ÜBER DIE REGELFLÄCHEN SECHSTEN GRADES OHNE LEITGERADE.

VON

A. WIMAN

in UPSALA.

I.

Beziehungen zwischen einem allgemeinen linearen Komplexe und einem Komplexe mit einem Leitkegelschnitte.

1. In dieser Arbeit werden die Regelflächen sechsten Grades ($= R_6$) ohne Leitgerade behandelt. Dabei werden schon längst in meiner Dissertation[1] ausgeführte Untersuchungen wieder aufgenommen und in einem bedeutenden Umfange ergänzt. Die vorliegende Abhandlung kann auch als eine Fortsetzung einer neuerdings in diesen Acta erschienenen Arbeit[2] betrachtet werden.

Unter den R_6 werden in erster Instanz diejenigen in Betracht genommen, welche entweder einem allgemeinen linearen Komplexe angehören oder einen Leitkegelschnitt besitzen. Hierzu kommen als zu dem letzteren Falle reziprok die R_6, deren Erzeugende einen Kegel zweiten Grades ($= K_2$) berühren. Die allgemeinsten R_6 erhält man zwar nicht in dieser Weise. Doch lassen sich die meisten Fragen betreffend die Möglichkeiten für die Doppelkurve oder die Doppeldeveloppable schon durch Untersuchung dieser speziellen R_6 erledigen.

Ein linearer Komplex hat mit einer derselben nicht angehörenden R_6 6 Erzeugende gemeinsam. Andererseits lässt sich der Komplex durch 5 gerade Linien bestimmen, welche nicht alle zu derselben linearen Kongruenz gehören. *Hat nun die R_6 entweder zwei doppelte oder eine dreifache Erzeugende, so lässt sich offenbar*

---

[1] *Klassifikation af regelytorna af sjette graden.* (Lund, 1892.)

[2] *Über die Regelflächen mit einer Leitgeraden.* Acta mathematica, LVII (1931). Wir zitieren weiterhin diese Arbeit kurz »Regelflächen I».

1—3298. *Acta mathematica.* 59. Imprimé le 15 février 1932.

ein linearer Komplex bestimmen, der 7 Erzeugende mit der R_6 gemein hat und mithin die R_6 enthalten muss. In meiner Dissertation (p. 62) habe ich noch hervorgehoben, *dass sowohl jede R_6 vom Geschlechte 1 mit einer doppelten Erzeugenden als auch jede R_6 vom Geschlechte 2 zu einem linearen Komplexe gehören muss.* Der Beweis, welcher doch dort nicht mitgeteilt wurde, gründete sich auf die Tatsache (Diss., p. 107), dass ein Tetraedralkomplex erst durch 13 Konstante festgelegt wird, woraus folgt, dass sich immer ein Tetraedralkomplex bestimmen lässt, der natürlich auch zu einer Unterart davon gehören kann, welcher 13 gegebene gerade Linien enthält. Wählt man diese Linien auf einer R_6, so muss natürlich die R_6 dem Tetraedralkomplexe angehören. Studiert man nun die in einem Tetraedralkomplexe enthaltenen Regelflächen (etwa durch Abbildung des Komplexes auf einen Punktraum), so findet man ohne Schwierigkeit, dass eine R_6 von einer der oben bezeichneten Arten in einer Kongruenz liegen muss, welche durch einen linearen Komplex ausgeschnitten wird.[1] In meiner Dissertation (p. 108) habe ich noch bemerkt, dass für alle drei Geschlechter $p = 0, 1, 2$ die in einem linearen Komplexe eingehenden R_6 die gleiche Allgemeinheit besitzen und von 23 Konstanten abhängig sind. Für die allgemeinsten elliptischen bez. rationalen R_6 ist dagegen die Anzahl der Konstanten 24 bez. 25. Letzteres steht in Übereinstimmung mit der bekannten Tatsache, dass bei einer rationalen R_n über $4n+1$ Parameter zu verfügen ist. Als eine Bedingung ist es anzusehen, wenn die Doppelkurve einen Doppelpunkt erhält, wobei zwei Erzeugende mit gemeinsamer Berührungsebene zusammenstossen. Das Auftreten einer doppelten Erzeugenden ist im allgemeinen als mit zwei Bedingungen äquivalent aufzufassen.[2] Eine solche führt ja auch zwei neu auftretende Doppelpunkte für die Doppelkurve mit sich, und zwar in den Punkten, wo die einander in der doppelten Erzeugenden durchdringenden Schalen einander berühren. Gehört aber z. B. die Regelfläche schon zu einem linearen Komplexe, so ist, wie aus den folgenden Entwicklungen ersichtlich sein dürfte, für eine doppelte Erzeugende nur eine Bedingung erforderlich.

2. Bei der Abbildung eines allgemeinen linearen Komplexes auf den Punktraum, können wir von den folgenden Relationen

[1] In seiner grossen Abhandlung, *The theory of ruled surfaces* (Cambridge university press, 1931), hat W. L. Edge die obigen Sätze über R_6, welche zu einem linearen Komplexe gehören müssen, bewiesen.

[2] Hier setzen wir ausdrücklich $n = 6$ voraus und lassen die Frage für höhere n-Werte dahingestellt.

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1 x + y_1 y + w_1 w &= 0; \\ y_1 x + z_1 y + w_1 z &= 0 \end{aligned}$$

ausgehen. Einem Punkte x_1, y_1, z_1, w_1 entspricht dann eine gerade Linie mit den Koordinaten

$$(2)\qquad \begin{aligned} &p_{12} = -w_1^2; \quad p_{34} = x_1 z_1 - y_1^2; \quad p_{31} = -z_1 w_1; \\ &p_{24} = -x_1 w_1; \quad p_{14} = y_1 w_1; \qquad p_{23} = -y_1 w_1. \end{aligned}$$

Der abgebildete lineare Komplex ist demnach $p_{14} + p_{23} = 0$, und die Geraden $x = w = 0$ und $y = z = 0$ sind in bezug auf denselben konjugiert.

Andererseits kann man den Punkt x, y, z, w als fest annehmen. Die entsprechende gerade Linie bekommt dann die Koordinaten

$$(3)\qquad \begin{aligned} &p_{12} = -y w; \quad p_{34} = x^2; \quad p_{31} = y z - x w; \\ &p_{24} = -x y; \quad p_{14} = y^2; \quad p_{23} = x z. \end{aligned}$$

Wie man sieht, bekommt man hier die Abbildung des Komplexes $p_{14} p_{34} - p_{24}^2 = 0$ auf den Punktraum. Dieser Komplex ist ein spezieller quadratischer mit dem Leitkegelschnitte $w_1 = x_1 z_1 - y_1^2 = 0$. *Durch die bilinearen Relationen (1) werden mithin ein allgemeiner linearer Komplex und ein Komplex mit einem Leitkegelschnitte in Beziehungen zu einander gesetzt.*

Den Geraden des linearen Komplexes, welche durch einen gegebenen Punkt P gehen oder in der zugehörigen Komplexebene liegen, entsprechen offenbar die Punkte auf der Bildgeraden von P im Kegelschnittskomplexe. Die Doppelkurve (und auch die Doppeldeveloppable) einer Regelfläche in einem linearen Komplexe wird mithin auf die Bisekantenregelfläche der Bildkurve im beigeordneten Kegelschnittkomplexe abgebildet. In gleicher Weise wird für eine Regelfläche im letzteren Komplexe die Doppelkurve auf die Regelfläche abgebildet, welche durch die dem linearen Komplex angehörenden Bisekanten ihrer Bildkurve erzeugt wird. In dieser doppelten Abbildung haben wir somit eine Methode um die Eigenschaften sowohl von Regelflächen in einem linearen Komplexe als auch solcher mit einem Leitkegelschnitte zu untersuchen.

Wir suchen zunächst die Abbildung einer linearen Kongruenz. Dieselbe wird durch einen zweiten linearen Komplex,

$$a p_{12} + b p_{34} + c p_{31} + d p_{24} + e p_{14} + f p_{23} = 0,$$

ausgeschnitten und wird nach (2) auf die Fläche 2. Grades $(= F_2)$,

$$(4) \qquad b(x_1 z_1 - y_1^2) - w_1(a w_1 + c z_1 + d x_1 + (f-e) y_1) = 0,$$

übergeführt. Den ∞^4 linearen Kongruenzen im linearen Komplexe entsprechen mithin die ∞^4 F_2, welche den Fundamentalkegelschnitt enthalten. Die lineare Kongruenz besitzt zwei Systeme von Strahlenbüscheln, welche je die Zentren auf der einen Leitgeraden und die Ebenen durch die andere haben. Ihnen entsprechen die beiden Erzeugendensysteme der F_2. Fallen aber diese beiden Leitgeraden in einer zum linearen Komplexe gehörenden Linie zusammen, so wird die F_2 durch den K_2 ersetzt, der seine Spitze in dem dieser Linie entsprechenden Punkte hat.

Die fragliche Abbildung ist in der speziellen Gestalt, wo als Kegelschnitt der imaginäre Kugelkreis auftritt, sehr bekannt.[1] Auf derselben gründet sich ja eine berühmte Leistung von S. Lie, indem es ihm gelang die beiden Probleme der Krümmungskurven und der Haupttangentenkurven in einander zu überführen.

Die entsprechende Transformation, welche zu dem speziellen Falle gehört, wo der Kegelschnitt sich in zwei einander schneidende Linien auflöst, haben wir eben im ersten Abschnitt von »Regelflächen I» behandelt.

3. Wir wollen die Abbildung des linearen Komplexes etwas näher betrachten. Ist in (4) $b=0$, d. h. treffen die Leitgeraden der Kongruenz die Komplexlinie $x=y=0$, welche wir mit L bezeichnen wollen, so wird aus der F_2 die Ebene $w_1=0$ ausgeschieden, und es bleibt die Ebene $a w_1 + c z_1 + d x_1 + (f-e) y_1 = 0$ übrig. Die Erzeugendensysteme der F_2 werden durch die Geradenbüschel von den Schnittpunkten dieser Ebene mit dem Fundamentalkegelschnitt ($=K$) ersetzt. Fallen die Leitgeraden hier in eine Komplexlinie zusammen, so wird K durch die Ebene berührt.

Hat man endlich $c=d=e-f=0$, so finden wir, dass die Kongruenz, für welche L die Leitgerade darstellt, auf die Ebene $w_1=0$ ($=E$) abgebildet wird. Dabei entspricht jedem Punkt von E ausserhalb K dieselbe Gerade $p_{12}=p_{31}=p_{24}=p_{14}=p_{23}=0$ oder L. Die besonderen Punkte von E werden durch die nächstfolgenden Linien charakterisiert, indem man

$$x_1 : y_1 : z_1 = p_{24} : p_{23} : p_{31}$$

erhält.

Dem Punkte (x_1, y_1) auf K entsprechen die Komplexlinien der Ebene $x_1 x + y_1 y = 0$ durch L. Diese Ebene hat als Komplexpunkt $x=y=y_1 w - x_1 z = 0$.

[1] Man vergleiche etwa die Darstellung bei F. Klein, *Vorlesungen über höhere Geometrie* (Berlin, 1926), besonders p. 270.

Aus (1) erhält man ja durch Elimination

$$(y_1^2 - x_1 z_1) y + w_1 (y_1 w - x_1 z) = 0.$$

Den einzelnen Komplexlinien werden dabei die Ausgangsrichtungen vom Punkte (x_1, y_1) aus beigeordnet. In Übereinstimmung mit einer obigen Bemerkung entsprechen den Punkten einer solchen Komplexlinie die Geraden des Kegelschnittkomplexes welche in einer berührenden Ebene liegen. Einer Komplexlinie entspricht sonach die Richtungen in einer berührenden Ebene. Hat also die Bildkurve einer Regelfläche im linearen Komplexe einen Doppelpunkt auf K, so werden diesem Doppelpunkte im allgemeinen zwei verschiedene Erzeugenden beigeordnet, welche von demselben Punkte auf L ausgehen; nur dann vereinigen sich diese in eine doppelte Erzeugende, wenn die Ebene durch die beiden Tangenten im Doppelpunkte die Kegelschnittstangente enthält.

Die fundamentale Gerade L können wir natürlich beliebig im linearen Komplexe wählen. Nimmt man z. B. hierfür eine ϱ-fache Erzeugende einer dem Komplexe angehörigen R_n, so wird die Bildkurve ϱ Punkte in der Ebene E ausserhalb K erhalten. Die ϱ-fache Erzeugende L wird von $n - 2\varrho$ anderen getroffen, deren Bildpunkte auf K liegen. Die Ordnung der Bildkurve wird mithin $n - \varrho$, und *es erweist sich als vorteilhaft bei der Untersuchung einer einzelnen Regelfläche als fundamentale Gerade L eine möglichst vielfache Erzeugende zu wählen.* Ist die Bildkurve eine C_m, welche K nicht trifft, so hat die Regelfläche den Grad $2m$, und L ist für dieselbe eine m-fache Erzeugende.

Gehört besonders die Regelfläche zu einer linearen Kongruenz, so liegt im allgemeinen die Bildkurve auf einer F_2 oder auf einem K_2, welche K enthalten. Doch wird die Bildkurve eine ebene Kurve, falls die Leitlinien der Kongruenz die Gerade L schneiden.

4. Umgekehrt wollen wir die Abbildung des Kegelschnittkomplexes untersuchen. Die Geraden eines Bündels durch einen Punkt (x_1, y_1) auf K werden ersichtlich auf die Punkte der Ebene $x_1 x + y_1 y = 0$ durch L abgebildet. Dabei nähern sich gleichzeitig der Punkt der Geraden L und die entsprechende Linie der Ebene E. Nun trifft eine Gerade in der Ebene E den Kegelschnitt K noch in einem zweiten Punkt. Man erhält in der Tat aus (1) durch Elimination von w_1:

$$x (z x_1 - w y_1) + y (z y_1 - w z_1) = 0.$$

Unabhängig vom Verhältnisse zwischen x und y oder der Ausgangsrichtung soll also die entsprechende Linie durch den Punkt von K mit den Koordinaten

$$x_1 : y_1 : z_1 = w^2 : z w : z^2$$

gehen. Dieser zweite Schnittpunkt ist also dem zugehörigen Bildpunkte auf L zugeordnet, der erste dagegen der zugehörigen Ebene durch L. Hat die Bildkurve einer Regelfläche im Kegelschnittkomplexe einen Doppelpunkt auf L, so entsprechen also diesem Punkte im allgemeinen zwei verschiedene Erzeugende in der Ebene E, welche von verschiedenen Punkten von K ausgehen und nur ihren noch übrigen Schnittpunkt mit K gemeinsam haben; *nur dann erhält man eine doppelte Erzeugende, wenn die Tangenten im Doppelpunkte eine Ebene bestimmen, welche L enthält.*

In anderer Weise werden solche doppelte Erzeugende in der Ebene E abgebildet, welche aus zwei einzelnen Erzeugenden zusammengesetzt sind, die von verschiedenen Punkten auf K, etwa (x_1, y_1) und (x_1', y_1') ausgehen. Beide Erzeugende werden auf L abgebildet, erstere auf den Punkt $z : w = y_1' : x_1'$ mit der Tangente in der Ebene $x_1 x + y_1 y = 0$, letztere auf den Punkt $z : w = y_1 : x_1$ mit der Tangente in $x_1' x + y_1' y = 0$. Die Komplexebene für einen von diesen Punkten enthält die Tangente im anderen. *Verschiedene Punkte auf L können mithin zu doppelten Erzeugenden Veranlassung geben, obwohl Doppelpunkten auf dieser Linie im allgemeinen nicht doppelte Erzeugende entsprechen.*

Aus den vorangehenden Entwicklungen ersehen wir, dass einer R_n, welche K als ϱ-fache Kurve enthält, so dass also $n - 2\varrho$ Erzeugende in der Ebene E liegen, eine $C_{n-\varrho}$ entspricht, die $n - 2\varrho$ Punkte auf L besitzt. Ist insbesondere die Regelfläche ein Kegel mit einem K-Punkte als Spitze, so wird dieselbe auf eine ebene Kurve von derselben Ordnung abgebildet, deren Ebene die Gerade L enthält. Dagegen ist eine Kurve, welche in einer L nicht enthaltenden Ebene liegt, das Bild einer Regelfläche mit einer dem Kegelschnittkomplexe angehörenden Leitgeraden. Dem Punkte (x, y, z, w) entspricht ja die Gerade mit den Koordinaten (3). Suchen wir die Punkte (x', y', z', w'), deren entsprechende Linien diese Gerade treffen, so bekommen wir in gewohnter Weise die Bedingung

$$(xy' - yx')\,(wx' + zy' - yz' - xw') = 0,$$

wobei ersterer Faktor den Geradenbündel von dem Treffpunkte mit K bedeutet. Letzterer Faktor bezeichnet die Komplexebene des Punktes (x, y, z, w) in bezug auf den linearen Komplex, und eine Kurve in dieser Ebene ist mithin das Bild einer Regelfläche, welche als Leitlinien K und die Gerade mit den Koordinaten (3) besitzt.

5. Wir möchten schon hier die Aufmerksamkeit auf eine Eigentümlichkeit von besonderem Interesse lenken. Für eine Regelfläche im Kegelschnittkomplexe wird ja die Doppelkurve, wenn vom Kegelschnitt K weggesehen wird, auf die Regelfläche abgebildet, welche durch die zum linearen Komplexe gehörenden Bisekanten der Bildkurve erzeugt wird. Nun kann es vorkommen, dass für jeden Punkt der Bildkurve die Komplexebene dieselbe in einem anderen Punkte berührt oder sogar oskuliert. Die zugehörigen Verbindungslinien erzeugen dann eine Regelfläche, welche in der Bisekantenregelfläche doppelt bez. dreifach eingeht. Für die ursprüngliche Regelfläche hat man hieraus das Bild einer *Berührungsdoppelkurve* bez. *Oskulationsdoppelkurve*, wo man also für einen Querschnitt Berührungsknoten bez. Oskulationsknoten erhält. Insbesondere kann für einen Teil der Bisekantenregelfläche die Fundamentalgerade L eine Leitlinie darstellen. Da die zugehörigen Erzeugenden Punkte auf K bezeichnen, so wird in diesem Falle der Fundamentalkegelschnitt K selbst eine Berührungsdoppelkurve, indem ein Teil der Restdoppelkurve sich mit demselben vereinigt hat. Wenn der fragliche Teil doppelt in der Bisekantenregelfläche in der vorhin angegebenen Weise eingeht, wird K sogar eine Oskulationsdoppelkurve.

Die Existenz von Regelflächen mit derartigen Eigentümlichkeiten bei der Doppelkurve lässt sich übrigens auch leicht direkt nachweisen. Man denke sich z. B. für eine Regelfläche zwei Leitkurven, wobei für die eine Kurve die Erzeugenden in einer nach einem gewissen Gesetze veränderlichen die Tangente enthaltenden Ebene liegen sollen. Diese Kurve wird dann eine Berührungsdoppelkurve für die Regelfläche. Hierbei kann man ganz einfach eine die Kurve enthaltende Fläche annehmen, so dass die Erzeugenden in der Berührungsebene dieser Fläche liegen sollen. Ist weiter die Kurve eine mehrfache Kurve der Fläche, so verteilen sich die Erzeugenden auf mehrere Tangentenebenen, und die Schalen der Regelfläche, welche sich gegenseitig berühren, gehören zu derselben Ebene. Nimmt man andererseits eine Leitkurve auf einer Fläche und als Erzeugende die Haupttangenten der Fläche, so erhält man eine Regelfläche mit einer Oskulationsdoppelkurve. Hier hat man also nur zwei Schalen, welche einander gegenseitig bestimmen; bei einer Berührungsdoppelkurve kann dagegen eine beliebige Anzahl einander berührender Schalen vorkommen. Liegt die Leitkurve insbesondere auf einer Regelfläche, so erhält man aus dem zweiten Systeme von Haupttangenten eine zweite Regelfläche, und diese beiden Regelflächen oskulieren einander längs der Kurve.

II.

Nicht rationale R_6.

A. $p = 2$.

6. Wir wollen beweisen, dass, falls keine Leitgerade existiert, die Doppelkurve nicht in der Weise zerfallen kann, dass ein Bestandteil von jeder Erzeugenden nur in einem Punkte getroffen wird. Zunächst ist ein Doppelkegelschnitt unmöglich. Denn die Abbildung nach Nummer 4 würde als Bild eine Raumkurve 4. Grades vom Geschlechte 2 liefern; eine solche gibt es aber nicht. Man sieht auch, dass eine C_3 nicht als Teil der Doppelkurve eingehen kann. Die Regelfläche würde ja für den restierenden Teil der Doppelkurve, der eine C_5 ist, die Rolle von Trisekantenregelfläche spielen. Von einem Punkte der C_3 würden dann zwei Trisekanten ausgehen, welche 6 Punkte der C_5 enthalten sollten, was unmöglich ist.

Die einzige Möglichkeit für das Zerfallen der Doppelkurve ist also in zwei C_4, von denen jede von den Erzeugenden in zwei Punkten getroffen wird. Diese C_4 müssen beide vom Geschlechte 1 sein. Hat nämlich eine Regelfläche, welche durch Bisekanten einer rationalen Kurve erzeugt wird, diese als Doppelkurve, so muss dieselbe rational sein. Ordnet man nämlich den Punkten der Kurve einen Parameter α oder β bei, so hat man zwischen den Punkten, die durch eine Erzeugende verbunden werden, eine involutorische $(2, 2)$-Korrespondenz $f(\alpha, \beta) = 0$. Setzt man hier $\alpha\beta = x$, $\alpha + \beta = y$, so ergibt sich hieraus eine Gleichung 2. Grades zwischen x und y, welche eine rationale Kurve bedeutet, deren Punkte birational den Erzeugenden der Regelfläche entsprechen.

