SUR CERTAINES FONCTIONS ASSOCIÉES AUX FONCTIONS DE LEGENDRE.

PAR

RENÉ LAGRANGE

à DIJON.

Introduction.

Dans un mémoire sur les fonctions de Legendre[1], j'ai relié les fonctions de Legendre de première espèce et leurs dérivées au développement d'une puissance du rapport de deux trinômes en t suivant les puissances entières du rapport anharmonique de t avec trois des quatre zéros de ces trinômes. D'une manière précise, étant donnés deux trinômes

$$P(t) \equiv a\,t^2 + 2\,b\,t + c,$$
$$Q(t) \equiv a'\,t^2 + 2\,b'\,t + c',$$

tels que trois invariants essentiels pour le groupe homographique normal soient

$$b^2 - a\,c = b'^2 - a'\,c' = 1,$$
$$a\,c' + c\,a' - 2\,b\,b' = -2\,z,$$

et dont les zéros sont désignés par

$$\tau_1 = \frac{-b+1}{a},\ \tau_2 = \frac{-b-1}{a},\ \sigma_1 = \frac{-b'+1}{a'},\ \sigma_2 = \frac{-b'-1}{a'},$$

on considérait, dans l'étude citée, le développement en série de Laurent

[1] «Sur les fonctions de Legendre de première espèce et certaines fonctions associées», Journ. de Math., tome VI (1927), p. 165—227.

$$\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m^n(z)\, R\,(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^n, \tag{1}$$

où m est un nombre quelconque.

Ce développement est valable dans la couronne[1] limitée par les deux cercles conjugués par rapport à τ_1 et τ_2, et qui passent respectivement par les points σ_1 et σ_2. Il suppose $\Re(z) > 0$.

Or l'idée directrice de cette étude introduisait des éléments arbitraires que l'on avait choisis de façon que le développement (1) fournît les fonctions de Legendre de première espèce et leurs dérivées. Il restait à examiner quelles sont les fonctions auxquelles ce procédé donne naissance lorsque les éléments arbitraires dont se compose le développement (1) sont choisis différemment, c'est-à-dire lorsqu'on change l'ordre des quatre éléments qui composent le rapport anharmonique, ou lorsqu'on change l'ensemble des trois zéros qui y entrent, ou enfin lorsque z prend une position arbitraire dans son plan.

Nous allons voir que, dans ces conditions générales, on ne recontre que deux espèces vraiment distinctes de fonctions, les $J_m^n(z)$ déjà étudiées dans le mémoire cité, et une nouvelle espèce de fonctions, que je désigne par $\bar{J}_m^n(z)$, qui se rattachent d'une manière bien remarquable aux fonctions de Legendre des deux espèces.

Le chapitre I de ce travail est consacré à la discussion des différentes espèces de fonctions que l'on peut mettre en évidence par ce procédé de développement, et à l'étude des nouvelles fonctions $\bar{J}_m^n(z)$ ainsi introduites. On rencontre, en particulier, des propriétés de ces fonctions les rapprochant des fonctions $J_m^n(z)$.

J'établis, dans le chapitre II, les expressions des $\bar{J}_m^n(z)$ en fonction linéaire des $J_m^n(z)$ et des $K_m^n(z)$, ces dernières fonctions étant associées aux fonctions de Legendre de deuxième espèce de la même manière que les $J_m^n(z)$ le sont aux fonctions de Legendre de première espèce. On retrouve, à titre d'application, l'expression classique de $P_m(z)$ à l'aide des deux fonctions $Q_m(z)$ et $Q_{-m-1}(z)$.

Le troisième chapitre s'occupe de quelques relations de récurrence entre les $\bar{J}_m^n(z)$, ainsi que d'une formule d'addition de ces fonctions.

Enfin j'introduis, dans le dernier chapitre, la fonction $\bar{K}_m^n(z)$ qui vérifie

---

[1] Si les deux cercles qui composent sa frontière sont extérieurs l'un à l'autre, cette couronne devient naturellement le domaine extérieur à ces deux cercles.

la même équation hypergéométrique que $\bar{J}_m^n(z)$, et que l'on obtient en modifiant simplement le contour de l'intégrale de fonction de variable complexe par laquelle on peut définir celle-ci. En utilisant la relation linéaire établie au chapitre II, et qui s'étend d'elle-même aux fonctions $\bar{K}_m^n(z)$, je termine ce chapitre par le développement en série de Newton d'une certaine famille de fonctions, et en particulier de la fonction $\dfrac{2^x\,\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+2\alpha)}$.

CHAPITRE I.

Les fonctions $\bar{J}_m^n(z)$.

1. Dans la discussion des différentes sortes de coefficients que fournit le développement

$$(1) \qquad \left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_m^n(z)\,\xi^n,$$

lorsqu'on prend pour ξ l'un quelconque des rapports anharmoniques que fournit t avec trois des quatre zéros des deux trinômes, on peut tout de suite supposer que t est le premier des quatre termes du rapport, grâce à la remarque que la permutation des deux premiers termes entre eux, ou des deux derniers termes entre eux, change simplement ξ en $\frac{1}{\xi}$, tandis que la permutation du premier couple de termes avec l'autre ne change pas ξ.

Remarquons également que la permutation de σ_1 et σ_2 respectivement avec τ_1 et τ_2 équivaut à permuter les rôles des deux trinômes, donc à changer m en $-m$.

La substitution du zéro étranger à ξ à l'autre zéro du même trinôme, donc contenu dans ξ, ne change pas non plus essentiellement les coefficients du développement (1). Par exemple, si $\Re(z)>0$, la substitution du rapport anharmonique $R(t, \sigma_1, \tau_1, \tau_2)$ à $R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)$ remplace le coefficient $J_m^n(z)$ par $J_m^{-n}(z)$. On a en effet

$$(2) \qquad \left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m^n(z)\,R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^n$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m^n(z)\,R(\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^n\,R(t, \sigma_1, \tau_1, \tau_2)^n,$$

de sorte que les coefficients relatifs à $R(t, \sigma_1, \tau_1, \tau_2)$ sont

$$L_m^n(z) = J_m^n(z)\, R(\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^n = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n J_m^n(z);$$

par suite, en vertu de l'identité[1]

$$J_m^{-n}(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n J_m^n(z), \tag{3}$$

on a bien ici

$$L_m^n(z) = J_m^{-n}(z).$$

Ainsi nous n'avons plus qu'à étudier l'influence de la situation de z dans son plan, et l'effet de la permutation des deux termes moyens du rapport anharmonique ξ.

Tout d'abord, reprenons le rapport anharmonique $\xi = R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)$ du mémoire cité, mais en supposant $\Re(z) < 0$. Dans le plan de la variable ξ, les quatre points critiques algébriques (si m n'est pas entier) du premier membre de (1), qui sont

$$R(\tau_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2) = 0, \qquad R(\tau_2, \sigma_2, \tau_1, \tau_2) = \infty,$$

$$R(\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2) = \frac{z-1}{z+1}, \quad R(\sigma_2, \sigma_2, \tau_1, \tau_2) = 1,$$

sont tels que l'on ait

$$0 < 1 < \left|\frac{z-1}{z+1}\right| < \infty.$$

La couronne circulaire dans laquelle le développement (1) est ici possible est donc la couronne définie dans le plan de ξ par

$$1 < |\xi| < \left|\frac{z-1}{z+1}\right|.$$

Les coefficients correspondants $L_m^n(z)$ sont alors tels que l'on ait

$$\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_m^n(z)\, R(\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^n\, R(t, \sigma_1, \tau_1, \tau_2)^n,$$

ou encore

$$\left(\frac{-Q(t)}{P(t)}\right)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^m L_m^n(z) \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n R(t, \sigma_1, \tau_1, \tau_2)^n,$$

[1] Cf. loc. cit., p. 183.

et ce développement est valable dans le domaine d'un seul tenant du plan de t que bornent les deux cercles conjugués par rapport à τ_1 et τ_2 qui passent respectivement par σ_1 et σ_2. Or le changement de signe de $Q(t)$ revient à permuter les rôles des deux zéros σ_1, σ_2, et à changer z en $-z$; $\Re(-z)$ étant positif, on a donc dans le domaine en question

$$\left(\frac{-Q(t)}{P(t)}\right)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m^n(-z)\, R\,(t, \sigma_1, \tau_1, \tau_2)^n.$$

L'identification des deux développements donne donc

$$L_m^n(z) = (-1)^m \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n J_m^n(-z),$$

ou, grâce à (3),

$$L_m^n(z) = (-1)^m J_m^{-n}(-z). \tag{4}$$

Bien entendu, le facteur $(-1)^m$ a la signification $e^{(2h+1)\pi i m}$, h étant un nombre entier arbitraire, dont la valeur dépend du chemin suivi pour aller de z à $-z$.

En résumé, il importe uniquement de distinguer deux cas, suivant que les deux derniers termes de ξ sont les deux zéros d'un même trinôme ou appartiennent séparément aux deux trinômes. Le premier cas conduit aux fonctions $J_m^n(z)$, qui ont été étudiées dans le mémoire cité, et qui se rattachent étroitement aux fonctions de Legendre de première espèce. Le présent travail est consacré à l'étude des fonctions $\bar{J}_m^n(z)$ auxquelles conduit le deuxième cas, et qui sont définies par le développement

$$\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{J}_m^n(z)\, R\,(t, \tau_1, \sigma_2, \tau_2)^n. \tag{5}$$

2. Plaçons nous dans le plan de la variable

$$\xi = R\,(t, \tau_1, \sigma_2, \tau_2).$$

Les homologues des zéros de $Q(t)$ et $P(t)$ sont les points

$$\begin{aligned}
&R\,(\sigma_1, \tau_1, \sigma_2, \tau_2) = 1 - R\,(\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2) = \frac{2}{z+1},\\
&R\,(\sigma_2, \tau_1, \sigma_2, \tau_2) = 0,\\
&R\,(\tau_1, \tau_1, \sigma_2, \tau_2) = 1,\\
&R\,(\tau_2, \tau_1, \sigma_2, \tau_2) = \infty.
\end{aligned}$$

Le développement (5), qui prend dans ce plan la forme de Laurent, n'est donc possible quel que soit m que s'il existe une couronne circulaire de centre $\xi=0$ séparant l'un de l'autre les deux zéros de chaque trinôme; ceci exige que l'on ait $1<\left|\frac{2}{z+1}\right|$, c'est-à-dire

$$|z+1|<2.$$

Nous supposerons donc que z est intérieur au cercle de centre $z=-1$ et de rayon 2; le domaine de validité de (5) est alors la couronne circulaire définie par

$$1<|\xi|<\frac{2}{|z+1|}, \tag{6}$$

et il lui correspond dans le plan de la variable t le domaine d'un seul tenant limité par les deux cercles conjugués par rapport aux points σ_2 et τ_2 qui passent respectivement par les deux autres zéros σ_1 et τ_1.

3. Avant d'aborder l'étude des coefficients $\bar{J}_m^n(z)$ ainsi définis, apportons quelques précisions à la définition des fonctions $J_m^n(z)$; cela nous guidera dans le choix d'une définition précise des $\bar{J}_m^n(z)$, et nous sera d'ailleurs nécessaire pour pouvoir comparer avec rigueur les deux espèces de fonctions.

On sait qu'on est conduit à la représentation de $J_m^n(z)$ par l'intégrale de Schläfli en choisissant pour $P(t)$ et $Q(t)$ les formes

$$P(t)\equiv 2t-2z,$$
$$Q(t)\equiv t^2-1,$$

de sorte que

$$\sigma_1=1,\ \sigma_2=-1,\ \tau_1=z,\ \tau_2=\infty,$$

et

$$R(t,\sigma_2,\tau_1,\tau_2)=\frac{t-z}{-1-z};$$

l'intégrale en question est alors

$$J_m^n(z)=\frac{(-1-z)^n}{2^{m+1}\pi i}\int_{+\infty}^{(1+,z+)}\frac{(t^2-1)^m\,dt}{(t-z)^{m+n+1}}, \tag{7}$$

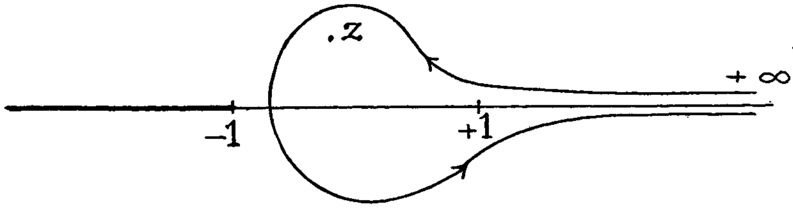

Fig. 1.

le contour d'intégration étant constitué par deux lacets successifs dont l'origine commune est à l'infini du demi-axe réel positif, qui sont parcourus, respectivement autour de z et de 1, dans le sens direct. On précisera la valeur de l'intégrale en prenant, à l'origine du contour,

$$\arg(t-1)=\arg(t+1)=\arg(t-z)=0, \tag{8}$$

et l'on sait qu'elle représente alors une fonction uniforme dans le plan coupé par la demi-droite $(-\infty, -1)$.

Nous aurons également besoin de considérer les fonctions $K_m^n(z)$ définies par l'intégrale voisine de (7)

$$K_m^n(z)=\frac{e^{(1-m)\pi i}(-1-z)^n}{2^{m+2}i\sin m\pi}\int_{+\infty}^{(1-,\,-1+)}\frac{(t^2-1)^m\,dt}{(t-z)^{m+n+1}}, \tag{9}$$

dont le contour d'intégration comporte deux lacets ayant la même origine que ceux de (7), parcourus successivement, le premier autour de 1 dans le sens rétrograde, le deuxième autour de -1 dans le sens direct. L'uniformité est réalisée ici dans le plan de z coupé par la portion $(-1, +\infty)$ de l'axe réel. Les conditions initiales sont encore exprimées par (8).

