SUR UN CRITÈRE DE DÉNOMBRABILITÉ.

PAR

GEORGES DURAND

À PARIS.

Dans ce Mémoire, nous nous proposons d'établir, pour un ensemble de points de l'espace euclidien à n dimensions, un critère général de dénombrabilité basé sur la considération des directions limites ou demi-tangentes en un point d'accumulation de l'ensemble. Ce critère général comprend des cas particuliers importants dont nous dégagerons quelques-uns avec des applications à la Géométrie des courbes planes ou gauches et à la Géométrie des surfaces; nous montrerons, en outre, qu'il englobe certaines propositions de la théorie des fonctions d'une variable réelle.

Pour la commodité du langage, nous nous placerons dans l'espace euclidien à 3 dimensions et nous commencerons par de brèves indications sur deux notions simples qui interviendront dans l'énoncé de notre critère.

Faisceaux convexes.

1. — Soit $\Phi(M)$ un ensemble de demi-droites issues d'un même point M; ces demi-droites seront les *rayons* du faisceau $\Phi(M)$. Nous dirons que $\Phi(M)$ est un faisceau *convexe* s'il existe un plan P passant par M et tel qu'il n'y ait pas des rayons de $\Phi(M)$ de part et d'autre de P. La convexité sera *stricte* s'il existe un tel plan P ne contenant aucun rayon de $\Phi(M)$; elle sera *large* dans le cas contraire.

2. — Nous avons ces propriétés immédiates:

Théorème A. — *Si $\Phi(M)$ est un faisceau convexe au sens strict, tout plan ϖ passant par M possède un angle ≥ 2 droits de sommet M et ne contenant aucun rayon de $\Phi(M)$.*

D'après la définition, il existe un plan P mené par M, ne contenant aucun rayon du faisceau $\Phi(M)$ et tel qu'il n'y ait pas des rayons de $\Phi(M)$ de part et d'autre de P. Si ϖ coïncide avec P, le théorème est évident; sinon, les deux plans P et ϖ, ayant en commun le point M, ont une droite commune Δ qui, étant dans P, ne contient aucun rayon du faisceau. Cette droite Δ partage ϖ en deux demi-plans dont l'un est situé dans le demi-espace limité par P et dépourvu de rayon de $\Phi(M)$, ce qui établit notre proposition.

Théorème B. — *Si $\Phi(M)$ est un faisceau fermé convexe au sens large, tout plan ϖ passant par M: ou bien a des rayons de $\Phi(M)$ de part et d'autre de lui, ou bien contient plusieurs rayons de $\Phi(M)$ de telle façon que le plus grand angle de sommet M ne contenant aucun de ces rayons soit ≤ 2 droits, — et il y a toujours au moins un plan qui satisfait à la seconde éventualité.*

S'il n'y a pas des rayons de $\Phi(M)$ de part et d'autre de ϖ, ce plan contient un ou plusieurs rayons du faisceau, autrement celui-ci serait strictement convexe. Supposons alors qu'on puisse trouver dans ϖ un angle > 2 droits, de sommet M et ne contenant aucun rayon de $\Phi(M)$. Menons par M une droite Δ située dans cet angle; elle définit un demi-plan dépourvu de rayon de $\Phi(M)$ et, comme ce faisceau est fermé, il n'a aucun rayon au voisinage de ce demi-plan. On peut donc faire tourner le plan ϖ autour de Δ d'un angle assez petit pour que ce plan ne rencontre aucun rayon du faisceau; cette rotation effectuée, tous les rayons de $\Phi(M)$ sont d'un même côté de ϖ et il n'y en a aucun dans ϖ: le faisceau $\Phi(M)$ serait donc strictement convexe, contrairement à notre hypothèse. — De plus, il existe au moins un plan ϖ tel que $\Phi(M)$ soit d'un même côté de ce plan, donc qui satisfait à la seconde éventualité de l'énoncé.[1]

---

[1] Cette notion de faisceau convexe a déjà reçu une application dans l'étude d'une classe de surfaces dont nous reparlerons plus loin (nº 9). Une telle surface pouvant être envisagée comme la frontière de l'ensemble réunion d'une famille de sphères égales, on est amené à considérer, en un point M de la surface, le faisceau $\Phi(M)$ des rayons de ces sphères qui aboutissent en M et l'on peut répartir les points de la surface en 3 classes distinctes:

α) si $\Phi(M)$ est *strictement convexe*, les propriétés essentielles de la surface, au voisinage de M, dépendent essentiellement de la structure de $\Phi(M)$;

β) les points où $\Phi(M)$ est *largement convexe* sont quelconques;

γ) les points où $\Phi(M)$ est *non convexe* sont des points isolés.