Nach Nummer 1 muss jede R_6 vom Geschlechte 2 einem linearen Komplexe angehören. Die Bisekanten einer C_4, welche von einem solchen Komplexe herrühren, erzeugen aber eine R_8, für welche die C_4 dreifach ist. Dass diese Regelfläche den Grad 8 haben muss, lässt sich folgendermassen ersehen. Die Bisekanten der C_4 verteilen sich bekanntlich in Regelscharen, welche paarweise gegenseitig zu einander Leitscharen sind. Der lineare Komplex hat mit jeder Regelschar zwei Geraden gemein. Nun trifft eine beliebig gewählte Bisekante der C_4 die

Regelfläche erstens in zwei C_4-Punkten, welche dreifach zu zählen sind, und dann in den beiden dem linearen Komplexe angehörigen Geraden der Leitschar, also insgesamt in 8 Punkten. Sollen wir nun hier eine R_6 erhalten, so muss eine Regelschar, die ganz dem Komplexe angehört, aus der R_8 ausscheiden. Die Geraden der Leitschar verteilen sich dann in gegenüber dem linearen Komplexe konjugierte Paare, wobei also die beiden Linien, die zum Komplexe gehören, Doppelelemente darstellen. Die Erzeugenden der R_6 verbinden mithin die C_4-Punkte, welche auf konjugierten Geraden der Leitschar liegen. Soll nun die R_6 das Geschlecht 2 besitzen, so muss nach der Formel von Lüroth die Anzahl der Torsalen 16 sein. Diese sind leicht zu bestimmen. In der Leitschar gibt es 4 Linien, welche die C_4 berühren. Durch jeden von den 4 Berührungspunkten gehen ersichtlich 2 Torsalen, deren Torsalpunkte auf den C_4-Punkten der jedesmal konjugierten Linie liegen. Die R_6 hat zwei Erzeugende mit jeder Regelschar gemeinsam und also auch mit den 4 K_2, welche die C_4 enthalten. Letztere acht Linien müssen offenbar auch Torsalen bedeuten; die zugehörigen Torsalpunkte liegen aber auf der anderen Doppelkurve C_4. Da in jeder der 4 K_2-Spitzen zwei Torsalen sich schneiden, so muss jede C_4 durch die Spitzen der 4 K_2 gehen, welche die andere C_4 enthalten. Man ersieht aber auch hieraus, dass die zu der anderen C_4 gehörigen K_2-Spitzen in den 4 Punkten liegen müssen, wo Erzeugende der Leitschar die erste C_4 berühren. Die Torsalen, welche mit K_2-Erzeugenden zusammenfallen, haben als Torsalebenen die Berührungsebenen der K_2. In jeder K_2-Spitze schneiden sich zwei solche Ebenen, und man bekommt in dieser Weise 4 Schnittlinien. Nun gehört auch zu der anderen C_4 eine im linearen Komplexe enthaltene Regelschar, und man ersieht, dass die obigen 4 Schnittlinien die Rolle der 4 Erzeugenden der Leitschar übernommen haben, welche diese C_4 berühren.

Die beiden C_4 haben 4 gemeinsame Punkte, und zwar sind dies die Punkte, wo Erzeugende der zum Komplexe gehörigen Regelschar die erste C_4 berühren; man versteht hieraus, dass in denselben Punkten auch Erzeugende der in gleicher Weise der zweiten C_4 zugeordneten Regelschar diese C_4 berühren. Die beiden Erzeugenden der R_6 von einem solchen Punkte gehen ja nach zwei Punkten der C_4 in einer Linie der Leitschar, und ihre Berührungsebenen im Punkte müssen die Tangente der C_4 enthalten und also zusammenfallen. Nach einer Bemerkung in Nummer 1 muss dann die Doppelkurve einen Doppelpunkt erhalten, d. h. auch die zweite C_4 muss durch den Punkt gehen. Nun wird die Bedingung eine Regelschar zu enthalten von ∞^2 linearen Komplexen erfüllt, und es gibt ∞^1 Regelscharen, welche eine gegebene C_4 enthalten. Eine C_4 tritt also als Doppelkurve für ∞^3 R_6 vom Geschlechte $p=2$ auf, welche sich in ∞^1 Systeme von je ∞^2 verteilen. Sämtliche ∞^3 restierende Doppelkurven C_4 gehen durch die Spitzen der 4 K_2, auf denen die erste C_4 belegen ist. Dazu kommt, dass die ∞^2 zu demselben Systeme gehörigen C_4 die erste C_4 in denselben 4 Punkten trifft. In diesen Punkten wird letztere C_4 von 4 Erzeugenden einer dieselbe enthaltenden Regelschar berührt. Die 4 Punkte, wo Erzeugende der zugehörigen Leitschar die C_4 berühren, haben auch ihre Bedeutung, indem dieselben für jede der ∞^2 C_4 des Systems die Spitzen der die C_4 enthaltenden 4 K_2 sein müssen.

Wenn die Regelschar einem der 4 K_2 angehört, so fällt die Leitschar mit ihr zusammen. Die linearen Komplexe, welche die Schar enthalten, sind dann immer speziell, und die Leitlinien gehören zu dem Geradenbündel durch die K_2-Spitze. Der obige R_6-Typus lässt sich mithin in einen Typus mit Leitlinie spezialisieren. Aus der zweiten C_4 scheidet sich dann die Leitgerade aus, und es bleibt eine ebene C_3 vom Geschlechte 1 übrig, welche die Leitgerade in einem Punkte trifft. Unter den ∞^1 Systemen von ∞^2 R_6 mit $p=2$, welche wir oben betrachtet haben, gibt es also 4, welche Leitlinien besitzen. Nun haben die Leitgeraden in einem System nur einen gemeinsamen Punkt, nämlich die K_2-Spitze. Die zugehörigen ∞^2 ebenen C_3 müssen also durch 7 feste Punkte gehen und mithin ein Netz bilden. Als solche Punkte findet man die drei noch übrigen K_2-Spitzen und die 4 C_4-Punkte, welche in der durch die 3 K_2-Spitzen bestimmten Ebene liegen; die fraglichen 4 C_4-Punkte haben bekanntlich stationäre Ebenen.[1]

Wie wir gefunden haben, gibt es für $p=2$ bloss zwei Typen von R_6 ohne Leitgerade. Die Doppelkurve ist

1) unzerlegt, also eine C_8;
2) in zwei C_4 zerlegt.

Beide Typen sind offenbar zu sich selbst reziprok. Dass im Falle 1 die C_8 im allgemeinen das Geschlecht 5 hat, ersieht man schon daraus, dass 4 zukommende Doppelpunkte erforderlich sind, damit dieselbe in zwei C_4 vom Geschlechte 1 zerfalle. In wie weit auch die Möglichkeit besteht, dass bei 4 Doppelpunkten die C_8 eine unzerlegte Kurve vom Geschlechte 1 sein kann, bleibt zu entscheiden.

Nach Nummer 16 in »Regelflächen I» gibt es für $p=2$ 11 Typen mit Leitlinie und 2 Typen ohne Leitlinie. Für sämtliche diese R_6-Typen ist die Existenz

[1] Den oben behandelten R_6-Typus vom Geschlechte $p=2$ mit Leitlinie habe ich in meiner Dissertation (p. 57) hergeleitet. Derselbe kommt auch in der 13. Nummer von »Regelflächen I» bei der Abbildung einer Doppelkurve auf eine Bisekantenregelfläche vor.

in meiner Dissertation bewiesen. Zwar wird dort, wenn zwei verschiedene Typen zu einander reziprok sind, gewöhnlich nur der eine Fall besprochen. Zwei solche Typen folgen aber ohne weiteres aus einander.

B. $p = 1$.

7. Wir verweisen auf Nummer 22 von »Regelflächen I» für die Fälle mit entweder dreifacher Kurve oder dreifacher Developpable. Hier behandeln wir zuerst den *Fall mit einer doppelten Erzeugenden.* Wir benutzen das in Nummer 3 gegebene Abbildungsverfahren, indem wir als Fundamentalgerade L die doppelte Erzeugende wählen; doch ist in diesem Falle auch eine direkte Diskussion kaum mit Schwierigkeiten verbunden. Als Bildkurve der R_6 bekommt man eine Raumkurve 4. Ordnung vom Geschlechte 1 mit 2 Punkten auf K. Die Doppelkurve wird auf eine R_{10} abgebildet, welche die C_4 als vierfache Kurve und K als Doppelkurve enthält. In der Ebene E hat die R_{10} eine doppelte Erzeugende, welche die ausserhalb K belegenen Punkte der C_4 verbindet, und vier einfache Erzeugende, nämlich die Verbindungslinien letzterer beiden Punkte mit den auf K belegenen C_4-Punkten.

Regelflächen aus Bisekanten, welche die C_4 einfach enthalten, sind die Regelscharen und drei R_4 vom Geschlechte 1. Von diesen können offenbar nur K_2 als Bestandteile der R_{10} auftreten. Die R_{10} lässt sich auch nicht in zwei Teile zerlegen, welche beide die C_4 doppelt enthalten. Für dieselben wäre ja K einfach, und es würde sich also um rationale Regelflächen handeln. Dies ist aber unmöglich, da wir nach den Resultaten von H. A. SCHWARZ wissen, dass eine R_5, welche eine C_4 vom Geschlechte 1 als Doppelkurve besitzt, auch selbst elliptisch sein muss.

Der Kegelschnitt K trifft jeden der 4 K_2, welche die C_4 enthalten, in zwei nicht auf der C_4 belegenen Punkten. Diese haben für die R_{10} die Bedeutung von Torsalpunkten. Man ersieht hieraus, dass die R_{10} im allgemeinen ein hyperelliptisches Gebilde vom Geschlechte 3 bezeichnet. Wenn aber K einen oder zwei der K_2 berührt, so wird die Anzahl der Torsalpunkte um 2 bez. 4 vermindert, und das Geschlecht wird auf 2 bez. 1 reduziert. Drei K_2 können von K nicht berührt werden, denn die Ebene E schneidet die Regelscharen in einem Kegelschnittbüschel, und man kann durch eine quadratische Transformation diesen in einen neuen Büschel und K in eine gerade Linie überführen. Es haben mithin eben zwei Regelscharen mit K Berührung.

Geht nun K durch eine K_2-Spitze, so wird die R_{10} in diesen K_2 und eine R_8 zerlegt. Für die R_8 hat man auf den anderen drei K_2 insgesamt 6 Torsalpunkte. Ihr Geschlecht ist also 2, wird aber auf 1 erniedrigt, falls K einen von diesen K_2 berührt.

Geht K durch zwei K_2-Spitzen, so wird die R_{10} in die beiden K_2 und eine R_6 zerlegt. Die beiden übrigen K_2 schneiden K in vier Punkten, welche Torsalpunkte für die R_6 bedeuten müssen. Die R_6 ist also hier immer vom Geschlechte 1. Die beiden Regelscharen, mit denen K Berührung hat, werden offenbar hier durch die ersteren beiden K_2 vertreten. Man versteht schon hieraus, dass K keine drei K_2-Spitzen enthalten kann.

Wir haben mithin drei Fälle bekommen, in denen die Doppelkurve, wenn von der doppelten Erzeugenden abgesehen wird, sich in der folgenden Weise zusammensetzen lässt:

1) C_8;
2) $C_2 + C_6$;
3) $2\,C_2 + C_4$.

Vergleicht man nun die oben angegebenen Tatsachen bei der Abbildung der Doppelkurve mit den Entwicklungen im 1. Abschnitt, so lassen sich folgende Eigenschaften leicht bestätigen. Die C_8 hat zwei Doppelpunkte auf der doppelten Erzeugenden, und zwar in den Punkten, wo dieselbe von zwei einfachen Erzeugenden getroffen wird; diese Punkte bedeuten offenbar zwei dreifache Punkte für die R_6. Im Falle 3 werden diese Doppelpunkte durch die beiden C_2 absorbiert, welche also in diesen Punkten einander schneiden, woraus folgt, dass die Ebenen der C_2 die doppelte Erzeugende enthalten. Die C_4 geht dagegen durch die beiden Punkte der doppelten Erzeugenden, wo die beiden Schalen der R_6 einander berühren. In den Fällen 2 und 3 trifft eine C_2 die Restdoppelkurve, also je nach dem Falle die C_6 oder C_4, in zwei neuen Doppelpunkten für die Doppelkurve. Die Existenz dieser Punkte deckt sich mit der Tatsache, dass, wie leicht zu sehen ist, der K_2, welcher der C_2 entspricht, längs denjenigen Erzeugenden, deren Berührungsebenen die Tangente von K enthalten, von der R_8 bez. R_6, den Bildern der C_6 bez. C_4, berührt wird.

Im Falle 3 ist die R_6 von demselben Typus mit derjenigen R_6, welche wir als Bild ihrer Doppelkurve C_4 betrachtet haben. Die Spitzen der 4 K_2, welche die C_4 enthalten, verteilen sich in zwei Paare, so dass jede C_2 durch ein Paar geht. In der Tat ist diese R_6 vom Geschlechte 1 als eine Spezialisierung derjenigen R_6 vom Geschlechte 2 aufzufassen, welche wir in der vorigen Nummer besonders diskutiert haben. Man bekommt dieselbe nämlich, falls bei der besprochenen Involution in der Leitschar zwei Tangenten der C_4 einander entsprechen. Die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte wird ja offenbar dann eine doppelte Erzeugende, und die zweite C_4 muss in zwei C_2 zerfallen. Nun traten in der vorigen Nummer die zweiten C_4 in Systeme von je ∞^2 mit acht Basispunkten auf. Diese acht Punkte müssen sich mithin auf zwei Ebenen verteilen lassen. Die Möglichkeit hierfür hängt damit zusammen, dass, wenn man die 4 Punkte, wo Erzeugende einer Regelschar die erste C_4 berühren, in irgend einer Weise in Paare zerlegt, die durch gerade Linien verbunden werden, so hat man eine entsprechende Zerlegung der 4 K_2-Spitzen, so dass die Verbindungslinien von den ersteren beiden Linien getroffen werden.

8. Für den Fall, dass *keine doppelte Erzeugende* existiert, kann man, wie ich in meiner Dissertation ausgeführt habe, in ähnlicher Weise die Typen für $p = 1$ bestimmen, welche einem allgemeinen linearen Komplexe angehören. Man erhält auch hier drei Fälle, welche bez. durch die Doppelkurven C_9; $C_2 + C_7$; $2\,C_2 + C_5$ charakterisiert sind. Dieselben lassen sich als Spezialfälle unter den entsprechenden Fällen einordnen, welche wir in der folgenden Nummer geben wollen. Die Diskussion lässt sich hier vereinfachen, indem die Doppelkurve nicht in zwei unzerlegbare Teile zerfallen kann, welche von den Erzeugenden in je zwei Punkten getroffen werden. In meiner Dissertation habe ich für die dreifachen Punkte (= t-Punkte) der Doppelkurve, wenn keine mehrfache Kurve existiert, die folgende Anzahl gegeben:

$$t = \frac{1}{6}(n-2)\,(n-3)\,(n-4) - p\,(n-4). \tag{5}$$

Daselbst habe ich auch für das Geschlecht P der Doppelkurve den Ausdruck

$$P = \frac{1}{2}(n-3)\,(n-4) + p(n-5) - f \tag{6}$$

erhalten, wo f die Anzahl der Doppelpunkte der Doppelkurve bedeutet, welche dadurch entstehen, dass zwei Erzeugende mit gemeinsamer Berührungsebene einander begegenen.[1] Nach (5) bekommen wir hier $t = 2$. Die Ebenen des

[1] Man sehe auch meine Schrift, *Über die Doppelkurve auf den geradlinigen Flächen* (Acta mathematica 19, 1895).

Büschels durch die beiden t-Punkte schneiden die Doppelkurve in 3 beweglichen Punkten. Liesse sich nun die Doppelkurve in der erwähnten Weise zerlegen, so würde der eine Teil nur in einem beweglichen Punkte getroffen werden und also rational sein. Dies ist aber unmöglich nach den Erörterungen zu Anfang der vorletzten Nummer.

Wir können noch weiter schliessen, dass *ein Zerfallen der Doppelkurve nur durch eine sukzessive Abscheidung von Kegelschnitten möglich ist.* Ein etwaiger doppelter Kegelschnitt muss durch die beiden t-Punkte gehen. In seiner Ebene liegen ja zwei Erzeugende, welche beide die C_2 in zwei Punkten treffen. Von einem dieser Punkte geht die Erzeugende aus; durch den anderen gehen zwei neue Erzeugende, so dass dieser Punkt ein dreifacher Punkt sein muss. Nun muss die R_6 auch reziprok zwei dreifach berührende Ebenen besitzen, welche je drei Erzeugende enthalten. Eine Doppelkurve, welche jeder Erzeugenden nur in einem Punkte begegnet, kann in einer solchen Ebene entweder alle drei Erzeugende in verschiedenen Punkten treffen oder durch den Schnittpunkt von zwei Erzeugenden gehen. Im ersten Falle ist dieselbe von der dritten und im zweiten von der zweiten Ordnung. Man versteht jetzt, dass hier Reziprozität besteht, so dass die entsprechenden Teile der Doppeldeveloppablen von der Klasse 3 bez. 2 sind. In dem Falle, dass die Doppelkurve eine C_3 ist, geht diese nicht durch die beiden dreifachen Punkte. Die Restdoppelkurve ist also eine C_6 mit zwei dreifachen Punkten. Dieselbe muss demnach in drei Kegelschnitte zerfallen, was wir auch in der nächsten Nummer bestätigt finden werden.

Wenn die Doppelkurve zerfällt, muss mithin immer ein doppelter Kegelschnitt auftreten. Wenn dieser als Fundamentalkegelschnitt K gewählt wird, erhalten wir nach der Methode von Nummer 4 als Bild der R_6 eine C_4 mit 2 Punkten auf der Fundamentalgeraden L. Hierbei kommen natürlich auch die Fälle mit, wo die R_6 eine Leitgerade besitzt. Trifft insbesondere diese Leitgerade L, so wird die C_4 eine ebene Kurve, welche offenbar auf L einen Doppelpunkt haben muss, so dass ihr Geschlecht 2, 1, 0 sein kann. Die Doppelkurve wird hier, wenn von dem Doppelkegelschnitt K abgesehen wird, auf den Geradenbüschel in der Ebene der C_4 abgebildet, der als Zentrum den Komplexpunkt dieser Ebene hat. Die Bedeutung hiervon ist eine vierfache Leitgerade. Nun kann das Zentrum auch mit einem Punkte der C_4 zusammenfallen; dann hat sich eine Erzeugende mit der Leitgeraden vereinigt. Wenn wir die weitere Diskussion für $p = 0$ auf einen späteren Abschnitt verschieben, so bemerken wir nur, dass für $p = 1$ die C_4 noch einen Doppelpunkt besitzt, der für die R_6 eine doppelte Erzeugende bedeuten muss. Wenn aber nun das Zentrum in diesem Doppelpunkte liegt, so hat sich die doppelte Erzeugende mit der Leitgeraden vereinigt. Die Wirkung hiervon ist verschieden von dem Fall, wo zwei einfache Erzeugende in die Leitgerade zusammenrücken. In der Tat haben wir in dieser unmittelbar anschaulichen Weise einen in Nummer 17 von »Regelflächen I» als 3:α diskutierten Fall aufs neue hergeleitet.

9. In allen anderen Fällen ist die C_4 eine Raumkurve. Die Restdoppelkurve wird dann auf eine R_8 abgebildet, welche durch die dem linearen Komplexe angehörigen Bisekanten erzeugt wird. Dass der Grad 8 ist, erschliesst man etwa durch Berechnung der Anzahl von Bisekanten der C_4, welche zwei in bezug auf den Komplex konjugierte gerade Linien schneiden.

Hat die R_6 *eine Doppelte Erzeugende*, so muss dieselbe, wie man aus der vorletzten Nummer schliessen kann, in der Ebene von K liegen. In diesem Falle muss die Komplexebene für jeden der beiden auf L belegenen C_4-Punkte die Tangente des anderen enthalten, und L wird eine doppelte Erzeugende für die R_{10}.

Liegt die C_4 auf einer aus Komplexlinien gebildeten Regelschar, zu welcher L gehört, so hat die R_6 *eine doppelte Leitgerade.* Wird dagegen L in der Leitschar dieser Regelschar enthalten, so bedeutet K *einen doppelten Berührungskegelschnitt* für die R_6.

Insgesamt erhalten wir hier 15 Typen. Doch wollen wir bei der Aufzählung nur solche Typen besonders numerieren, bei denen weder eine doppelte Erzeugende noch eine doppelte Leitgerade auftritt. Für diese weisen wir auf frühere Entwicklungen hin. Der Vollständigkeit halber fangen wir mit dem allgemeinen Falle an, wo keine Zerlegung der Doppelkurve stattfindet, und also die obige Abbildung nicht anwendbar ist.

1) C_9. Nach (6) ist das Geschlecht P im allgemeinen $= 4$. Wir können annehmen, dass die Doppeldeveloppable von der Klasse 9 ist, da auf den Fall, wo dieselbe eine dreifache Developpable von der Klasse 3 ist, in »Regelflächen I», Nummer 22 Bezug genommen ist. Wenn eine doppelte Erzeugende hinzukommt, erhalten wir den Fall 7 : 1.

Lässt sich nun oben die R_8 nicht in mehrere Bestandteile auflösen, so bekommen wir den Fall

2) $C_2 + C_7$. Eine Spezialisierung hiervon ist 7 : 2. Das Geschlecht der C_7 ist im allgemeinen 3. Dies findet man aus (6), wenn man das Geschlecht für eine zusammengesetzte Kurve berechnet. Wenn nämlich eine C_2 sich aus der

Doppelkurve ausscheidet, so müssen zwei f-Punkte hinzukommen. In der Ebene der C_2 hat ja die Restdoppelkurve 7 Punkte. Von diesen fallen 4 in die beiden dreifachen Punkte der R_6 und einer in den Schnittpunkt der beiden in der Ebene enthaltenen Erzeugenden. Es bleiben noch zwei übrig, welche f-Punkte sein müssen.

Wir nehmen jetzt an, die R_8 lasse sich in R_2+R_6 zerlegen. Diese R_6 ist mit dem in der 6. Nummer besonders diskutierten Typus vom Geschlechte 2 identisch, von welchem wir in Nummer 7 einen speziellen Fall vom Geschlechte 1 erhalten haben. Ist zunächst L eine einfache Erzeugende für die R_6, so bekommen wir den Typus

3) $2\,C_2+C_5$. Die C_5 ist hier im allgemeinen vom Geschlechte 2. Doch lässt sich ihr Geschlecht auf 1 erniedrigen. Ist L eine doppelte Erzeugende für die R_6, so bekommen wir den Fall 7 : 3 wieder.

Andererseits kann man natürlich auch L unter den Erzeugenden der R_2 wählen. Wir bekommen so drei Fälle mit einer doppelten Leitgeraden ($=d_2$). Für den allgemeinsten hierher gehörigen Typus, $d_2+C_2+C_6$, mag auf meine Dissertation (p. 52) verwiesen werden. Nun sind zwei Erzeugende der R_2 und der R_6 gemeinsam, denen f-Punkte entsprechen. Fällt L mit einer solchen zusammen, so bekommen wir den in »Regelflächen I», 13 : β behandelten Fall. Hierbei kann aber L sogar eine doppelte Erzeugende für die R_6 sein, und zwar geschieht dies in dem Falle, wo für die beiden auf L belegenen C_4-Punkte jeder als Komplexebene die oskulierende Ebene des anderen hat. Dieser Möglichkeit entspricht der Fall 14 : β in »Regelflächen I».