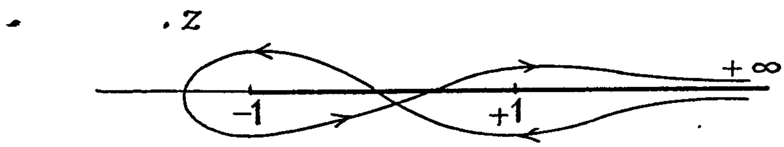

Fig. 2.

Remarquons que l'expression au second membre de (9) n'a un sens que lorsque m n'est pas entier. En fait, en vertu du principe de continuité, elle conserve un sens pour m entier non négatif. On exclut donc seulement, dans cette définition, les valeurs entières négatives de m.

Il résulte immédiatement de cette définition que $K_m^n(z)$ est une intégrale de l'équation différentielle linéaire

$$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}-2(z+n)\frac{dy}{dz}+m(m+1)y=0 \tag{10}$$

satisfaite par $J_m^n(z)$; en outre, de la même façon que (7) entraîne l'identité[1]

[1] Cf. loc. cit., p. 183.

$$(11) \qquad J_m^n(z) = \frac{(-1-z)^n}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)} \frac{d^n P_m(z)}{dz^n} \qquad n \geq 0,$$

où $J_m^0(z) = P_m(z)$ désigne la fonction de Legendre de première espèce, on déduit de (9) que

$$(12) \qquad K_m^n(z) = \frac{(-1-z)^n}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)} \frac{d^n Q_m(z)}{dz^n} \qquad n \geq 0,$$

où $K_m^0(z) = Q_m(z)$ désigne la fonction de Legendre de deuxième espèce. On voit de la même façon, par analogie avec (3), que l'on a

$$(13) \qquad K_m^{-n}(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n K_m^n(z).$$

Effectuons, par exemple au sujet de (13), le raisonnement général auquel il est fait allusion. (3) exprime en effet que

$$(14) \qquad \int_{+\infty}^{(1+,\, z+)} \frac{(t^2-1)^m}{(t-z)^{m+n+1}} \left[(z^2-1)^n - (t-z)^{2n}\right] dt \equiv 0;$$

or la condition nécessaire et suffisante pour qu'ait lieu une identité de la forme

$$\int_{+\infty}^{(1+,\, z+)} \frac{(t^2-1)^m \varphi(t)}{(t-z)^{m+n+1}} dt \equiv 0 \qquad m \text{ quelconque}$$

où $\varphi(t)$ est un polynôme en t de degré $p \geq 2$ est qu'il existe un polynôme $\psi(t)$ de degré $p-2$ tel qu'on ait identiquement

$$\frac{(t^2-1)^m \varphi(t)}{(t-z)^{m+n+1}} = \frac{d}{dt} \frac{(t^2-1)^{m+1} \psi(t)}{(t-z)^{m+1}}.$$

L'intégrale au premier membre de (14) est donc nulle aussi bien le long du contour relatif à $K_m^n(z)$ que le long de celui de $J_m^n(z)$, ce qui démontre (13).

Les fonctions $J_m^n(z)$ et $K_m^n(z)$ sont très voisines des fonctions $P_m^n(z)$ et $Q_m^n(z)$ de Ferrer, et s'expriment d'ailleurs aussi simplement qu'elles à l'aide des dérivées des fonctions de Legendre $P_m(z)$ et $Q_m(z)$. Il nous suffira donc de leur rattacher les nouvelles fonctions $\bar{J}_m^n(z)$ pour démontrer qu'avec celles-ci nous n'avons pas affaire à des fonctions essentiellement nouvelles.

4. En ce qui concerne $\bar{J}_m^n(z)$, le choix que nous avons fait au paragraphe précédent des polynômes $P(t)$ et $Q(t)$ donne

$$R(t, \tau_1, \sigma_2, \tau_2) = \frac{t+1}{z+1};$$

nous pouvons donc représenter les coefficients de (5) par

$$(15) \qquad \bar{J}_m^n(z) = \frac{(z+1)^n}{2^{m+1}\pi i} \int_{-\infty}^{(-1+,\,z+)} \frac{(t-1)^m (t+1)^{m-n-1}}{(t-z)^m}\, dt,$$

l'intégrale étant uniforme dans le plan de la variable z coupé par la portion $z \geq 1$ de l'axe réel, et prenant une valeur précisée par les conditions initiales

$$\arg(t-1) = \arg(t+1) = \arg(t-z) = \pi.$$

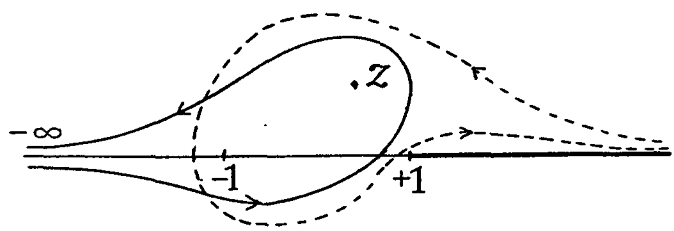

Fig. 3.

On peut d'ailleurs remplacer ce contour par un contour tournant directement autour des deux mêmes points -1 et z, mais dont l'origine et l'extrémité sont à l'infini positif de l'axe réel et au dessus; la valeur de cette intégrale coïncide alors avec (15) si l'on choisit les conditions initiales

$$\arg(t-1) = \arg(t+1) = \arg(t-z) = 0.$$

Un tel contour est tracé en pointillé sur la figure 3. On voit immédiatement que $z=1$ et $z=\infty$ sont les seuls points singuliers de $\bar{J}_m^n(z)$. $z=-1$ est un point régulier quel que soit le nombre entier n. Pour $n>0$, $z=-1$ est un zéro d'ordre n, au voisinage duquel

$$(16) \qquad \bar{J}_m^n(z) \sim e^{\pi i (m-n)} \binom{m}{n} \left(\frac{z+1}{2}\right)^n \qquad n>0.$$

Pour $n \leq 0$, on a

$$(17) \qquad \bar{J}_m^n(-1) = e^{\pi i (m-n)} \binom{-m}{-n} \qquad n \leqq 0.$$

Les fonctions $\bar{J}_m^n(z)$ ne vérifient pas une relation de la forme (3), mais on peut établir à leur sujet une relation assez analogue. Si l'on permute les deux polynômes $P(t)$ et $Q(t)$, la valeur de z n'est pas modifiée, et le développement (5) devient

$$\left(\frac{P(t)}{Q(t)}\right)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{J}_m^n(z)\, R\,(t, \sigma_1, \tau_2, \sigma_2)^n;$$

le domaine de validité n'est pas modifié. Or ceci s'écrit encore

$$\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^{-m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{J}_m^n(z)\, R\,(\tau_1, \sigma_1, \tau_2, \sigma_2)^n\, R\,(t, \tau_1, \sigma_2, \tau_2)^{-n},$$

et sa comparaison avec (5) montre, grâce à

$$R\,(\tau_1, \sigma_1, \tau_2, \sigma_2) = R(\sigma_1, \tau_1, \sigma_2, \tau_2) = \frac{2}{z+1},$$

que, à un puissance entière de $e^{2m\pi i}$ près, on a

$$\bar{J}_{-m}^{-n}(z) = \left(\frac{z+1}{2}\right)^{-n} \bar{J}_m^n(z).$$

D'ailleurs (16) et (17) montrent que, d'une manière précise,

$$\bar{J}_m^n(z) = e^{2m\pi i}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n \bar{J}_{-m}^{-n}(z). \tag{18}$$

En particulier, nous poserons

$$\bar{J}_m^0(z) = \bar{P}_m(z).$$

On voit alors que

$$\bar{P}_m(z) = e^{2m\pi i}\, \bar{P}_{-m}(z). \tag{19}$$

D'une manière générale, (18) nous permettra de borner au besoin notre attention aux fonctions $\bar{J}_m^n(z)$ d'indice $m > 0$.

5. On peut représenter $\bar{J}_m^n(z)$ par une intégrale trigonométrique assez remarquable. Pour que la couronne où le développement (5) est valable contienne le cercle trigonométrique, prenons $\sigma_2 = 0$, $\tau_2 = \infty$, il vient alors

$$R\,(t, \tau_1, \sigma_2, \tau_2) = \frac{t}{\tau_1},$$

et, en particulier,

$$R(\sigma_1, \tau_1, \sigma_2, \tau_2) = \frac{\sigma_1}{\tau_1} = \frac{2}{z+1}.$$

On peut donc choisir

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{z+1}{2}}, \quad \sigma_1 = \sqrt{\frac{2}{z+1}},$$

le radical désignant l'une quelconque des deux déterminations possibles, la même pour les deux zéros; dans ces conditions, on a $\sigma_1 \tau_1 = 1$, avec $|\tau_1| < 1$. Nous allons supposer en outre que z est réel, compris entre -1 et $+1$, ce qui suffit pour définir la fonction analytique $\bar{J}^n_m(z)$. Dans ces conditions, τ_1 et σ_1 peuvent être deux points du demi-axe réel positif, conjugués par rapport au cercle trigonométrique, et l'on a

$$P(t) \equiv 2t - 2\tau_1,$$
$$Q(t) \equiv 2\tau_1 t^2 - 2t.$$

On déduit alors de (5) que

$$\bar{J}^n_m(z) = \frac{\tau_1^n}{2\pi i} \int_{(c)} \left(\frac{\tau_1 t - 1}{t - \tau_1}\right)^m t^{m-n-1}\, dt,$$

l'intégrale étant étendue au cercle trigonométrique (c) parcouru dans le sens direct. Or, le long de ce cercle,

$$\left|\frac{t-\sigma_1}{t-\tau_1}\right| = C^{te},$$

donc

$$\left|\frac{\tau_1 t - 1}{t - \tau_1}\right| = 1;$$

d'autre part, l'angle

$$\arg\frac{\tau_1 t - 1}{t-\tau_1} = \arg\frac{t-\sigma_1}{t-\tau_1}$$

décroît de 2π à 0 lorsque l'argument φ de t croît de $-\pi$ à π. Par conséquent, si l'on désigne par θ l'argument de $\dfrac{t-\tau_1}{\sigma_1 - t}$, qui croît de $-\pi$ à $+\pi$ dans les mêmes conditions, on a

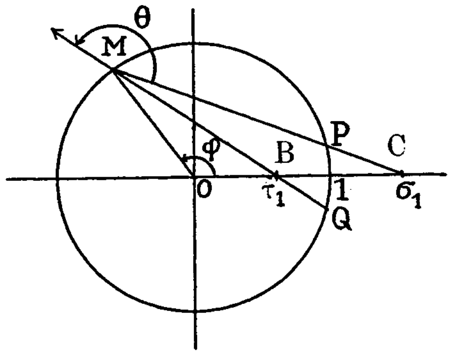

Fig. 4.

$$\bar{J}_m^n(z)=\frac{e^{\;\pi i}}{2\pi}\sqrt{\frac{z+1}{2}}^{\,n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i[(m-n)\varphi-m\theta]}\,d\varphi.$$

En remarquant que φ et θ changent simultanément de signe, ceci s'écrit encore

$$(20)\qquad \bar{J}_m^n(z)=\frac{e^{m\pi i}}{\pi}\sqrt{\frac{z+1}{2}}^{\,n}\int_0^{\pi}\cos[(m-n)\varphi-m\theta]\,d\varphi \qquad -1<z<1,$$

où le radical désigne la racine positive. En particulier, la valeur zéro de n donne

$$(21)\qquad \bar{P}_m(z)=\frac{e^{m\pi i}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos m(\varphi-\theta)\,d\varphi.$$

Pour $n=m\leq 0$, l'intégrale (15) fournit aisément

$$\bar{J}_n^n(z)=1 \qquad n\leq 0;$$

par suite, pour $n=m\geq 0$, on a, en vertu de (18),

$$\bar{J}_n^n(z)=\left(\frac{z+1}{2}\right)^n \qquad n\geq 0;$$

en portant ces valeurs dans (20), on obtient la formule

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos n\theta\,d\varphi=\left(-\sqrt{\frac{z+1}{2}}\right)^{|n|}.$$

D'ailleurs, en posant $\theta' = \pi - \theta = \arg \frac{t-\sigma_1}{t-\tau_1}$, ceci s'écrit encore

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos n\theta'\, d\varphi = O B^{|n|},$$

et cette formule est équivalente à la formule de Schwarz

$$f(B) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(P)\, d\varphi$$

qui fournit la valeur d'une fonction holomorphe en un point B intérieur d'un cercle; en effet θ' est l'angle polaire du point P où CM coupe le cercle; c'est également, au signe près, l'angle polaire du point Q où BM coupe ce cercle.

6. De même que $J_m^n(z)$, la fonction $\bar{J}_m^n(z)$ est développable en une série d'une fonction homographique de z dépendant d'un paramètre arbitraire, les coefficients de cette série étant des polynômes hypergéométriques en ce paramètre. La méthode suivie[1] pour $J_m^n(z)$ s'applique ici avec seulement quelques modifications des détails.

Reprenons la représentation générale de $\bar{J}_m^n(z)$, déduite du développement (5) de définition, par l'intégrale

$$(22) \qquad \bar{J}_m^n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(c)} \left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^m \frac{d\,R\,(t, \tau_1, \sigma_2, \tau_2)}{R\,(t, \tau_1, \sigma_2, \tau_2)^{n+1}},$$

où (c) est un contour simple, situé dans le domaine de validité de (5), parcouru dans le sens direct par rapport à σ_2 et dans le sens rétrograde par rapport à τ_2. Bien entendu, ce contour peut être déformé ensuite de manière continue pourvu qu'il ne rencontre aucun des quatre points critiques. En outre on pourra au besoin préciser les puissances m^e contenues dans le résultat afin d'identifier l'expression trouvée avec la fonction (15).

