(t_\nu + u_\nu)$ wegen (3) eine Translation von (f_ν) ist.

Satz 2: *Die konstanten Translationen eines Systems bilden einen abgeschlossenen periodischen Modul.*

Beweis: Ist (u_ν) ein Häufungspunkt der Menge M der konstanten Translationen eines Systems (f_ν), dann ist (u_ν) nach Satz 10 des vorigen Paragraphen eine Translation, also eine konstante Translation von (f_ν). Folglich ist M abgeschlossen.

Dass M die Periode 1 besitzt, folgt unmittelbar aus der Definition einer Translation (Definition 2 von § 5 auf S. 276).

Enthält die Menge M zwei Systeme (t_ν) und (u_ν), so enthält sie nach dem vorigen Satz auch das System $(t_\nu + u_\nu)$. Nach Hilfssatz 3 von § 2 (S. 238) ist M dann ein Modul, womit der zu beweisende Satz bewiesen ist.

Satz 3: *Für jede konstante Translation (u_ν) eines Systems (f_ν) ist*

$$(f_\nu + u_\nu) \gtrdot \lessdot (f_\nu). \tag{4}$$

Beweis: Aus der Definition einer Translation (Definition 2 von § 5 auf S. 276) folgt

$$(f_\nu + u_\nu) \lessdot (f_\nu). \tag{5}$$

Da nach dem vorigen Satz auch $(-u_\nu)$ eine Translation von (f_ν) ist, ist auch

$$(f_\nu - u_\nu) \lessdot (f_\nu),$$

also nach Satz 1 von § 6 (S. 280)

$$(f_\nu) \lessdot (f_\nu + u_\nu). \tag{6}$$

Aus (6) und (5) folgt (4).

Satz 4: *Bezeichnet s eine natürliche Zahl, und ist (u_ν) eine konstante Translation von $(f_\nu(x))$, dann ist $(su_\nu, 0_\mu)$ eine Translation von* $\left(f_\nu(x), \frac{x_\mu}{s}\right)$.

Vorbemerkung: Man darf nicht behaupten, dass unter den Voraussetzungen dieses Satzes $(u_\nu, 0_\mu)$ eine Translation von $\left(f_\nu(x), \frac{x_\mu}{s}\right)$ ist. Denn man betrachte den Spezialfall mit

$$m = n = 1, \quad s = 2, \quad f_1(x) = \frac{1}{2} x_1;$$

zwar ist $\frac{1}{2}$ eine Translation von $\frac{1}{2} x_1$, aber $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ nicht von $\left(\frac{1}{2} x_1, \frac{1}{2} x_1\right)$.

Beweis: Erster Schritt. Da (u_ν) eine Translation von (f_ν) ist, ist

$$(f_\nu + u_\nu) \lessdot (f_\nu),$$

sodass man jedem positiven ε und jedem Gitterpunkt x einen Gitterpunkt τ zuordnen kann, derart dass für jedes Paar ν und $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit

$$1 \leqq \nu \leqq n, \quad |h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m); \quad f_\nu(x + h) \text{ definiert,} \tag{7}$$

auch $f_\nu(x + \tau + h)$ definiert ist, und die Ungleichung

$$-\varepsilon < f_\nu(x + \tau + h) - f_\nu(x + h) - u_\nu < \varepsilon \pmod{1}$$

gilt.

Ich wähle nun einen festen Gitterpunkt x. Es sei G_q $(q = 1, 2, \ldots)$ die Menge der Gitterpunkte $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ mit der Eigenschaft, dass jedem positiven ε mindestens ein Gitterpunkt τ mit

$$\tau_\mu \equiv \sigma_\mu \pmod{s} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{8}$$

entspricht, derart dass für jedes Paar ν und $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit (7) auch $f_\nu(x + \tau + h)$ definiert ist, und die Ungleichung

$$-\varepsilon < f_\nu(x + \tau + h) - f_\nu(x + h) - qu_\nu < \varepsilon \pmod{1}$$

gilt. Nach dem Obigen ist G_1 nicht leer.

Zweiter Schritt. Enthält G_q einen Punkt σ, und enthält $G_{q'}$ einen Punkt σ', dann enthält $G_{q+q'}$ den Punkt $\sigma + \sigma'$.

Beweis. Da σ in G_q liegt, existiert ein Gitterpunkt τ mit (8) derart, dass für jedes Paar ν und $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit (7) auch $f_\nu(x + \tau + h)$ definiert ist, und die Ungleichung

$$(9) \qquad -\frac{1}{2}\varepsilon < f_\nu(x + \tau + h) - f_\nu(x + h) - qu_\nu < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1}$$

gilt. Da σ' in $G_{q'}$ liegt, existiert ein Gitterpunkt τ' mit

$$(10) \qquad \tau'_\mu \equiv \sigma'_\mu \pmod{s} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

derart dass für jedes Paar ν und $h' = (h'_1, h'_2, \ldots, h'_m)$ mit

$$(11) \qquad 1 \leqq \nu \leqq n, \quad |h'_\mu| \leqq |\tau_\mu| + \frac{1}{\varepsilon} \ (\mu = 1, 2, \ldots, m) \text{ und } f_\nu(x + h') \text{ definiert,}$$

auch $f_\nu(x + \tau' + h')$ definiert ist, und die Ungleichung

$$(12) \qquad -\frac{1}{2}\varepsilon < f_\nu(x + \tau' + h') - f_\nu(x + h') - q'u_\nu < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1}$$

gilt.