Die R_6 hat aber auch zwei gemeinsame Erzeugende mit der Leitschar der R_2. Nimmt man eine solche als L, so wird K *ein doppelter Berührungskegelschnitt.* Wir bezeichnen den so erhaltenen Fall

4) $[2\,C_2]+C_5$.

Die 4 K_2, welche die C_4 enthalten, verteilen wir in zwei Paare und nehmen an, dass die beiden geraden Linien, welche die Spitzen eines Paares verbinden, in bezug auf den linearen Komplex mit einander konjugiert sind. Als Teil der R_8 muss dann eine R_4 vom Geschlechte 1 eingehen, für welche die beiden oben erwähnten Linien doppelte Leitgeraden darstellen. Leicht einzusehen ist es, dass der restierende Teil der R_8 aus zwei R_2 besteht. Die R_4 hat in der Tat mit jeder die C_4 enthaltenden Regelschar, welche ja paarweise zu einander als Leitscharen auftreten, zwei Erzeugende gemein. Hat nun der Komplex mit einer R_2 eine dritte Linie gemein, so muss derselbe offenbar die R_2 vollständig enthalten. Da es ∞^1 lineare Komplexe gibt, für welche zwei gegebene Linien mit einander konjugiert sind, so werden die ∞^1 R_2 auf diese Komplexe in Paare verteilt. Dass hier auch Doppelelemente vorkommen, werden wir sogleich unten sehen.

Als L nehmen wir zuerst eine Erzeugende der R_4. Wir erhalten dann den Fall

5) $3\,C_2 + C_3$. Da die C_3 vom Geschlechte 1 sein soll, muss dieselbe eine ebene Kurve sein.[1] Man ersieht leicht direkt, dass man eine R_6 bekommt, wenn man als Leitkurven $3\,C_2$ mit 2 gemeinsamen Punkten nimmt. Hat man dagegen als Leitkurven zwei von den C_2 und eine C_3, welche mit jeder von diesen C_2 zwei gemeinsame Punkte hat, so ergibt sich im allgemeinen eine R_{10}. Man schliesst hieraus, dass die C_3 die spezielle Lage haben muss, dass dieselbe durch die Spitzen der beiden K_2 geht, welche die beiden C_2 enthalten. Insgesamt geht also die C_3 durch 6 derartige K_2-Spitzen, welche folglich in einer und derselben Ebene liegen müssen. Vier von diesen Spitzen werden auf die vier Erzeugenden abgebildet, welche die Leitscharen der beiden R_2 mit der R_4 gemeinsam haben, und zwar sind dies diejenigen, wo der Fundamentalkegelschnitt K unter den beiden C_2 auftritt.

Eine andere Möglichkeit ist, dass L zu einer der beiden R_2 gehört, wobei L auch gemeinsame Erzeugende der R_2 und der R_4 sein kann. Im letzteren Falle bekommen wir den Typus $13:\gamma$ in »Regelflächen I». Den ersteren Fall habe ich in meiner Dissertation (p. 52) untersucht. Es gibt aber noch die Möglichkeit, dass man für L eine gemeinsame Erzeugende der Leitschar einer R_2 und der R_4 wählen kann. Eine von den anderen beiden C_2 vereinigt sich dann mit K, und wir erhalten den Typus

6) $[2\,C_2] + C_2 + C_3$.

In diesem Falle hätten wir aber auch als Fundamentalkegelschnitt K die gewöhnliche Doppelkurve C_2 wählen können. Dann wird die R_8 in eine R_4 und eine doppelte R_2 aufgelöst. Ändern wir jetzt die Wahl von L, indem wir hierfür eine Erzeugende der R_2 nehmen, welche dieselbe auch mit der R_4 gemein haben kann, so erhalten wir zwei Fälle, die wir aber schon in »Regelflächen I» hergeleitet haben, woselbst wir denselben die Bezeichnungen $15:\beta_1$ und $15:\beta_2$ gegeben haben. Nimmt man aber für L eine gemeinsame Erzeugende der R_4 und der Leitschar der R_2, so bekommen wir den Typus

7) $[3\,C_2] + C_3$. Sämtliche drei C_2 haben sich hier in *einen doppelten Oskulationskegelschnitt* vereinigt.

[1] Dies findet bei der Abbildung seinen Ausdruck darin, dass die Leitgeraden der R_4 die Gerade L treffen.

10. Wir wollen jetzt näher die Zerfällung der Bisekantenregelfläche R_8 in eine R_4 und *zwei* bez. *eine doppelte* R_2 beleuchten. Wir führen für die C_4 in gewöhnlicher Weise einen Parameter u ein, setzen für die Argumente von vier Punkten einer Ebene die Bedingung $u_1+u_2+u_3+u_4 \equiv 0$ fest und bezeichnen die Perioden mit ω und ω_1. Für die R_4, welche wir betrachten, möge zwischen zusammengehörigen Punkten die Relation

$$(7) \qquad u_1 \equiv u + \frac{\omega}{2}$$

gelten. Für eine Regelschar hat man dagegen

$$(8) \qquad u_1 + u \equiv c\,.$$

Die Argumentsummen $\pm c$ gehören ersichtlich zu derselben F_2, so dass die zugehörigen Scharen in bezug auf einander Leitscharen darstellen. Für einen K_2 gilt also $2c \equiv 0$, woraus man die vier Lösungen $c \equiv 0,\ \frac{\omega}{2},\ \frac{\omega_1}{2},\ \frac{\omega+\omega_1}{2}$ bekommt. Für (7) und (8) sind die Paare $\frac{c}{2} \pm \frac{\omega}{4}$ und $\frac{c+\omega_1}{2} \pm \frac{\omega}{4}$ gemeinsam, welche also zu den gemeinsamen Erzeugenden der R_2 und der R_4 erhören.

In Nummer 6 haben wir die R_6 diskutiert, welche bei der Zerfällung der R_8 in eine R_2 und eine R_6 auftritt. Diese R_6 erwies sich im allgemeinen vom Geschlechte 2; hier soll dieselbe aber in eine R_2 und eine R_4 zerfallen, welche zwei Erzeugende gemein haben, was für die R_6 zwei doppelte Erzeugende bedeutet. Diese lassen sich nur in solcher Weise erhalten, dass bei der dort betrachteten Involution in der Leitschar die vier Erzeugenden, welche die C_4 berühren, einander paarweise entsprechen. Nun lassen sich die zugehörigen Argumente in drei Weisen, den drei R_4 entsprechend, in Paare zerlegen. Zur Wahl von (7) gehören die Paare $\frac{-c}{2},\ \frac{-c}{2}+\frac{\omega}{2}$ und $\frac{-c+\omega_1}{2},\ \frac{-c+\omega}{2}+\frac{\omega}{2}$, wobei (8) die schon in der R_8 eingehende R_2 bezeichnet. Wenn also die R_8 die Teile (7) und (8) enthält, so wird die restierende R_2 durch

$$(9) \qquad u_1 + u \equiv -c + \frac{\omega}{2}$$

definiert. Untersuchen wir jetzt, wann die beiden zu (8) und (9) gehörigen Regelscharen zusammenfallen, so erhalten wir die Bedingung

(10) $$c \equiv \pm \frac{\omega}{4}, \frac{\pm \omega}{4} + \frac{\omega_1}{2}.$$

Die vier Lösungen verteilen sich also in zwei Paare, welche gegenseitige Leitscharen enthalten. Für die Regelscharen, welche mit einer R_4 doppelt auftreten können, findet man die charakteristische Eigenschaft, dass die zugehörigen vier Berührungspunkte der C_4 sich paarweise durch Erzugende der Leitschar verbinden lassen.

11. Die in den Nummern 7 und 9 hergeleiteten 10 Typen vom Geschlechte 1 sind offenbar alle zu sich selbst reziprok. Nimmt man hierzu die in »Regelflächen I», Nummer 22 besprochenen 3 Typen, so erhält man für $p = 1$ insgesamt 13 R_6-Typen ohne Leitgerade. Von diesen haben 9: 4 und 9: 6 einen doppelten Berührungskegelschnitt und 9: 7 einen doppelten Oskulationskegelschnitt. Vergleicht man mit dem Verzeichnis bei Edge, so findet man dort auch die beiden Typen 7: 3 und 9: 6 nicht.

Nach »Regelflächen I», Nummer 16 hat man für $p = 1$ 37 R_6-Typen mit einer Leitgeraden. Insgesamt ergibt sich also für das Geschlecht 1 50 Typen von R_6, welche keiner linearen Kongruenz angehören. Die in meiner Dissertation mitgeteilten Resultate sind insofern unvollständig, als dort die in »Regelflächen I», 17: 3, α besprochenen 2 Typen keine Berücksichtigung gefunden haben.

III.

Rationale R_6 in einem linearen Komplexe.

12. Wenn mehr als zweifache Kurven nicht vorkommen, haben wir nach (5) für eine rationale R_6 *vier dreifache Punkte*, welche aber auch durch *einen einzigen vierfachen Punkt* ersetzt werden können. Diesen Möglichkeiten entsprechend kann man von einem *Hauptfalle* und einem *Nebenfalle* für die Doppelkurve sprechen. Reziprok kann man auch für die Doppeldeveloppable einen Hauptfall und einen Nebenfall einführen. Durch Kombination erhält man hieraus vier Fälle, von denen aber, wenn die R_6 einem linearen Komplexe angehört, nur zwei möglich sind. Nach diesen Fällen zerfallen die Typen in Unterabteilungen. Natürlich hätte man auch den Einteilungsgrund so wählen können, dass diese Unterabteilungen verschiedene Typen bedeuten. Doch scheint es uns vorteilhaft,

jedenfalls bei einer ersten Aufzählung, die Typen in einem weiteren Sinne zu fassen.

Gehört eine Regelfläche zu einem linearen Komplexe, so besteht zwischen einem Punkte der Doppelkurve und der entsprechenden doppelt berührenden Ebene das Verhältnis von Komplexpunkt und Komplexebene. Zu den Punkten, welche in einer Ebene liegen, gehen die Ebenen durch den zugehörigen Komplexpunkt und umgekehrt. Man beweist hiernach leicht, dass zwischen der Regelfläche und der reziproken Fläche eine völlige Übereinstimmung mit Rücksicht auf die Zusammensetzung der Doppelkurve und die vielfachen Punkte sich verwirklicht.

Wenn wir zunächst den Fall *ohne doppelte Erzeugende* betrachten, so finden wir bloss zwei Möglichkeiten: entweder ist die Doppelkurve unzerlegbar, also eine C_{10}, oder zerfällt dieselbe in zwei C_5. Enthält nämlich die Doppelkurve eine C_2, so wird der entsprechende Teil der Doppeldeveloppable von der Klasse 3 und umgekehrt. In ähnlicher Weise entsprechen einander die Zahlen 4 und 6, 7 und 8. Nur bei der Kombination 5, 5 werden beide Zahlen gleich, so dass also nur diese möglich ist, wenn die R_6 einem linearen Komplexe angehört. Es mag genügen, wenn wir den Beweis der obigen Behauptung im Falle eines doppelten Kegelschnitts ausführen. Hat erstens die R_6 4 dreifache Punkte, so wissen wir nach Nummer 8, dass der Kegelschnitt durch zwei von diesen gehen muss. Es geht aber auch hervor, dass der Kegelschnitt nicht durch mehr als zwei dreifache Punkte gehen kann. Gibt es aber einen dreifachen Punkt mit drei *verschiedenen* Erzeugenden, durch welchen der Kegelschnitt nicht geht, so muss jede der drei Erzeugenden den Kegelschnitt in einem anderen Punkt treffen. Hierdurch entstehen drei Ebenen der Doppeldeveloppablen, welche den Punkt enthalten. Hat die R_6 einen vierfachen Punkt, so müssen die beiden Erzeugenden in der Ebene des Kegelschnittes den vierfachen Punkt mit dem Kegelschnitte gemeinsam haben, aber von zwei anderen Punkten des Kegelschnittes ausgehen. Durch den vierfachen Punkt gehen also drei Ebenen der entsprechenden Doppeldeveloppablen, nämlich zwei zu den Erzeugenden in der Ebene des Kegelschnittes und eine durch die beiden Erzeugenden, welche vom vierfachen Punkte ausgehen.

Eine vollständige Klarlegung, wie man eine einem linearen Komplexe angehörende R_6 erhält, deren Doppelkurve in zwei C_5 zerfällt, scheint mit Schwierigkeiten verbunden zu sein, und wir werden uns darum mit einem speziellen Falle begnügen. Wir betrachten eine C_5 mit zwei Doppelpunkten, welche auf einer eigentlichen F_2 belegen ist. Die F_2 enthält zwei Regelscharen, $R_2^{(3)}$ und $R_2^{(2)}$, deren Linien in bezug auf die C_5 Trisekanten bez. Bisekanten darstellen. Es gibt nun einen besonderen linearen Komplex, zu welcher die Regelschar $R_2^{(3)}$ gehört, und für welche die Komplexebenen in den Doppelpunkten der C_5 die F_2 berühren. Die Regelfläche, welche aus den zu diesem Komplexe gehörenden Bisekanten der C_5 erzeugt wird, enthält als Bestandteile die $R_2^{(3)}$, und zwar dreimal, sowie die Geradenbüschel mit den Zentren in den Doppelpunkten. Es bleibt eine R_6 übrig, welche die C_5 als Doppelkurve enthält, und für welche die Restdoppelkurve eine zweite C_5 sein muss. Der Komplex bestimmt wie in Nummer 6 eine Involution unter den Geraden der $R_2^{(2)}$, und die R_6 wird durch die Verbindungsgeraden der C_5-Punkte, welche auf entsprechenden Linien liegen, erzeugt. Die C_5 wird von vier Geraden der $R_2^{(3)}$ berührt. Man findet, wie im entsprechenden Falle der Nummer 6, dass die beiden C_5 einander in diesen vier Berührungspunkten schneiden müssen. Die zweite C_5 hat ihre Doppelpunkte an denjenigen Stellen, wo die durch die Doppelpunkte der ersten C_5 gehenden Linien der $R_2^{(3)}$ diese C_5 noch treffen. Einen besonderen Fall erhält man, wenn in der obigen Involution die beiden Geraden der $R_2^{(2)}$, welche die C_5 berühren, einander entsprechen, indem dann die R_6 in zwei R_3 zerfällt.

13. Hat die R_6 *eine doppelte Erzeugende*, so kann die Doppelkurve nicht in zwei unzerlegbare Teile zerfallen, so dass jeder Teil von den Erzeugenden in zwei Punkten getroffen wird. Die Doppelkurve kann dann nur in der Weise zerfallen, dass Kegelschnitte sich von derselben ausscheiden. Erstere Möglichkeit würde eine Zerlegung der Doppelkurve in eine C_5 und eine C_4 erfordern. Gehört aber die R_6 zu einem linearen Komplexe, so kann eine C_4 nur dann als Teil der Doppelkurve auftreten, wenn zwei doppelte Erzeugende vorkommen. Die C_4, welche wir als rational annehmen müssen, kann entweder von der zweiten Art sein oder einen Doppelpunkt besitzen. Betrachten wir im ersteren Falle die Regelfläche, welche von den dem Komplexe angehörenden Bisekanten der C_4 erzeugt wird, so erhalten wir eine R_9, welche die C_4 als dreifache Kurve enthält. Der Komplex hat nun mit der Regelschar, welche aus den Trisekanten der C_4 besteht, zwei gerade Linien gemeinsam, und diese Linien müssen dreifache Erzeugende der R_9 bedeuten. Soll nun die R_9 in zwei Teile zerfallen, so ist hierfür, wie unmittelbar ersichtlich ist, die einzige Möglichkeit in eine R_3 und eine R_6. Die obigen zwei Erzeugenden würden aber dann für die R_6 doppelte Erzeugende darstellen. Im anderen Falle, wo die C_4 einen Doppelpunkt hat, wird die R_9 durch eine R_8 ersetzt, indem der Büschel von Komplexgeraden durch den Doppelpunkt sich loslöst. Die R_8 hat zwei doppelte Erzeugende, und zwar sind dies

die Verbindungsgeraden des Doppelpunktes mit den zwei übrigen Punkten der C_4, welche in der Komplexebene des Doppelpunktes liegen. Lässt sich nun die R_8 in eine R_2 und eine R_6 zerlegen, so müssen letztere Linien auch doppelte Erzeugende der R_6 sein. Die Erzeugende der R_2, welche durch den Doppelpunkt geht, muss ja in der durch die beiden Tangenten bestimmten Ebene liegen.

Wir wollen weiter untersuchen, wie hier bei einer doppelten Erzeugenden Kegelschnitte als Teile der Doppelkurve auftreten können. Bei vier dreifachen Punkten muss ein doppelter Kegelschnitt durch die beiden gehen, welche nicht auf der doppelten Erzeugenden belegen sind. Die doppelte Erzeugende muss derselbe in einem Punkte treffen, wo die beiden Schalen der R_6 einander berühren. Da es nur zwei solche Punkte gibt, so können höchstens zwei doppelte Kegelschnitte auftreten. Dass die Klasse des entsprechenden Teils der Doppeldeveloppablen auf 2 erniedrigt wird, hat seine Erklärung darin, dass der Ebenenbüschel durch die doppelte Erzeugende von derselben ausscheidet. In einem vierfachen Punkte der R_6 müssen zwei einfache Erzeugende mit der doppelten Erzeugenden zusammentreffen. Ein doppelter Kegelschnitt muss auf der doppelten Erzeugenden einen eben solchen Punkt wie im vorigen Falle besitzen. Der Zweig des Kegelschnitts im vierfachen Punkt muss dann vom Zusammenstoss der beiden einfachen Erzeugenden herrühren. Man ersieht hieraus, dass in diesem Falle höchstens ein doppelter Kegelschnitt vorkommen kann.

Wir haben also bei vier dreifachen Punkten, wenn von der doppelten Erzeugenden abgesehen wird, für die Doppelkurve die Möglichkeiten: C_9; $C_2 + C_7$, $2\,C_2 + C_5$; bei einem vierfachen Punkte aber nur die beiden ersteren. Dass diese Fälle auch wirklich vorkommen, ist in unserer Dissertation (p. 68) erwiesen, und zwar durch Benutzung der Methode der folgenden Nummer.

14. Wir betrachten jetzt den Fall, wo die R_6 *zwei doppelte Erzeugende* ($= 2\,g_2$) besitzt, *welche einander nicht schneiden.* Wir nehmen eine von diesen als L und erhalten nach Nummer 3 als Bildkurve eine C_4, welche zwei Punkte auf K hat und einen nicht auf K belegenen Doppelpunkt besitzt. Dieser Doppelpunkt ist das Bild der anderen g_2. Seine Lage kann doch mit der obigen Einschränkung auch in der Ebene E sein. Die beiden g_2 folgen dann unmittelbar nach einander.

Die Doppelkurve wird auf eine R_{10} abgebildet, welche die C_4 als vierfache Kurve und K als Doppelkurve enthält. In der Ebene E hat die R_{10} eine doppelte Erzeugende, welche die beiden ausserhalb K belegenen Punkte der C_4 verbindet.

Dieselbe entspricht den beiden Punkten der Doppelkurve auf der als L gewählten g_2, in denen die beiden Schalen der R_6 einander berühren. Dann aber hat die R_{10} in der Ebene E vier einfache Erzeugende, welche letztere Punkte mit den auf K belegenen Punkten der C_4 verbindet. Diesen entsprechen zwei Doppelpunkte der Doppelkurve, und zwar in den Punkten, wo die doppelte Erzeugende L von zwei anderen Erzeugenden getroffen wird. Für die andere g_2 findet man natürlich ganz verschiedene Abbildungen für die entsprechenden Punkte der Doppelkurve. Erstens kommen hierfür zwei einfache Erzeugende in Betracht, welche den Doppelpunkt der C_4 mit den Punkten von K verbinden, die in der durch die Tangenten im Doppelpunkte bestimmten Ebene liegen. Hierzu kommen zwei doppelte Erzeugende, welche vom Doppelpunkte nach zwei anderen Punkten der C_4 gehen, so dass die Verbindungsgeraden den Kegelschnitt K treffen.

Das Geschlecht der R_{10} ist im allgemeinen 1. Auf der Doppelkurve K erhält man ja vier Torsalpunkte in den ausserhalb der C_4 belegenen Schnittpunkten mit den beiden K_2, welche durch Bisekanten der C_4 erzeugt werden. Wenn aber durch Berührung zwei solche Schnittpunkte zusammenfallen, so wird die R_{10} rational. Gilt für beide K_2 Berührung, so gibt es auf K keine Torsalpunkte, und die R_{10} muss zerfallen. Hier sind die Möglichkeiten in $R_3 + R_7$ und $2\,R_5$, welche sich beide realisieren lassen. Geht K durch eine von den beiden K_2-Spitzen, so scheidet sich dieser K_2 von der R_{10} aus, und es bleibt eine rationale R_8 übrig. Der K_2 und die R_8 berühren einander längs zwei Erzeugenden, deren Ebenen die Tangente von K in der K_2-Spitze enthalten. Für die entsprechenden Teile der Doppelkurve hat dies die Bedeutung, dass dieselben in zwei f-Punkten einander schneiden. Dem K_2 entspricht für die R_6 eine doppelte C_2, deren Ebene die doppelte Erzeugende L enthält, und welche die andere g_2 in einem Punkte trifft, wo die Tangentenebenen zusammenfallen. Nun kann ja die C_2 in bezug auf die beiden g_2 sich auch auf die umgekehrte Weise verhalten. Dann erhält man offenbar eine Zerlegung der R_{10} in $R_3 + R_7$, welche sich also als äquivalent mit $K_2 + R_8$ erweist.

Nun kann K die Spitze des einen K_2 enthalten und den anderen K_2 berühren. Dann zerfällt die R_{10} noch weiter, nämlich in $K_2 + R_3 + R_5$. Von den beiden soeben besprochenen Berührungen zwischen dem K_2 und der R_8 wird jetzt eine der R_3 und die andere der R_5 zuerteilt. Wenn man hier den Fundamentalkegelschnitt K so bewegt, dass derselbe auch den ersten K_2 berührt, so lässt sich ohne Schwierigkeit einsehen, dass dies in zwei verschiedenen Weisen geschehen kann. Hierauf beruht es, dass der K_2 sich sowohl mit der R_3 als mit der

R_5 vereinigen kann, so dass die neue Zerlegung der R_{10} entweder in $2\,R_5$ oder in $R_3 + R_7$ wird.