En mettant ces points critiques en évidence, (22) s'écrit

$$(23) \qquad \bar{J}_m^n(z) = \left(\frac{a'}{a}\right)^m \left(\frac{\tau_1 - \sigma_2}{\tau_1 - \tau_2}\right)^n \frac{\sigma_2 - \tau_2}{2\pi i}\, I,$$

I désignant l'intégrale

[1] Cf. loc. cit., p. 185—189.

$$I=\int_{(c)}(t-\sigma_1)^m(t-\sigma_2)^{m-n-1}(t-\tau_1)^{-m}(t-\tau_2)^{-m+n-1}\,dt.$$

Supposons que σ_2 soit le seul point critique qui varie avec z; il est nécessairement de la forme

$$\sigma_2=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant quatre constantes telles que $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Dans ces conditions, l'identification des deux membres de

$$R(\sigma_1,\sigma_2,\tau_1,\tau_2)=\frac{z-1}{z+1}$$

fournit, pour les trois autres zéros des deux trinômes, les expressions

$$\sigma_1=\frac{\alpha}{\gamma},\quad \tau_1=\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta},\quad \tau_2=\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}.$$

On en déduit immédiatement, compte tenu de $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, que

$$\frac{2}{a}=\tau_1-\tau_2=\frac{2}{\gamma^2-\delta^2},$$

$$\frac{2}{a'}=\sigma_1-\sigma_2=\frac{1}{\gamma(\gamma+\delta)},$$

ou encore, en posant $\delta=-\gamma z_0$,

$$a=\gamma^2(1-z_0^2),$$
$$a'=2\gamma^2(z-z_0).$$

On tire encore de là

$$\tau_1-\sigma_2=\frac{z+1}{(\gamma-\delta)(\gamma z+\delta)}=\frac{1}{\gamma^2(1+z_0)}\frac{z+1}{z-z_0},$$

$$\sigma_2-\tau_2=\frac{z-1}{(\gamma+\delta)(\gamma z+\delta)}=\frac{1}{\gamma^2(1-z_0)}\frac{z-1}{z-z_0},$$

ce qui permet d'écrire (23)

$$(24)\qquad \mathfrak{J}_m^n(z)=\frac{z-1}{z-z_0}\left(\frac{z-z_0}{1+z_0}\right)^m\left(\frac{z+1}{z-z_0}\right)^n\left(\frac{2}{1-z_0}\right)^{m-n}\frac{I}{2\pi i\gamma^2(1-z_0)}.$$

Supposons maintenant que l'on puisse choisir le contour (c) de façon que t vérifie sur ce contour l'inégalité

$$|t-\tau_1| > |\sigma_2-\tau_1|;$$

pour cela, il faut et il suffit que cette inégalité soit satisfaite par les points σ_1 et τ_2, autrement dit, que l'on ait la double inégalité

$$|\tau_2-\tau_1| > |\sigma_2-\tau_1|, \quad |\sigma_1-\tau_1| > |\sigma_2-\tau_1|,$$

c'est-à-dire

(25)
$$\left|\frac{z+1}{z-z_0}\right| < \frac{2}{|1-z_0|} \text{ et } 1.$$

Dans ces conditions, on peut remplacer dans l'expression de l'intégrale I

$$(t-\sigma_2)^{m-n-1}=(t-\tau_1+\tau_1-\sigma_2)^{m-n-1}$$

par son développement suivant les puissances entières croissantes de $\tau_1-\sigma_2$, ce qui donne

(26)
$$I=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m-n-1}{k}\left(\frac{1}{\gamma^2(1+z_0)}\frac{z+1}{z-z_0}\right)^k\int_{(c)}(t-\sigma_1)^m(t-\tau_1)^{-n-k-1}(t-\tau_2)^{-m+n-1}\,dt;$$

et maintenant on peut réduire (c) à un contour infinitésimal entourant le seul point singulier τ_1. Enfin, en remplaçant t par la nouvelle variable u définie par

$$t-\tau_1=\frac{u}{\gamma^2(1+z_0)},$$

il vient

$$t-\sigma_1=\frac{1+u}{\gamma^2(1+z_0)},$$

$$t-\tau_2=\frac{2}{\gamma^2(1-z_0^2)}\left(1+\frac{1-z_0}{2}u\right),$$

et (26) s'écrit

$$I=\gamma^2(1+z_0)\left(\frac{1-z_0}{2}\right)^{m-n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m-n-1}{k}\left(\frac{z+1}{z-z_0}\right)^k\int_{(\Gamma)}\frac{(1+u)^m\left(1+\frac{1-z_0}{2}u\right)^{-m+n-1}}{u^{n+k+1}}\,du,$$

où (Γ) est un contour infinitésimal parcouru dans le sens direct autour de $u=0$.

Cette dernière intégrale ne diffère donc de zéro que pour les valeurs de k rendant $n+k \geq 0$, c'est-à-dire pour les valeurs de k supérieures ou égales au plus grand des deux nombres $-n$, 0. Pour ces valeurs, le quotient de cette intégrale par $2\pi i$ est égal à

$$\sum_{h=0}^{n+k} \binom{-m+n-1}{h} \binom{m}{n+k-h} \left(\frac{1-z_0}{2}\right)^h. \tag{27}$$

Le coefficient général de cette dernière somme peut s'écrire

$$\binom{-m+n-1}{h}\binom{m}{n+k-h} =$$
$$= \binom{m}{n+k} \frac{(m-n+1)(m-n+2)\cdots(m-n+h)(-n-k)(-n-k+1)\cdots(-n-k+h-1)}{h!\,(m-n-k+1)(m-n-k+2)\cdots(m-n-k+h)},$$

et l'on voit ainsi que cette somme est la valeur du polynôme

$$\binom{m}{n+k} F\left(m-n+1,\, -n-k,\, m-n-k+1;\, \frac{1-z_0}{2}\right). \tag{27'}$$

D'ailleurs si l'on remarque que l'on peut considérer

$$\binom{m}{n+k} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+k+1)\,\Gamma(m-n-k+1)}$$

comme ayant la valeur zéro pour les valeurs négatives du nombre entier $n+k$, on voit que l'on peut substituer (27') dans l'expression de l'intégrale I en donnant à k toutes les valeurs entières positives ou nulle, sans se préoccuper du signe de n. (24) devient ainsi

$$\bar{J}_m^n(z) = \frac{1+z_0}{2}\frac{z-1}{z-z_0}\left(\frac{z-z_0}{1+z_0}\right)^m \times \tag{28}$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m-n-1}{k}\binom{m}{n+k} F\left(m-n+1,\, -n-k,\, m-n-k+1;\, \frac{1-z_0}{2}\right)\left(\frac{z+1}{z-z_0}\right)^{n+k},$$

et ce développement est valable dans le domaine défini par (25).

On peut donner à ce développement une forme légèrement différente; en transformant les polynômes hypergéométriques au second membre à l'aide de l'identité classique

$$F(a, b, c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c; z), \tag{29}$$

(28) s'écrit en effet[1]

$$(30)\qquad \mathfrak{J}^n_m(z)=\left(\frac{1+z_0}{2}\right)^{n+1}\frac{z-1}{z-z_0}\left(\frac{z-z_0}{1+z_0}\right)^m \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m-n-1}{k}\binom{m}{n+k}F\left(m+1,\,-k,\,m-n-k+1\,;\frac{1-z_0}{2}\right)\left(\frac{z+1}{z-z_0}\right)^{n+k}.$$

Le domaine de validité de ce développement se présente sous une forme qui dépend du choix du paramètre z_0. C'est ainsi que si z_0 est intérieur au cercle de centre 1 et de rayon 2, c'est-à-dire si l'on a $|1-z_0|<2$, la double inégalité (25) se réduit à

$$\left|\frac{z+1}{z-z_0}\right|<1,$$

et exprime que le domaine de convergence de (28) et (30) est le demi-plan, limité par la médiatrice de -1 et z_0, qui contient -1. Par contre, lorsque z_0 est extérieur au cercle en question, (25) se réduit à

$$\left|\frac{z+1}{z-z_0}\right|<\frac{2}{|1-z_0|},$$

qui exprime que le domaine de convergence est l'intérieur du cercle qui passe par le point 1 et qui est conjugué par rapport aux points -1 et z_0. -1 est la seule valeur qui soit inadmissible pour z_0. Tout ceci confirme avec évidence que les seuls points critiques de $\bar{\mathfrak{J}}^n_m(z)$ sont $z=1$ et $z=\infty$, ainsi que la nature du point régulier $z=-1$.

7. Le développement que nous venons d'obtenir prend des formes particulièrement simples pour $z_0=1$ et $z_0=\infty$.

Dans le premier cas les polynômes hypergéométriques auxiliaires se réduisent à l'unité, et (28) et (30) deviennent

$$(31)\qquad \bar{\mathfrak{J}}^n_m(z)=\left(\frac{z-1}{2}\right)^m\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m-n-1}{k}\binom{m}{n+k}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{n+k}.$$

Ceci s'exprime à l'aide d'une fonction hypergéométrique, en remarquant que

[1] Il est intéressant de remarquer que les polynômes hypergéométriques qui s'introduisent dans ces deux développements sont les mêmes que dans les développements analogues de la fonction $\mathfrak{J}^n_m(z)$. Cf. loc. cit., p. 187.

$$\frac{\Gamma(m-n)\,\Gamma(m+1)}{k!\,\Gamma(m-n-k)\,\Gamma(n+k+1)\,\Gamma(m-n-k+1)}=\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(m-n+1)}\times$$
$$\times\frac{(-m+n+1)(-m+n+2)\cdots(-m+n+k)(-m+n)(-m+n+1)\cdots(-m+n+k-1)}{k!\,(n+1)(n+2)\cdots(n+k)};$$

on peut convenir de désigner le premier facteur au second membre par $\binom{m}{n}$, quel que soit n, de sorte que $\binom{m}{n}$ doit être annulé pour les valeurs entières négatives de n, et (30) prend alors la forme remarquable

$$(32)\qquad \bar{J}_m^n(z)=\binom{m}{n}\left(\frac{z-1}{2}\right)^m\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n F\left(-m+n,\ -m+n+1,\ n+1;\ \frac{z+1}{z-1}\right).$$

Bien entendu, le second membre se présente sous forme indéterminée pour n entier négatif, par suite de la présence de termes infinis dans la fonction hypergéométrique, mais cette indétermination, qui n'est qu'apparente, disparait dès qu'on développe le produit de $\binom{m}{n}$ par cette fonction hypergéométrique.

Enfin, grâce à la transformation (29), (32) s'écrit encore

$$(33)\qquad \bar{J}_m^n(z)=\binom{m}{n}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{-m}\left(\frac{-z-1}{2}\right)^n F\left(m,\ m+1,\ n+1;\ \frac{z+1}{z-1}\right).$$

Le développement est valable dans le demi-plan $\Re(z)<0$, mais la représentation à l'aide de la fonction hypergéométrique au second membre vaut dans tout le plan de z coupé par la demi-droite $z\geq 1$. Si l'on veut que la fonction $\bar{J}_m^n(z)$ ainsi représentée coïncide avec celle dont nous avons précisé le choix au paragraphe 4, il faut que dans (32) l'argument de $z-1$ prenne la détermination comprise entre 0 et 2π, et, dans (33), la détermination comprise entre 0 et -2π.

Lorsque z_0 tend vers l'infini, la partie principale du polynôme hypergéométrique au second membre de (30) est

$$\frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}{(m-n-k+1)(m-n-k+2)\cdots(m-n)}\left(\frac{z_0-1}{2}\right)^k,$$

de sorte qu'il vient, à la limite,

$$\bar{\mathfrak{J}}_m^n(z) = e^{(m+n+1)\pi i}\frac{z-1}{2} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m-n-1}{k}\binom{m}{n+k} \frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}{(m-n-k+1)(m-n-k+2)\cdots(m-n)}\left(\frac{z+1}{2}\right)^{n+k}.$$

Il suffit alors de remarquer que le coefficient de $\left(\frac{z+1}{2}\right)^{n+k}$ dans cette dernière somme s'écrit

$$\binom{m}{n}\frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+k)(-m+n+1)(-m+n+2)\cdots(-m+n+k)}{k!\,(n+1)(n+2)\cdots(n+k)},$$

pour conclure à l'expression

$$(34)\qquad \bar{\mathfrak{J}}_m^n(z) = e^{m\pi i}\binom{m}{n}\frac{1-z}{2}\left(\frac{-1-z}{2}\right)^n F\left(m+1,\, -m+n+1,\, n+1;\, \frac{z+1}{2}\right);$$

le second membre représente la fonction $\bar{\mathfrak{J}}_m^n(z)$ du paragraphe 4 dans le plan coupé de la variable z. La transformation (29) permet d'ailleurs de remplacer (34) par la représentation plus simple

$$(35)\qquad \bar{\mathfrak{J}}_m^n(z) = e^{(m-n)\pi i}\binom{m}{n}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n F\left(m,\, n-m,\, n+1;\, \frac{z+1}{2}\right).$$

Il résulte immédiatement de cette formule que, lorsque m est un nombre entier positif, $\bar{\mathfrak{J}}_m^n(z)$ est un polynôme de degré m pour $n \leq m$, et se réduit à zéro pour $n > m$; lorsque m est entier et négatif, $\bar{\mathfrak{J}}_m^n(z)$ est un polynôme de degré $n-m$ si $n \geq m$, et disparait enfin pour $n < m$. On peut d'ailleurs vérifier ces derniers résultats à l'aide de la formule (18); on peut au contraire déduire immédiatement de (35) cette identité (18) ainsi que (16) et (17).