Cf.: G. Durand, Propriétés locales et ensemble des points sans plan tangent des enveloppes de sphères (C. R. de l'Acad. des Sciences, t. 190, 1930, p. 1219). Dans cette étude, la nature de la question avait fait présenter la classification sous une forme différente.

Contingent.

3. — La notion de *contingent* est dûe à M. Georges Bouligand qui en a tiré diverses applications, notamment pour l'étude des courbes de Jordan sans point multiple et pour l'obtention d'un procédé d'intégration généralisé de l'équation aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi.[1] Le contingent $\tau(M)$ en un point d'accumulation M d'un ensemble E est le système des *demi-tangentes* MT en M, c'est-à-dire des demi-droites MT auxquelles on peut associer une suite infinie de points $\{M_i\}$ de E, tous distincts et tendant vers M de manière que les angles M_iMT tendent vers zéro. Une demi-tangente MT peut encore se caractériser ainsi: tout cône circulaire droit de sommet M et d'axe MT contient au moins un point de E différent de M. On en déduit que le contingent est toujours *fermé*.

Théorème général.

4. — Cela posé, nous abordons notre critère général:

Un ensemble E, tel que le contingent $\tau(M)$ en chaque point de E soit un faisceau strictement convexe, est un ensemble dénombrable.[2]

Soient α_0 un angle $<\pi$ et E_0 un ensemble dont le contingent est contenu dans un cône circulaire C_0 d'angle au sommet α_0. Choisissant un angle φ tel que $0<4\varphi<\pi-\alpha_0$, on peut trouver pour tout point M de E_0 une longueur ε telle que la sphère $S(M,\varepsilon)$[3] ne contienne des points de E_0 (différents de M) que dans le secteur sphérique s intérieur au cône circulaire C_1 de même axe que C_0 et d'angle au sommet $\alpha_0+2\varphi$.[4]

Prenons $r<\frac{\varepsilon}{2}\sin\varphi$ et désignons par σ le secteur sphérique délimité par la sphère $S(M,r)$ et par le cône Γ, supplémentaire de C_1. Nous allons démontrer que deux secteurs σ et σ', associés à deux points quelconques M et M' de E_0,

[1] G. Bouligand, Sur quelques points de méthodologie géométrique (Rev. gén. des Sciences, t. 41, 1930, p. 39); Sur un caractère de planéité d'un arc simple (Bull. des Sc. math., 2e série, t. 54, mai 1930); Expression générale de la solidarité entre le problème du minimum d'une intégrale et l'équation correspondante d'Hamilton-Jacobi (Rendiconti dei Lincei, juillet 1930).

[2] Notons que cet énoncé ne fait aucune hypothèse sur le dérivé de E.

[3] D'une façon générale, $S(A,R)$ désigne la sphère de centre A et de rayon R.

[4] En un point isolé de E_0, on pourra choisir arbitrairement l'axe du cône C_1.

n'ont en commun aucun point intérieur; pour cela, supposons $\varepsilon \geq \varepsilon'$ et distinguons plusieurs cas:

1°) si $MM' \geq \varepsilon \geq \varepsilon'$, on a:

$$r + r' < \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} \sin \varphi < \varepsilon \leq MM',$$

et les deux sphères $S(M, r)$ et $S(M', r')$ sont extérieures.

2°) si $\varepsilon > MM' \geq \varepsilon'$, il est aisé de voir que la sphère $S(M', r')$ est à l'extérieur du cône Γ. En effet, une tangente menée de M à cette sphère fait avec MM' un angle θ tel que:

$$\sin \theta = \frac{r'}{MM'} < \frac{\varepsilon' \sin \varphi}{\varepsilon'}$$

d'où:

$$\theta < \varphi;$$

la sphère $S(M', r')$ est donc à l'intérieur d'un cône circulaire d'axe MM' et d'angle au sommet 2φ ou encore, puisque M' est dans le secteur s et MM' dans le cône C_1, cette sphère est à l'intérieur d'un cône circulaire C_2 de même axe que C_1 et d'angle au sommet $\alpha_0 + 4\varphi$. De plus, les cônes C_2 et Γ sont de part et d'autre d'un plan passant en M et normal à l'axe de C_1, donc complètement extérieurs l'un à l'autre.