Endlich kann K beide K_2 Spitzen enthalten. Die R_{10} zerfällt dann in $2\,K_2 + 2\,R_2$. Die möglichen Zerfällungen sind also: 1) R_{10}; 2) $2\,R_5$; 3 α) $K_2 + R_8$; 3 β) $R_3 + R_7$; 4) $K_2 + R_3 + R_5$; 5) $2\,K_2 + 2\,R_3$. Wenn wir jetzt zu den entsprechenden Zerlegungen der Doppelkurve der R_6 zurückgehen, so ist zu beachten, dass die R_{10} und R_8 K als Doppelkurve, die R_5 und R_3 dagegen als einfache Kurve enthalten. Wir bekommen demnach für die Doppelkurve die folgenden 5 Typen:

1) $2\,g_2 + C_8$;
2) $2\,g_2 + 2\,C_4$;
3) $2\,g_2 + C_2 + C_6$;
4) $2\,g_2 + 2\,C_2 + C_4$;
5) $2\,g_2 + 4\,C_2$.

Hierzu fügen wir noch den Typus

6) $g_3 + C_7$,

wo also die R_6 *eine dreifache Erzeugende* besitzt. In diesem Falle lässt die R_6 sich auf eine C_3 abbilden, welche K nicht trifft.

Hat die C_4 den Doppelpunkt in der Ebene E, so kann offenbar K durch keine K_2-Spitze gehen. Man versteht dann, dass die R_{10} beim Zerfallen weder einen K_2 noch eine R_3 enthalten kann. Dieser Fall, wo die beiden g_2 unmittelbar auf einander folgen, wird also nur durch die Typen 1 und 2 vertreten.

Geht für die C_4 der Doppelpunkt in eine Spitze über, so ist bekanntlich die zugehörige abwickelbare Fläche vom Range 5. Es gibt dann eine stationäre Ebene, deren Schnitt mit der abwickelbaren Fläche einen Kegelschnitt enthält. Dieser Kegelschnitt hat mit der C_4 Berührung, aber doch so, dass bloss zwei Punkte gemeinsam sind. Es ist also zulässig denselben als Fundamentalkegelschnitt K zu wählen. Dann erhält man auch für die R_6 eine abwickelbare Fläche, und zwar wird die zugehörige Kuspidalkurve eine C_4 mit zwei stationären Tangenten. Man zeigt leicht, dass hier die Doppelkurve eine eben solche C_4 wie die Kuspidalkurve sein muss.

Im Falle 5 werden die $4\,C_2$ in zwei Paaren verteilt, welche den beiden g_2 in der Weise zugeordnet sind, dass die C_2 eines Paares einander in zwei Punkten einer g_2 treffen und mit der anderen g_2 die Punkte gemein haben, wo die Berührungsebenen der R_6 zusammenfallen. Zwei C_2 in verschiedenen Paaren treffen einander in einem f-Punkt. Umgekehrt muss man diesen R_6-Typus erhalten können, indem man von drei Kegelschnitten in geeigneter Lage als Leitkurven ausgeht. Da ist zunächst erforderlich, dass zwei von den Leitkurven zwei Punkte gemeinsam haben sollen, und dass die dritte die Verbindungsgerade dieser Punkte und die beiden ersten Leitkurven je in einem Punkte trifft. Dazu kommt aber noch die weitere Bedingung hinzu, dass die dritte C_2 durch die Spitze von einem der beiden die anderen beiden C_2 enthaltenden K_2 gehen muss. Die beiden Erzeugenden der R_6, welche durch die K_2-Spitze gehen, sind offenbar Torsalen und haben ihre Torsalpunkte auf dem hinzutretenden vierten Doppelkegelschnitte. Wenn man vom Fall 5 zu den früheren Fällen zurückgehen will, so muss man sich denken, dass die f-Punkte sukzessive weggehen und die zugehörigen Doppelkurven sich vereinigen.

15. Wenn *die beiden doppelten Erzeugenden einander treffen*, so geschieht dies in einem vierfachen Punkte für die R_6. Die Bildkurve hat jetzt den Doppelpunkt auf K, wobei die Ebene durch die Tangenten die Tangente von K enthalten soll. Wir nehmen zunächst an, dass diese Ebene nicht mit E zusammenfällt. Da die beiden K_2-Spitzen, welche in der vorigen Nummer eine so grosse Rolle spielten, in der Ebene durch die Tangenten im Doppelpunkte liegen, so geht in diesem Falle K nie durch eine K_2-Spitze. Man versteht dann, dass die R_{10} auch keine R_3 enthalten kann, da das Auftreten eines K_2 oder einer R_3 nur von der g_2 abhängt, welche als Fundamentalgerade L gewählt wird. Man zeigt leicht, dass K so genommen werden kann, dass beide K_2 noch in anderen Punkten berührt werden. Dann muss die R_{10} zerfallen, was nur in zwei R_5 möglich ist. Die vorkommenden Typen sind mithin 1 und 2 in der vorigen Nummer. Ein Unterschied ist aber, dass hier die C_8 einen vierfachen Punkt hat, in der vorigen Nummer dagegen Doppelpunkte in den 4 dreifachen Punkten der R_6. Ebenso haben, wenn die C_8 in 2 C_4 zerfällt, hier die C_4 Doppelpunkte im vierfachen Punkte der R_6; in der vorigen Nummer sind dieselben dagegen von der zweiten Art.

Wir betrachten jetzt den Fall, wo die Ebene der Tangenten im Doppelpunkte mit E zusammenfällt. Die Bisekantenregelfläche hat dann K nur als einfache Kurve, und ihr Grad wird von 10 auf 9 erniedrigt. Die Erzeugenden dieser Regelfläche, welche von einem K-Punkte ausgehen, sind ja Erzeugende derjenigen F_2, welche durch diesen Punkt geht und die C_4 enthält. In diesem Falle geht aber immer eine von diesen letzteren Linien nach dem Doppelpunkte. Wir suchen die Erzeugenden der R_9, welche in der Fundamentalebene liegen.

Zunächst kommen hier die Tangenten im Doppelpunkte der C_4 in Betracht und dann die in E belegenen Erzeugenden der beiden K_2. Längs diesen letzteren Linien muss offenbar E die R_9 berühren, so dass dieselben doppelt gelten. Da sämtliche diese Linien von anderen K-Punkten als dem Doppelpunkte ausgehen, so müssen nach dem 1. Abschnitte die entsprechenden Punkte der Doppelkurve im vierfachen Punkte der R_6 belegen sein. Nun haben Erzeugende der Bisekantenregelfläche, welche die C_4 berühren, die Bedeutung von Torsalpunkten für die Doppelkurve. In den beiden g_2, welche hier unmittelbar aufeinander folgen, decken sich somit zwei Torsalen mit sowohl gemeinsamer Torsalebene als gemeinsamem Torsalpunkt. Den beiden Erzeugenden der R_9, längs denen Berührung mit E stattfindet, entsprechen Punkte der Doppelkurve, deren Tangenten mit L zusammenfallen. Die R_9 hat noch eine Erzeugende in der Ebene E, und zwar die andere durch den Doppelpunkt gehende Erzeugende derjenigen F_2, welche die C_4 enthält und als erste Erzuegende die Tangente von K im Doppelpunkte hat. Da diese den Ausgangspunkt im Doppelpunkte hat, so entspricht derselben ein Punkt der Doppelkurve, der zwar auf L, aber nicht im vierfachen Punkte der R_6, liegt.

Offenbar kann K durch eine oder beide K_2-Spitzen gehen. Die Zerlegungsmöglichkeiten der R_9 sind also drei: R_9; $K_2 + R_7$; $2\,K_2 + R_5$. Es können mithin die Typen 1, 3, 4 der vorigen Nummer hier auftreten. Eine besondere Eigentümlichkeit hier ist, dass die Tangenten zweier Zweige im vierfachen Punkt mit der Doppeltorsale zusammenfallen. Bei der Zerlegung der Doppelkurve gehören zu Kegelschnitten solche Zweige. Im Falle 4 berühren sich mithin die beiden doppelten Kegelschnitte, und die Doppeltorsale ist die gemeinsame Tangente.

IV.

Rationale R_6 mit einem mehrfachen Kegelschnitte.

A. *Dreifacher Kegelschnitt.*

16. Nach Nummer 4 erhalten wir als Bildkurve eine C_3, welche mit L keinen gemeinsamen Punkt hat. Ist diese C_3 eine ebene Kurve, so bekommen wir R_6 von den Geschlechtern 1 und 0 mit einer dreifachen Leitgeraden. Für $p = 0$ hat die R_6 noch eine doppelte Erzeugende, welche dem Doppelpunkte der C_3 entspricht. Liegt der Komplexpunkt der Ebene auf einem Punkte der C_3, so vereinigt sich eine Erzeugende mit der Leitgeraden, die jetzt nur als doppelt

gilt. Für $p = 0$ kann der Komplexpunkt auch im Doppelpunkte belegen sein, und wir erhalten dann einen Fall, der uns in »Regelflächen I», Nummer 17 entgangen ist. Es haben sich hier nicht nur zwei Erzeugende mit der Leitgeraden vereinigt, sondern dieselben berühren einander auch nach ihrer ganzen Länge.

Es findet sich in der Tat eine Lücke in den betreffenden Auseinandersetzungen unserer vorigen Arbeit. In Nummer 17: 1 ergab sich als Bildkurve eine C_5, welche einen Doppelpunkt in O besitzt und L sonst nicht trifft, aber mit $\bar{L}$ noch zwei andere Punkte gemein hat. Dort wurde nicht besonders hervorgehoben, dass, falls die als $\bar{L}$ gewählte Erzeugende der R_6 durch einen dreifachen Punkt der Fläche geht, *und dies wird bei einer dreifachen C_2 immer der Fall sein,* so rücken letztere zwei Punkte auf $\bar{L}$ in einen Doppelpunkt zusammen. Die C_5 bekommt dann zwei Doppelpunkte und ist also auf einer F_2 belegen, welche wir als eine eigentliche Fläche zweiten Grades annehmen wollen. Gehört jetzt L zu derjenigen Regelschar der F_2, deren Linien die C_5 in zwei Punkten treffen, so wird die Doppelkurve auf die andere Regelschar abgebildet, welche aus Trisekanten der C_5 besteht. Für die R_6 hat dies die Bedeutung, dass dieselbe als Doppelkurve einen dreifachen Kegelschnitt besitzt. Nimmt man den reziproken Fall hinzu, so erhalten wir *zwei neue Typen*, wo zwei oder mehrere Erzeugende in singulärer Weise mit der Leitgeraden zusammenfallen. Statt 11 bekommen wir somit deren 13 für $p = 0$. Die Anzahl 87 für die Typen der rationalen R_6 mit einer Leitgeraden, welche wir in Nummer 16 unserer vorhergehenden Arbeit gegeben haben, soll mithin durch 89 ersetzt werden.

17. In den noch übrigen Fällen ist die C_3 eine Raumkurve, und es kann sich also nur um rationale R_6 handeln. Als Abbildung der Restdoppelkurve erhalten wir die dem linearen Komplexe angehörende Regelfläche, welche aus Bisekanten der C_3 besteht. Im allgemeinen bekommen wir hierfür eine R_4. Für dieselbe ist L keine Erzeugende, so dass die Doppelkurve eine C_4 wird. Den vier Erzeugenden der R_4, welche L treffen, entsprechen die vier gemeinsamen Punkte ($=f$-Punkte) für die doppelte C_4 und die dreifache C_2. Die C_4 ist offenbar immer von der zweiten Art. Die R_4 kann auch in die zur C_3 gehörige abwickelbare Fläche übergehen. Man erhält dann eine abwickelbare R_6, welche eine C_4 als Kuspidalkurve und eine dreifache C_2 als Doppelkurve hat. Dass ein solcher Fall existiert, ersieht man wohl am leichtesten, wenn man den reziproken Fall betrachtet, wo man als Kuspidalkurve eine C_6 erhält, welche auf einem K_2 belegen ist und vier Spitzen besitzt. Da die oskulierenden Ebenen in den Spitzen

den K_2 berühren müssen, so enthalten dieselben je noch eine andere Tangente. Tragen wir dies auf den ursprünglichen Fall über, so finden wir als ein charakteristisches Merkmal der C_4, dass die vier Tangenten derselben, welche der aus Trisekanten erzeugten Regelschar angehören, die C_4 noch in Punkten mit stationären Ebenen treffen.

Die R_4 kann in zwei R_2 zerfallen. Dies muss natürlich der Fall sein, wenn der lineare Komplex eine Regelschar enthält, welche aus Bisekanten der C_3 besteht. Die hinzukommende R_2 bekommt man dann in der folgenden Weise. Die Geraden der Leitschar zu der obigen R_2 entsprechen einander, wie mehrmals hervorgehoben worden ist, involutorisch in bezug auf den linearen Komplex. Da jede Gerade einen Punkt der C_3 enthält, bekommt man hier auch eine Involution für die C_3, und man erhält die gesuchte R_2, indem man die entsprechenden Punkte durch gerade Linien verbindet. Nun gibt es für zwei Involutionen ein gemeinsames Paar. Dies findet hier darin seinen Ausdruck, dass die beiden R_2 eine Gerade gemein haben. Die Anzahl der Involutionen sowie die Anzahl der R_2 mit den betrachteten Eigenschaften ist ∞^2. Man sieht leicht, dass man hier jede R_2 mit jeder anderen R_2 kombinieren kann. *Insbesondere kann die R_4 in eine doppelte R_2 degenerieren.* Es gibt ja ∞^2 lineare Komplexe, welche die erste R_2 enthalten, und zu jedem Komplexe gehört eine verschiedene zweite R_2. Eine doppelte R_2 erhält man dann, wenn die Doppelelemente bei der Involution in der Leitschar zu den beiden Punkten der C_3 gehören, wo Erzeugende der ersten R_2 die C_3 berühren. Für einen Punkt der C_3 berührt dann die Komplexebene die C_3 in einem anderen Punkte.

Für die Bisekantenregelfläche haben wir mithin die drei Möglichkeiten: R_4, $2\,R_2$, doppelte R_2. Diesen entsprechend haben wir für die Restdoppelkurve: C_4, $2\,C_2$, $[2\,C_2]$, wobei wir mit $[2\,C_2]$ bezeichnen, dass zwei doppelte Kegelschnitte unmittelbar auf einander folgen, so dass ein doppelter Berührungskegelschnitt herauskommt. Die Typen, in welche diese Untersuchung resultiert hat, sind somit die folgenden:

1) $C_2^3 + C_4$;
2) $C_2^3 + 2\,C_2$;
3) $C_2^3 + [2\,C_2]$.

Im Falle 2 haben die beiden doppelten Kegelschnitte einen Punkt gemeinsam, und den dreifachen Kegelschnitt müssen beide in je zwei Punkten schneiden. Man überzeugt sich nun leicht, dass, falls man als Leitkurven für eine Regelfläche drei Kegelschnitte nimmt, welche in den obigen Beziehungen zu einander stehen, so kommt eine R_6 vom Typus 2 heraus.

18. Nehmen wir jetzt an, dass die C_3 einen Punkt von L enthalten soll, so ist dieselbe *die Abbildung einer* R_5, für welche K einen doppelten Kegelschnitt bedeutet. Die drei Fälle der vorigen Nummer kehren wieder, und wir bekommen für die Doppelkurve erstens die drei Möglichkeiten: $C_2 + C_4$, $3\,C_2$, $C_2 + [2\,C_2]$. Wenn die R_4 hier in $2\,R_2$ oder eine doppelte R_2 zerfällt, so kann L zu der Leitschar einer R_2 gehören. Für die Doppelkurve erhält man hieraus: $[2\,C_2] + C_2$ und $[3\,C_2]$. Im letzteren Falle haben wir als Doppelkurve *einen doppelten Oskulationskegelschnitt.* Der Fall mit einem gewöhnlichen doppelten Kegelschnitte und einem doppelten Berührungskegelschnitt ergibt sich hier zweimal, da man für die Wahl von K zwei Möglichkeiten hat. Endlich kann L zu einer dem linearen Komplexe angehörenden Schar gehören, deren Linien die C_3 einfach treffen. Wir bekommen so Fälle, wo die R_5 eine einfache Leitgerade hat. Es gilt dann in der Leitschar, welche jetzt durch Bisekanten der C_3 erzeugt wird, eine Involution, deren Paare aus in bezug auf den Komplex konjugierten Linien bestehen. Die R_4 wird also durch die Verbindungsgeraden der auf entsprechenden Linien belegenen C_3-Punkte erzeugt. Entsprechen einander bei der Involution die beiden Linien, welche die C_3 berühren, so zerfällt die R_4 in zwei R_2. Wir bekommen somit hier zwei Typen von R_5 mit einer einfachen Leitgeraden, wobei wir für die Doppelkurve die Zerlegung in $C_2 + C_4$ bez. $3\,C_2$ gefunden haben.

Drei neue Typen von R_5 mit einem Doppelkegelschnitte erhält man, wenn man als Bildkurve eine Ebene C_3 nimmt, welche L in einem Punkte trifft. Man hat nämlich für die Wahl des Komplexpunktes der C_3-Ebene drei Möglichkeiten, indem man denselben ausserhalb der C_3, in einem einfachen Punkte oder im Doppelpunkte der C_3 nehmen kann. Im letzteren Falle vereinigen sich mit einer einfachen Leitgeraden zwei Torsalen, deren Torsalebenen zusammenfallen. Man erhält so einen Typus, der sich unter keinem der von H. A. Schwarz[1] aufgezählten Fälle einordnen lässt. Ich selbst habe die betreffende Möglichkeit erst bei dieser Gelegenheit bemerkt. Nehmen wir den reziproken Fall hinzu, *so haben wir also zwei zuvor nicht gegebene Typen von rationalen* R_5 *gefunden.*

Die beiden Fälle $C_2 + [2\,C_2]$ und $[3\,C_2]$ finden sich zwar auch nicht bei Schwarz. Dieselben sind aber schon in meiner Dissertation (p. 87) hergeleitet.

[1] J. f. Math. 67 (1866).

19. Die Entwicklungen der Nummer 17 sind durch Untersuchungen über die Doppeldeveloppable zu ergänzen. Man findet, dass dem dreifachen Kegelschnitte eine Doppeldeveloppable von der Klasse 4 entspricht. Die Restdoppeldeveloppable muss nämlich von der Klasse 6 sein und kann, den Fällen 17: 2 und 17: 3 entsprechend, in zwei verschiedene oder eine doppelte Developpable von der Klasse 3 zerfallen. Da nämlich eine Erzeugende die Restdoppelkurve in zwei Punkten trifft, so hat man von einem Punkte des dreifachen Kegelschnitts sechs zur Restdoppeldeveloppablen gehörenden Ebenen.

Wir wollen die Ebenen durch drei Linien bestimmen. Die Bedingung für eine solche Ebene ist offenbar, dass die beiden Erzeugenden, welche einem dritten begegnen, auf dem dreifachen Kegelschnitte zusammentreffen. Verbindet man nun die Bildpunkte von zwei derartigen Erzeugenden durch eine gerade Linie, so bekommt man eine Regelfläche, welche die C_3 als Doppelkurve enthält, also vom Grade 4. Wir bezeichnen dieselbe, welche nicht dem linearen Komplexe angehört, mit $\bar{R}_4$. Den Linien der $\bar{R}_4$, welche L schneiden, entsprechen Paare von Erzeugenden der R_6, welche auf K einander treffen. In solcher Weise finden wir also 4 Ebenen durch 3 Linien. Dieselben sind einfach für die Doppeldeveloppable der Klasse 4, doppelt für diejenige der Klasse 6. Die beiden Teile der Doppeldeveloppablen haben noch 4 Ebenen gemeinsam, den 4 Punkten entsprechend, wo die Restdoppelkurve C_4 die dreifache C_2 trifft.

In gewissen Fällen werden die 4 Ebenen durch 3 Linien durch *eine* 4 Linien enthaltende Ebene ersetzt. Die Bedingung hierfür findet man leicht, wenn man darauf Rücksicht nimmt, dass eine solche Ebene die R_6 noch in einem einfachen Kegelschnitt schneiden soll. Bei der Abbildung bekommt man ja hieraus eine Regelschar, deren Linien die C_3 einfach treffen. In der Leitschar, welche aus Bisekanten der C_3 besteht, hat man dann, wie bereits erwähnt, eine Involution, so dass die R_4 durch die Verbindungslinien der C_3-Punkte entsprechender Linien erzeugt wird. Die $\bar{R}_4$ reduziert sich folglich auf diese Leitschar, zwei mal genommen. Es ist unmittelbar ersichtlich, dass L von zwei in bezug auf den Komplex konjugierten Geraden der Schar getroffen wird. Andererseits genügt es ja, dass zwei Geraden der Schar von Bisekanten konjugiert sind, damit die Leitschar von einfachen Sekanten dem Komplexe angehöre. Wir bemerken noch, dass eine Ebene durch 4 Linien doppelt für die Doppeldeveloppable der Klasse 4 und vierfach für diejenige der Klasse 6 sein muss. Im Falle 3 kann eine Ebene durch 4 Linien offenbar nicht vorkommen. Die $\bar{R}_4$ wird ja dann die zur C_3 gehörige abwickelbare Fläche. Den Fall 2 bekommt man dagegen, wenn bei der Involution in der obigen Schar von Bisekanten die beiden Tangenten der C_3 einander entsprechen.

Enthält die Doppeldeveloppable einen dreifachen K_2, so bekommen wir nach den obigen Auseinandersetzungen für die Doppelkurve die folgenden drei Fälle, welche bez. zu den drei Typen der Nummer 17 reziprok sind:

1) $C_4 + C_6$;
2) $C_4 + 2\,C_3$;
3) $C_4 + [2\,C_3]$.

Hat die R_6 hier 4 dreifache Punkte, so sind diese Doppelpunkte für die C_6, einfache Punkte für die C_4 und in den Fällen 2 und 3 auch einfache Punkte für die C_3. Hat die R_6 einen vierfachen Punkt, was nur in den Fällen 1 und 2 möglich ist, so ist dieser Punkt vierfach für die C_6, doppelt für die C_4 und im Falle 2 auch Doppelpunkt für die beiden C_3, welche mithin ebene Kurven sein müssen. Die C_6 und die C_4 haben überdies noch vier f-Punkte gemeinsam, welche bei Zerlegung der C_6 in zwei C_3 zu je zwei sich auf diese C_3 verteilen. Die beiden C_3 treffen einander auch in einem f-Punkt.