Voici une autre conséquence remarquable de (35). La fonction hypergéométrique ne changeant pas lorsqu'on y remplace m par $n-m$, n restant invariable, il vient

$$\bar{\mathfrak{J}}_{n-m}^n(z) = e^{(n-2m)\pi i}\frac{\binom{n-m}{n}}{\binom{m}{n}}\bar{\mathfrak{J}}_m^n(z)$$

$$= e^{-2m\pi i}\frac{m-n}{m}\bar{\mathfrak{J}}_m^n(z).$$

Ceci prend encore la forme symétrique

$$\frac{\bar{J}^n_{n-m}(z)}{n-m} = -e^{-2m\pi i}\frac{\bar{J}^n_m(z)}{m}. \tag{36}$$

En particulier, lorsque m est un nombre entier, on a

$$\frac{\bar{J}^n_{n-m}(z)}{n-m} = -\frac{\bar{J}^n_m(z)}{m}. \tag{37}$$

Pour $n=0$, (36) s'identifie avec la formule (19).

8. La simplicité de la forme de l'expression (35) suggère que $\bar{J}^n_m(z)$ doit vérifier une équation différentielle linéaire du second ordre de Riemann également simple. En posant $\frac{z+1}{2}=t$, et en écrivant que $t^n\bar{J}^n_m(z)$ satisfait à l'équation hypergéométrique de $F(m, n-m, n+1; t)$, on trouve immédiatement que $\bar{J}^n_m(z)$ est une intégrale de l'équation

$$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}+(1-n)(1-z)\frac{dy}{dz}+m(m-n)y=0. \tag{38}$$

C'est l'intégrale régulière au point $z=-1$, à un facteur constant près. En particulier, on a

$$(1-z^2)\frac{d^2\bar{P}_m(z)}{dz}+(1-z)\frac{d\bar{P}_m(z)}{dz}+m^2\bar{P}_m(z)=0. \tag{39}$$

CHAPITRE II.

Les fonctions $\bar{J}^n_m(z)$ et les fonctions de Legendre.

9. Les premières fonctions $\bar{P}_m(z)$ d'indice entier non négatif ($m=0, 1, \ldots$), que l'on calcule sans difficulté à partir de l'expression (35), qui se réduit ici à

$$\bar{P}_m(z)=(-1)^m F\left(m, -m, 1; \frac{z+1}{2}\right), \tag{1}$$

sont les polynômes

$$\bar{P}_0(z)=1,$$

$$\bar{P}_1(z)=\frac{z-1}{2},$$

$$\overline{P}_2(z)=\frac{3z^2-2z-1}{4},$$

$$\overline{P}_3(z)=\frac{5z^3-3z^2-3z+1}{4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

et l'on constate immédiatement que, pour ces valeurs de m, on a

$$\overline{P}_m(z)=\frac{P_m(z)-P_{m-1}(z)}{2} \qquad m=1,\ 2,\ 3. \tag{2}$$

Cette relation remarquable est vraie pour toutes les valeurs entières de m autres que zéro, et nous nous proposons de la démontrer tout d'abord à l'aide d'une simple vérification de caractère algébrique. Remarquons auparavant que l'identité

$$P_m(z)=P_{-m-1}(z),$$

jointe à l'identité (19) Ch. I

$$\overline{P}_m(z)=\overline{P}_{-m}(z),$$

permet de se borner à vérifier (1) pour m entier >0. C'est ce que nous supposons.

Nous utiliserons la formule

$$F(m+k,\ -m+k,\ k+1;\ 1)=(-1)^{m-k}\frac{k}{m}, \tag{3}$$

où l'on suppose $m-k$ entier et ≥ 0. Le premier membre de (3) a en effet un sens dans ces conditions, pourvu que k ne soit pas un nombre entier négatif, et se réduit effectivement aux $m-k+1$ premiers termes de son développement. D'autre part, l'identité

$$F(a, b, c;\ 1)=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \qquad \Re(c-a-b)>0$$

donne

$$F(m+k,\ -m+k,\ k+1;\ 1)=\frac{k\sin m\pi}{m\sin k\pi} \qquad \Re(k)<1, \tag{4}$$

pourvu que k ne soit pas entier.

Or si l'on suppose seulement que $m-k$ est un nombre entier non négatif, on peut ajouter un même nombre λ à m et à k sans modifier cette condition; et, en choisissant λ de façon que $\Re(\lambda+k)<1$, la relation (4) nous permet d'écrire

$$F(m+k+2\lambda,\ -m+k+1,\ k+\lambda+1;\ 1)=\frac{k+\lambda}{m+\lambda}(-1)^{m-k}.$$

Mais les deux membres sont des fonctions rationnelles de λ; l'identité subsiste donc quel que soit λ, et, en particulier, pour $\lambda=0$, ce qui démontre (3).

Ceci établi, nous allons développer le polynôme $\overline{P}_m(z)$ suivant les puissances de $\frac{1-z}{2}$ afin de pouvoir le comparer avec le second membre de (2) dont on connait le développement suivant ces mêmes puissances. Or l'expression (1) donne

$$\begin{aligned}\overline{P}_m(z)&=(-1)^m\sum_{h=0}^{m}\frac{m(m+1)\cdots(m+h-1)(-m)(-m+1)\cdots(-m+h-1)}{h!\,h!}\left(1-\frac{1-z}{2}\right)^h\\&=\sum_{h=0}^{m}\sum_{k=0}^{h}(-1)^{m+k}\frac{m(m+1)\cdots(m+h-1)(-m)(-m+1)\cdots(-m+h-1)}{h!\,k!\,(h-k)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\\&=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{m+k}}{k!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\sum_{r=0}^{m-k}\frac{m(m+1)\cdots(m+k+r-1)(-m)(-m+1)\cdots(-m+k+r-1)}{r!\,(k+r)!},\end{aligned}$$

le dernier membre se déduisant du précédent en posant $h=k+r$. Or la dernière somme a la valeur

$$\frac{m(m+1)\cdots(m+k-1)(-m)(-m+1)\cdots(-m+k-1)}{k!}F(m+k,\ -m+k,\ k+1;\ 1);$$

$m-k$ étant en nombre entier ≥ 0, la formule (3) nous fournit ainsi le développement cherché

$$(5)\quad \overline{P}_m(z)=\sum_{k=1}^{m}\frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+k-1)(-m)(-m+1)\cdots(-m+k-1)}{k!\,(k-1)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k.$$

D'autre part le développement connu de $P_m(z)$ suivant les puissances de $\frac{1-z}{2}$ donne[1]

$$P_m(z)-P_{m-1}(z)=F\left(-m,m+1,1;\frac{1-z}{2}\right)-F\left(-m+1,m,1;\frac{1-z}{2}\right),$$

et l'on vérifie tout de suite l'identité de ce second membre avec le développement (5).

[1] Par exemple, cf. loc. cit., p. 188.

En résumé, nous pouvons énoncer le

Théorème. Les fonctions $\bar{P}_m(z)=\bar{P}_{-m}(z)$ $(m=1, 2, \ldots)$ *sont les polynômes de degré m égaux aux demi-différences de deux polynômes de Legendre consécutifs.*

A titre d'application, remarquons que la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \bar{P}_m(z)\, h^m$$

converge alors pour les valeurs suffisamment petites de $|h|$ puisqu'il en est ainsi pour la série analogue construite avec les polynômes de Legendre, et sa somme est égale à

$$\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} P_m(z)\, h^m - \frac{h}{2}\sum_{m=0}^{\infty} P_m(z)\, h^m = \frac{1-h}{2\sqrt{1-2hz+h^2}} - \frac{1}{2}.$$

On peut donc définir encore les polynômes $\bar{P}_m(z)$ par le développement

$$\frac{1-h}{\sqrt{1-2hz+h^2}} = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \bar{P}_m(z)\, h^m.$$

10. Le résultat exprimé par (2) nous apprend que l'équation différentielle (39) Ch. I est satisfaite, pour m entier, par l'intégrale

$$(6)\qquad P_m(z) - P_{m-1}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\infty}^{(1+,\, z+)} \left[\frac{(t^2-1)^m (t-z)^{-m-1}}{2^m} - \frac{(t^2-1)^{m-1}(t-z)^{-m}}{2^{m-1}}\right] dt.$$

Par conséquent cette qualité de l'intégrale (6) subsiste pour toutes les valeurs de m grâce à l'uniformité de la fonction sous le signe d'intégration le long du contour d'intégration; en effet le résultat de la substitution de (5) dans le premier membre de (39) Ch. I fournit une intégrale de même nature et nulle pour m entier, donc nulle quel que soit m.

D'autre part cette fonction sous le signe d'intégration de (6) est également uniforme le long du contour d'intégration qui sert à définir $K_m^n(z)$ par l'intégrale (9) Ch. I. Une deuxième intégrale de l'équation (39) Ch. I est donc

$$(7)\qquad Q_m(z) - Q_{m-1}(z) = \frac{e^{(1-m)\pi i}}{4 i \sin m\pi}\int_{+\infty}^{(1-,\, -1+)} \left[\frac{(t^2-1)^m (t-z)^{-m-1}}{2^m} - \frac{(t^2-1)^{m-1}(t-z)^{-m}}{2^{m-1}}\right] dt.$$

Ces deux intégrales sont distinctes lorsque m est un nombre quelconque; on en conclut que, dans le cas général, $\overline{P}_m(z)$ est une combinaison linéaire et homogène de $P_m(z)-P_{m-1}(z)$ et $Q_m(z)-Q_{m-1}(z)$.

Effectivement, si l'on remarque que le contour de l'intégrale (15) Ch. I laisse le point 1 à son extérieur, on est conduit à former la combinaison des deux intégrales (6) et (7) pour laquelle les deux lacets autour de ce point se détruisent, savoir

$$\frac{P_m(z)-P_{m-1}(z)}{2}-\frac{e^{m\pi i}\sin m\pi}{\pi}(Q_m(z)-Q_{m-1}(z))$$
$$=\frac{1}{2^{m+2}\pi i}\int_{+\infty}^{(-1+,\,z+)}\frac{(t^2-1)^{m-1}}{(t-z)^{m+1}}[t^2-1-2(t-z)]\,dt.$$

Compte tenu de la valeur de $\overline{P}_m(z)$ que fournit l'intégrale (15) Ch. I

$$\overline{P}_m(z)=\frac{1}{2^{m+1}\pi i}\int_{+\infty}^{(-1+,\,z+)}\frac{(t^2-1)^{m-1}(t-1)}{(t-z)^m}\,dt,$$

on voit que la différence

$$\overline{P}_m(z)-\frac{1}{2}(P_m(z)-P_{m-1}(z))+\frac{e^{m\pi i}\sin m\pi}{\pi}(Q_m(z)-Q_{m-1}(z)) \tag{8}$$

est représentée par l'intégrale

$$\frac{1}{2^{m+2}\pi i}\int_{+\infty}^{(-1+,\,z+)}\frac{(t^2-1)^{m-1}}{(t-z)^{m+1}}(t^2-2zt+1)\,dt. \tag{9}$$

Nous avons démontré, comme conséquence du paragraphe précédent, que la valeur de cette intégrale est zéro pour les valeurs entières de m; il doit donc en être de même quel que soit m, et effectivement la quantité sous le signe d'intégration de (9) est la différentielle de $\frac{(t^2-1)^m}{m(t-z)^m}$. L'expression (8) est donc identiquement nulle, ce qui fournit l'identité générale

$$\overline{P}_m(z)=\frac{1}{2}(P_m(z)-P_{m-1}(z))-\frac{e^{m\pi i}\sin m\pi}{\pi}(Q_m(z)-Q_{m-1}(z)). \tag{10}$$

11. Cette dernière formule est elle-même un cas particulier d'une formule tout à fait générale exprimant $\bar{J}_m^n(z)$ à l'aide des fonctions $J_m^n(z)$ et $K_m^n(z)$, c'est-à-dire des fonctions de Legendre des deux espèces et leurs dérivées.

Nous supposons que n n'est pas négatif et que m n'est pas un nombre entier $< n+1$. Ces conditions ne constituent pas une restriction relativement à notre recherche car les formules (18) Ch. I et (36) Ch. I permettent toujours de les réaliser. Nous allons alors montrer *qu'il existe $n+2$ constantes $l_s(m,n)$* ($s=0, 1, \ldots n+1$), *fonctions de m et n, telles que l'on ait*[1]

$$\bar{J}_m^n(z) = \sum_{s=0}^{n+1} l_s \left(J_{m-s}^n(z) - \frac{2\, e^{m\pi i} \sin m\pi}{\pi} K_{m-s}^{-n}(z) \right). \tag{11}$$

La représentation de $J_m^n(z)$ et $K_m^n(z)$ par les intégrales (7) Ch. I et (9) Ch. I fournit du second membre de (11) l'expression

$$(-1-z)^n \sum_{s=0}^{n+1} \frac{l_s}{2^{m-s}} \frac{1}{2\pi i} \int_{+\infty}^{(-1+,\,z+)} \frac{(t^2-1)^{m-s}}{(t-z)^{m-s+n+1}}\, dt \tag{12}$$

avec les conditions initiales (8) Ch. I.