3°) si $\varepsilon \geq \varepsilon' > MM'$, le point M étant dans le secteur s' et le point M' dans le secteur s, les deux cônes Γ et Γ' sont extérieurs l'un à l'autre. En effet, le plan perpendiculaire en M' à MM' partage l'espace en deux régions, l'une contenant le point M, donc aussi le cône Γ, l'autre contenant Γ'.

Ainsi, à tout point M de l'ensemble E_0, on peut faire correspondre une longueur r telle qu'un secteur sphérique prélevé dans la sphère $S(M, r)$ n'ait en commun aucun point intérieur avec un secteur analogue associé à un autre point de E_0: l'ensemble E_0 est donc dénombrable.

Revenons maintenant à l'ensemble E de notre énoncé. Le contingent $\tau(M)$, étant fermé, est contenu dans un cône circulaire de sommet M et d'angle au sommet $\alpha(M) < \pi$. Choisissons une suite d'angles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots$ qui tendent vers π en croissant. En vertu de ce qui précède, l'ensemble des points où le contingent est contenu dans un cône circulaire d'angle au sommet compris entre α_{i-1} et α_i est dénombrable. L'ensemble E peut donc être considéré comme une famille dénombrable d'ensembles dénombrables, ce qui établit notre théorème, qui peut encore s'énoncer, en tenant compte de (B):

Si un ensemble est non dénombrable, il possède au moins un point M tel que tout plan passant en M: ou bien a des demi-tangentes MT de part et d'autre de lui, ou bien contient plusieurs demi-tangentes MT et le plus grand angle de sommet M ne contenant aucune demi-tangente est ≤ 2 droits.

Cas particuliers.

5. — De ce théorème général, détachons les deux cas particuliers suivants dont le premier va nous fournir plusieurs applications:

I. — *Un ensemble, dont le contingent en tout point d'accumulation est formé de deux demi-droites non opposées, est dénombrable,* car un tel contingent est un faisceau strictement convexe.

II. — *Un ensemble, dont le contingent se réduit partout à une demi-droite, est dénombrable.*

Applications.

6. — **Courbes de Jordan.** — a) Considérons une courbe rectifiable γ, plane ou gauche; un théorème classique de M. Henri Lebesgue nous apprend que les points de γ dépourvus de tangente forment sur cette courbe un ensemble de mesure nulle. On peut compléter ce résultat en ajoutant que le sous-ensemble de ces points où les demi-tangentes constituent un faisceau strictement convexe (et notamment où il existe deux demi-tangentes) est dénombrable.

b) Le cas particulier I permet d'énoncer:

Soit une courbe de Jordan, plane ou gauche, rectifiable ou non, ayant partout une demi-tangente antérieure et une demi-tangente postérieure: les points de cette courbe où manque la tangente (c'est-à-dire: où les deux demi-tangentes ne sont pas opposées) *forment un ensemble dénombrable.*

7. — **Courbes d'ordre fini.** — L'énoncé précédent (b) s'applique aux courbes d'ordre fini, c'est-à-dire aux courbes simples de Jordan coupées par un plan en un nombre fini (mais non nécessairement borné) de points. M. G. Bouligand ayant démontré qu'une telle courbe admet partout une demi-tangente antérieure

et une demi-tangente postérieure[1], on sait dès lors qu'*une courbe d'ordre fini possède une tangente, sauf en un ensemble de points au plus dénombrable.*[2]

8. — **Courbes planes** *C. M.* — Nous appelons ainsi les courbes planes, généralisant les courbes convexes, par tout point desquelles on peut faire passer un cercle de rayon ϱ n'enfermant intérieurement aucun point de la courbe. Une telle courbe peut toujours être considérée comme la frontière de l'ensemble ouvert E_ϱ réunion des cercles de rayon ϱ centrés en tout point d'un ensemble E convenable; le passage de E à E_ϱ est la *construction de* Cantor-Minkowski, ou *construction C. M.*, d'où la dénomination donnée à ces courbes. Ayant établi précédemment[3] que le contingent d'une courbe *C. M.* se réduit en tout point à deux demi-droites, l'énoncé (*b*) s'applique encore, de sorte que: *sur une courbe C. M., les points où manque la tangente forment un ensemble au plus dénombrable.*