Den Fall 2 in Nummer 17 mit einem einfachen Kegelschnitte können wir leicht direkt konstruieren. Wir nehmen als Leitkurven drei Kegelschnitte, C_2, $\overline{C}_2$ und $\overline{\overline{C}}_2$. Die beiden letzteren sollen einander nicht treffen, aber mit C_2 je zwei Punkte gemeinsam haben. Überdies soll $\overline{C}_2$ durch die Spitze eines K_2 gehen, auf welchem C_2 und $\overline{\overline{C}}_2$ belegen sind. Es entsteht eine R_6, für welche C_2 eine dreifache, $\overline{C}_2$ eine doppelte und $\overline{\overline{C}}_2$ eine einfache Kurve bedeuten. Als Restdoppelkurve erhält man einen vierten Kegelschnitt, der durch die Spitze des anderen K_2 mit derselben Eigenschaft gehen muss.

B. *Doppelkegelschnitt.*

20. Die Bildkurve wird jetzt eine C_4, welche zwei Punkte auf L besitzt. Ist die C_4 eine ebene Kurve, muss dieselbe auf L einen Doppelpunkt haben. Man erhält dann 4 Fälle, je nachdem der Komplexpunkt der Ebene ausserhalb der Kurve, auf einem einfachen Punkt, Doppelpunkt oder Berührungsknoten der Kurve liegt. Die beiden letzteren Möglichkeiten sind unter den singulären Fällen 17: 2 und 17: 3, δ in »Regelflächen I» berücksichtigt.

Den allgemeineren Fall, wo die C_4 nicht eben ist, können wir in 5 Unterfälle zerlegen.

a) Die C_4 hat einen Doppelpunkt ($= D$), der nicht auf L belegen ist. Für den Punkt D ist die Ebene durch die Tangenten ($=$ die D-Ebene) Komplexebene.

b) Der Doppelpunkt liegt auf L. Sonst wie im vorigen Falle.

c) Zum Unterschied vom Falle (a) ist hier die D-Ebene keine Komplexebene für den Punkt D.

d) Die Komplexebene für den Punkt D, der hier auf L liegt, ist eine andere als die D-Ebene.

e) Die C_4 ist von der zweiten Art.

Wenn wir die Bisekantenregelfläche ohne besondere Rücksicht auf die Lage in bezug auf L betrachten, existieren offenbar dieselben Möglichkeiten für (a) und (b), (c) und (d). Die Fälle (b) und (d), wo D auf L liegt, sind dadurch charakterisiert, dass die R_6 einen vierfachen Punkt hat. In den Fällen (a) und (b) sind die D-Tangenten Komplexlinien. Den Zweigen im Doppelpunkte entsprechen demnach Torsalen. Für sämtliche 5 Fälle ist es gemeinsam, dass die Bisekantenregelfläche die C_4 als dreifache Kurve enthält. Im Falle (e) ist diese Fläche eine R_9. Eine Trisekante kann ja die Fläche nur in den drei Punkten der C_4 treffen. In den Fällen (c) und (d), bez. (a) und (b) scheidet sich der Geradenbüschel in der Komplexebene durch den Doppelpunkt einmal bez. zwei mal aus, und wir bekommen eine R_8 bez. R_7. Betrachten wir eine die C_4 enthaltende F_2 und eine Gerade, welche der einen Regelschar dieser F_2 angehört, so trifft ja diese die C_4 in zwei Punkten und dazu noch zwei Linien der Leitschar, welche im Komplexe enthalten sind. In den Fällen (a) und (b) liegt aber eine von den letzteren Linien in der D-Ebene und gibt keinen Beitrag zu den Schnittpunkten mit der Fläche.

Wenn wir uns jetzt zunächst mit den Fällen (a) und (b) beschäftigen wollen, so finden wir, dass die R_7 immer rational sein muss. Wie soeben bemerkt wurde, enthält ja jede Regelschar, die aus Bisekanten der C_4 besteht, nur eine Erzeugende der R_7. Bei einer solchen Regelschar vereinigen die Erzeugenden je zwei Punkte der C_4, welche einander bei einer Involution entsprechen. Dabei wird ein entsprechendes Punktpaar in den Doppelpunkt verlegt. Eine Involution wird also durch den einem bestimmten Punkte zugeordneten Punkt vollständig bestimmt, woraus folgt, dass diese Involutionen ein rationales System bilden. Man versteht auch jetzt, dass, falls die R_7 eine doppelte Erzeugende besitzt, so muss die R_2, zu welcher diese gehört, ganz in der R_7 enthalten sein.

Eine Zerlegung der R_7 ist offenbar in keiner anderen Weise möglich als in $R_2 + R_5$. Die R_5 wird dann dadurch erzeugt, dass man die Punkte, welche auf in bezug auf den Komplex konjugierten Linien der zur R_2 gehörigen Leitschar belegen sind, durch gerade Linien verbindet. Entsprechen einander bei dieser Involution die beiden Linien, welche die C_4 berühren, so zerfällt die R_5 in $R_2 + R_3$. Hierzu kommt noch eine letzte Möglichkeit, indem die beiden R_2 zusammenfallen können. Als Bedingung hierfür findet man, dass die Berührungspunkte der obigen beiden Linien auf derselben Erzeugenden der ersten R_2 liegen. Soll letzteres der Fall sein, so muss die R_2 einer besonderen F_2 angehören. Projiziert man nämlich vom Doppelpunkte auf eine Ebene, so erhält man auf der Spur der D-Ebene eine Involution aus den durch D gehenden Erzeugendenpaaren der F_2, welche die C_4 enthalten. Die C_4 wird dabei auf einen Kegelschnitt projiziert, und die Punkte der Spurlinie, welche auf diesem Kegelschnitt liegen, bilden ein Paar der Involution. Auf derselben Linie hat man auch die Pol- und Polarinvolution in bezug auf dieses Paar, und das gemeinsame Paar dieser beiden Involutionen bestimmt die in Rede stehende F_2. Betreffend die Zusammensetzung der Bisekantenregelfläche haben wir mithin die 4 Möglichkeiten:

α) R_7;

β) $R_2 + R_5$;

γ) $2 R_2 + R_3$;

δ) $[2 R_2] + R_3$.

21. Da die D-Tangenten in den Fällen (a) und (b) Komplexlinien sind, so entsprechen denselben für die Doppelkurve der R_6 Torsalpunkte. Wir gehen in dieser Nummer näher auf den Fall (a) ein. Dann entspricht dem Punkt D eine doppelte Torsale, wobei die Torsalpunkte ausserhalb des Fundamentalkegelschnitts K liegen. Die Torsalebenen enthalten die K-Tangente und müssen also zusammenfallen. Wie die Doppelkurve sich auf dieser singulären Linie verhält, können wir leicht in dem Falle ablesen, wo die R_7 sich in $2 R_2 + R_3$ zerlegt. Die R_3 enthält offenbar die beiden D-Tangenten; durch den Punkt D geht aber noch zu jeder R_2 eine Erzeugende. Hierzu ist noch der Punkt zu beachten, den die singuläre Linie mit K gemeinsam hat. Ausser den beiden Torsalpunkten hat also die Doppelkurve auf dieser Linie noch drei Punkte. Für letztere Punkte müssen offenbar die Tangenten in der Torsalebene liegen. Diese Ebene schneidet die R_6 noch in einem einfachen Kegelschnitte. Die 8 Punkte, welche dieselbe mit der Restdoppelkurve gemeinsam hat, müssen also alle auf der singulären Linie

liegen, was mit den obigen Resultaten übereinstimmt. Wir bekommen auch Übereinstimmung mit den Ergebnissen, welche wir im 2. Abschnitt unserer vorhergehenden Arbeit gefunden haben, wo ja auch Doppeltorsalen mit gemeinsamer Ebene eine grosse Rolle spielten.

Zunächst nehmen wir an dass L zu keiner R_2 gehören soll. Die Fälle β, γ, δ zerlegen sich dann in zwei Unterfälle. Wenn L zur Leitschar einer R_2 gehört, bezeichnen wir die erhaltenen Fälle mit β_2, γ_2, δ_2. Hat L keine solche Lage, mögen die Bezeichnungen β_1, γ_1, δ_1 gelten. Wir finden, dass γ_2 und δ_1 denselben Typus bedeuten, der sich in verschiedener Weise abbilden lässt, weil man für die Wahl von K zwei Möglichkeiten hat, welche zum Falle (a) führen. Wir bekommen mithin 6 Typen, welche den Fällen α, β_1, β_2, γ_1, γ_2, δ_2 zugeordnet sind. Bezeichnen wir eine Doppeltorsale mit zusammenfallenden Ebenen mit $[\tau, \bar{\tau}]_E$, so lässt sich die Doppelkurve bei diesen Typen in der folgenden Weise zusammensetzen:

1) $[\tau, \tau]_E + C_2 + C_6$;
2) $[\tau, \tau]_E + 2\,C_2 + C_4$;
3) $[\tau, \bar{\tau}]_E + [2\,C_2] + C_4$;
4) $[\tau, \bar{\tau}]_E + 4\,C_2$;
5) $[\tau, \tau]_E + [2\,C_2] + 2\,C_2$;
6) $[\tau, \tau]_E + [3\,C_2] + C_2$.

Beim Typus 4 haben wir in der Doppelkurve $4\,C_2$. Einen anderen solchen Fall haben wir in Nummer 14 gefunden. Hier hat aber die C_2, welche der R_3 entspricht, andere Eigenschaften als die drei übrigen C_2. Letztere schneiden einander in 2 dreifachen Punkten der R_6. Nimmt man einen Punkt der C_4 auf L und die zwei ausserhalb L belegenen Punkte, welche in der zugehörigen Komplexebene liegen, so erhält man die Bilder derjenigen drei Erzeugenden, welche in einem solchen Punkte zusammenstossen. Die vierte C_2 geht durch die zwei Torsalpunkte der singulären Linie, welche ja als die noch übrigen dreifachen Punkte der R_6 aufzufassen sind. Ihre Ebene enthält also diese Linie. Der zugehörige Teil der Doppeldeveloppablen muss von der Klasse 3 sein; die C_2 geht ja nicht durch diejenigen dreifachen Punkte, wo drei verschiedene Erzeugende einander treffen. Diese C_2 geht durch die Schnittpunkte der Erzeugendenpaare, welche sich in den Ebenen der drei übrigen C_2 befinden. Wie wir wissen, ist für K dieser Punkt auf L abgebildet. Überdies hat die C_2 mit jeder der drei anderen C_2 einen f-Punkt gemeinsam. Indem der f-Punkt aufgehoben wird, kann sich die C_2 mit einer anderen C_2 vereinigen, so dass wir die Typen 1 und 2 erhalten. Dazu kommt noch ein Fall, wo keine doppelte C_2 auftritt, welche wir in der übernächsten Nummer betrachten wollen. Die drei anderen Zweige der Doppelkurve auf der singulären Linie verteilen sich beim Typus 4 auf die drei übrigen C_2. Die Existenz der Typen 3, 5 und 6 zeigt, wie diese Zweige zusammenrücken können.

Der Typus 4 lässt sich offenbar durch Spezialisierung aus dem elliptischen Typus 9: 5 erhalten. Was hier hinzukommt, ist, dass die drei C_2 eine gemeinschaftliche Sekante haben, für welche die Tangenten der C_2 in derselben Ebene liegen. Dieser Typus 4 ist noch durch 5 *Leitkegelschnitte* charakterisiert, nämlich eine einfache und 4 doppelte.

In den Fällen, wo L zu einer R_2 gehört, ist diese die Abbildung einer doppelten Leitgeraden. Wir erhalten auch hier 6 Typen und werden unten angeben, wie man dieselben in »Regelflächen I» wiederfindet. Nur die Fälle β, γ, δ kommen hier in Betracht. Für jede hat man zwei Möglichkeiten:

1) L gehört zu keinem anderen Teile der Bisekantenregelfläche als der R_2. 8: β, 8: γ, 11: β_2.

2) L gehört im Falle β auch zur R_5, in den Fällen γ und δ auch zur R_3. 10: β, 10: γ, 11: β_3.

22. Auch im Falle (b) entspricht dem Punkt D zwei zusammenfallende Torsallinien, wobei hier die Torsalpunkte sich auf K in einem für die R_6 vierfachen Punkt vereinigen. Da die D-Tangenten in der Komplexebene für D liegen, so müssen die Torsalen den Kegelschnitt K berühren. Im allgemeinen gehört L nicht zur R_7, und wir nehmen zuerst diesen Fall in Betracht. Es hindert dann nichts, dass, falls eine R_2 als Teil der R_7 auftritt, L zur Leitschar dieser R_2 gehören kann. In diesem Falle wird offenbar die Ordnung der Restdoppelkurve durch die singuläre Linie nur um eins erniedrigt. Die beiden Torsalebenen dürfen mithin nicht zusammenfallen. Wie leicht zu sehen ist, muss man hier *die reziproken Fälle zu den in der vorigen Nummer erhaltenen Typen* finden. Bezeichnet man zwei zusammenfallende Torsallinien bei Vereinigung der Torsalpunkte mit $[\tau, \bar{\tau}]_P$, so bekommen wir für die Doppelkurve die folgenden 6 Typen:

1) $[\tau, \bar{\tau}]_P + C_2 + C_7$;

2) $[\tau, \bar{\tau}]_P + 2\, C_2 + C_5$;

3) $[\tau, \bar{\tau}]_P + [2\, C_2] + C_5$;

4) $[\tau, \bar{\tau}]_P + 3\, C_2 + C_3$;

5) $[\tau, \bar{\tau}]_P + [2\, C_2] + C_2 + C_3$;

6) $[\tau, \bar{\tau}]_P + [3\, C_2] + C_3$.

Beim Typus 4 berühren die drei C_2, von denen ja eine beliebige als K genommen werden kann, einander und die singuläre Linie im doppelten Torsalpunkte. Die Torsalpunkte gehören zu Zweigen der C_3, welche also einen Doppelpunkt besitzt und eine ebene Kurve sein muss. Die C_3 trifft jede C_2 noch in einem f-Punkte. Von 4 kann man zu den übrigen Typen ganz wie in der vorigen Nummer übergehen.

Wenn L zur R_7 gehört, wird die Ordnung der Restdoppelkurve durch die singuläre Linie noch um eins erniedrigt. Man versteht hieraus, dass in diesem Falle die beiden zusammenfallenden Torsallinien nicht nur gemeinsame Torsalpunkte sondern auch gemeinsame Torsalebenen haben müssen. Die fragliche Linie kann also hier wirklich als mit zwei doppelten Erzeugenden äquivalent betrachtet werden. Wenn eine R_3 als Teil der R_7 auftritt, kann L nicht zu dieser gehören. Die Erzeugenden der R_3 im Doppelpunkte sind ja die D-Tangenten, und die Gerade L, welche nur zwei Punkte der C_4 enthält, kann mit keiner von diesen zusammenfallen.

Erstens kann also L im Falle α zur R_7 und im Falle β zur R_5 gehören. Wir bekommen dann zwei Fälle wieder, welche schon in Nummer 15 hergeleitet sind. Für die Doppelkurve haben wir $[2\,g_2] + C_2 + C_6$ bez. $[2\,g_2] + 2\,C_2 + C_4$.

In den Fällen β, γ, δ bleibt die Möglichkeit übrig, dass L zu einer als Teil der R_7 auftretenden R_2 gehören kann. Wir bekommen hier 4 Typen, weil im Falle β L auch Schnittlinie der R_2 und der R_5 sein kann. Die fraglichen Typen haben wir in anderer Weise in »Regelflächen I» hergeleitet. Dieselben finden sich dort unter den Bezeichnungen: $12{:}\,\beta_4$, $12{:}\,\beta_5$, $12{:}\,\gamma_4$, $12{:}\,\beta_6$.

23. Die in den Nummern 21 und 22 gegebenen Typen sind offenbar Spezialisierungen von zwei allgemeineren zu einander reziproken Typen mit denselben Singularitäten für die Doppellinie aber ohne Zerfallen der Restdoppelkurve. Man hat demnach für die Doppelkurve:

1) $[\tau, \bar{\tau}]_E + C_8$;
2) $[\tau, \bar{\tau}]_P + C_9$.

Der Fall 1 lässt sich übrigens nach unserer Methode direkt behandeln. Die R_6 enthält ja in der doppelten Torsalebene einen einfachen Kegelschnitt, den man als K wählen kann. Die Bildkurve wird dann eine C_5, welche von L in zwei Punkten berührt wird. Die Komplexebenen und die oskulierenden Ebenen dieser Punkte stehen in dem Zusammenhange, dass die Komplexebene für einen Punkt im anderen Punkte oskuliert. Aus den Singularitäten ersieht man schon, dass die C_8 und die C_9 rational sein müssen. Die C_8 besitzt ja ausserhalb der singulären Linie zwei dreifache Punkte. Projiziert man von einem solchen, so erhält man eine C_5, für welche die Spur des anderen dreifachen Punktes einen dreifachen Punkt und die Spuren der drei Erzeugenden durch das Zentrum drei Doppelpunkte liefern. Andererseits soll die C_9 im doppelten Torsalpunkte fünf Zweige haben, von denen drei einander berühren. Die Projektion von diesem Punkte aus gibt also eine C_4 mit einem dreifachen Punkte. In den Fällen 21: 1 und 22: 1 ist K die C_2, und diese C_2 soll die Restdoppelkurve in einem f-Punkte treffen. Es wird hier K auf die aus Bisekanten der C_4 erzeugte Regelschar abgebildet, für welche L eine Leitlinie bedeutet. Vom fraglichen f-Punkt rührt dabei die gemeinsame Erzeugende dieser Schar und der R_7 her. Wenn die C_2 sich mit der Restdoppelkurve vereinigt, wird somit nur ein f-Punkt aufgehoben, was mit den obigen Resultaten in Übereinstimmung steht, dass die C_8 und die C_9 rational sind.

Hiermit wird auch die Anzahl der Typen von R_6 erschöpft, bei denen Doppellinien von den fraglichen singulären Arten auftreten. Für den Fall 1 z. B. wäre die einzige neue denkbare Möglichkeit, dass die C_8 in zwei C_4 zerfiele. Die Verteilung der beiden dreifachen Punkte und der fünf zur singulären Linie gehörenden Zweige auf diese beiden C_4 erweist sich aber als unmöglich. Im Falle 2 treffen die Ebenen des Büschels durch die singuläre Linie die Doppelkurve bloss in einem beweglichen Punkte. Man ersieht schon hieraus, dass ein Zerfallen der Doppelkurve nur durch Aussonderung von Kegelschnitten bewirkt werden kann.

24. Wir betrachten jetzt den Fall (c). Die R_8, welche hier als Bisekantenregelfläche der C_4 im linearen Komplexe auftritt, hat durch D zwei doppelte Erzeugende nach den beiden anderen Punkten der C_4 in der Komplexebene dieses Punktes und eine einfache Erzeugende in der Schnittlinie der Komplexebene und der D-Ebene. Als Bedeutung hiervon für die Doppelkurve der R_6 hat man zwei Doppelpunkte, wo die dem Punkt D entsprechende doppelte Erzeugende von zwei einfachen Erzeugenden getroffen wird, und einen einfachen Punkt, wo die beiden Berührungsebenen in der Doppelerzeugenden zusammenfallen. Den anderen Punkt mit der letzteren Eigenschaft hat man auf dem Kegelschnitt K.

Auf mehrere Weisen kann man zeigen, dass die R_8 oder die derselben entsprechende Doppelkurve der R_6 im allgemeinen vom Geschlechte 1 ist. Benutzt man hier die Formel (6) für ein zerfallendes Gebilde, so bekommt man $P=3-f$. Nun zerfällt die Doppelkurve in drei Teile, die Doppelerzeugende, den Kegelschnitt K und die C_7, welche der R_8 entspricht. Andererseits hat man vier f-Punkte, von denen zwei auf der g_2 liegen. Die C_7 und K treffen einander in den anderen beiden, denen die beiden Erzeugenden der R_8 entsprechen, welche L in nicht auf C_4 belegenen Punkten schneiden. Bekanntlich bedeutet $P=-1$ hier, dass die C_7 vom Geschlechte 1 wird.

Wenn in speziellen Fällen die R_8 sich zerlegen lässt, so leuchtet ohne weiteres ein, dass entweder eine R_2 oder eine R_3 als Bestandteil auftreten muss. Umgekehrt kann man ja die Bildkurve auf einer dem linearen Komplexe angehörenden R_2 oder R_3 wählen. Es bleibt die Frage, ab die R_8 noch weiter in $R_2 + 2R_3$ zerfallen kann. Wir können davon ausgehen, dass die R_8 eine R_2 als Teil enthält. Zu dieser R_2 gehört eine Leitschar, deren Linien paarweise in bezug auf den linearen Komplex konjugiert sind. Indem man die Punkte der C_4, welche auf konjugierten Linien liegen, durch gerade Linien verbindet, erhält man die R_6, welche den noch übrigen Bestandteil der R_8 bildet. Wählt man nun den linearen Komplex in solcher Weise, dass in der Leitschar die beiden Tangenten der C_4 einander entsprechen, so hat die R_6 keine Torsalpunkte auf der C_4 und muss in zwei R_3 zerfallen. Diese R_3, welche offenbar nicht in eine doppelte R_3 zusammenfallen können, haben als gemeinsame Erzeugende die Verbindungsgerade der Berührungspunkte der oben besprochenen Tangenten in der Leitschar. Es ist auch leicht zu sehen, dass die R_2 mit der R_6 zwei Erzeugende und mit jeder R_3 eine Erzeugende gemeinsam haben muss. Diese gemeinschaftlichen Erzeugenden sind die Abbildungen von f-Punkten, wo die entsprechenden Teile der Doppelkurve einander schneiden.

Für das Verhältniss der Bisekantenregelfläche haben wir somit die folgenden 4 Möglichkeiten:

α) R_8;

β) $R_3 + R_5$;

γ) $R_2 + R_6$;

δ) $R_2 + 2R_3$.