Pour comparer cette expression à la représentation (35) Ch. I de $\bar{J}_m^n(z)$, nous allons développer l'intégrale qui y entre suivant les puissances entières de $\frac{z+1}{2}$. Or, si z est suffisamment voisin de -1, on peut choisir un contour d'intégration le long duquel on ait

$$|t+1| > |z+1|;$$

en développant alors $(t-z)^{-m-n+s-1} = (t+1-z-1)^{-m-n+s-1}$ en série entière de $z+1$, il vient

$$\int_{+\infty}^{(-1+,\,z+)} \frac{(t^2-1)^{m-s}}{(t-z)^{m-s+n+1}}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-m-n+s-1}{k} (-z-1)^k \int_{+\infty}^{(-1+,\,z+)} (t-1)^{m-s} (t+1)^{-n-k-1}\, dt;$$

compte tenu de (8) Ch. I, on a

[1] Quand aucune ambiguité ne sera possible, nous écrirons simplement l_s pour $l_s(m,n)$, afin de simplifier l'écriture.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+\infty}^{(-1+,z+)}(t-1)^{m-s}(t+1)^{-n-k-1}dt=\sum_{h=0}^{\infty}\binom{m-s}{h}\frac{e^{(m-s-h)\pi i}\,2^{m-s-h}}{2\pi i}\int_{+\infty}^{(-1+,z+)}\frac{dt}{(t+1)^{n+k-h+1}}$$

$$=\binom{m-s}{n+k}e^{(m-n-s-k)\pi i}\,2^{m-n-s-k};$$

on obtient ainsi pour (12), c'est-à-dire le second membre de (11), le développement

$$e^{m\pi i}\left(\frac{z+1}{2}\right)^{n}\sum_{s=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^s l_s\binom{m-s}{n+k}\binom{-m-n+s-1}{k}\left(\frac{z+1}{2}\right)^{k}.$$

Pour démontrer notre proposition, il nous suffit donc de montrer qu'il existe $n+2$ constants l_s telles que l'on ait identiquement

$$\sum_{s=0}^{n+1}(-1)^s l_s\binom{m-s}{n+k}\binom{-m-n+s-1}{k}=$$

$$=(-1)^n\binom{m}{n}\frac{m(m+1)\cdots(m+k-1)(n-m)(n-m+1)\cdots(n-m+k-1)}{k!\,(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}.$$

En multipliant les deux membres par $(-1)^k k!\,(n+k)!$, nous voyons que l'on est ramené à démontrer l'identité

(13) $$\sum_{s=0}^{n+1}(-1)^{n+s}l_s\frac{\Gamma(-m-n+s)\,\Gamma(-m+n+k+s)}{\Gamma(-m-n-k+s)\,\Gamma(-m+s)}=-m\frac{\Gamma(-m+n+k)}{\Gamma(-m-k+1)},$$

qui se déduit de la précédente en utilisant également l'identité

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin\pi a}.$$

En posant

(14) $$\lambda_s(m,n)=l_s(m,n)\frac{\Gamma(-m-n+s)}{\Gamma(-m+s)},$$

(13) s'écrit

$$\sum_{s=0}^{n+1}(-1)^{n+1+s}\lambda_s(m,n)\frac{\Gamma(-m+n+k+s)\,\Gamma(-m-k+1)}{\Gamma(-m+n+k)\,\Gamma(-m-k-n+s)}=m,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{s=0}^{n+1}(-1)^s\lambda_s(m,n)\left\{\begin{matrix}(m-n-k)(m-n-k-1)\cdots(m-n-k-s+1)\\ \times(m+k+n-s)(m+k+n-s-1)\cdots(m+k)\end{matrix}\right\}=m.$$

Enfin, en utilisant la notation

$$(x, 1)_s = \frac{x(x-1)\cdots(x-s+1)}{s!}$$

des polynômes de Newton, nous voyons que tout revient à montrer qu'il existe $n+2$ constantes $\lambda_s(m, n)$ $(s=0, 1, \ldots n+1)$ telles que l'on ait

$$(15) \qquad \sum_{s=0}^{n+1} \frac{(-1)^s \lambda_s s!(n+1-s)!}{m} (m-n-k, 1)_s (m+n+k-s, 1)_{n+1-s} = 1.$$

Or il suffit de rapprocher ceci de l'identité[1]

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{(x, 1)_s (y-s, 1)_{n-s}}{(x+y-s, 1)_n} \frac{x+y+1-2s}{x+y+1-s} = 1,$$

où l'on ferait $x=m-n-k, y=m+n+k$, pour voir que l'identité (15) est bien réalisée en prenant

$$(16) \qquad \lambda_s(m, n) = (-1)^s \binom{n+1}{s} \frac{m(2m+1-2s)}{(2m+1-s)(2m-s)\cdots(2m-n-s)}.$$

Notre proposition est ainsi démontrée; nous connaissons même les valeurs des coefficients $l_s(m, n)$, grâce à (14) et (16). Si ce sont les $l_s(m, n)$ qui s'introduisent comme coefficients des $J^n_{m-s}(z)$ et $K^n_{m-s}(z)$, ce sont au contraire les $\lambda_s(m, n)$ qui apparaissent lorsqu'on exprime la somme (11) à l'aide des fonctions de Legendre elles-mêmes. On déduit en effet de (11) Ch. I et (12) Ch. I que (11) s'écrit encore, en vertu de (14),

$$(17) \qquad \bar{J}^n_m(z) = (z+1)^n \frac{d^n}{dz^n} \sum_{s=0}^{n+1} \lambda_s(m, n) \left(P_{m-s}(z) - \frac{2e^{m\pi i}\sin m\pi}{\pi} Q_{m-s}(z)\right).$$

12. Examinons maintenant ce que devient cette relation lorsque les conditions où nous nous sommes placés ne sont plus satisfaites. Tout d'abord, $n+1$ restant positif, supposons $m < n+1$ et entier. Les fonctions $Q_{m-s}(z)$ au second membre de (17) dont l'indice s est supérieur à m perdent toute signification, mais ce qui importe ici est la valeur que prend l'expression

$$(18) \qquad -\frac{e^{m\pi i}\sin m\pi}{\pi} Q_{m-s}(z) = \frac{1}{2^{m-s+2}\pi i} \int_{+\infty}^{(1-,\,-1+)} \frac{(t^2-1)^{m-s}}{(t-z)^{m-s+1}} dt;$$

[1] Cf. René Lagrange: Sur les polynômes de Newton et certaines formules d'interpolation, Acta math. 52 (1929), p. 174.

$m-s+1$ devient, pour ces valeurs de s, un nombre entier ≤ 0, l'intégrale au second membre représente alors une fonction de z régulière aux points $z=1$ et $z=-1$, et, comme elle vérifie l'équation de Legendre de $P_{m-s}(z)$, elle ne diffère de cette fonction que par un facteur constant. En se plaçant au point $z=1$, où $P_{m-s}(1)=1$ et où le second membre de (18) prend la valeur -1 comme le montre un calcul élémentaire, on voit que ce facteur constant est égal à -1. On en conclut que *l'identité* (17) *est valable quel que soit m, pour les valeurs non négatives de n, à condition de remplacer les termes*[1] $\frac{e^{m\pi i}\sin m\pi}{\pi} Q_{m-s}(z)$ *d'indice $m-s$ entier négatif par $P_{m-s}(z)$*. Remarquons que cela revient à remplacer chaque parenthèse au second membre de (17) dont la signification disparait par son premier terme changé de signe.

Enfin, pour les valeurs négatives de n, l'identité (18) Ch. I nous permet d'utiliser (18), et l'on obtient ainsi

$$(19)\qquad \bar{J}_m^n(z) = \frac{e^{2m\pi i}}{2^n}\frac{d^{-n}}{dz^{-n}}\sum_{s=0}^{-n+1}\lambda_s(-m,-n)\left(P_{-m-s}(z) + \frac{2e^{-m\pi i}\sin m\pi}{\pi}Q_{-m-s}(z)\right)$$
$$n < 0,$$

Remarquons que l'on peut encore transformer les expressions (17) et (19) en utilisant la formule (36) Ch. I. On obtient alors, suivant le signe de n,

$$(20)\quad \bar{J}_m^n(z) = \frac{m\,e^{2m\pi i}}{m-n}(z+1)^n\frac{d^n}{dz^n}\sum_{s=0}^{n+1}\lambda_s(n-m,n)\left(P_{n-m-s}(z) + \frac{2e^{-m\pi i}\sin m\pi}{\pi}Q_{n-m-s}(z)\right)$$
$$n \geq 0,$$

ou

$$(21)\quad \bar{J}_m^n(z) = \frac{m}{2^n(m-n)}\frac{d^{-n}}{dz^{-n}}\sum_{s=0}^{-n+1}\lambda_s(m-n,-n)\left(P_{m-n-s}(z) - \frac{2e^{m\pi i}\sin m\pi}{\pi}Q_{m-n-s}(z)\right)$$
$$n < 0.$$

Bien entendu ces développements demeurent applicables à toutes les valeurs de m à condition de remplacer toute parenthèse au second membre dont la signification disparait, c'est-à-dire dont l'indice prend une valeur négative entière, par son premier terme changé de signe.

On peut résumer ces résultats par la proposition suivante: *La fonction $\bar{J}_m^n(z)$ est, au facteur $(z+1)^{\frac{n+|n|}{2}}$ près, la dérivée d'ordre $|n|$ d'une forme linéaire*

[1] Cela revient encore à dire que $\frac{e^{k\pi i}\sin k\pi}{\pi} Q_k(z) = P_k(z)$ pour k entier <0.

à coefficients constants de $|n|+2$ *fonctions de Legendre d'indices successifs, chacune de ces fonctions étant la même combinaison linéaire des deux fonctions de Legendre de première et de deuxième espèce de même indice.*

13. Il est tout indiqué d'examiner ce que donne l'identification des deux seconds membres de (17) et (20). Nous allons voir ainsi que l'on retrouve d'une manière bien remarquable l'expression classique de la fonction de Legendre de première espèce à l'aide des fonctions de deuxième espèce. Cette identification exprime en effet que

$$\frac{d^n}{dz^n}\sum_{s=0}^{n+1}\left[\frac{e^{2m\pi i}\lambda_s(n-m,n)}{n-m}\left(P_{n-m-s}(z)+\frac{2\,e^{-m\pi i}\sin m\pi}{\pi}Q_{n-m-s}(z)\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda_s(m,n)}{m}\left(P_{m-s}(z)-\frac{2\,e^{m\pi i}\sin m\pi}{\pi}Q_{m-s}(z)\right)\right]=0 \qquad n\geq 0,$$

c'est-à-dire que la somme est un polynôme de degré au plus égal à $n-1$ pour $n\geq 1$, et est nulle pour $n=0$. En remarquant que

$$\frac{\lambda_{n+1-s}(n-m,n)}{n-m}=\frac{\lambda_s(m,n)}{m},$$

cette somme s'écrit encore

$$(22)\qquad \sum_{s=0}^{n+1}\frac{\lambda_s(m,n)}{m}\left[P_{m-s}(z)+e^{2m\pi i}P_{-m-1+s}(z)-\frac{2\,e^{m\pi i}\sin m\pi}{\pi}\left(Q_{m-s}(z)-Q_{-m-1+s}(z)\right)\right].$$

Par exemple, si m est un nombre entier supérieur à $n+1$, l'indice $-m-1+s$ est négatif pour toutes les valeurs prises par s, de sorte que chaque crochet au second membre de (22) se réduit, en vertu de la remarque faite au paragraphe précédent, à

$$(23)\qquad P_{m-s}(z)-P_{-m-1+s}(z);$$

cette quantité étant nulle, la somme (22) elle-même s'annule dans ce cas particulier.

Dans le cas général, nous allons voir que cette somme est toujours nulle, du fait même de la nullité de chaque crochet. Simplifions la d'abord en utilisant la nullité de (23), et en la multipliant par $\frac{m\,e^{-m\pi i}}{2}$, ce qui ne modifie évidemment en rien notre proposition. Nous considérons ainsi l'expression

$$(24)\qquad \sum_{s=0}^{n+1}\lambda_s(m,n)\left[\cos m\pi\,P_{m-s}(z)-\frac{\sin m\pi}{\pi}\left(Q_{m-s}(z)-Q_{-m-1+s}(z)\right)\right].$$

Nous savons qu'elle est nulle pour $n=0$, ce qui exprime, grâce à

$$\lambda_0(m,0) = -\lambda_1(m,0) = \frac{1}{2},$$

que l'on a identiquement, quel que soit m,

$$\cos m\pi\, P_m(z) - \frac{\sin m\pi}{\pi}(Q_m(z) - Q_{-m-1}(z)) = \cos m\pi\, P_{m-1}(z) - \frac{\sin m\pi}{\pi}(Q_{m-1}(z) - Q_{-m}(z)).$$

Or le second membre se déduit du premier, au signe près, en changeant m en $m-1$; on déduit donc immédiatement de là, par récurrence, que, d'une manière générale,

$$(25)\quad \cos m\pi\, P_m(z) - \frac{\sin m\pi}{\pi}(Q_m(z) - Q_{-m-1}(z)) = \\ = \cos m\pi\, P_{m-s}(z) - \frac{\sin m\pi}{\pi}(Q_{m-s}(z) - Q_{-m-1+s}(z)),$$

quels que soient m et le nombre entier s.

Ceci établi, remarquons que le second membre de (25) vérifie l'équation de Legendre de $P_{m-s}(z)$, savoir

$$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - 2z\frac{dy}{dz} + (m-s)(m+1-s)y = 0;$$

le premier membre de (25) vérifie donc toutes les équations obtenues en donnant à s toutes les valeurs entières, ce qui exige évidemment qu'il soit nul. Il suffirait même de raisonner sur les valeurs $s=0$ et s.