Wählt man $h' = \tau + h$, dann gilt (11) für jedes Paar ν und $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit (7), und dann verwandelt (12) sich in

$$(13) \qquad -\frac{1}{2}\varepsilon < f_\nu(x + \tau + \tau' + h) - f_\nu(x + \tau + h) - q'u_\nu < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1}.$$

Setzt man $\tau + \tau' = \tau''$, dann folgt aus (8) und (10)

$$\tau''_\mu \equiv \sigma_\mu + \sigma'_\mu \pmod{s} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

und aus (9) und (13) geht dann hervor

$$-\varepsilon < f_\nu(x + \tau'' + h) - f_\nu(x + h) - (q + q')u_\nu < \varepsilon \quad (\text{mod. } 1),$$

gültig für jedes Paar ν und $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit (7). Hiermit ist bewiesen, dass $\sigma + \sigma'$ in $G_{q+q'}$ liegt.

Dritter und letzter Schritt. Beweis des Satzes.

Ist $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ ein Punkt von G_1, so liegt nach dem zweiten Schritt $(2\sigma_1, 2\sigma_2, \ldots, 2\sigma_m)$ in $G_2, \ldots, (s\sigma_1, s\sigma_2, \ldots, s\sigma_m)$ in G_s, sodass jedem positiven ε mindestens ein Gitterpunkt $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ mit

$$\tau_\mu \equiv s\sigma_\mu \quad (\text{mod. } s) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

also mit

$$\tau_\mu \equiv 0 \quad (\text{mod. } s) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{14}$$

entspricht, derart dass für jedes Paar ν und $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit (7) auch $f_\nu(x + \tau + h)$ definiert ist, und die Ungleichung

$$-\varepsilon < f_\nu(x + \tau + h) - f_\nu(x + h) - su_\nu < \varepsilon \quad (\text{mod. } 1) \tag{15}$$

gilt. Wegen (14) gelten für jeden Gitterpunkt $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ die Ungleichungen

$$-\varepsilon < \frac{x_\mu + \tau_\mu + h_\mu}{s} - \frac{x_\mu + h_\mu}{s} < \varepsilon \quad (\text{mod. } 1) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \tag{16}$$

Aus (15) und (16) folgt

$$\left(f_\nu(x) + su_\nu, \frac{x_\mu}{s}\right) \prec \left(f_\nu(x), \frac{x_\mu}{s}\right),$$

sodass $(su_\nu, 0_\mu)$ in der Tat eine Translation von $\left(f_\nu(x), \dfrac{x_\mu}{s}\right)$ ist.

Satz 5: *Sind die n Funktionen*

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

in wenigstens einem Gitterpunkt $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ *definiert, und ist jeder Punkt des n-dimensionalen Raumes eine konstante Translation von* (f_ν), *dann besitzt das System*

$$-\varepsilon < f_\nu(x) - \gamma_\nu < \varepsilon \pmod{1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

für jedes positive ε *und jeden Punkt* $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ *unendlich viele ganzzahlige Lösungen* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. *Sogar das System*

$$(17) \qquad \begin{cases} -\varepsilon < f_\nu(x) - \gamma_\nu < \varepsilon \pmod{1} & (\nu = 1, 2, \ldots, n), \\ x_\mu \equiv \sigma_\mu \pmod{s} & \end{cases}$$

besitzt dann für jedes positive ε, *jeden Punkt* γ *und jedes positive ganze* s *unendlich viele ganzzahlige Lösungen* x.

Beweis: Erster Schritt. (17) besitzt wenigstens eine ganzzahlige Lösung x.

Beweis. Jedes konstante System (u_ν) ist eine Translation von (f_ν), sodass nach dem vorigen Satz $(su_\nu, 0_\mu)$ eine Translation von $\left(f_\nu(x), \frac{x_\mu}{s}\right)$ ist. Wählt man (u_ν) so, dass

$$su_\nu = -f_\nu(\sigma) + \gamma_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, dann erhält man

$$\left(f_\nu(x) - f_\nu(\sigma) + \gamma_\nu, \frac{x_\mu}{s}\right) \lessgtr \left(f_\nu(x), \frac{x_\mu}{s}\right),$$

also nach Satz 1 von § 6 (S. 280)

$$(18) \qquad \left(f_\nu(x) - f_\nu(\sigma), \frac{x_\mu}{s}\right) \lessdot \left(f_\nu(x) - \gamma_\nu, \frac{x_\mu}{s}\right).$$

Das System

$$\begin{cases} -\varepsilon < f_\nu(x) - f_\nu(\sigma) < \varepsilon \pmod{1} & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ -\frac{1}{s} < \frac{x_\mu}{s} - \frac{\sigma_\mu}{s} < \frac{1}{s} \pmod{1} & (\mu = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

besitzt die ganzzahlige Lösung $x = \sigma$, sodass wegen (18) nach Satz 3 von § 5 (S. 274) auch das System

$$\begin{cases} -\varepsilon < f_\nu(x) - \gamma_\nu < \varepsilon \pmod{1} & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ -\frac{1}{s} < \frac{x_\mu}{s} - \frac{\sigma_\mu}{s} < \frac{1}{s} \pmod{1} & (\mu = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

wenigstens eine ganzzahlige Lösung besitzt, und diese Lösung genügt dem System (17).