Wir nehmen zunächst an, dass L nur als einfache Linie in der Bisekantenregelfläche eingeht und in den Fällen γ und δ nicht zur R_2 gehört. Bei β hat man zwei Unterfälle β_1 und β_2, je nachdem L zur R_5 oder R_3 gehört. Ebenso bei γ und δ, indem in den Unterfällen γ_2 und δ_2, in Gegensatz zu γ_1 und δ_1, L

zur Leitschar der R_2 gehören soll. Wir bekommen demnach 7 Typen, welche wir in der Reihenfolge α, β_1, β_2, γ_1, γ_2, δ_1, δ_2 anordnen. Die Doppelkurve hat bei diesen Typen die folgende Zusammensetzung:

1) $g_2 + C_2 + C_7$;
2) $g_2 + C_2 + C_3 + C_4$;
3) $g_2 + 2\,C_2 + C_5$;
4) $g_2 + 2\,C_2 + C_5$;
5) $g_2 + [2\,C_2] + C_5$;
6) $g_2 + 3\,C_2 + C_3$;
7) $g_2 + [2\,C_2] + C_2 + C_3$

Wünscht man den gegenseitigen Zusammenhang dieser Typen zu verstehen, so ist es vorteilhaft von 6 auszugehen. Die C_2, welcher eine R_3 entspricht, trifft die g_2 in den Schnittpunkten mit zwei einfachen Erzeugenden. Die g_2 liegt also in ihrer Ebene. Da diese C_2 nicht durch die beiden dreifachen Punkte der R_6 geht, wo drei verschiedene Erzeugende zusammenstossen, so ist der entsprechende Teil der Doppeldeveloppablen von der Klasse 3. Die anderen beiden C_2 treffen einander in eben diesen Punkten, und die zugehörigen Teile der Doppeldeveloppablen haben auch die Klasse 2, was auch für die C_3 der Fall sein muss. Jedes Paar der 4 Kurven mit Ausnahme der beiden letzteren C_2 trifft einander in einem f-Punkt. Zwei solche Kurven können sich vereinigen, indem der f-Punkt aufgehoben wird, und wir bekommen die Typen 2, 3, 4. Dabei haben 3 und 4 scheinbar dieselbe Zusammensetzung der Doppelkurve. Der Unterschied gründet sich darauf, dass im Falle 4 die beiden C_2 einander in den beiden nicht auf der g_2 belegenen dreifachen Punkte schneiden, im Falle 3 dagegen nur einen f-Punkt gemeinsam haben. Der Typus 4 ist auch zu sich selbst reziprok. Dasselbe gilt von den Typen 1, 5, 6 und 7. Dagegen sind die Typen 2 und 3 zu einander reziprok. Hierbei ist doch der Vorbehalt zu machen, dass vielleicht die reziproken R_6 statt 4 dreifache Punkte einen vierfachen Punkt haben könnten, was wir erst bei der Behandlung des Falles (d) klarlegen werden.

Die obigen 7 Typen sind offenbar Spezialisierungen eines allgemeineren Typus mit der Doppelkurve $g_2 + C_9$. Auf diesen werden wir im folgenden Abschnitt zurückkommen.

Wir nehmen jetzt an, dass L eine Doppellinie der R_8 sein soll, doch so, dass in den Fällen γ und δ L nicht zur R_2 gehört. In der Annahme liegt, dass die Ebene von K noch eine doppelte Erzeugende enthalten muss. Es handelt sich also hier um R_6 mit zwei Doppellinien, welche einem linearen Komplexe angehören müssen. Andere Typen als solche, welche wir bereits im vorigen Abschnitt hergeleitet haben, sind mithin hier nicht zu finden. Drei Möglichkeiten gibt es hier. Im Falle α kann L eine doppelte Erzeugende der R_8 sein; zwei solche Linien sind ja erforderlich, damit die R_8 zerfalle. Hierzu kommt, dass in den Fällen β und δ L eine gemeinsame Erzeugende der R_5 und der R_3 bez. der beiden R_3 sein kann. In solcher Weise bekommen wir die Typen 14: 3, 14: 4 und 14: 5 wieder.

Zuletzt mag in den Fällen γ oder δ L eine Erzeugende der R_2 sein. Der Fall γ bietet zwei Möglichkeiten, indem L entweder nur zur R_2 gehören kann oder gemeinsame Erzeugende der R_2 und der R_6 ist. Die entsprechenden Typen finden sich in »Regelflächen I» unter den Bezeichnungen 7: β und 9: β. Im Falle δ haben wir 3 Möglichkeiten. L kann entweder nur zur R_2 gehören oder gemeinsame Erzeugende der R_2 und einer R_3 sein oder endlich gemeinsame Erzeugende der R_2 und beider R_3 sein. Hier handelt es sich um die Typen 7: δ, 9: δ und 10: γ in »Regelflächen I».

25. Im Falle (d) hat die R_6 einen vierfachen Punkt. Im allgemeinen hat D die Bedeutung von zwei Erzeugenden, welche von verschiedenen Punkten des Kegelschnitts K ausgehen und in einem gemeinsamen Punkt von K zusammentreffen. Von diesem letzteren Punkte gehen zwei andere Erzeugende aus, welche ihre Bilder in den beiden in der Komplexebene von D belegenen Punkten der C_4 haben. Doch entspricht dem Punkte D eine doppelte Erzeugende, wenn die D-Ebene die Gerade L enthält. Dies steht damit im Zusammenhange, dass in diesem Falle L zur R_8 gehört, so dass die Ordnung der Restdoppelkurve um eins erniedrigt wird.

Im allgemeinen Falle hat mithin die R_6 keine doppelte Erzeugende, und wir bekommen, den Fällen α, β, γ, δ entsprechend, die folgenden Möglichkeiten für die Doppelkurve:

1) $C_2 + C_8$;
2) $C_2 + C_3 + C_5$;
3) $2\,C_2 + C_6$;
4) $2\,C_2 + 2\,C_3$.

Wenn die R_8 sich in R_2 und R_6 zerlegen lässt, gehören zur R_6 als doppelte Erzeugende die Verbindungsgeraden der beiden C_4-Punkte in der Komplexebene von D mit dem Punkt D. Dieselben dürfen natürlich nicht mit L zusammenfallen. Zerfällt die R_6 in zwei R_3, verteilen sich jene Doppellinien als einfache Erzeugende auf diese R_3. Es leuchtet also ein, dass L im Falle β nur zur R_5 und in den Fällen γ und δ nur zur R_2 gehören kann. In den letzteren beiden Fällen bekommen wir zwei Typen mit doppelter Leitgerade, welche sich in »Regelflächen I» als $12:\beta_1$ und $12:\delta_1$ wiederfinden lassen. Für die Typen, zu denen die Fälle α und β hier Anlass geben, werden die Doppelkurven durch die folgende Zusammensetzung charakterisiert:

5) $g_2 + C_2 + C_7$;
6) $g_2 + C_2 + C_3 + C_4$.

Wenn wir besonders den Fall 4 in Betracht nehmen, so finden wir, dass alle 4 Doppelkurven durch den vierfachen Punkt der R_6 gehen. Die beiden C_3 haben dort Doppelpunkte und sind folglich ebene Kurven. Letzteres ersieht man auch daraus, dass die Leitgeraden der entsprechenden R_3 die Gerade L treffen. Die doppelte Leitgerade geht ja durch D, und die einfache Leitgerade liegt in der zugehörigen Komplexebene. Jedes Paar von den 4 Doppelkurven trifft in einem f-Punkt zusammen. Dies gilt auch für die beiden C_2. Dem zugehörigen f-Punkt entspricht die Erzeugende der R_2, welche L in einem nicht auf der C_4 belegenen Punkt trifft. Durch Beseitigung von f-Punkten können die 4 Doppelkurven sich in allen möglichen Weisen vereinigen. Oben ist doch von vornherein angenommen, dass K ein selbständiger Teil der Doppelkurve sein soll.

Da mit einer g_2 hier nur die Typen 5 und 6 auftreten, so kann nur für 1 und 3 von den Typen der vorigen Nummer eine Ebene durch 4 Linien existieren. Dies ist auch leicht direkt zu zeigen. Wenn es eine solche Ebene gibt, so müssen die beiden Erzeugenden, welche die g_2 schneiden, auch einander treffen, was natürlich auf K geschehen muss. Dies findet seinen Ausdruck darin, dass die Verbindungsgerade der beiden C_4-Punkte, welche in der Komplexebene von D liegen, die Gerade L treffen. Ist dies der Fall, und enthält die R_8 eine R_2, so muss L zu dieser R_2 gehören, d. h. die obige Verbindungsgerade gehört zur Leitschar der R_2. Für die Bestimmung der R_2 genügt ja eine einzige Linie, und diejenige, welche durch D geht, liegt in der Komplexebene und trifft also die oben besprochene Gerade. Wenn die R_8 bei einer Ebene durch 4 Linien für die R_6 in $R_3 + R_5$ zerfällt, so muss L zur R_3 gehören. Die oben besprochene Verbindungsgerade von 2 C_4-Punkten trifft ja die R_5 in diesen Punkten doppelt und dazu noch in der durch D gehenden einfachen Erzeugenden. Diese Linie kann also nicht noch einen Schnittpunkt mit der R_5 auf L haben.

Wir finden mithin, dass unter den Typen der vorigen Nummer 4, 5, 6 und 7 immer zu sich selbst reziprok sind. Im allgemeinen gilt dasselbe für den Typus 1; doch ist dieser in einem speziellen Falle zu dem Typus 5 dieser Nummer reziprok. Der Typus 3 der vorigen Nummer ist im allgemeinen zum Typus 2 dortselbst und in einem speziellen Falle zum Typus 6 dieser Nummer reziprok. Unter den Typen dieser Nummer kann 6 nie zu sich selbst reziprok sein. Eine Ebene durch 4 Linien kann man sich nämlich hier nur so denken, dass dieselbe die Doppellinie und die beiden einfachen Linien, welche im vierfachen Punkte zusammenstossen, enthielte. Wäre aber dies der Fall, so liesse sich ein linearer Komplex konstruieren, zu welchem die R_6 gehören sollte. Letzteres ist unmöglich, weil der Doppelkurve C_2 eine Doppeldeveloppable von der 3. Klasse entspricht und umgekehrt. Dagegen kann, wie wir in Nummer 13 hervorgehoben haben, eine Regelfläche vom Typus 5 dieser Nummer einem linearen Komplexe angehören, so dass die reziproke Fläche von demselben Typus ist. Den Beweis hierfür haben wir in unserer Dissertation (p. 70) gegeben.

26. Es bleibt noch übrig den Fall (e) zu diskutieren. Die C_4 besitzt hier eine Schar von Trisekanten. In einem speziellen Falle kann diese Schar zum linearen Komplex gehören und zählt dann dreifach in der Bisekantenregelfläche ($= R_9$). Da es ∞^2 lineare Komplexe mit der angegebenen Eigenschaft gibt, so kann die R_3, welche aus der R_9 noch übrig bleibt, irgend welche von den $\infty^2 R_3$ sein, welche sich aus Bisekanten der C_4 erzeugen lassen. Dies lässt sich übrigens auch aus dem Umstande beweisen, dass zwei Erzeugende einer solchen R_3 der Schar von Trisekanten angehören müssen. Die R_3 kann somit auch vom Cayleyschen Spezialfalle sein, und dabei kann man die Leitlinie als Fundamentalgerade L nehmen. Wir bekommen in solcher Weise die beiden Typen 17: 2 und 17: 3 mit einem dreifachen Kegelschnitte wieder.

In anderen Fällen enthält der lineare Komplex zwei Trisekanten der C_4. Diese werden offenbar dreifache Erzeugende der R_9 und liefern die Abbildungen der beiden dreifachen Punkte der R_6, welche nicht auf K liegen. Bei den Typen 21: 4, 5, 6 und 24: 3, 6, 7 gibt es einen Doppelkegelschnitt in einer Ebene durch die doppelte Erzeugende. Nimmt man diesen Kegelschnitt als K, so bekommt man eine Abbildung, welche auf den Fall (e) führen muss. Da wir von der Doppelkurve schon Kenntnis haben, so verstehen wir, dass die R_9 in diesen Fällen zerlegt werden muss, und zwar für 24: 3 in $R_3 + R_6$, für 21: 4 und 24: 6 in $3 R_3$, für 21: 5 und 24: 7 in $[2 R_3] + R_3$ und für 21: 6 in $[3 R_3]$. Hiermit sind aber die noch übrigen denkbaren Zerlegungsmöglichkeiten der R_9 erschöpft. Nun ist aber zu bemerken, dass man hier L bei festgehaltener Bisekantenregelfläche in andere Lagen überführen kann. Dann ändert sich auch die R_6, so dass andere Typen erhalten werden als diejenigen in den Nummern 21 und 24, von denen wir ausgegangen sind. Für die Bisekantenregelfläche haben wir mithin noch die folgenden 5 Möglichkeiten:

α) R_9;

β) $R_3 + R_6$;

γ) $3\,R_3$;

δ) $[2\,R_3] + R_3$;

ε) $[3\,R_3]$.

Der Fall ε kommt aber hier nicht eigentlich in Betracht. Wie man nämlich auch L nimmt, so gelangt man immer zu 21: 6 zurück. Der Fall γ führt zu 24: 6 bez. 21: 4, wenn L gemeinsame Erzeugende für $2\,R_3$ bez. alle $3\,R_3$ ist. Rücken dann die zwei ersteren R_3 zusammen, so dass der Fall δ herauskommt, so bekommen wir 24: 7 bez. 21: 4. Endlich erhält man im Falle β 24: 3, wenn L gemeinsame Erzeugende der R_6 und der R_3 ist.

Für solche Lagen, dass L einfache Erzeugende der Bisekantenregelfläche wird, bekommt man somit neue Typen. Dazu kommt noch, dass im Falle α die R_9 eine doppelte Erzeugende haben kann ohne zu zerfallen. Wählt man diese für L, so haben wir einen Unterfall α_2, wobei also der allgemeinere Fall als α_1 bezeichnet wird. Die R_9 ist ja im allgemeinen vom Geschlechte 1. Die entsprechende Doppelkurve der R_6 trifft den Doppelkegelschnitt K in $3\,f$-Punkten, welche auf die 3 Erzeugenden abgebildet werden, die L in nicht auf der C_4 belegenen Punkten schneiden. Eine doppelte Erzeugende entsteht in der Weise, dass für zwei C_4-Punkte die Komplexebenen die C_4 jedesmal im anderen Punkte berühren. Dabei verschwinden 4 Torsalen, so dass das Geschlecht um eins erniedrigt wird. *Eine* solche Doppellinie macht also nur die R_9 rational.

Der Fall β zerlegt sich in drei Unterfälle. Für β_1 gehört L zur R_6 und für β_2 zur R_3, doch so, dass, wenn die R_3 zum Cayleyschen Spezialfalle gehört, und dabei L mit der Leitlinie zusammenfällt, man einen dritten Unterfall β_3 erhält.

Denkt man sich im Falle β zu gegebener C_4 eine bestimmte R_3, so hat man noch unter ∞^1 linearen Komplexen zu wählen. Die Bedingung ist ja nur, dass die Leitlinien in bezug auf den Komplex zu einander konjugiert sind, und diese

Bedingung findet auch ihren Ausdruck im CAYLEYschen Spezialfalle. Nun findet man, dass *für zwei dieser Komplexe die R_6 in zwei R_3 zerfällt,* so dass man von β zum Falle γ übergeht. Wenn die R_9 in $3\,R_3$ zerlegt wird, so müssen allen drei R_3 die zwei Trisekanten der C_4 gemeinsam sein, die dem Komplex angehören. Die doppelte Leitgerade einer R_3 muss aber jede von diesen Trisekanten in einem Punkte der C_4 treffen, und als Erzeugende der R_3 verbindet die Trisekante die zwei übrigen auf ihr belegenen Punkte der C_4. Da jede R_3 eine Involution unter den Punkten der C_4 definiert, so schneiden sich zwei R_3 in noch einer Erzeugenden, die dem gemeinsamen Paare der beiden Involutionen entspricht. Wir gehen jetzt von einer bestimmten R_3 aus und nehmen als doppelte Leitlinie für eine zweite R_3 eine Gerade durch zwei Punkte der C_4, welche auf den zur ersten R_3 gehörigen Trisekanten liegen, doch nicht auf der Leitgeraden. Diese Leitlinie trifft die erste R_3 in noch einem Punkte, und die durch diesen Punkt gehende Erzeugende muss offenbar beiden R_3 gemeinsam sein. Nun kann man den linearen Komplex so bestimmen, dass dieselbe noch eine vierte Erzeugende der zweiten R_3 enthält. Diese R_3 muss dann vollständig dem Komplexe angehören. Man ersieht, dass die doppelte Leitgerade der dritten R_3 die zwei noch übrigen Punkte der C_4 auf den Trisekanten verbindet. Es geht auch hervor, dass nach Festlegung der ersten R_3 die Leitlinien der beiden letzteren R_3, und also die R_3 selbst, sich in zwei Weisen bestimmen lassen. Der Fall γ zergliedert sich in zwei Unterfälle γ_1 und γ_2, wobei für γ_2 die Gerade L Leitlinie einer zum CAYLEYschen Spezialfalle gehörenden R_3 ist.

Wenn beide Trisekanten die C_4 berühren, so dass keiner von den Berührungspunkten auf der Leitlinie der ersten R_3 liegt, fallen die beiden letzteren R_3 zusammen, und wir bekommen den Fall δ. Liegen andererseits die Berührungspunkte auf der Leitgeraden kann einer von den letzteren R_3 sich mit der ersten R_3 vereinigen. Da es vier die C_4 berührende Trisekanten gibt, so gelangen wir bei gegebener C_4 im allgemeinen bei 6 verschiedenen linearen Komplexen zum Falle δ. Diese fallen aber alle zusammen, wenn die C_4 zwei stationäre Tangenten hat, und man erhält den Fall ε aber keinen Fall δ. Beim CAYLEYschen Spezialfalle treffen einander die Tangenten in den beiden Punkten der C_4, welche auf der Leitlinie liegen. Da zwei Trisekanten zu einander windschief sind, kann im Falle δ die doppelte R_3 nie zu diesem Spezialfalle gehören. Für die einfache R_3 ist es aber möglich. Wir denken uns in diesem Falle von einem auf der Leitlinie belegenen Punkt der C_4 dieselbe auf eine Ebene projiziert. Die Spuren der durch das Zentrum gehenden Erzeugenden der F_2, auf welcher die C_4 liegt, seien

O_1 und O_2. Die Spur P des Zentrums liegt dann auf der Geraden $O_1 O_2$. Als Projektion erhält man eine C_3, welche eine Spitze in O_1 hat. Durch O_2 soll eine Tangente der C_3 gehen, welche die C_3 noch in einem Punkte trifft, dessen Tangente durch P geht. Dies lässt sich immer verwirklichen, indem man zuerst P wählt und dann in geeigneter Weise O_2 auf der Geraden $O_1 P$ bestimmt. Hier haben wir wieder zwei Unterfälle δ_1 und δ_2. Bei δ_2 gehört die einfache R_3 zum Cayleyschen Spezialfallle und hat L als Leitlinie.

27. Insgesamt haben wir also 9 Möglichkeiten erhalten, die wir mit α_1, α_2, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, δ_1, δ_2 bezeichnet haben. Wir bekommen somit 9 neue Typen, bei denen die Doppelkurve, wenn die obige Reihenfolge beibehalten wird, sich in der folgenden Weise zusammensetzen lässt:

1) $C_2 + C_8$;
2) $g_2 + C_2 + C_7$;
3) $C_2 + C_3 + C_5$;
4) $2\,C_2 + C_6$:
5) $[2\,C_2] + C_6$;
6) $2\,C_2 + 2\,C_3$;
7) $[2\,C_2] + 2\,C_3$;
8) $2\,C_2 + [2\,C_3]$;
9) $[2\,C_2] + [2\,C_3]$.[1]

Hat die C_4 zwei stationäre Tangenten, so kann die zugehörige abwickelbare Fläche zum linearen Komplexe gehören. Wir sind dann im Falle β. Die R_6 wird dann auch eine abwickelbare Fläche. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten. Berührt L die C_4, so ist die Kuspidalkurve eine C_5 mit zwei Spitzen, und die Doppelkurve besteht aus einem Kegelschnitte und einer C_3. Dieser Typus ist zu sich selbst reziprok. Die Kuspidalkurve liegt demnach auf einem K_2. Wir haben hier einen Fall, der wenig bekannt zu sein scheint. Doch findet sich derselbe in unserer Dissertation (p. 102). Im anderen Falle schneidet L die C_4 in zwei verschiedenen Punkten. Die Kuspidalkurve wird dann eine C_6 mit 4 Spitzen, und die Doppelkurve besteht aus zwei Kegelschnitten. Unter den 4 Spitzen entsprechen zwei den stationären Tangenten und die beiden anderen den Tangenten in den Punkten, welche die C_4 auf L hat. Die reziproke Fläche hat als Kus-

[1] Es ist uns in unserer Dissertation nicht gelungen, die Existenzfrage für den Typus 9 zu erledigen.

pidalkurve eine C_4 mit einem Doppelpunkte. Es handelt sich also hier um einen sehr bekannten Typus.

Beim Typus 6 gehen beide C_3 durch die 4 dreifachen Punkte der R_6. Diese 4 Punkte verteilen sich in zwei Paare, durch welche je eine C_2 geht, so dass die beiden C_2 einander in keinem solchen Punkte treffen. Überdies trifft jedes Paar von den 4 Kurven einander in einem f-Punkte. Wir ersehen hieraus, wie man unter Beseitigung von f-Punkten zu Typen mit weniger Zerlegung der Doppelkurve gelangen kann.

Da für 4, 6 und 8 die doppelten C_2 in verschiedener Weise rücksichtlich der dreifachen Punkte als in den Nummern 21 und 24 orientiert sind, so erfolgt auch hier der Übergang zu doppelten Berührungskegelschnitten in ganz anderer Weise. Dies muss nämlich hier so geschehen, dass die 4 dreifachen Punkte paarweise sich nähern, so dass dieselben am Ende unmittelbar auf einander folgen. Reziprok gilt es für Berührungsdoppelkurven C_3, dass die 4 Ebenen durch 3 Linien paarweise zusammenrücken. Was die reziproken R_6 betrifft, so sind 7 und 8 zu einander und 9 zu sich selbst reziprok. Die Typen 3 und 6 sind im allgemeinen zu sich selbst, doch in speziellen Fällen zu den Typen 2 und 4 der Nummer 25 reziprok.

28. Für die Typen 1, 2, 4 und 5 gibt es aber keinen Bestandteil der Doppeldeveloppablen von der Klasse 2, und die reziproken Flächen müssen aus diesem Grunde neue Typen liefern. Dieselben werden durch die folgende Zusammensetzung der Doppelkurve charakterisiert:

1) $C_3 + C_7$;
2) $g_2 + C_3 + C_6$;
3) $2\,C_3 + C_4$;
4) $[2\,C_3] + C_4$.

Als ein Spezialfall vom Typus 3 kann, wie in der vorigen Nummer angedeutet wurde, eine abwickelbare Fläche auftreten. Als Kuspidalkurve hat man eine C_4 mit einem Doppelpunkte, der einen vierfachen Punkt für die Fläche darstellt. Es gibt noch eine abwickelbare R_6, die statt 4 dreifacher Punkte einen vierfachen Punkt besitzt. Die zugehörige Kuspidalkurve haben wir in »Regelflächen I», p. 367 gegeben.