Nous avons ainsi retrouvé, par l'intermédiaire des fonctions $\bar{J}_m^n(z)$, l'identité classique[1]

$$(26)\qquad \cos m\pi\, P_m(z) = \frac{\sin m\pi}{\pi}(Q_m(z) - Q_{-m-1}(z)).$$

Il est tout à fait curieux que l'on pourrait démontrer la nullité de (24) sans utiliser (26). En effet, si l'on ne tient compte que de l'égalité de tous les crochets entre eux, ce que nous avons obtenu avec (25), (24) peut s'écrire

$$(27)\qquad \left[\cos m\pi\, P_m(z) - \frac{\sin \pi m}{\pi}(Q_m(z) - Q_{-m-1}(z))\right] \sum_{s=0}^{n+1} \lambda_s(m,n),$$

[1] Par exemple, Cf. Whittaker and Watson, «A Course of Modern Analysis», 1920, p. 334.

et nous allons voir que ce n'est pas seulement le crochet, mais encore son facteur numérique, qui est nul, de sorte que notre somme (24) ne pouvait guère échapper à la nullité. En effet, si nous remplaçons les $\lambda_s(m,n)$ par leur valeur, et si nous changeons n en $n-1$ et $2m$ en x, nous sommes amenés à vérifier que

$$(28)\qquad \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s (n,1)_s}{(x-s)(x-s-1)\cdots(x-s-n+1)} \frac{x+1-2s}{x+1-s} = 0 \qquad n \geq 1.$$

Le premier membre est une fonction rationnelle de x, nulle à l'infini; chacun de ses termes admet des pôles simples, qui sont $x=s-1, s, \ldots s+n-1$ pour le $(s+1)^{\text{ème}}$; la somme (28) ne peut donc admettre que les seuls pôles simples[1] $x=0, 1, 2, \ldots 2n-1$. Il suffit donc de démontrer que les résidus de ces pôles sont nuls. Or le point d'affixe k est un pôle pour les termes de (28) dont l'indice s est tel que

$$s-1 \leq k \leq s+n-1,$$

c'est à-dire

$$k+1-n \leq s \leq k+1.$$

Tout d'abord, lorsque $0 \leq k \leq n-1$, le résidu en un tel pôle serait

$$\sum_{s=0}^{k+1} \frac{(-1)^s (n,1)_s (k+1-2s)}{(k+1-s)(k-s)\cdots 1\,(-1)(-2)\cdots(k+1-n-s)} =$$
$$= (-1)^{n-k-1} \sum_{s=0}^{k+1} \frac{n!\,(k+1-2s)}{s!\,(n-s)!\,(k+1-s)!\,(n-k-1+s)!},$$

mais cette dernière somme est évidemment nulle car deux termes équidistants des extrêmes y sont opposés. On peut traiter de la même façon le cas où $n \leq k \leq 2n-1$, ce qui démontre notre proposition.

14. L'identité (26) permet d'exprimer $\bar{J}_m^n(z)$ à l'aide des seules fonctions de Legendre de deuxième espèce, tout au moins lorsque m n'est pas entier. C'est ainsi que l'on peut remplacer (17) par

$$(29)\quad \bar{J}_m^n(z) = -\frac{\operatorname{tg} m\pi}{\pi}(z+1)^n \frac{d^n}{dz^n} \sum_{s=0}^{n+1} \lambda_s(m,n)\left(e^{2m\pi i}\, Q_{m-s}(z) + Q_{-m+s-1}(z)\right) \qquad n \geq 0,$$

et (19) par

[1] Le point $x = -1$ que fournit l'affixe $s-1$ pour $s=0$ n'est pas un pôle à cause du numérateur $x+1-2s$, qui s'annule alors en même temps que $x+1-s$.

$$(30)\quad \bar{J}_m^{-n}(z) = \frac{\operatorname{tg} m\pi}{\pi} 2^n \frac{d^n}{dz^n} \sum_{s=0}^{n+1} \lambda_s(-m, n)\left(e^{2m\pi i} Q_{m+s-1}(z) + Q_{-m-s}(z)\right) \qquad n \geq 0.$$

Ces deux formules restent d'ailleurs valables pour les valeurs entières de m à condition de remplacer les termes $\frac{\operatorname{tg} s\pi}{\pi} Q_s(z)$ d'indice s entier < 0 par $P_s(z)$.

CHAPITRE III.

Quelques propriétés des fonctions $\bar{J}_m^n(z)$.

15. Proposons-nous de trouver une limite supérieure de $|\bar{J}_m^n(z)|$. Pour cela, plaçons-nous de nouveau dans les conditions du paragraphe 5, sans supposer cependant que z soit réel. Nous savons alors que l'on a

$$(1)\qquad \bar{J}_m^n(z) = \frac{\tau_1^n}{2\pi i} \int_{(c)} \left(\frac{\tau_1 t - 1}{t - \tau_1}\right)^m t^{m-n-1}\, dt,$$

où (c) désigne le cercle trigonométrique, parcouru dans le sens direct, et où $\tau_1 = \sqrt{\frac{z+1}{2}}$ est l'une quelconque des deux racines carrées de $\frac{z+1}{2}$. On suppose également $|z+1| < 2$.

En posant $t = e^{i\varphi}$, (1) s'écrit encore

$$(2)\qquad \bar{J}_m^n(z) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{z+1}{2}}^{\,n} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sqrt{\frac{z+1}{2}}\, e^{i\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - \sqrt{\frac{z+1}{2}}}\right)^m e^{i(m-n)\varphi}\, d\varphi.$$

Considérons l'ellipse de foyers ± 1 qui passe par le point représentatif de $\sqrt{\frac{z+1}{2}}$; soit 2α la mesure de son grand axe et θ l'anomalie excentrique de ce point. On a

$$\sqrt{\frac{z+1}{2}} = \alpha\cos\theta + i\sqrt{\alpha^2 - 1}\sin\theta,$$

$$\left|\sqrt{\frac{z+1}{2}}\right| = \sqrt{\alpha^2 - \sin^2\theta},$$

avec

$$(3)\qquad 1 \leq \alpha < \sqrt{1 + \sin^2\theta}.$$

Si l'on désigne par ω l'argument du nombre complexe $\sqrt{\frac{z+1}{2}}$, on peut encore écrire

$$\sqrt{\frac{z+1}{2}} = \sqrt{\alpha^2-\sin^2\theta}\, e^{i\omega},$$

$$\sin\omega = \frac{\sqrt{\alpha^2-1}\sin\theta}{\sqrt{\alpha^2-\sin^2\theta}}, \quad \cos\omega = \frac{\alpha\cos\theta}{\sqrt{\alpha^2-\sin^2\theta}}.$$

Ceci posé, la valeur absolue de la quantité sous le signe d'intégration au second membre de (2) est donnée par

$$(4) \qquad \left|\frac{\sqrt{\frac{z+1}{2}}\,e^{i\varphi}-1}{e^{i\varphi}-\sqrt{\frac{z+1}{2}}}\right|^2 = \frac{\alpha^2+\cos^2\theta-2\sqrt{\alpha^2-\sin^2\theta}\cos(\varphi+\omega)}{\alpha^2+\cos^2\theta-2\sqrt{\alpha^2-\sin^2\theta}\cos(\varphi-\omega)},$$

et nous sommes conduits à déterminer les valeurs extrêmes de ce dernier rapport lorsque φ varie de 0 à 2π. Or ce rapport est de la forme $\frac{\mu-\cos(\varphi+\omega)}{\mu-\cos(\varphi-\omega)}$, où la quantité $\mu = \frac{\alpha^2+\cos^2\theta}{2\sqrt{\alpha^2-\sin^2\theta}}$ est essentiellement supérieure à l'unité, et il passe par un maximum ou un minimum pour

$$\sin\omega(\mu\cos\varphi-\cos\omega) = 0.$$

Nous savons déjà que (4) est indépendant de φ lorsque $\sqrt{\frac{z+1}{2}}$ est réel, donc ce rapport reste toujours compris entre les valeurs qu'il prend pour

$$\cos\varphi = \frac{\cos\omega}{\mu} = \frac{2\alpha\cos\theta}{\alpha^2+\cos^2\theta};$$

ceci fournit deux angles φ et $2\pi-\varphi$, pour lesquels les valeurs de (4) sont inverses l'une de l'autre. La plus grande est d'ailleurs

$$\frac{\sqrt{\mu^2-\cos^2\omega}+|\sin\omega|}{\sqrt{\mu^2-\cos^2\omega}-|\sin\omega|} = \left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1}+|\sin\theta|}{\sqrt{\alpha^2-1}-|\sin\theta|}\right)^2,$$

de sorte que, le long du cercle (c), on a

$$\frac{|\sin\theta|-\sqrt{\alpha^2-1}}{|\sin\theta|+\sqrt{\alpha^2-1}} \leq \left|\frac{\sqrt{\frac{z+1}{2}}\,e^{i\varphi}-1}{e^{i\varphi}-\sqrt{\frac{z+1}{2}}}\right| \leq \frac{|\sin\theta|+\sqrt{\alpha^2-1}}{|\sin\theta|-\sqrt{\alpha^2-1}}.$$

On en conclut que, quel que soit m,

(5) $$|\bar{J}_m^n(z)| \leq \left|\sqrt{\frac{z+1}{2}}\right|^n \left(\frac{|\sin\theta| + \sqrt{\alpha^2-1}}{|\sin\theta| - \sqrt{\alpha^2-1}}\right)^{|m|}.$$

16. Il résulte de l'inégalité ainsi établie que la série $\sum_{r=0}^{\infty} \bar{J}_m^{n+r}(z)$ est absolument convergente pour $\left|\frac{z+1}{2}\right| < 1$. Il est aisé de calculer sa somme, en se reportant au développement (5) Ch. I qui nous a servi à définir $\bar{J}_m^n(z)$; il suffit en effet de développer les deux membres de l'identité

$$\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^{m+1} = \left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^m \frac{Q(t)}{P(t)},$$

sous la double condition $1 < |R(t, \tau_1, \sigma_2, \tau_2)| < \frac{2}{|z+1|}$. En désignant toujours par ξ ce rapport anharmonique, il vient donc

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{J}_{m+1}^n(z)\, \xi^n = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \bar{J}_1^r(z)\, \bar{J}_m^s(z)\, \xi^{r+s},$$

et, par suite,

(6) $$J_{m+1}^n(z) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \bar{J}_1^r(z)\, \bar{J}_m^{n-r}(z).$$

D'autre part, on sait que $\bar{J}_1^r(z)$ est nul pour $r > 1$, et que $\bar{J}_1^1(z) = \frac{z+1}{2}$. La formule (35) Ch. I nous donne d'autre part

$$\bar{J}_1^r(z) = \frac{z-1}{2} \qquad r \leq 0,$$

de sorte que (6) s'écrit

$$\bar{J}_{m+1}^n(z) = \frac{z+1}{2} \bar{J}_m^{n-1}(z) + \frac{z-1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \bar{J}_m^{n+r}(z).$$

La série considérée a donc une somme égale à

(7) $$\sum_{r=n}^{\infty} \bar{J}_m^r(z) = \frac{2\,\bar{J}_{m+1}^n(z) - (z+1)\,\bar{J}_m^{n-1}(z)}{z-1}.$$

17. En retranchant (7) de l'identité qu'on en déduit en remplaçant n par $n+1$, on obtient une relation de récurrence entre quatre fonctions $\bar{J}_m^n(z)$, savoir

$$(8)\qquad \bar{J}_{m+1}^{n+1}(z)=\bar{J}_{m+1}^{n}(z)+\bar{J}_m^n(z)-\frac{z+1}{2}\bar{J}_m^{n-1}(z).$$

En particulier, pour $n=0$, (8) se réduit à

$$(9)\qquad \bar{J}_{m+1}^{1}(z)+\frac{z+1}{2}\bar{J}_m^{-1}(z)=\bar{P}_{m+1}(z)+\bar{P}_m(z).$$

La traduction de (8) à l'aide des fonctions de Legendre s'effectue aisément, mais elle est bien compliquée. Bornons nous à la traduction de (9), en supposant m entier positif; on obtient immédiatement, grâce à (17) Ch. II et (19) Ch. II,

$$(10)\qquad \frac{d}{dz}\frac{m\,P_{m+1}(z)-(2\,m+1)\,P_m(z)+(m+1)\,P_{m-1}(z)}{m\,(m+1)}=\frac{P_{m+1}(z)-P_{m-1}(z)}{z+1}.$$

Cette relation subsiste évidemment quel que soit m, puisque les deux membres sont des séries entières en $z+1$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de m. On peut d'ailleurs les vérifier à l'aide des formules connues de récurrence relatives aux fonctions de Legendre de première espèce. Il résulte de là que (10) subsiste lorsqu'on y remplace les fonctions $P_r(z)$ par $Q_r(z)$.

Remarquons encore que, lorsque m est entier, (10) s'écrit encore

$$(11)\qquad \frac{d}{dz}\left(\frac{\bar{P}_{m+1}(z)}{m+1}-\frac{\bar{P}_m(z)}{m}\right)=\frac{\bar{P}_{m+1}(z)+\bar{P}_m(z)}{z+1},$$

et cette identité subsiste également quel que soit m; mais elle n'est plus équivalente à (10) pour les valeurs non entières de m.