9. — **Surfaces** *C. M.* — Les surfaces ainsi dénommées généralisent, d'une manière analogue, les surfaces convexes. En faisant leur étude, nous avons considéré, en un point M, le système des rayons ϱ qui aboutissent en M et appelé *points de troisième espèce* les points où ce système n'est pas contenu dans un même plan, puis nous avons démontré directement que l'ensemble des points de 3[e] espèce est dénombrable.[4] D'autre part, ayant établi, d'une façon indépendante, que le contingent $\tau(M)$ de la surface en un tel point M est un faisceau strictement convexe[5], on obtient ici une nouvelle preuve de la dénombrabilité de ces points.

Fonctions d'une variable réelle. — Soit $y = f(x)$ une fonction quelconque. En un point M, de coordonnées (x, y), de la courbe représentative, on considère l'arc antérieur MA et l'arc postérieur MB; chacun de ces arcs possède en M un contingent, τ_A ou τ_B, qui est un continu de demi-droites pouvant se réduire à un seul élément. Les deux nombres dérivés à droite λ_d et Λ_d sont les coefficients angulaires des deux rayons extrêmes MT_1 et MT_2 de τ_B; de même, les

[1] G. Bouligand, Sur l'existence des demi-tangentes à une courbe de Jordan (Fundamenta Mathematicae, t. 15, 1930, p. 216).

[2] Ces propriétés ont été énoncées tout récemment par M. André Marchaud: Sur les continus d'ordre borné (Acta math., t. 55, 1930, p. 84).

[3] G. Durand, Sur la construction de Cantor-Minkowski dans le plan (C. R. de l'Acad. des Sc., t. 188, 1929, p. 1368), Théorème I.

[4] G. Durand, Sur la construction de Cantor-Minkowski dans l'espace (Ibid., t. 189, 1929, p. 443), Théorème I.

[5] G. Durand, Propriétés locales et ensemble des points sans plan tangent des enveloppes de sphères (Ibid., t. 190, 1930, p. 1219), Théorèmes B et D.

deux nombres dérivés à gauche λ_g et Λ_g sont les coefficients angulaires des rayons extrêmes MT_1' et MT_2' de τ_A. Il est convenu que $\lambda_d \leq \Lambda_d$ et $\lambda_g \leq \Lambda_g$.

Or, le contingent total $\tau(M)$ de la courbe représentative est la réunion de τ_A et τ_B. Pour que $\tau(M)$ soit un faisceau strictement convexe, il faut qu'on ait l'une ou l'autre des inégalités suivantes:

$$T_1MT_2' > 2 \text{ droits} \quad \text{ou} \quad T_2MT_1' > 2 \text{ droits},$$

c'est-à-dire:

$$\lambda_d > \Lambda_g \quad \text{ou} \quad \lambda_g > \Lambda_d,$$

d'où le théorème:

Les valeurs de x pour lesquelles les nombres dérivés d'une fonction quelconque $y = f(x)$ vérifient l'une ou l'autre des inégalités:

$$\lambda_d > \Lambda_g \quad \text{ou} \quad \lambda_g > \Lambda_d$$

forment un ensemble au plus dénombrable,

qui comprend ce cas particulier, traduction analytique d'un précédent énoncé (n° 6, b):

Si une fonction $y = f(x)$ admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche pour toute valeur de x, elle possède une dérivée sauf sur un ensemble au plus dénombrable.[1]

En outre, le caractère intrinsèque donné à notre étude nous dispense ici d'examiner à part le cas des points où la demi-tangente est parallèle à Oy: ces points se trouvent ipso facto englobés dans l'énoncé précédent.

[1] Cf.: Hobson, Theory of Functions of a real variable, tome I (2e édition, Cambridge, 1921), n° 292, page 369, énoncé terminal. Le premier des énoncés ci-dessus comprend comme cas particulier ce théorème cité par M. Hobson (n° 291, p. 368): soient $f(x)$ une fonction définie dans un intervalle borné ou non, et k un nombre donné quelconque: l'ensemble des points où l'on a simultanément $\lambda_d \geq k$ et $\Lambda_g < k$ est au plus dénombrable. — D'autre part, cet énoncé a été donné par M. A. Denjoy pour une fonction continue dans son Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues (Journal de Math. pures et appliqués, 7e série, t. I, 1915, p. 147).