Beim Typus 4 dieser Nummer können die 4 dreifachen Punkte der R_6 nicht durch einen vierfachen Punkt ersetzt werden. Die reziproke Fläche, welche wir im Typus 5 der vorigen Nummer haben, würde ja dann eine Ebene durch 4

Linien besitzen. Dies würde erfordern, dass zwei in bezug auf den Komplex konjugierte Bisekanten der C_4 die Gerade L schneiden sollten. Letzteres ist aber unmöglich, da in diesem Falle L die Leitlinie einer dem Komplex angehörenden R_3 ist, welche sämtliche L treffende Bisekanten enthält.

Dagegen treten bei den Typen 1, 2, 3 dieser Nummer Untertypen mit einem vierfachen Punkte auf. Diese stellen sich also neben 1, 2, 3, 4 von Nummer 25, welche ja auch Untertypen von 1, 3, 4, 6 der vorigen Nummer bedeuten. In der Tat kann noch mehr speziell in den genannten 4 Fällen der Nummer 25 eine Ebene durch 4 Linien existieren, so dass die Doppelkurve der reziproken Fläche sich auch wie die ursprüngliche durch einen sechsfachen Punkt, und zwar im vierfachen Punkte der R_6, auszeichnet. Es genügt, wenn wir dies für den am meisten spezialisierten Fall mit der Doppelkurve $2\,C_2 + 2\,C_3$ nachweisen. Da die Bisekantenregelfläche eine R_2 als Teil enthält, so soll die C_4 auf einer F_2 liegen, für welche das eine System von Erzeugenden dem Komplexe angehört. Diese F_2 können wir als gegeben annehmen und auch den Schnittpunkt mit L fixieren, wo D liegen soll. Wir nehmen dann zwei beliebige in bezug auf den Komplex konjugierte Linien, welche L treffen, und setzen fest, dass die C_4 durch die 4 Schnittpunkte dieser Linien mit der F_2 gehen soll. Projizieren wir nun die C_4 von D aus auf eine Ebene, so erhalten wir einen Kegelschnitt durch 4 Punkte. Den gegebenen Bedingungen wird somit durch einen Büschel von C_4 genügt. Die Leitschar der R_2 wird hierbei auf einen Geradenbüschel projiziert, wobei die Linien, die beim Komplexe einander entsprechen, Paare einer Involution bilden. Man findet nun leicht, dass für zwei C_4 des Büschels die Linien der Leitschar, welche die C_4 berühren, Paare der genannten Involution sein müssen. Dann zerfällt auch die R_8 in $R_2 + 2\,R_3$, und wir sind im Falle, wo die Doppelkurve aus $2\,C_2 + 2\,C_3$ besteht.

Beim Typus 2 der vorigen Nummer ist die C_7 rational und hat zwei dreifache Punkte. Dieselbe trifft die g_2 in vier Punkten, und durch zwei von diesen geht die ergänzende C_2. Sucht man für diese C_7 die Trisekantenregelfläche, so ergibt sich unmittelbar, dass für dieselbe die C_7 vierfache Kurve sein muss. Man versteht hieraus, dass die fragliche R_7 aus zwei verschiedenen R_6 von dem betrachteten Typus besteht. Die g_2 ist gemeinsam, aber die ergänzende C_2 für die zweite R_6 schneidet offenbar die g_2 in den anderen beiden Punkten der C_7. Für den Typus 2 dieser Nummer oder die reziproke R_6 gilt, falls die R_6 4 dreifache Punkte besitzt, der ganz entsprechende Satz, so dass die Trisekantenregelfläche der Doppelkurve C_6 aus zwei verschiedenen R_6 besteht. In diesem Falle gibt es aber einen Untertypus mit einem vierfachen Punkte. Dieser Punkt ist für die C_6 ein dreifacher Punkt. Für ihre Trisekantenregelfläche erweist sich jetzt die C_6 bloss als dreifache Kurve. Darum enthält letztere Regelfläche ausser der R_6 nur eine R_3. Zur Bestätigung hiervon lässt sich nachweisen, dass auf einer R_3 C_6 mit den in Rede stehenden Eigenschaften existieren. Der dreifache Punkt muss natürlich auf der doppelten Leitgeraden liegen, und man hat zu erwarten, dass von den drei Zweigen zwei der einen und der dritte der anderen Schale der R_3 angehören sollen. Wir betrachten jetzt die bekannte Abbildung der R_3 auf eine Ebene, wobei die einfache Leitlinie auf einen Punkt A und die doppelte auf eine Gerade l abgebildet werden, so dass koinzidierenden Punkten verschiedener Schalen Paare einer Involution auf l entsprechen. Eine C_3, welche nicht durch A geht und auf l in einem Punktpaar der Involution einen Doppelpunkt und einen einfachen Punkt hat, ist dann das Bild einer C_6 von der gesuchten Beschaffenheit.

29. Die vorangehenden Entwicklungen lassen sich auch auf die R_5 mit einem einfachen Kegelschnitt anwenden. Nach einem bekannten Satze gibt es einen solchen Kegelschnitt bei allen rationalen R_5 ausser denjenigen, welche eine einfache oder doppelte Leitgerade besitzen. Eine ebene Bildkurve erhält man, wenn entweder die Leitgerade vierfach ist oder eine Erzeugende mit einer dreifachen Leitgeraden koinzidiert. Diesen Fall lassen wir hier ausser Betracht.

Da die Bildkurve eine C_4 mit drei Punkten auf L sein soll, so erhalten wir einen Unterfall, wo die C_4 einen Doppelpunkt hat, der auf L liegen muss. Die Bedeutung hiervon ist, dass zwei unter den drei Erzeugenden, welche in der Ebene des Kegelschnitts belegen sind, zwar von verschiedenen Punkten ausgehen, aber den zweiten Schnittpunkt mit dem Kegelschnitt gemeinsam haben. Dieser Fall trifft ein, wenn der dreifache Punkt der R_5 auf dem einfachen Kegelschnitte liegt, gibt aber zu keinen besonderen Typen Veranlassung.

Wir diskutieren also nur den Fall, wo man als Bildkurve eine C_4 der zweiten Art hat. Die Unterlage für die Diskussion haben wir in Nummer 26 gegeben. Erstens kann die R_9 in eine dreifache R_2 und eine R_3 zerfallen. Wir bekommen dann zwei Fälle mit einer dreifachen Leitgeraden ($= d_3$), wobei im zweiten Falle L auch zur R_3 gehört. Für die Doppelkurve hat man:

1) $d_3 + C_3$;

2) $d_3 + g_2 + C_2$.

Es bleiben noch die 5 Möglichkeiten α, β, γ, δ, ε der Nummer 26 übrig. Bei α kann man einen Unterfall erhalten, indem zwei Erzeugende in der Ebene des Kegelschnitts in eine Doppelerzeugende zusammenrücken. Die Bedingung hierfür, dass für zwei Punkte der C_4 auf L die Komplexebene die Tangente im anderen Punkte enthält, lässt sich offenbar erfüllen. Man bekommt demnach die 6 Fälle:

1) C_6;
2) $g_2 + C_5$;
3) $C_2 + C_4$;
4) $3\,C_2$;
5) $C_2 + [2\,C_2]$;
6) $[3\,C_2]$.

Hat die Bildkurve C_4 zwei stationäre Tangenten, so kann die Zugehörige abwickelbare Fläche zum Komplexe gehören. Die beiden im Komplexe enthaltenen Trisekanten der C_4 müssen dann eben die stationären Tangenten sein; also ist L eine von denselben. Man bekommt so als einen Spezialfall von 3 den einzigen Typus von abwickelbaren R_5.

V.

Ergänzende Betrachtungen.

30. In den letzten beiden Abschnitten haben wir sämtliche Typen rationaler R_6 hergeleitet, bei denen die Doppelkurve sich so zerlegen lässt, dass wenigstens ein Teil von jeder Erzeugenden in nur einem Punkte getroffen wird. In gewissen Fällen haben wir die Typen der R_6 sogar vollständig bestimmt, nämlich bei einer dreifachen Erzeugenden oder zwei Doppelerzeugenden oder endlich einer einzelnen Doppelerzeugenden, die aus zwei Torsalen zusammengesetzt wird, für welche entweder die Torsalebenen oder die Torsalpunkte zusammenfallen. Für die etwa noch übrigen Typen kann also höchstens eine gewöhnliche Doppelerzeugende vorkommen. Als die allgemeinsten Typen ohne oder mit nur einer Doppelerzeugenden hat man

1) C_{10};
2) $g_2 + C_9$.

Dabei ist für 2 der Fall, wo die Doppeldeveloppable sich auf eine dreifache Developpable dritter Klasse reduziert, als einen besonderen Typus zu betrachten, wie wir bereits in Nummer 22 von »Regelflächen I» hervorgehoben haben. Die fraglichen beiden Typen sind auch unter den Regelflächen vertreten, die einem linearen Komplexe angehören. Man versteht auch, dass die in den Nummern 24, 25 und 27 hergeleiteten Typen, wo von vornherein die Existenz eines Doppelkegelschnitts vorausgesetzt wurde, als Spezialisierungen der obigen beiden Typen zu betrachten sind.

Übrig bleibt noch die Möglichkeit, dass die Doppelkurve zwei Teile enthält, welche von jeder Erzeugenden in zwei Punkten getroffen werden. Als hierbei denkbare Typen hat man die 4 folgenden:

3) $C_4 + C_6$;
4) $2\, C_5$;
5) $g_2 + C_4 + C_5$;
6) $[2\, C_5]$.

Sämtliche sechs Typen in dieser Nummer sind zu sich selbst reziprok. Die Feststellung, ob der Typus 6 mit zwei unmittelbar auf einander folgenden doppelten C_5 existiert, bietet Schwierigkeiten und gelang mir in meiner Dissertation nicht. Die Typen 3, 4 und 5 haben schon in bekannten abwickelbaren Flächen Repräsentanten; dabei die Typen 3 und 5 in zwei zu einander reziproken Weisen, je nachdem die eine oder andere Doppelkurve in eine Kuspidalkurve übergeht. Ist für 3 die C_6 Kuspidalkurve, so muss dieselbe 4 Rückkehrpunkte besitzen und auf einer eigentlichen F_2, also nicht auf einem K_2, belegen sein. Im reziproken Falle ist die Kuspidalkurve eine C_4 von der zweiten Art ohne stationäre Tangente. Unter 5 gehört dagegen der Fall, wo als Kuspidalkurve eine C_4 mit einer stationären Tangente auftritt. In dem hierzu reziproken Falle ist die Kuspidalkurve eine C_5 mit zwei Spitzen und einer stationären Tangente. Wenn endlich 4 in eine abwickelbare Fläche übergeht, so hat man als Kuspidalkurve eine auf einer eigentlichen F_2 belegene D_5 mit zwei Spitzen und ohne stationäre Tangente.[1] Durch Spezialisierungen erhält man andere Typen von abwickelbaren R_6. Betreffend dieselben sei auf die Nummern 14, 17, 27 und 28 der gegenwärtigen Arbeit verwiesen.

Die Typen 1—5 zergliedern sich in Unterabteilungen, indem die Regelfläche entweder einen vierfachen oder vier dreifache Punkte besitzen kann, sowie, dualistisch entsprechend, entweder eine Ebene durch vier Linien oder vier Ebenen durch

[1] Auf einen Unterfall hiervon, wo die Kuspidalkurve einen mit zwei Spitzen und einem Doppelpunkte äquivalenten dreifachen Punkt besitzt, haben wir in Nummer 28 aufmerksam gemacht.

drei Linien. Vier Kombinationen sind hier möglich, welche auch alle bei den Typen 1—4 vorkommen. Für den Typus 5 lässt sich aber die Kombination mit einem vierfachen Punkte und einer Ebene durch vier Linien nicht verwirklichen.

31. In den Typen 3—6 haben wir Beispiele von Regelflächen, welche sich in solcher Weise herstellen lassen, dass man zwischen den Punkten einer rationalen Kurve eine involutorische (2, 2)-Korrespondenz herstellt und die entsprechenden Punkte durch gerade Linien verbindet. Da man die Kurve birational auf einen Kegelschnitt abbilden kann, so besteht hier ein Zusammenhang mit dem Problem der PONCELETschen Polygone. Zu jeder rationalen Kurve bekommt man auf diese Weise ∞^5 Regelflächen, die den ∞^5 symmetrischen Relationen

$$f(\alpha, \beta) = 0$$

entsprechen, wo $f(\alpha, \beta)$ vom zweiten Grade in den Parametern α und β ist. Es ist nur eine Bedingung erforderlich, damit $f(\alpha, \beta)$ in zwei Faktoren ersten Grades zerfalle, welche gewöhnliche Involutionen definieren. Unter den oberwähnten ∞^5 Regelflächen lassen sich also ∞^4 zerlegen. Zwei Involutionen ersten Grades haben bekanntlich ein gemeinsames Paar, und umgekehrt zerfällt $f(\alpha, \beta)$ immer, wenn zwei Werte α, β einander gegenseitig doppelt entsprechen.

Ist die rationale Kurve eine C_4 der zweiten Art, so werden sämtliche ∞^5 Regelflächen R_6. Es liegen dann vier Paare entsprechender Punkte auf Trisekanten der C_4. Durch den dritten Punkt der C_4 auf einer solchen Trisekante gehen offenbar drei Erzeugende der R_6. In diesen Punkten haben wir mithin die vier dreifachen Punkte der R_6, und die Restdoppelkurve, welche im allgemeinen eine C_6 ist, hat in denselben Doppelpunkte. Entspricht auf einer Trisekante ein Punkt der C_4 den beiden übrigen, so wird diese Trisekante eine doppelte Erzeugende der R_6.

Ist die rationale Kurve eine C_4 mit D, so definiert die (2, 2)-Korrespondenz eine R_6, wenn nur nicht die Zweige durch den Doppelpunkt einander entsprechen. Da mithin durch D vier Erzeugende gehen, so ist dieser Punkt ein vierfacher Punkt der R_6, und die C_6, welche als Restdoppelkurve auftritt, hat hier vier Zweige, so dass je zwei von diesen den einzelnen Zweigen der C_4 zugeordnet werden. Sieht man die Sache unter dem Gesichtspunkte, dass die R_6 eine (2, 2)-Korrespondenz unter den Punkten dieser C_6 definiert, so findet man, dass im Punkte D die Zweige des einen Paares denjenigen des anderen entsprechen. Soll die R_6 unzerlegbar sein, so kann dieselbe nur in solcher Weise eine Doppelerzeugende bekommen, dass die beiden Punkte der C_4, welche mit einander im Doppelpunkte koinzidieren, einen und denselben entsprechenden Punkt haben.

Hat die R_6 als Doppelkurve eine C_6 mit $4\,D$, so sollen die beiden durch jeden Punkt D gehenden Zweige einander entsprechen. Dies gibt für die (2, 2)-Korrespondenz 4 Bedingungen. Die C_6 ist also Doppelkurve für $\infty^1\,R_6$. Es gibt einen Fall, wo sämtliche diese $\infty^1\,R_6$ zerfallen. Wir betrachten eine C_6, welche auf einem K_2 liegt und in der Spitze einen D sowie drei anderwärts belegene D besitzt. Die Erzeugenden des K_2 bestimmen dann auf der C_6 die Paare einer Involution. Unter diesen Paaren gehören drei zu der nicht auf der K_2-Spitze belegenen D. Die (2, 2)-Korrespondenz und die Involution sollen also mindestens 3 gemeinsame Paare besitzen. Die Anzahl der gemeinsamen Paare ist aber bekanntlich nur 2, falls nicht die (2, 2)-Korrespondenz die Involution als Teil enthält. In diesem Falle tritt also der K_2 als Teil in sämtlichen $\infty^1\,R_6$ auf. Die restierende Schar von $\infty^1\,R_4$ oder die entsprechende Schar von ∞^1 Involutionen auf der C_6 ist dadurch bestimmt, dass man ein entsprechendes Paar im Doppelpunkte auf der K_2-Spitze hat.

Auch in einem anderen Falle treten Ausnahmeverhältnisse ein, nämlich wenn für die C_6, welche auf einer eigentlichen F_2 oder auf einem K_2 belegen sein kann, drei D durch einen dreifachen Punkt ($= D_3$) ersetzt werden. Alle Tangenten im dreifachen Punkt liegen dann in derselben Ebene, der D_3-Ebene, was im allgemeinen nicht für einen dreifachen Punkt einer Raumkurve der Fall ist. Die Bedingungen für die drei einzelnen D übertragen sich sofort auf den D_3, dass die drei Zweige durch denselben einander gegenseitig entsprechen sollen. Bei dem oben angedeuteten Zusammenhange mit den Ponceletschen Polygonen liegt dann der Schluss nahe, dass die Erzeugenden der R_6 sich in geschlossenen Tripeln anordnen lassen. In der Tat ist hier die Schar der R_6 dadurch charakterisiert, dass eine dreifache Leitgerade sich in der D_3-Ebene bewegt. Wie man leicht sieht, kommt eine Doppelerzeugende hinzu, welche durch den noch übrigen vierten D geht.

32. Wir betrachten jetzt den Fall, wo die R_6 eine auf einer eigentlichen F_2 belegene C_5 mit $2\,D$ als Doppelkurve besitzt. Bei der (2, 2)-Korrespondenz sollen die Zweige in den beiden D einander entsprechen. Da dies zwei Bedingungen macht, erhält man zu derselben C_5 $\infty^3\,R_6$. Die fragliche Korrespondenz hat mit der anderen (2, 2)-Korrespondenz, bei welcher entsprechende Paare auf einer Trisekante der C_5 liegen, vier Paare gemeinsam. Da die Bedingung für

die beiden D zwei von diesen absorbiert, so bleiben nur zwei übrig, welche zu zwei gemeinsamen Erzeugenden der F_2 und der R_6 Anlass geben. Die dritten Punkte der C_5 auf diesen beiden Trisekanten werden offenbar dreifache Punkte der R_6 und haben für die Restdoppelkurve, welche ja im allgemeinen eine andere C_5 ist, die Bedeutung von $2D$. Soll es nun möglich sein, dass die beiden doppelten C_5 unmittelbar aufeinander folgen, so müssen die neuen D mit den beiden ursprünglichen koinzidieren. Die gemeinsamen Erzeugenden der F_2 und der R_6 gehen also dann durch die beiden D. Wir bezeichnen mit P_1 und P_2 die beiden Punkte der C_5, welche in einem D koinzidieren, und mit Q den Punkt, welche die der Trisekantenschar angehörende Gerade, die mit D inzident ist, noch ausschneidet.[1] Nach den obigen Bedingungen sollen bei der (2, 2)-Korrespondenz P_1 und P_2 ein Paar und entweder P_1 und Q oder P_2 und Q ein anderes Paar bilden. Insgesamt bekommt man für die beiden D vier Bedingungen, so dass es sich jetzt bloss um eine Schar von $\infty^1 R_6$ handelt.

Soll nun die C_5 eine Berührungsdoppelkurve der R_6 sein, so muss dieselbe Ebene die beiden durch einen Punkt der Kurve gehenden Erzeugenden und die Tangente im Punkte enthalten. Für Q bestimmen nun die Tangente und die Erzeugende durch D die Berührungsebene der F_2. Man bekommt demnach für den anderen Punkt, der mit Q in der (2, 2)-Korrespondenz ein Paar bildet, zwei Möglichkeiten. Derselbe muss nämlich auf einer von den beiden Erzeugenden der F_2 liegen, welche den Punkt Q als Schnittpunkt haben. Von diesen Erzeugenden gehört eine zu einer Schar R_2 von Bisekanten der C_5, und wir bezeichnen mit R den anderen Punkt der Kurve, welchen dieselbe enthält. Hat man nun in Q und R ein Paar der (2, 2)-Korrespondenz, so hat letztere mit der Involution, deren Paare auf den Erzeugenden der R_2 liegen, *drei* Paare gemeinsam, nämlich noch diejenigen, welche zu den beiden D gehören. Die (2, 2)-Korrespondenz muss mithin die Involution als Teil enthalten. Hiermit ist äquivalent, dass die R_6 in die R_2 und eine R_4 zerlegt wird. Für die R_4 hat man hier vier Möglichkeiten, da ja für Q der entsprechende Punkt entweder P_1 oder P_2 sein kann, und man eine ähnliche Wahl für den anderen D hat. Es gibt aber noch die Möglichkeit, dass Q sowohl P_1 als P_2 als entsprechende Punkte bei der (2, 2)-Korrespondenz hat. Diese Korrespondenz hat dann mit der anderen (2, 2)-Korrespondenz, für welche entsprechende Punkte auf derselben Trisekante der C_5 liegen,

[1] Des Raumersparnisses wegen gehen wir nicht auf die Modifikationen ein, welche nötig sind, wenn entweder D in eine Spitze übergeht oder eine Tangente im D-Punkte mit der Erzeugenden der F_2 zusammenfällt.

mehr als vier Paare gemeinsam. Dieselben müssen also zusammenfallen und die R_6 in die dreimal gezählte Schar von Trisekanten degenerieren.

Eine C_5 mit zwei D kann auch auf einem K_2 belegen sein. Die C_5 geht dann einfach durch die K_2-Spitze. Untersucht man, ob eine solche C_5 Berührungsdoppelkurve einer R_6 sein kann, so erhält man als Resultat den dreifach gezählten K_2. Die Erzeugenden des K_2 verbinden die entsprechenden Punkte einer Involution. Auf diese Weise erhält man den K_2 ein mal. Als Perspektivkegel von der Spitze zählt derselbe zwei mal.

33. Soll es also wirklich eine C_5 geben, welche als Berührungsdoppelkurve einer R_6 auftreten kann, so muss diese C_5 einen dreifachen Punkt besitzen. Für die R_6 muss dieser Punkt einen vierfachen Punkt bedeuten. Da die reziproke Fläche offenbar von demselben Typus sein muss, so hat die R_6 auch eine Ebene durch vier Linien. In dieser Ebene besitzt die R_6 einen einfachen Kegelschnitt, den wir als Fundamentalkegelschnitt K wählen können. Wir können also die Transformation anwenden, welche den Entwicklungen des vorigen Abschnitts zu Grunde liegt, und bekommen als Bildkurve eine C_5, die vier Punkte auf der Fundamentalgeraden L hat. Zu dieser C_5 gibt es noch eine andere Quadrisekante, den vier Erzeugenden entsprechend, welche im vierfachen Punkt zusammenstossen. Es ist bekannt, dass eine C_5 mit zwei Quadrisekanten auf einer F_2 liegen muss. Dabei treffen die Erzeugenden des einen Systems die C_5 in je vier Punkten und diejenigen des anderen Systems in nur je einem Punkte. Übrigens ist es ja leicht dies direkt zu beweisen. Wenn die vier Linien in einer Ebene vom vierfachen Punkt der R_6 ausgehen, so schliesst sich die andere Gerade aus der Schar der Quadrisekanten unmittelbar an L. Die R_6 gehört dann zu einem linearen Komplexe.