On peut établir, par des procédés classiques appliqués à l'expression (15) Ch. I, des formules de récurrence entre trois fonctions[1] $\bar{J}_m^n(z)$. Contentons-nous d'énoncer de telles relations, les calculs n'offrant aucun intérêt special. Citons, par exemple,

$$(12)\qquad (2\,m-n-1)(m-n+1)\,\bar{J}_{m+1}^n(z)-$$
$$-\frac{2\,m-n}{2\,m}\{[(2\,m-n)^2-1]\,z-(n^2-1)\}\,\bar{J}_m^n(z)+(2\,m-n+1)(m-n-1)\,\bar{J}_{m-1}^n(z)=0,$$

---

[1] Par exemple, cf. loc. cit., p. 192—194.

$$(13)\quad \frac{2m-n-1}{m}(z^2-1)\frac{d\bar{J}_m^n(z)}{dz} - \\ -[(2m-n-1)z-(n-1)]\bar{J}_m^n(z)+2(m-n-1)\bar{J}_{m-1}^n(z)=0,$$

$$(14)\quad \frac{2m(m-n+1)}{m+1}\frac{d\bar{J}_{m+1}^n(z)}{dz} - \\ -[(2m-n+1)z-(n-1)]\frac{d\bar{J}_m^n(z)}{dz}-(m-n)(2m-n+1)\bar{J}_m^n(z)=0,$$

$$(15)\quad [(2m-n-1)z+n-1]\frac{d\bar{J}_m^n(z)}{dz}-2m\frac{d\bar{J}_{m-1}^n(z)}{dz}-m(2m-n-1)\bar{J}_m^n(z)=0;$$

elles se réduisent d'ailleurs à deux relations distinctes. En particulier, pour $n=0$, elles se réduisent à

$$(12')\quad (m+1)(2m-1)\bar{P}_{m+1}(z)-[(4m^2-1)z+1]\bar{P}_m(z)+(m-1)(2m+1)\bar{P}_{m-1}(z)=0,$$

$$(13')\quad \frac{2m-1}{m}(z^2-1)\frac{d\bar{P}_m(z)}{dz}-[(2m-1)z+1]\bar{P}_m(z)+2(m-1)\bar{P}_{m-1}(z)=0,$$

$$(14')\quad 2m\frac{d\bar{P}_{m+1}(z)}{dz}-[(2m+1)z+1]\frac{d\bar{P}_m(z)}{dz}-m(2m+1)\bar{P}_m(z)=0,$$

$$(15')\quad [(2m-1)z-1]\frac{d\bar{P}_m(z)}{dz}-2m\frac{d\bar{P}_{m-1}(z)}{dz}-m(2m-1)\bar{P}_m(z)=0.$$

Signalons encore la relation

$$(16)\qquad 2(m+1)\bar{P}_{m+1}(z)=\frac{2m+1}{m}(z^2-1)\frac{d\bar{P}_m(z)}{dz}+[(2m+1)z-1]\bar{P}_m(z),$$

qui s'obtient en éliminant $\bar{P}_{m-1}(z)$ entre (12′) et (13′), et qui va nous servir à montrer que *les polynômes* $\bar{P}_m(z)$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$ *ont* $m-1$ *zéros réels compris entre* -1 *et* $+1$, *ainsi que le zéro simple* $z=1$.

Tout d'abord, il résulte de (16) que $z=1$ est un zéro de $\bar{P}_{m+1}(z)$ s'il annule $\bar{P}_m(z)$; ceci étant vrai pour $\bar{P}_1(z)=\frac{z-1}{2}$, la propriété est bien générale. C'est encore une conséquence de $P_m(1)=1$. D'autre part, (14′) montre que, pour $z=1$, $\frac{d\bar{P}_{m+1}(z)}{dz}$ a le signe de $\frac{d\bar{P}_m(z)}{dz}$; sachant que $\frac{d\bar{P}_1(z)}{dz}=\frac{1}{2}$, on conclut que toutes les dérivées $\frac{d\bar{P}_m(z)}{dz}$ sont positives pour $z=1$. Ceci établi, supposons donc que

$\overline{P}_m(z)$ admette $m-1$ zéros réels compris entre -1 et $+1$; par exemple, si m est pair, le tableau des variations de $\overline{P}_m(z)$ est de la forme

z	-1		z_1		z_2		$z_3 \cdots$		z_{m-2}		z_{m-1}		1	
$\overline{P}_m(z)$	$+$	$\searrow$	0	$\searrow\ \nearrow$	0	$\nearrow\ \searrow$	0	$\searrow\ \nearrow$	0	$\nearrow\ \searrow$	0	$\searrow\ \nearrow$	0	$\nearrow$;
$\overline{P}_{m+1}(z)$	$-$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

mais la relation (16) donne à $\overline{P}_{m+1}(z)$, pour ces racines et -1, les signes marqués dans la dernière ligne de ce tableau; $\overline{P}_{m+1}(z)$ possède donc $m-1$ zéros compris entre -1 et z_{m-1}, et le fait qu'il soit croissant et nul pour $z=1$, et positif pour z_{m-1}, exige l'existence d'un zéro supplémentaire entre z_{m-1} et 1. Un raisonnement tout à fait semblable s'applique aux valeurs impaires de m, ce qui permet d'établir la propriété énoncée à partir de sa véracité pour $\overline{P}_1(z)$.

18. On ne peut songer à trouver pour les fonctions $\overline{J}_m^n(z)$ une formule d'addition analogue à celle que vérifient[1] les $J_m^n(z)$. Cela tient à ce que le rapport anharmonique $R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)$ qui sert à définir ces dernières fonctions ne dépend, à un facteur constant près, que du polynôme $P(t)$, alors que rien d'analogue ne subsiste pour le rapport anharmonique $R(t, \tau_1, \sigma_2, \tau_2)$ considéré ici. Cependant, on peut établir une formule d'addition commune aux deux espèces de fonctions, mais qui comporte une sommation doublement infinie.

Pour cela, considérons, en même temps que $P(t)$ et $Q(t)$, un troisième polynôme

$$Q_1(t) \equiv a'_1 t^2 + 2 b'_1 t + c'_1,$$

admettant un zéro commun avec $Q(t)$. D'une manière précise, nous supposons que

$$b'^2_1 - a'_1 c'_1 = 1,$$

et que

$$\sigma_2 = \frac{-b'-1}{a'} = \frac{-b'_1-1}{a'_1},$$

c'est-à-dire que

(17) $$a' b'_1 - b' a'_1 = a'_1 - a'.$$

Nous poserons

(18) $$a c'_1 + c a'_1 - 2 b b'_1 = -2 z',$$

[1] Loc. cit., p. 204.

et nous remarquons que (17) entraîne l'égalité

$$(19) \qquad a' c'_1 + c' a'_1 - 2 b' b'_1 = -2.$$

Ceci posé, formons le polynôme

$$Q''(t) \equiv \lambda\, Q(t) + (1-\lambda)\, Q_1(t) \equiv a'' t^2 + 2 b'' t + c'',$$

de coefficients

$$a'' = \lambda a' + (1-\lambda) a'_1, \quad b'' = \lambda b' + (1-\lambda) b'_1, \quad c'' = \lambda c' + (1-\lambda) c'_1,$$

λ désignant un nombre quelconque.

On vérifie immédiatement que $b''^2 - a'' c'' = 1$ et que le zéro

$$\sigma''_2 = \frac{-b'' - 1}{a''} = \sigma_2;$$

on voit aussi que

$$a c'' + c a'' - 2 b b'' = -2 [\lambda z + (1-\lambda) z'].$$

En désignant par u la quantité entre ces derniers crochets, on peut donc écrire le développement

$$(20) \qquad \left[\lambda \frac{Q(t)}{P(t)} + (1-\lambda) \frac{Q_1(t)}{P(t)}\right]^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{J}_m^n(u)\, R(t, \tau_1, \sigma_2, \tau_2)^n,$$

valable pourvu que soit satisfaite la double inégalité

$$(21) \qquad 1 < |R(t, \tau_1, \sigma_2, \tau_2)| < \frac{2}{|1+u|}.$$

D'autre part, si $|\lambda|$ est assez petit, le premier membre de (20) admet le développement absolument convergent

$$\left(\frac{Q''(t)}{P(t)}\right)^m = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{m}{r} \lambda^r (1-\lambda)^{m-r} \left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^r \left(\frac{Q_1(t)}{P(t)}\right)^{m-r};$$

chacun des rapports mis ainsi en évidence dans cette dernière somme peut être également développé suivant les formules

$$\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^r = \sum_{s=-\infty}^{r} \bar{J}_r^s(z)\, R(t, \tau_1, \sigma_2, \tau_2)^s,$$

$$\left(\frac{Q_1(t)}{P(t)}\right)^{m-r} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \bar{J}_{m-r}^q(z')\, R(t, \tau_1, \sigma_2, \tau_2)^q,$$

et cela dans les domaines respectifs

$$(22) \qquad 1 < |R(t, \tau_1, \sigma_2, \tau_2)|,$$

$$(23) \qquad 1 < |R(t, \tau_1, \sigma_2, \tau_2)| < \frac{2}{|1+z'|}.$$

Il est tenu compte de ce que r désigne ici un nombre entier ≥ 0. Il résulte de tout cela que la série triple

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{r} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \binom{m}{r} \lambda^r (1-\lambda)^{m-r} \bar{J}_r^s(z) \bar{J}_{m-r}^q(z') R(t, \tau_1, \sigma_2, \tau_2)^{q+s}$$

est absolument convergente pourvu que (22), (23) soient satisfaits, et que $|\lambda|$ soit suffisamment petit. En permutant l'ordre des sommations, et en posant $q+s=n$, il vient donc

$$\left(\frac{Q''(t)}{P(t)}\right)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{r} \binom{m}{r} \lambda^r (1-\lambda)^{m-r} \bar{J}_r^s(z) \bar{J}_{m-r}^{n-s}(z') R(t, \tau_1, \sigma_2, \tau_2)^n,$$

et l'identification terme à terme avec le développement (20) fournit la formule d'addition

$$(24) \qquad \bar{J}_m^n(\lambda z+(1-\lambda) z') = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{r} \binom{m}{r} \lambda^r (1-\lambda)^{m-r} \bar{J}_r^s(z) \bar{J}_{m-r}^{n-s}(z').$$

Cette formule est valable pourvu que $|1+\lambda z+(1-\lambda) z'|$ et $|1+z'|$ soient inférieurs à 2 et que $|\lambda|$ soit suffisamment petit; d'ailleurs la première de ces trois conditions peut résulter des deux autres.

Remarquons que le même raisonnement peut être appliqué sans modification aux développements suivant les puissances entières du rapport anharmonique $R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)$. On obtient ainsi la même formule d'addition (24), mais relative aux fonctions $J_m^n(z)$,

$$(25) \qquad J_m^n(\lambda z+(1-\lambda) z') = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=-r}^{r} \binom{m}{r} \lambda^r (1-\lambda)^{m-r} J_r^s(z) J_{m-r}^{n-s}(z').$$

Remarquons encore que l'inégalité (5) permet de vérifier aisément que la série double au second membre de (24) est absolument convergente lorsque $|z'+1| < |z+1|$, c'est-à-dire lorsque

$$\alpha'^2 - \sin^2\theta' < \alpha^2 - \sin^2\theta,$$

λ vérifiant l'inégalité

$$\left|\frac{\lambda}{1-\lambda}\right| < \sqrt{\frac{\alpha'^2-\sin^2\theta'}{\alpha^2-\sin^2\theta}\,\frac{|\sin\theta|-\sqrt{\alpha^2-1}}{|\sin\theta|+\sqrt{\alpha^2-1}}\,\frac{|\sin\theta'|-\sqrt{\alpha'^2-1}}{|\sin\theta'|+\sqrt{\alpha'^2-1}}};$$

α' et θ' désignent, bien entendu, le demi grand axe et l'anomalie excentrique relatifs à $\sqrt{\frac{1+z'}{2}}$.

Lorsque m est entier et positif, la série double au second membre de (24) se réduit à un nombre fini de termes. Cette propriété peut être obtenue quel que soit le signe de m, supposé entier, grâce à l'identité (36) Ch. I si $n>m$, ou, dans tous les cas, à l'aide de (18) Ch. I. Par exemple, pour $n=0$, m entier >0, on a

$$\bar{P}_m(\lambda z+(1-\lambda)z') = \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=r-m}^{r}\binom{m}{r}\lambda^r(1-\lambda)^{m-r}\bar{J}_r^s(z)\,\bar{J}_{m-r}^{-s}(z')$$

$$= \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=r-m}^{r}\binom{m}{r}\frac{m-r}{m-r+s}\bar{J}_r^s(z)\,\bar{J}_{m-r+s}^{s}(z')\left(\frac{2}{1+z'}\right)^s\lambda^r(1-\lambda)^{m-r}.$$

19. Etant donnée une fonction $\varphi(x)$ de la variable complexe x, holomorphe dans le cercle $|x|\leq\varrho$, ainsi que sur ce cercle, on peut se proposer de développer $\varphi\left(x\frac{Q(t)}{P(t)}\right)$ suivant les puissances entières de $R(t,\tau_1,\sigma_2,\tau_2)$. Dans le mémoire cité[1], j'ai étudié le développement suivant les puissances entières de $R(t,\sigma_2,\tau_1,\tau_2)$. Je ne reprendrai pas le raisonnement que j'avais utilisé à cette occasion et que l'on peut reprendre ici, en utilisant simplement l'inégalité (5) et la condition $|z+1|<2$ au lieu des inégalités correspondantes relatives aux $J_m^n(z)$. On trouve ainsi aisément que, sous la double condition

$$(26)\qquad 1<\left|\sqrt{\frac{z+1}{2}}R(t,\tau_1,\sigma_2,\tau_2)\right|<\frac{\varrho}{|x|}\frac{|\sin\theta|-\sqrt{\alpha^2-1}}{|\sin\theta|+\sqrt{\alpha^2-1}},$$

on peut écrire

$$(27)\qquad \varphi\left(x\frac{Q(t)}{P(t)}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{\varphi}_n(z;x)\,R(t,\tau_1,\sigma_2,\tau_2)^n,$$

avec

$$(28)\qquad \bar{\varphi}_n(z;x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}x^m\,\bar{J}_m^n(z).$$

[1] Loc. cit., p. 197—198.