Zweiter Schritt. Schluss des Beweises. Bezeichnet k eine natürliche Zahl, dann besitzt nach dem ersten Schritt das System

$$(19)\qquad \begin{cases} -\frac{\varepsilon}{2k} < f_\nu(x) - \gamma_\nu - \varepsilon + \frac{\varkappa - \frac{1}{2}}{k}\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2k} \pmod{1} & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ x_\mu \equiv \sigma_\mu \pmod{s} & (\mu = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

für jedes positive ganze $\varkappa \leqq k$ wenigstens eine ganzzahlige Lösung $x^{(\varkappa)}$. Diese Lösungen $x', x'', \ldots, x^{(k)}$ sind wegen (19) untereinander verschieden, und genügen alle dem System (17), sodass (17) wenigstens k, also unendlich viele verschiedene ganzzahlige Lösungen x besitzt.

Satz 6: Voraussetzungen. 1. *Es sei s positiv ganz; die n Funktionen*

$$\varphi_\nu(x) = \varphi_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

seien in wenigstens einem Gitterpunkt $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ definiert, und jeder Punkt $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ des n-dimensionalen Raumes sei eine konstante Translation von (φ_ν).

2. *Es werde*

$$(20)\qquad f_\nu(x) = \sum_{\varrho=1}^{n} g_{\nu\varrho}\,\varphi_\varrho(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gesetzt, wo die Koeffizienten $g_{\nu\varrho}$ rational sind mit Determinante

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

3. *Jeder Punkt $(u_1, u_2, \ldots, u_{n+m})$ des $(n+m)$-dimensionalen Raumes, dem ein Gitterpunkt $(v_1, v_2, \ldots, v_{n+m})$ mit*

$$u_\nu = \sum_{\varrho=1}^{n} g_{\nu\varrho} v_\varrho \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n); \qquad u_{n+\mu} = v_{n+\mu} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

zugeordnet werden kann, sei eine konstante Translation des Systems $\left(f_\nu(x), \frac{x_\mu}{s}\right)$.

Behauptung. *Dann besitzt das System*

$$(22)\qquad \begin{cases} -\varepsilon < f_\nu(x) - c_\nu < \varepsilon \pmod{1} & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ x_\mu \equiv \sigma_\mu \pmod{s} & (\mu = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

für jedes positive ε *und jeden Punkt* $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *unendlich viele ganzzahlige Lösungen* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Vorbemerkung. Im Spezialfall, dass in der in (21) genannten Determinante die Elemente der Hauptdiagonale gleich Eins, die übrigen Elemente gleich Null sind, ist $f_\nu(x) = \varphi_\nu(x)$, und verwandelt Satz 6 sich in den vorigen.

Damit (22) für jedes positive ε und jeden Punkt $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ unendlich viele ganzzahlige Lösungen besitzt, ist die Voraussetzung, dass jeder Punkt im n-dimensionalen Raum eine Translation von (f_ν) sei, nach Satz 5 hinreichend, aber nach Satz 6 nicht notwendig.

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$, und es werde die positive Zahl δ so gewählt, dass

$$(23) \qquad \delta \sum_{\varrho=1}^{n} |g_{\nu\varrho}| < \frac{1}{2}\varepsilon \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Wegen (21) ist es möglich dem Punkte $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ einen Punkt $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ mit

$$(24) \qquad c_\nu = \sum_{\varrho=1}^{n} g_{\nu\varrho}\gamma_\varrho \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

zuzuordnen. Da jeder Punkt des n-dimensionalen Raumes eine Translation von (φ_ν) ist, hat das System

$$(25) \qquad \begin{cases} -\delta < \varphi_\nu(x) - \gamma_\nu < \delta \pmod{1} & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ x_\mu \equiv \sigma_\mu \pmod{s} & (\mu = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

nach dem vorigen Satz unendlich viele ganzzahlige Lösungen x. Aus (25) folgt bei geeignet gewähltem von x abhängigem Gitterpunkt $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

$$(26) \qquad \begin{cases} -\delta < \varphi_\nu(x) - \gamma_\nu - \lambda_\nu < \delta & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ x_\mu \equiv \sigma_\mu \pmod{s} & (\mu = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

und hieraus ergibt sich, wenn

$$(27) \qquad \sum_{\varrho=1}^{n} g_{\nu\varrho}\lambda_\varrho = l_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gesetzt wird, wegen (20), (24) und (23)

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\varepsilon < f_\nu(x) - c_\nu - l_\nu < \frac{1}{2}\varepsilon & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ x_\mu \equiv \sigma_\mu \pmod{s} & (\mu = 1, 2, \ldots, m), \end{cases}$$

sodass dieses System unendlich viele ganzzahlige Lösungen x besitzt. Diese Lösungen genügen auch dem System

$$(28)\qquad \begin{cases} -\frac{1}{2}\varepsilon < f_\nu(x) - c_\nu - k_\nu < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1} & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ x_\mu \equiv \sigma_\mu \qquad\qquad \pmod{s} & (\mu = 1, 2, \ldots, m), \end{cases}$$

wo k_ν durch

$$(29)\qquad k_\nu \equiv l_\nu \pmod{1}, \qquad 0 \leqq k_\nu < 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

definiert wird, also von x abhängen kann. Wegen der Rationalität der Koeffizienten $g_{\nu\varrho}$ sind die Zahlen $Gg_{\nu\varrho}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \varrho = 1, 2, \ldots, n)$ bei geeignet gewähltem positivem ganzem G ganz; die Zahlen λ_ϱ sind ganz, sodass aus (27) folgt, dass dann die Zahlen Gl_ν, also wegen (29) auch die Zahlen Gk_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ ganz sind. Wegen $0 \leqq k_\nu < 1$ kommt somit nur eine endliche Anzahl von Punkten $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ in Betracht. Da (28) nach dem Obigen unendlich viele ganzzahlige Lösungen hat, ist es somit möglich einen festen (d. h. von x unabhängigen) Punkt k so zu bestimmen, dass (28) unendlich viele ganzzahlige Lösungen besitzt, und die Beziehungen (29) und (27) gelten, wo $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ einen (von x abhängigen) Gitterpunkt bezeichnet. Wählt man r verschiedene derartige Lösungen