Soll nun die R_6 als Doppelkurve [2 C_5] haben, so muss für jeden Punkt der Bildkurve die Komplexebene dieselbe in zwei anderen Punkten berühren. Fällt einer von diesen Punkten mit dem Ausgangspunkte zusammen, so hat die Komplexebene dortselbst drei (oder fünf) Punkte mit der Kurve gemeinsam. Da die Ordnung der Bildkurve 5 ist, so umhüllen diese Komplexebenen eine abwickelbare Fläche von der Klasse 5. Diese Fläche muss in der Doppeldeveloppablen der Bildkurve enthalten sein. Nach den Cayleyschen Formeln hat man 8 als Rang der Bildkurve, und jede Tangente schneidet folglich 4 andere. Bei dem Teil der Doppeldeveloppablen, von welchem oben die Rede war, wird aber eine Tangente nur von zwei anderen getroffen. Es entsteht also die Bedingung, dass die Doppeldeveloppable der Bildkurve zerfallen muss. Hier scheint es natürlich zu vermuten, dass dies in zwei Teile sein muss, welche beide von der Klasse 5 sind. Nach den CAYLEYschen Formeln hat man doch im allgemeinen 12 als Klasse der Doppeldeveloppablen. Hat aber die Bildkurve 2 hyperstationäre Tangenten, so wird die Klasse um 2 erniedrigt und also nur 10. Da man in diesem Falle leicht bestätigt, dass die Doppeldeveloppable in zwei Teile von der Klasse 5 zerfällt, so liegt der Schluss nahe, dass bei $[2\ C_5]$ als Doppelkurve der R_6 die Bildkurve eine C_5 mit 2 hyperstationären Tangenten sein muss.

In der Tat ist dies auch der Fall, wie wir jetzt beweisen wollen. Es soll in der Schar der Quadrisekanten sechs geben, welche die Bildkurve berühren. Unter diesen werden wenigstens vier von denjenigen beiden absorbiert, welche zum Komplexe gehören. Man folgert nämlich leicht aus den Bedingungen, dass eine solche Linie die Bildkurve höchstens in zwei verschiedenen Punkten treffen kann. Da bekommt man drei Möglichkeiten. Erstens kann die Linie eine hyperstationäre Tangente und also mit *drei* einfachen Tangenten äquivalent sein. Für den Berührungspunkt hat man dann die oskulierende Ebene als Komplexebene. Zum Komplexe gehört dann auch die durch den Punkt gehende Erzeugende der F_2, welche die Bildkurve einfach schneidet. Die zweite Möglichkeit ist, dass die Linie die Bildkurve in zwei Punkten einfach berührt. Für jeden von diesen Punkten muss man als Komplexebene die oskulierende Ebene haben. Es gehen also durch diese Punkte die beiden dem Komplexe angehörenden Erzeugenden der F_2, welche die Bildkurve einfach schneiden. Drittens kann die Linie eine gewöhnliche stationäre Tangente sein; die Komplexebenen für die auf der Linie belegenen Punkte der Bildkurve berühren dann nicht, wie in den beiden vorigen Fällen, die F_2 in den Punkten. Sind nun die dem Komplexe angehörenden Quadrisekanten nicht beide hyperstationäre Tangenten, so muss es wenigstens noch eine andere solche Linie geben, welche die Bildkurve berührt. Diese Linie muss offenbar in der Komplexebene eines Punktes P der Bildkurve belegen sein, der nicht mit der Linie inzident ist, und man versteht hieraus, dass die Linie in zwei verschiedenen Punkten berühren muss, so dass es eine andere solche Linie nicht geben kann. Die Erzeugende durch P, welche die Bildkurve einfach schneidet, muss dann zum Komplexe gehören. Der Komplex muss aber noch eine andere Erzeugende derselben Schar enthalten. Diese muss offenbar durch einen Punkt der Bildkurve gehen, der auf einer zum Komplexe gehörenden Quadrisekante belegen ist. Letztere Linie kann offenbar in diesem Falle keine hyperstationäre Tangente sein und muss also die Bildkurve in zwei verschiedenen

Punkten berühren. Dann würden wir aber auf den Widerspruch stossen, dass der Komplex noch zwei Erzeugende der F_2 aus der die Bildkurve einfach schneidenden Schar enthalten sollte. Wir bekommen mithin das erwarterte Resultat, dass die Bildkurve zwei hyperstationäre Tangenten haben muss, die zum Komplexe gehören sollen.

34. Andererseits gehört eine abwickelbare Fläche, für welche als Kuspidalkurve eine C_5 mit zwei hyperstationären Tangenten auftritt, zu einem linearen Komplexe. Nimmt man diesen als Fundamentalkomplex und als Fundamentalgerade L die eine hyperstationäre Tangente, so hat man die Abbildung einer abwickelbaren R_6, welche den Fundamentalkegelschnitt K einfach enthält. Für diese Fläche ist offenbar die Fundamentalebene eine hyperstationäre Ebene. Der anderen hyperstationären Tangente der Bildkurve entspricht ein vierfacher Punkt der abwickelbaren R_6, in welchem die Kuspidalkurve zwar einen dreifachen Punkt, aber doch nur einen Zweig, haben soll. Es muss dann möglich sein die Kuspidalkurve durch die Parameterentwicklung

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\alpha^2} = \frac{z}{\alpha^5} = \frac{w}{1} \tag{1}$$

darzustellen. Für $\alpha = 0$ haben wir die hyperstationäre Ebene $z = 0$ und für $\alpha = \infty$ den dreifachen Punkt $x = y = w = 0$.

Da nun in der vorigen Nummer die beiden hyperstationären Tangenten der Bildkurve zum linearen Komplexe gehören, so liegt der Schluss nahe, dass, falls eine R_6 mit $[2\,C_5]$ als Doppelkurve existiert, diese C_5 eben dieselben Singularitäten wie die Kuspidalkurve oben haben und also die Darstellung (1) zulassen muss. Den Beweis, den ich hierfür geben will, habe ich sofort nach dem Erscheinen meiner Dissertation gefunden. Doch war es mir damals noch unbekannt, dass sich $[2\,C_5]$ als Doppelkurve einer R_6 nicht noch auf andere Weisen realisieren lässt.

Als Bedingung haben wir, dass die durch einen beliebigen Punkt der C_5 gehenden beiden Erzeugenden der R_6 eine Ebene bestimmen sollen, welche die Tangente enthält. In der Ebene liegt dann noch eine dritte Linie, welche die C_5 nochmals schneidet. Offenbar besteht zwischen dem Anfangspunkt und Endpunkt dieser dritten Linie eine ein-eindeutige Beziehung, welche sich durch eine Projektivität im Parameter α ausdrücken lassen muss. Dabei werden natürlich $\alpha = 0$ und $\alpha = \infty$ Koinzidenzpunkte, so dass man für die Projektivität

$$\alpha' = k\alpha \tag{2}$$

bekommt. Bezeichnen wir nun mit β den Parameterwert für den anderen Endpunkt einer Erzeugenden der R_6, so ergibt sich die Bedingung

$$\begin{vmatrix} 1, & \alpha, & \alpha^2, & \alpha^5 \\ 0, & 1, & 2\alpha, & 5\alpha^4 \\ 1, & k\alpha, & k^2\alpha^2, & k^5\alpha^5 \\ 1, & \beta, & \beta^2, & \beta^5 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Nach Beseitigung von unwesentlichen Faktoren erhalten wir hieraus

$$\beta^2 + (k+2)\beta\alpha + (k^2 + 2k + 3)\alpha^2 = 0. \tag{4}$$

Setzen wir $\beta = \lambda\alpha$, so ergibt sich hieraus

$$\lambda^2 + (k+2)\lambda + k^2 + 2k + 3 = 0. \tag{5}$$

Den zwei λ-Werten, welche man hier bekommt, entsprechen im allgemeinen verschiedene Regelflächen, und nur dann dieselbe Regelfläche, wenn die beiden λ-Werte zu einander invers sind. Also hat man

$$k^2 + 2k + 2 = 0 \tag{6}$$

als Bedingung für $[2\,C_5]$ als Doppelkurve. *Eine Kurve (1) ist somit Berührungsdoppelkurve für zwei verschiedenen R_6, welche doch nicht reelle Gestalt annehmen können.*

Zur Ergänzung wollen wir untersuchen, wann zwei zur Regelfläche, die durch die Projektivität $\alpha' = \lambda\alpha$ definiert wird, gehörenden Erzeugenden mit den Endpunkten α, $\lambda\alpha$ bez. β, $\lambda\beta$ einander schneiden. Wir bekommen die Bedingung

$$\begin{vmatrix} 1, & \alpha, & \alpha^2, & \alpha^5 \\ 1, & \lambda\alpha, & \lambda^2\alpha^2, & \lambda^5\alpha^5 \\ 1, & \beta, & \beta^2, & \beta^5 \\ 1, & \lambda\beta, & \lambda^2\beta^2, & \lambda^5\beta^5 \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Nach Beseitigung der Faktoren $\alpha - \beta$, $\alpha - \lambda\beta$, $\lambda\alpha - \beta$, erhält man hieraus

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\lambda^2 + \lambda + 1) + \alpha\beta(\lambda + 1)^2 = 0. \tag{8}$$

Aus (5) hat man, wenn auch (6) gilt,

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} + k + 2 = 0. \tag{9}$$

Setzt man in (8) $\beta = \mu\alpha$, $\lambda + \frac{1}{\lambda} + \varkappa + 2 = 0$, so ergibt sich

$$(\varkappa + 1)(\mu^2 + 1) + \varkappa\mu = 0. \tag{10}$$

Nun hat man

$$(\varkappa + 1)(\varkappa + 2) - \varkappa = \varkappa^2 + 2\varkappa + 2. \tag{11}$$

Ist $\varkappa$ also eine Wurzel von (6), so lässt sich (10) durch

$$\mu^2 + 1 + (\varkappa + 2)\mu = 0 \tag{12}$$

ersetzen. Die Lösungen für μ werden demnach λ und $\frac{1}{\lambda}$. Eine Erzeugende α, $\lambda\alpha$ trifft also im allgemeinen zwei andere Erzeugende in nicht auf der C_5 belegenen Punkten. Diese Punkte gehören zu der zweiten C_5, welche als Doppelkurve der Regelfläche auftritt. Für die speziellen λ-Werte, welche durch (5) und (6) bestimmt werden, schliesst sich diese zweite C_5 unmittelbar an die erste C_5 an.

35. In »Regelflächen I», Nummer 16 haben wir 87 als die Anzahl der Typen von rationalen R_6 mit einer Leitgeraden angegeben, wobei von den Fällen, die einer linearen Kongruenz angehören, abgesehen wird. Da wir in Nummer 16 dieser Arbeit zwei neue Typen gefunden haben, so soll 89 die richtige Anzahl sein.

Dortselbst wurde auch 55 als die Anzahl der Typen rationaler R_6 ohne Leitgerade angegeben. Von diesen wurden 3 in »Regelflächen I», Nummer 22 behandelt. Für die übrigen 52 sei auf die folgenden Nummern in der vorliegenden Arbeit verwiesen:

14: 1—6;
17: 1—3;
19: 1—3;

21: 1—6;
22: 1—6;
23: 1, 2;
24: 1—7;
27: 1—9;
28: 1—4;
30: 1—6.

Bei dieser Unterscheidung von Typen haben wir nicht auf die Möglichkeiten, dass die R_6 einen vierfachen Punkt oder eine Ebene durch vier Linien besitzen kann, Rücksicht genommen. Doch haben wir es im Texte versucht auch diese Fragen klarzulegen.

Die in den Nummern 21, 22 und 23 aufgeführten 14 Typen charakterisieren sich durch eine singuläre Doppelerzeugende, indem dieselbe aus zwei Torsalen besteht, welche entweder gemeinsame Torsalebene oder gemeinsamen Torsalpunkt haben. Unter diesen haben 6, nämlich 21: 3, 5, 6 und 22: 3, 5, 6, entweder einen doppelten Berührungskegelschnitt oder einen doppelten Oskulationskegelschnitt. Berührungsdoppelkurven kommen auch bei 10 anderen Typen vor, nämlich 17: 3; 19: 3; 24: 5, 7; 27: 5, 7, 8, 9; 28: 4; 30: 6.

Ich finde jetzt, dass sämtliche diese 55 Typen in meiner Dissertation auf die eine oder andere Weise Erwähnung gefunden haben. Eine in einer anderen Richtung gehende Äusserung in »Regelflächen I», p. 366 bezog sich auf 23: 1, 2. Ich hatte dann nicht bemerkt, dass auf diese Typen in meiner Dissertation, p. 95, 96 hingewiesen worden ist. Dagegen habe ich erst in dieser Arbeit die Existenz der beiden Typen 27: 9 und 30: 6 klargelegt.

Bei Edge ist auf solche Möglichkeiten, dass Doppelerzeugende einen verschiedenen Einfluss auf die Ordnung der Doppelkurve und die Klasse der Doppeldeveloppablen haben können, oder dass verschiedene Teile der Doppelkurve unmittelbar an einander rücken, nicht eingegangen worden. Als drei noch bei ihm fehlende Typen sind 14: 5, 24: 6 und 27: 6 hervorzuheben. Das charakteristische für diese drei Typen ist, dass jeder Teil der Doppelkurve von den Erzeugenden in nur einem Punkte getroffen wird. Wir hatten ja für die Doppelkurve die Zerlegungen: $2\,g_2 + 4\,C_2$; $g_2 + 3\,C_2 + C_3$; $2\,C_2 + 2\,C_3$. Wir bemerken, dass es auf keine ernsthafte Schwierigkeit stösst, wenn man diese Typen in solcher Weise herleiten will, dass man drei von den Doppelkurven als Leitkurven nimmt. Übrigens ist im Texte mehrmals auf derartige Beispiele eingegangen worden.

Die bedeutenden Verdienste, welche nach meiner Auffassung der Arbeit von EDGE zuzuerkennen sind, liegen also nicht in der Vollständigkeit bei der Aufzählung der Typen. Seine Darstellung scheint mir streng und einwandfrei. Man versteht nur nicht, wie seine Behauptung am Schlusse, dass dort sämtliche vorkommenden Typen aufgezählt werden, durch die vorhergehenden Entwicklungen begründet wird.

36. Von noch drei Verfassern hat man Veröffentlichungen über R_6. Hier ist erstens J. BERGSTEDT[1] zu nennen, der insbesondere die rationalen R_6 mit einfacher, dreifacher oder vierfacher Leitgerade behandelt hat. Dazu kommen noch rationale R_6 mit doppelter Leitgerade und einem vierfachen Punkte, sowie solche ohne Leitgerade mit zwei zusammenstossenden doppelten Erzeugenden. In meiner Dissertation habe ich die Arbeit von BERGSTEDT eingehend berücksichtigt. Gewisse Berichtigungen sind zu machen. Doch scheint mir diese Abhandlung nicht ohne Wert zu sein.

Den ersten Versuch eine vollständige Einteilung der R_6 nach der Beschaffenheit der Doppelkurve auszuführen hat K. FINK[2] gemacht. Er scheint aber in einem seltenen Grade für diese Arbeit unvorbereitet gewesen zu sein. Dieses Sachverhältnis möge durch einige Beispiele beleuchtet werden. So hat er drei Fälle (A: 28 c; B: 17 c; C: 12 a), wo die Doppelkurve aus einem dreifachen und einem doppelten Kegelschnitt mit 0, 1 oder 2 Doppelerzeugenden besteht. Eine Erzeugende würde also hier nicht 4 sondern nur 3 andere treffen. Nicht besser verhält es sich mit den Fällen (B: 21; C: 12 b), wo die Doppelkurve aus einer gewundenen C_3 und entweder zwei ebenen C_3 oder einer ebenen C_3 und einer C_2 besteht. Und was soll man endlich von seiner Untersuchung der Gleichung $Af_3^2 + Bf_3f_3' + Cf_3'^2 = 0$ sagen, wo A, B, C konstante Grössen und f_3, f_3' Funktionen vom Grade 3 in den Koordinaten des Raumes bedeuten sollen. Die wirkliche Bedeutung dieser Gleichung scheint er nicht erkannt zu haben, sondern meint, dass dieselbe eine R_6 bezeichnen könne, und untersucht diese R_6 in allen ihren Spezialfällen.

Mit der Einteilung der R_6 nach der Beschaffenheit der Doppelkurve hat sich V. SNYDER in 5 verschiedenen Arbeiten beschäftigt. Bei der Abfassung der drei ersten[3] waren ihm die schon ausgeführten Arbeiten auf dem Gebiete noch

[1] *Om regelytor af sjette graden.* Diss. (Lund, 1886).

[2] *Über windschiefe Flächen im allgemeinen und ins besondere über solche des sechsten Grades.* Diss. (Aus dem Korrespondenzblatt für die Gelehrten und Realschulen Würtembergs, 1887.)

[3] Amer. J. of math. XXV (1903) p. 59, 85, 261.

unbekannt. Als inzwischen seine Aufmerksamkeit darauf gelenkt wurde, dass die Sache schon behandelt war, nahm er die Frage in zwei neuen Arbeiten[1] wieder auf. Als das hierbei angestrebte Ziel wurde angegeben »to complete Wiman's results by deriving the equations and to add those which he overlooked». Über diese Verbesserungen habe ich nur zwei Angaben bei ihm finden können. Er bemerkt erstens, dass ich nicht die Fälle, wo eine Leitgerade mit einer oder mehreren Erzeugenden inzident ist (»Wiman does not distinguish between them»), besonders aufnehme. Dies gilt zwar bei der Aufzählung der Typen. Im Texte habe ich aber den fraglichen Unterschied durchgeführt. Die zweite Bemerkung (»These forms are not mentioned by Wiman but he notices the omission p. 95») bezieht sich auf die beiden Typen 11: 3, α_3 und 11: 3, β_3 in »Regelflächen I». Man darf wohl dieselbe nicht so verstehen, dass diese Typen zuerst bei SNYDER Erwähnung gefunden haben sollten.

Dagegen gibt SNYDER nicht diejenigen Fälle besonders an, welche bei ihm unstreitig neu sind. Das sind drei Typen mit einer gewöhnlichen dreifachen Leitgeraden, welche er so bezeichnet: »$c_1^3 + c_4^2 + 3\,g^2$; $c_1^3 + c_4^2 + \overline{2\,g}^2 + g^2$; $c_1^3 + c_4^2 + \overline{3\,g}^2$». Die R_6 hat also hier drei Doppelerzeugende (»Finally two of these may become tacnodal or the three may become oscnodal or all may unite in a triple generator»). Die dreifache Leitgerade verlangt hier, dass die C_4 drei scheinbare Doppelpunkte haben soll. Der Grad 6 erfordert, dass die Leitgerade durch einen Punkt der C_4 geht. Die Leitlinie trifft dann eine Trisekante der C_4 in einem nicht auf der C_4 belegenen Punkt, welche dreifache Erzeugende der R_6 wird. Dieser Fall findet sich richtig schon bei BERGSTEDT. Wie SNYDER hier die dreifache Erzeugende als Spezialisierung von drei Doppelerzeugenden erhalten hat, vermag ich nicht zu erklären.

In meiner Dissertation gelang es mir nicht die Frage nach der Existenz der beiden Typen $[2\,C_2] + [2\,C_3]$ sowie $[2\,C_5]$ klarzulegen. Für SNYDER machte dies natürlich keine Schwierigkeit. Auch diese Leistung hat er nicht als von ihm selbst herrührend hervorgehoben. Den schwierigsten Fall, denjenigen mit $[2\,C_5]$, wo die C_5 2 D besitzt, hat er sogar, im scharfen Gegensatze zu meinen Resultaten in Nummer 32, realisiert. Hier mag es genügen die Begründung für dieses überraschende Resultat anzuführen. »If a rational C_5 with two double points be given and upon it a (1, 1)-correspondence with one value of the parameter at each node as selfcorresponding element, the resulting scroll will have this

[1] Amer. J. of math. XXVII (1905), p. 77, 173.

$\overline{2\,C_{5,2}}^{2}$ as tacnodal curve.» Wir begnügen uns hier mit der kleinen Bemerkung, dass die erhaltene Regelfläche eine R_8 wird, für welche die beiden D vierfache Punkte bedeuten. Die Bedeutung der beiden sich selbst entsprechenden Elemente besteht darin, dass in denselben sich je zwei Torsalpunkte vereinigt haben, und hat nichts damit zu tun, ob dieselben in die D verlegt sind. Die Bedingung für eine R_6 ist eine ganz andere, nämlich dass in den D die beiden Zweige einander entsprechen. Nur wenn die D in Spitzen übergehen, erhält man bei der obigen Erzeugungsweise R_6.

Upsala, 2 December 1931.

Bemerkung zu den Schlusszeilen.

Hier muss doch bemerkt werden, dass, falls die Tangenten in den beiden Spitzen der C_5 Erzeugende der die C_5 enthaltenden F_2 sind, der Beweis in Nummer 32, dass die C_5 keine doppelte Berührungskurve einer R_6 sein kann, nicht anwendbar ist, und dass auch in der Tat dieser Fall eine Ausnahme bildet. In der Parametergestalt kann ja die Gleichung der C_5 $x:y:z:w=\alpha^5:\alpha^3:\alpha^2:1$ geschrieben werden, woraus man sieht, dass die zugehörige abwickelbare Fläche einem linearen Komplexe angehören muss. Verbindet man dann jeden Punkt der Kurve mit den beiden Punkten, welche noch in der oskulierenden Ebene des Punktes liegen, so bekommt man eine dem linearen Komplexe angehörende R_6, für welche die C_5 eine doppelte Berührungskurve darstellt. Dieser Fall lässt sich also sehr viel einfacher erledigen als derjenige, den wir in Nummer 34 untersucht haben, und steht offenbar auch mit allgemeineren Resultaten in Zusammenhang. Auf denselben bin ich doch erst jetzt aufmerksam gemacht, und zwar bei Kenntnissnahme der Ergebnisse einer Arbeit von Snyder (American Journal XXVIII, 1906), in welcher es sich um rationale abwickelbare Flächen in einem linearen Komplexe handelt. In einer noch späteren Arbeit (American Journal XXIX, 1907) hat Snyder ganz allgemein die Bestimmung der zu einem linearen Komplexe gehörigen abwickelbaren Flächen auf das einfache Problem der auf einem K_2 belegenen Kurven zurückgeführt; diese Arbeit gründet sich auf die in unserem ersten Abschnitt erörterten Beziehungen.