$$x^{(\varrho)} = (x_1^{(\varrho)}, x_2^{(\varrho)}, \ldots, x_m^{(\varrho)}) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

von (28), dann ist für $\varrho = 1, 2, \ldots, r$

$$(30)\qquad \begin{cases} -\frac{1}{2}\varepsilon < f_\nu(x^{(\varrho)}) - c_\nu - k_\nu < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1} & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ -\frac{1}{s} < \frac{x_\mu^{(\varrho)} - \sigma_\mu}{s} < \frac{1}{s} \pmod{1} & (\mu = 1, 2, \ldots, m). \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf Voraussetzung 3 des zu beweisenden Satzes (mit $v_\varrho = \lambda_\varrho$ und $v_{n+\mu} = 0$ angewendet) geht aus (27) hervor, dass $\left(f_\nu(x), \frac{x_\mu}{s}\right)$ die Translation $(l_\nu, 0_\mu)$ besitzt. Wegen (29) hat dann $\left(f_\nu(x), \frac{x_\mu}{s}\right)$ die Translation $(k_\nu, 0_\mu)$, also auch die Translation $(-k_\nu, 0_\mu)$, sodass

$$\left(f_\nu(x) - k_\nu, \frac{x_\mu}{s}\right) \lessdot \left(f_\nu(x), \frac{x_\mu}{s}\right)$$

ist, also jede Welle des Systems $\left(f_\nu(x) - k_\nu, \frac{x_\mu}{s}\right)$ mit beliebiger Approximation (mod. 1) im System $\left(f_\nu(x), \frac{x_\mu}{s}\right)$ vorkommt. Wählt man eine Welle, die die Gitterpunkte $x', x'', \ldots, x^{(r)}$ enthält, so findet man, dass bei geeignet gewähltem Gitterpunkt $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ die Zahlen

$$f_\nu(x^{(\varrho)} + \tau) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

definiert sind, und für $\varrho = 1, 2, \ldots, r$ die Beziehungen

$$(31)\qquad \begin{cases} -\frac{1}{2}\varepsilon < f_\nu(x^{(\varrho)} + \tau) - f_\nu(x^{(\varrho)}) + k_\nu < \frac{1}{2}\varepsilon \ (\text{mod. } 1) & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ -\frac{1}{s} < \frac{x_\mu^{(\varrho)} + \tau_\mu}{s} - \frac{x_\mu^{(\varrho)}}{s} < \frac{1}{s} \qquad (\text{mod. } 1) & (\mu = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

gelten (man beachte, dass hierbei τ unabhängig von ϱ gewählt worden ist, sodass $x^{(\varrho)} + \tau$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$ auch r verschiedene Gitterpunkte bezeichnen).

Aus (30) und (31) geht hervor, dass (22) mindestens r verschiedene ganzzahlige Lösungen $x^{(\varrho)} + \tau$, also unendlich viele ganzzahlige Lösungen besitzt.

Satz 7: *Zwei gleich reiche Systeme besitzen dieselben konstanten Translationen.*

Beweis: Es sei

$$(32)\qquad (f_\nu) \gtrdot \lessdot (\varphi_\nu),$$

und es sei (u_ν) eine konstante Translation von (f_ν), sodass

$$(f_\nu + u_\nu) \lessdot (f_\nu)$$

ist. Aus Satz 1 von § 6 (S. 280) folgt wegen (32)

$$(\varphi_\nu + u_\nu) \lessdot (f_\nu + u_\nu) \lessdot (f_\nu) \lessdot (\varphi_\nu),$$

sodass jede konstante Translation von (f_ν) eine Translation von (φ_ν) ist. Durch Vertauschung von (f_ν) und (φ_ν) findet man, dass jede konstante Translation von (φ_ν) auch eine Translation von (f_ν) ist.

Satz 8: *Ist* (a_ν) *rhythmisch,* (r_ν) *beliebig, und kann man jedem positiven* ε *zwei Gitterpunkte* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *und* $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ *zuordnen, derart dass* $r_\nu(x + \tau + h)$ *für* $\nu = 1, 2, \ldots, n$ *und für jeden Gitterpunkt* $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ *mit*

$$|h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

definiert ist, und der Ungleichung

$$-\varepsilon < r_\nu(x + \tau + h) - a_\nu(x + h) < \varepsilon \pmod{1}$$

genügt, dann ist $(a_\nu) \lessdot (r_\nu)$.

Vorbemerkung. Gelten die Voraussetzungen dieses Satzes mit

$$r_\nu(x) = a_\nu(x) - u_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wo $u_1, u_2, \ldots, u_n$ Konstanten bezeichnen, dann ist also (u_ν) eine konstante Translation von (a_ν).

Beweis: Es sei δ eine beliebige positive Zahl, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_m)$ irgend ein Gitterpunkt. Da (a_ν) rhythmisch ist, enthält bei geeignet gewählter (von δ abhängiger) Länge L jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L wenigstens einen zu $\frac{1}{2}\delta$ und x' gehörigen Verschiebungspunkt von (a_ν).

Nach den Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes, wobei $\varepsilon \leqq \frac{1}{2}\delta$ so klein gewählt werde, dass

$$\frac{1}{\varepsilon} \geqq \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2}L$$

ist, existieren zwei Gitterpunkte x und τ, derart dass $r_\nu(x + \tau + h)$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ und für jeden Gitterpunkt h mit

$$(33) \qquad |h_\mu| \leqq \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2}L \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

definiert ist und der Ungleichung

$$(34) \qquad -\frac{1}{2}\delta < r_\nu(x + \tau + h) - a_\nu(x + h) < \frac{1}{2}\delta \pmod{1}$$

genügt.

Im m-dimensionalen, den Koordinatenachsen parallel orientierten Kubus mit Mittelpunkt $x-x'$ und mit Kante L liegt wenigstens ein zu $\frac{1}{2}\delta$ und x' gehöriger Verschiebungspunkt τ'' von (a_ν). Man hat dann

$$(35) \qquad |\tau''_\mu - x_\mu + x'_\mu| \leqq \frac{1}{2} L \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

und für jeden Gitterpunkt $h' = (h'_1, h'_2, \ldots, h'_m)$ mit

$$(36) \qquad |h'_\mu| \leqq \frac{1}{\delta} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

ist

$$(37) \qquad -\frac{1}{2}\delta < a_\nu(x' + \tau'' + h') - a_\nu(x' + h') < \frac{1}{2}\delta \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Setzt man $h = \tau'' - x + x' + h'$, dann gelten wegen (35) für jeden Gitterpunkt h' mit (36) die Ungleichungen (33), somit auch die Ungleichungen (34), die hier, wenn $\tau + \tau'' = \tau'$ gesetzt wird, die Gestalt

$$-\frac{1}{2}\delta < r_\nu(x' + \tau' + h') - a_\nu(x' + \tau'' + h') < \frac{1}{2}\delta \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

annehmen, sodass aus (37) folgt

$$-\delta < r_\nu(x' + \tau' + h') - a_\nu(x' + h') < \delta \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

gültig für jeden Gitterpunkt h' mit (36). Da $\delta > 0$ und der Gitterpunkt x' beliebig gewählt worden sind, ist in der Tat $(a_\nu) \lessdot (r_\nu)$.

Satz 9: *Sind (a_ν) und (r_ν) rhythmisch, mit*

$$(38) \qquad (\Delta_\mu a_\nu) \lessdot (\Delta_\mu r_\nu),$$

dann ist jede konstante Translation von (a_ν) auch eine Translation von (r_ν).

Beweis: Es sei ε eine positive Zahl, $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_m)$ ein Gitterpunkt, (u_ν) eine konstante Translation von (a_ν). Nach der Definition einer Translation (Definition 2 von § 5 auf S. 276) ist dann bei geeignet gewähltem Gitterpunkt $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$

(39) $$-\frac{1}{2}\varepsilon < a_\nu(x'+\tau+h) - a_\nu(x'+h) - u_\nu < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

gültig für jeden Gitterpunkt $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ mit

(40) $$|h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m);$$

denn da das System (a_ν) rhythmisch ist, ist es in jedem Gitterpunkt des m-dimensionalen Raumes definiert.

Es werde

$$w = |\tau_1| + |\tau_2| + \cdots + |\tau_m| + 1$$

gesetzt. Wegen (38) existiert ein Gitterpunkt x, der für jeden Gitterpunkt $q = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$ mit

(41) $$|q_\mu| \leqq |\tau_\mu| + \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

den Ungleichungen

(42) $$-\frac{\varepsilon}{2w} < \varDelta_\mu r_\nu(x+q) - \varDelta_\mu a_\nu(x'+q) < \frac{\varepsilon}{2w} \pmod{1} \quad \begin{pmatrix}\mu = 1, 2, \ldots, m; \\ \nu = 1, 2, \ldots, n\end{pmatrix}$$

genügt. Die Zahl

(43) $$\{r_\nu(x+\tau+h) - r_\nu(x+h)\} - \{a_\nu(x'+\tau+h) - a_\nu(x'+h)\}$$

kann geschrieben werden als Summe von

$$|\tau_1| + |\tau_2| + \cdots + |\tau_m| = w - 1$$

Gliedern der Gestalt

$$\varDelta_\mu r_\nu(x+h+l) - \varDelta_\mu a_\nu(x'+h+l),$$

wo $l = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$ ein Gitterpunkt mit

$$|l_\mu| \leqq |\tau_\mu| \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

bezeichnet. Wird $q = l + h$ gesetzt, so gelten für jedes dieser Glieder und für jeden Gitterpunkt h mit (40) die Ungleichungen (41), also auch die Ungleichungen (42). Folglich ist die in (43) genannte Zahl gleich der Summe von $w - 1$ Gliedern, die alle mod. I zwischen $-\frac{\varepsilon}{2w}$ und $\frac{\varepsilon}{2w}$ liegen, sodass für jeden Gitterpunkt h mit (40)

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < \{r_\nu(x+\tau+h) - r_\nu(x+h)\} - \{a_\nu(x'+\tau+h) - a_\nu(x'+h)\} < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Wegen (39) folgt hieraus

$$-\varepsilon < r_\nu(x+\tau+h) - r_\nu(x+h) - u_\nu < \varepsilon \pmod{1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{44}$$

Jedem positiven ε können also zwei Gitterpunkte $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ und $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ zugeordnet werden, die für jeden Gitterpunkt h mit (40) den Ungleichungen (44) genügen. Nach der Vorbemerkung des vorigen Satzes ist dann (u_ν), also jede konstante Translation von (a_ν), eine Translation von (r_ν).

Satz 10: *Es seien m, n und z ganze Zahlen mit $m \geqq 1$, $n \geqq 1$, $z \geqq 0$, und es sei jede der Funktionen*

$$a_\nu(x) = a_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

falls sie in irgend einem Gitterpunkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ festgelegt ist, in allen Gitterpunkten $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)$ mit

$$\bar{x}_\mu \geqq x_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

festgelegt. Ist dann

$$(\Delta_\mu a_\nu, a_\zeta^*) \prec (\Delta_\mu r_\nu, r_\zeta^*),$$

dann ist bei geeignet gewählten konstanten $g_1, g_2, \ldots, g_n$

$$(a_\nu + g_\nu, a_\zeta^*) \prec (r_\nu, r_\zeta^*). \tag{45}$$

Beweis: Der Spezialfall mit $n = 1$ folgt unmittelbar aus Satz 12 von § 6 auf S. 291, mit $l = m$ angewendet. Ich darf also $n \geqq 2$ voraussetzen, und annehmen, dass der zu beweisende Satz mit $n-1$ statt n schon bewiesen ist. Nach dem zu beweisenden Satz, mit $n-1$ statt n, und mit dem System $(\Delta_\mu a_n, a_\zeta^*)$ statt (a_ζ^*) angewendet, ist bei geeignet gewählten konstanten $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$

$$(a_\sigma + g_\sigma, \Delta_\mu a_n, a_\zeta^*) \prec (r_\sigma, \Delta_\mu r_n, r_\zeta^*), \tag{46}$$

wo σ die Reihe $1, 2, \ldots, n-1$ durchläuft. Aus (46) geht hervor, dass der zu beweisende Satz wiederum angewendet werden kann, aber jetzt mit $n = 1$, mit

$a_n(x)$ statt $a_1(x)$ und mit dem System $(a_\sigma + g_\sigma, a_\zeta^*)$ statt (a_ζ^*). Das Resultat ist (45) bei geeignet gewähltem konstantem g_n.

Satz 11: *Sind m und n ganz $\geqq 1$, ist z ganz $\geqq 0$, ist (a_ν, a_ζ^*) rhythmisch,*

$$(47)\qquad (\Delta_\mu a_\nu, a_\zeta^*) \lessdot (\Delta_\mu r_\nu, r_\zeta^*),$$

und kann man jedem positiven δ ein in jedem Gitterpunkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ definiertes System (T_ν, T_ζ^*) mit

$$(48)\qquad (\Delta_\mu a_\nu + \Delta_\mu T_\nu, a_\zeta^* + T_\zeta^*) \lessdot (\Delta_\mu r_\nu, r_\zeta^*)$$

zuordnen, derart dass jedem $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ mindestens ein Gitterpunkt $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ entspricht, der für jeden Gitterpunkt $H = (H_1, H_2, \ldots, H_m)$ mit

$$(49)\qquad |H_\mu| \leqq \frac{1}{\delta} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

den Ungleichungen

$$(50)\qquad \begin{cases} -\delta < T_\nu(X+H) - \gamma_\nu < \delta \pmod{1} & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ -\delta < T_\zeta^*(X+H) < \delta \pmod{1} & (\zeta = 1, 2, \ldots, z) \end{cases}$$

genügt, dann ist

$$(51)\qquad (a_\nu, a_\zeta^*) \lessdot (r_\nu, r_\zeta^*).$$

Vorbemerkung: Die Voraussetzungen dieses Satzes bleiben gelten, wenn a_ν durch $a_\nu + c_\nu$ ersetzt wird, wo c_ν eine beliebige Konstante bezeichnet. Unter den Voraussetzungen unseres Satzes ist somit für alle konstanten c_ν

$$(a_\nu + c_\nu, a_\zeta^*) \lessdot (r_\nu, r_\zeta^*).$$

Beweis: Es bezeichne ε eine beliebige positive Zahl, x irgend einen Gitterpunkt. Das System (a_ν, a_ζ^*) ist rhythmisch. Folglich enthält bei geeignet gewählter Länge L jeder m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L wenigstens einen zu $\frac{1}{3}\varepsilon$ und x gehörigen Verschiebungspunkt τ von (a_ν, a_ζ^*). Ich definiere δ durch

$$\frac{1}{\delta} = \frac{3}{\varepsilon} + \frac{1}{2}L,$$

und ich wähle ein System (T_ν, T^*_ζ) mit den im Wortlaut des Satzes genannten Eigenschaften.

Nach dem vorigen Satz, mit $a_\nu(x) + T_\nu(x)$ und $a^*_\zeta(x) + T^*_\zeta(x)$ statt $a_\nu(x)$ und $a^*_\zeta(x)$ angewendet, folgt aus (48) bei geeignet gewählten konstanten $g_1, g_2, \ldots, g_n$

$$(a_\nu + T_\nu + g_\nu,\ a^*_\zeta + T^*_\zeta) \lessdot (r_\nu, r^*_\zeta). \tag{52}$$

Unseren Voraussetzungen gemäss existiert ein Gitterpunkt X, der für jeden Gitterpunkt H mit

$$|H_\mu| \leqq \frac{3}{\varepsilon} + \frac{1}{2}L \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{53}$$

den Ungleichungen

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}\varepsilon < T_\nu(X+H) + g_\nu < \frac{1}{3}\varepsilon \pmod{1} & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ -\frac{1}{3}\varepsilon < T^*_\zeta(X+H) \qquad\quad < \frac{1}{3}\varepsilon \pmod{1} & (\zeta = 1, 2, \ldots, z) \end{cases} \tag{54}$$

genügt. Nach dem Obigen enthält der m-dimensionale, den Koordinatenachsen parallel orientierte Kubus mit Kante L und mit dem Mittelpunkt $X - x$ mindestens einen zu $\frac{1}{3}\varepsilon$ und x gehörigen Verschiebungspunkt

$$\tau = \tau\left(\frac{1}{3}\varepsilon,\ x,\ a_\nu,\ a^*_\zeta\right) \tag{55}$$

von (a_ν, a^*_ζ). Dann ist

$$|\tau_\mu - X_\mu + x_\mu| \leqq \frac{1}{2}L \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Wird $H = \tau - X + x + h$ gesetzt, dann gilt also (53), somit auch (54) für jeden Gitterpunkt h mit

$$|h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \tag{56}$$

Formel (54) verwandelt sich hier in

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}\varepsilon < T_\nu(x+\tau+h) + g_\nu < \frac{1}{3}\varepsilon \pmod{1} & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ -\frac{1}{3}\varepsilon < T^*_\zeta(x+\tau+h) \qquad\quad < \frac{1}{3}\varepsilon \pmod{1} & (\zeta = 1, 2, \ldots, z). \end{cases} \tag{57}$$

Wegen (55) gelten für jeden Gitterpunkt h mit (56) die Ungleichungen

$$(58)\quad \begin{cases} -\frac{1}{3}\varepsilon < a_\nu(x+\tau+h) - a_\nu(x+h) < \frac{1}{3}\varepsilon \pmod{1} & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ -\frac{1}{3}\varepsilon < a_\zeta^*(x+\tau+h) - a_\zeta^*(x+h) < \frac{1}{3}\varepsilon \pmod{1} & (\zeta = 1, 2, \ldots, z) \end{cases}$$

(denn (a_ν, a_ζ^*) ist rhythmisch, also in jedem Gitterpunkt des m-dimensionalen Raumes definiert). Aus (52) folgt, dass bei geeignet gewähltem Gitterpunkt τ' die Zahlen $r_\nu(x+\tau+\tau'+h)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ und $r_\zeta^*(x+\tau+\tau'+h)$ $(\zeta = 1, 2, \ldots, z)$ für jeden Gitterpunkt h mit (56) definiert sind, und den Ungleichungen

$$(59)\quad \begin{cases} -\frac{1}{3}\varepsilon < r_\nu(x+\tau+\tau'+h) - a_\nu(x+\tau+h) - T_\nu(x+\tau+h) - g_\nu < \frac{1}{3}\varepsilon \pmod{1} \\ \qquad\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ -\frac{1}{3}\varepsilon < r_\zeta^*(x+\tau+\tau'+h) - a_\zeta^*(x+\tau+h) - T_\zeta^*(x+\tau+h) < \frac{1}{3}\varepsilon \pmod{1} \\ \qquad\qquad (\zeta = 1, 2, \ldots, z) \end{cases}$$

genügen. Für jeden Gitterpunkt h mit (56) folgt aus (59), (58) und (57)

$$\begin{cases} -\varepsilon < r_\nu(x+\tau+\tau'+h) - a_\nu(x+h) < \varepsilon \pmod{1} & (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ -\varepsilon < r_\zeta^*(x+\tau+\tau'+h) - a_\zeta^*(x+h) < \varepsilon \pmod{1} & (\zeta = 1, 2, \ldots, z), \end{cases}$$

sodass (51) in der Tat gilt.

Satz 12: *Es seien m, n und z ganze Zahlen mit $m \geqq 1$, $n \geqq 1$, $z \geqq 0$, und es sei jede der Funktionen*

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

falls sie in irgend einem Gitterpunkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ festgelegt ist, in allen Gitterpunkten $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)$ mit

$$(60)\qquad \bar{x}_\mu \geqq x_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

definiert. Ist dann $(\Delta_\mu t_\nu, t_\zeta^*)$ eine Translation von $(\Delta_\mu f_\nu, f_\zeta^*)$, dann ist bei geeignet gewählten konstanten $g_1, g_2, \ldots, g_n$ das System $(t_\nu + g_\nu, t_\zeta^*)$ eine Translation von (f_ν, f_ζ^*).

Beweis: Nach der Definition einer Translation (Definition 2 von § 6 auf S. 276) ist

$$(\Delta_\mu f_\nu + \Delta_\mu t_\nu, f_\zeta^* + t_\zeta^*) \prec (\Delta_\mu f_\nu, f_\zeta^*),$$

da $(\Delta_\mu t_\nu, t_\zeta^*)$ eine Translation von $(\Delta_\mu f_\nu, f_\zeta^*)$ ist. Das System (t_ν, t_ζ^*) ist in jedem Gitterpunkt des m-dimensionalen Raumes definiert. Ist also die Funktion $f_\nu(x)+t_\nu(x)$ in irgend einem Gitterpunkt x festgelegt, dann ist sie auch in jedem Gitterpunkt $\bar{x}$ mit (60) definiert, sodass die Voraussetzungen von Satz 10 mit

$$a_\nu(x) = f_\nu(x) + t_\nu(x), \quad a_\zeta^*(x) = f_\zeta^*(x) + t_\zeta^*(x), \quad r_\nu(x) = f_\nu(x), \quad r_\zeta^*(x) = f_\zeta^*(x)$$

erfüllt sind, also bei geeignet gewählten konstanten $g_1, g_2, \ldots, g_n$

$$(f_\nu + t_\nu + g_\nu, f_\zeta^* + t_\zeta^*) \prec (f_\nu, f_\zeta^*)$$

ist, woraus die Behauptung folgt.

Satz 13: *Sind die Voraussetzungen des vorigen Satzes erfüllt, und besitzt (f_ν, f_ζ^*) alle konstanten Translationen der Gestalt $(c_\nu, 0_\zeta)$, dann ist (t_ν, t_ζ^*) eine Translation von (f_ν, f_ζ^*).*

Bemerkung: Die Voraussetzungen dieses Satzes bleiben gelten, wenn t_ν durch $t_\nu + c_\nu$ ersetzt wird, wo c_ν eine beliebige Konstante bezeichnet. Unter den Voraussetzungen unseres Satzes ist also $(t_\nu + c_\nu, t_\zeta^*)$ für alle konstanten c_ν eine Translation von (f_ν, f_ζ^*).

Beweis: Das System (f_ν, f_ζ^*) besitzt nach dem vorigen Satz bei geeignet gewählten konstanten $g_1, g_2, \ldots, g_n$ die Translation $(t_\nu + g_\nu, t_\zeta^*)$, und überdies die konstante Translation $(-g_\nu, 0_\zeta)$, also nach Satz 1 dieses Paragraphen auch die Translation (t_ν, t_ζ^*).

Satz 14: *Ist (f_σ), wo σ die Reihe $1, 2, \ldots, s$ durchläuft, rhythmisch, bezeichnen u_σ $(\sigma = 1, 2, \ldots, s)$ Konstanten, und kann man jedem positiven δ ein System (T_σ) und zwei Gitterpunkte $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ und $X' = (X'_1, X'_2, \ldots, X'_m)$ zuordnen, derart dass $(\Delta_\mu T_\sigma)$ eine Translation von $(\Delta_\mu f_\sigma)$ ist, und für jeden Gitterpunkt $H = (H_1, H_2, \ldots, H_m)$ mit*

$$|H_\mu| \leqq \frac{1}{\delta} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

und für $\sigma = 1, 2, \ldots, s$ *die Ungleichungen*

$$(61) \quad -\delta < T_\sigma(X+H) - u_\sigma < \delta \pmod{1}, \quad -\delta < T_\sigma(X'+H) < \delta \pmod{1}$$

gelten, dann ist (u_σ) *eine konstante Translation von* (f_σ).

Beweis: Es bezeichne ε eine positive Zahl, es möge $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$ gewählt werden, und es mögen das System (T_σ) und die Gitterpunkte X und X' die in den Voraussetzungen des Satzes genannten Eigenschaften besitzen. Dann ist $(\Delta_\mu T_\sigma)$ eine Translation von $(\Delta_\mu f_\sigma)$, sodass nach Satz 12, mit $n = s$ und $z = 0$ angewendet, $(T_\sigma + g_\sigma)$ bei geeignet gewählten konstanten $g_1, g_2, \ldots, g_s$ eine Translation von (f_σ) ist. Ausserdem gelten dann die Ungleichungen (61) mit $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$. Da $(T_\sigma + g_\sigma)$ eine Translation von (f_σ) ist, existieren zwei Gitterpunkte τ und τ', die für jeden Gitterpunkt h mit

$$(62) \qquad |h_\mu| \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

und für $\sigma = 1, 2, \ldots, s$ die Beziehungen

$$(63) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\varepsilon < f_\sigma(X+\tau+h) - f_\sigma(X+h) - T_\sigma(X+h) - g_\sigma < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1} \\ -\frac{1}{2}\varepsilon < f_\sigma(X'+\tau'+h) - f_\sigma(X'+h) - T_\sigma(X'+h) - g_\sigma < \frac{1}{2}\varepsilon \pmod{1} \end{cases}$$

erfüllen. Aus (61) $\left(\text{mit } \delta = \frac{1}{2}\varepsilon \text{ und } H = h\right)$, und (63) folgt für $\sigma = 1, 2, \ldots, s$

$$(64) \quad \begin{cases} -\varepsilon < f_\sigma(X+\tau+h) - f_\sigma(X+h) - u_\sigma - g_\sigma < \varepsilon \pmod{1} \\ -\varepsilon < f_\sigma(X'+\tau'+h) - f_\sigma(X'+h) - g_\sigma < \varepsilon \pmod{1}. \end{cases}$$

Folglich können jedem positiven ε vier Gitterpunkte X, X', $X+\tau$, $X'+\tau'$ zugeordnet werden, die für jeden Gitterpunkt h mit (62) dem System (64) genügen. Nach der Vorbemerkung von Satz 8 (mit $n = s$, und mit $u_\sigma + g_\sigma$ und g_σ statt u_ν angewendet) sind $(u_\sigma + g_\sigma)$ und (g_σ) dann konstante Translationen des rhythmischen Systems (f_σ). Da die konstanten Translationen eines Systems nach Satz 2 einen Modul bilden, ist auch (u_σ) eine Translation von (f_σ), womit Satz 14 bewiesen ist.

Schlussbemerkung. Satz 5 von § 5 auf S. 276 folgt unmittelbar aus den Sätzen 13 und 14 dieses Paragraphen. Denn sind die Voraussetzungen von Satz 5 in § 5 erfüllt, dann ist nach Satz 14 (mit $s = z + 1$ angewendet) jedes System der Gestalt $(c, 0_\zeta)$ eine konstante Translation von (f, f_ζ), sodass nach Satz 13, mit $n = 1$ angewendet, (t, t_ζ) eine Translation von (f, f_ζ) ist.