Remarquons d'ailleurs que m ne prenant ici que des valeurs entières non négatives, on peut encore étendre (27) aux valeurs de z extérieures au cercle $|z+1|=2$, pourvu que (26) subsiste lorsqu'on remplace le dernier terme par sa valeur absolue.

On peut exprimer aisément ces coefficients $\bar{\varphi}_n(z;x)$ à l'aide des coefficients analogues

$$\varphi_n(z;x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}x^m J_m^n(z)$$

du développement

$$\varphi\left(x\frac{Q(t)}{P(t)}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_n(z;x)\,R(t,\sigma_2,\tau_1,\tau_2)^n. \tag{29}$$

L'examen des domaines de validité de (27) et (29) montre que pour $|x|$ et $|z|$ suffisamment petits, il y a des valeurs de t vérifiant les doubles inégalités correspondantes.[1] Compte tenu de l'identité

$$R(t,\sigma_2,\tau_1,\tau_2)+R(t,\tau_1,\sigma_2,\tau_2)=1,$$

l'identification des deux développements (27) et (29) est alors aisée. Il faut remarquer cependant que pour z infiniment voisin de 0, les conditions de validité deviennent respectivement infiniment voisines de

$$1<\frac{|R(t,\tau_1,\sigma_2,\tau_2)|}{\sqrt{2}}<\frac{\varrho}{|x|},$$

$$\frac{|x|}{\varrho}<|R(t,\sigma_2,\tau_1,\tau_2)<\frac{\varrho}{|x|},$$

de sorte que $|R(t,\tau_1,\sigma_2,\tau_2)|$ devient nécessairement supérieur à 1.

Dans la région commune de convergence absolue, on a donc

$$\begin{aligned}\varphi\left(x\frac{Q(t)}{P(t)}\right)&=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\varphi_r(z;x)\,[1-R(t,\tau_1,\sigma_2,\tau_2)]^r\\&=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}\varphi_r(z;x)\,R(t,\tau_1,\sigma_2,\tau_2)^{r-s},\end{aligned}$$

[1] Pour (29), cf. loc. cit., p. 199. Remarquer que α n'a pas la même signification dans la formule (49) de cette page, et la formule (26) du mémoire présent.

ou encore, en posant $r-s=n$,

$$\varphi\left(x\frac{Q(t)}{P(t)}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n R(t,\tau_1,\sigma_2,\tau_2)^n\sum_{r=n}^{\infty}\binom{r}{r-n}\varphi_r(z;x);$$

la comparaison avec (27) donne donc, pourvu que x et z soient dans un certain voisinage de l'origine,

$$\bar{\varphi}_n(z;x)=(-1)^n\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r}{r}\varphi_{n+r}(z;x). \tag{30}$$

De même, en supposant $|R(t,\sigma_2,\tau_1,\tau_2)|>1$, ce qui est possible dans ces conditions, le même calcul conduit aux relations inverses de (30), de forme identique,

$$\varphi_n(z;x)=(-1)^n\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r}{r}\bar{\varphi}_{n+r}(z;x). \tag{31}$$

En particulier, $\varphi(x)=x^m$, où m est un nombre entier ≥ 0, fournit pour (30) et (31) les idéntités

$$\left\{\begin{aligned}\bar{J}^n_m(z)&=(-1)^n\sum_{r=n}^{m}\binom{r}{r-n}J^r_m(z),\\ J^n_m(z)&=(-1)^n\sum_{r=n}^{m}\binom{r}{r-n}\bar{J}^r_m(z).\end{aligned}\right. \tag{32}$$

En remplaçant les éléments de ces identités par leurs expressions

$$J^n_m(z)=(-1)^n\binom{m}{n}F\left(-m,m+1,n+1;\frac{1-z}{2}\right),$$

$$\bar{J}^n_m(z)=(-1)^{m+n}\binom{m}{n}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n F\left(m,n-m,n+1;\frac{1+z}{2}\right),$$

on déduit de (32) des relations linéaires exprimant certaines fonctions hypergéométriques d'argument $1-t$ à l'aide d'un nombre fini de fonctions hypergéométriques d'argument t. En posant $t=\frac{1-z}{2}$, la première identité (32) s'écrit en effet,

$$(1-t)^n F(m,n-m,n+1;1-t)=\sum_{r=n}^{m}(-1)^{m+r}\binom{m-n}{r-n}F(-m,m+1,r+1;t), \tag{33}$$

sous les conditions m entier > 0, n entier compris entre 0 et m; la deuxième identité (32) s'écrit de même, en posant $t = \frac{1+z}{2}$,

$$(33') \qquad F(-m, m+1, n+1; 1-t) = \sum_{r=n}^{m} (-1)^{m+r} \binom{m-n}{r-n} t^r F(m, r-m, r+1; t).$$

Remarquons enfin que, dans le cas de m entier ≥ 0, la formule (11) Ch. II devient, pour $n \geq 0$,

$$(34) \qquad \bar{J}_m^n(z) = \sum_{s=0}^{n+1} l_s(m,n) J_{m-s}^n(z),$$

et son rapprochement avec (32) présente un certain intérêt du fait que la sommation se fait ici relativement à l'indice inférieur de la fonction $J_r^n(z)$, alors que c'est l'indice supérieur qui varie dans (32). En combinant (34) avec la deuxième identité (32), on obtiendrait une relation linéaire entre des fonctions $\bar{J}_m^n(z)$ d'indices supérieur et inférieur variables; mais écrire cette relation ne semble pas présenter un intérêt spécial.

CHAPITRE V.

Les fonctions $\bar{K}_m^n(z)$.

20. L'équation différentielle de la fonction $\bar{J}_m^n(z)$

$$(1) \qquad (1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - (n-1)(1-z)\frac{dy}{dz} + m(m-n)y = 0$$

est vérifiée par la fonction représentée par l'intégrale

$$(2) \qquad \bar{K}_m^n(z) = \frac{(z+1)^n e^{(1-m)\pi i}}{2^{m+2} i \sin m\pi} \int_{+\infty}^{(1-,\,-1+)} \frac{(t-1)^m (t+1)^{m-n+1}}{(t-z)^m} dt.$$

En effet, la substitution de $\bar{K}_m^n(z)$ à y dans cette équation conduit à la même intégrale que la substitution de $\bar{J}_m^n(z)$, au contour près. Cette intégrale s'annulant quand ce contour est une courbe simple fermée entourant les points z et -1, mais non le point $+1$, on en conclut, suivant un raisonnement classique, que la fonction sous le signe d'intégration est de la forme

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{t^2-1}{t-z}\right)^m f(t,z)\right],$$

où $f(t,z)$ est uniforme, et même rationnelle, en t. La primitive située entre ces deux crochets est donc également uniforme le long du contour relatif à $\overline{K}_m^n(z)$, ce qui démontre notre proposition.

Nous préciserons la valeur de la fonction $\overline{K}_m^n(z)$ en supposant que le plan de la variable z est coupé par la portion $z > -1$ de l'axe réel, et que les conditions initiales sont toujours

$$\arg(t-1) = \arg(t+1) = \arg(t-z) = 0 \qquad \text{pour } t = +\infty.$$

L'expression (2) n'a pas de sens pour m entier négatif ou inférieur à $n+1$.

Lorsque la partie réelle de m est supérieure à -1 et à n, on peut remplacer l'intégrale au second membre de (2) par l'intégrale définie

$$(3) \qquad \overline{K}_m^n(z) = -\frac{(z+1)^n}{2^{m+1}} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^m (1+t)^{m-n-1}}{(z-t)^m}\, dt,$$

où l'on suppose $0 < \arg(z-t) < 2\pi$.

Le raisonnement qui nous a permis de voir que $\overline{K}_m^n(z)$ est une intégrale de (1) montre également que $\overline{K}_m^n(z)$ s'exprime à l'aide des fonctions $K_r^n(z)$ définies au chapitre I d'après la formule

$$(4) \qquad \overline{K}_m^n(z) = \sum_{s=0}^{n+1} l_s(m,n)\, K_{m-s}^n(z) \qquad n \geq 0;$$

l'identité (11) Ch. II se traduit en effet par la nullité de l'intégrale

$$\int_{+\infty}^{(-1+,\,z+)} \frac{(t-1)^m (t+1)^{m-n-1}}{(t-z)^m} \left\{ 1 - (-1)^n \sum_{s=0}^{n+1} l_s(m,n) \frac{2^s (t+1)^{n+1-s}}{(t-1)^s (t-z)^{n+1-s}} \right\} dt;$$

la quantité entre accolades étant rationnelle en t et z, il existe donc une fonction $\varphi(t,z)$ rationnelle en t et z telle que la quantité sous le signe d'intégration soit de la forme

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{t^2-1}{t-z}\right)^m \varphi(t,z)\right] dt,$$

ce qui entraîne bien la nullité de la même intégrale le long du contour relatif à $\overline{K}_m^n(z)$. Or cette conséquence se traduit justement par (4).

Remarquons en passant que cette formule permet d'écrire (11) Ch. II

$$\sum_{s=0}^{n+1} l_s(m,n)\, J_{m-s}^n(z) = \overline{J}_m^n(z) + \frac{2\, e^{m\pi i}\sin m\pi}{\pi}\overline{K}_m^n(z). \tag{5}$$

Enfin il est clair que les relations de récurrence établies dans le chapitre précédent pour les fonctions $\overline{J}_m^n(z)$ existent également pour les fonctions $\overline{K}_m^n(z)$, et cela en vertu du raisonnement que nous venons d'utiliser à deux reprises.

21. La fonction $K_m^n(z)$ est représentable par une fonction hypergéométrique d'argument $\frac{2}{z+1}$ à un facteur simple près. $\overline{K}_m^n(z)$ possède la même propriété. Pour obtenir ce dernier développement, nous utiliserons l'intégrale (3). En supposant $|z+1|>2$, on peut développer

$$(z-t)^{-m} = (z+1-1-t)^{-m}$$

suivant les puissances entières croissantes de $1+t$, ce qui donne

$$\overline{K}_m^n(z) = -\frac{(z+1)^{n-m}}{2^{m+1}}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-m}{r}(-z-1)^{-r}\int_{-1}^{+1}(1-t)^m(1+t)^{m-n+r-1}\,dt;$$

en effectuant le changement de variable $1+t=2u$, on voit que

$$\int_{-1}^{+1}(1-t)^a(1+t)^b\,dt = 2^{a+b+1}\int_0^1(1-u)^a u^b\,dt = 2^{a+b+1}B(a+1,b+1), \tag{6}$$

donc on a

$$\overline{K}_m^n(z) = -2^{m-n-1}\Gamma(m+1)(z+1)^{n-m}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{m(m+1)\cdots(m+r-1)}{r!}\frac{\Gamma(m-n+r)}{\Gamma(2m-n+r+1)}\left(\frac{2}{z+1}\right)^r,$$

et, par suite,

$$\overline{K}_m^n(z) = -\frac{1}{2}B(m+1,m-n)\left(\frac{2}{z+1}\right)^{m-n}F\left(m,m-n,2m-n+1;\frac{2}{z+1}\right). \tag{7}$$

Cette identité subsiste évidemment dans le domaine d'uniformité des deux membres, c'est-à-dire dans le plan des z coupé par la demi-droite $(-1,+\infty)$, l'argument de $z+1$ étant compté entre 0 et 2π comme nous l'avons déjà supposé pour définir $\overline{K}_m^n(z)$.

L'expression analogue de $K_m^n(z)$ s'obtient par un calcul semblable, à partir de l'intégrale définie

$$K_m^n(z) = \frac{(z+1)^n}{2^{m+1}} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t^2)^m}{(z-t)^{m+n+1}}\, dt,$$

que l'on déduit aisément de (9) Ch. I, et où l'on suppose $\Re(m) > -1$ et $0 < \arg(z-t) < 2\pi$. On obtient ainsi l'expression

$$(8) \qquad K_m^n(z) = \frac{1}{2} B(m+1, m+1) \left(\frac{2}{z+1}\right)^{m+1} F\left(m+1, m+n+1, 2m+2; \frac{2}{z+1}\right),$$

ou encore, grâce à l'identité

$$(9) \qquad \frac{\Gamma(2a)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)} = 2^{2a-1},$$

$$(8') \qquad K_m^n(z) = \frac{B\left(m+1, \frac{1}{2}\right)}{(2z+2)^{m+1}} F\left(m+1, m+n+1, 2m+2; \frac{2}{z+1}\right).$$

A l'aide de (7) et (8) on peut vérifier encore la relation (4), mais les calculs ne diffèrent pas de ceux du paragraphe 11, où nous avions affaire à des séries entières en $\frac{z+1}{2}$.

22. On peut également obtenir des développements de ces deux fonctions suivant les puissances de $\frac{1}{z}$; ceux-ci se déduisent des mêmes intégrales définies que les précédents, où l'on suppose $|z| > 1$. C'est ainsi que (3) donne immédiatement

$$(10) \qquad \overline{K}_m^n(z) = -\frac{(z+1)^n}{2^{m+1} z^m} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-m}{k} (-z)^{-k} \int_{-1}^{+1} (1-t)^m (1+t)^{m-n-1} t^k\, dt.$$

L'intégrale au second membre s'exprime linéairement à l'aide de fonctions d'Euler de première espèce, mais l'expression dépend de la parité de k. En prenant successivement $k = 2r$, $k = 2r+1$, et en supposant par exemple $n \geq 0$, on a

$$\int_{-1}^{+1} (1-t)^m (1+t)^{m-n-1} t^{2r}\, dt = \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{m-n-1} (1-t)^{n+1} t^{2r}\, dt =$$

$$= \sum_{s=0}^{s \leq \frac{n+1}{2}} \binom{n+1}{2s} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{m-n-1} t^{2r+2s}\, dt,$$

c'est-à-dire

$$(11) \qquad \int_{-1}^{+1} (1-t)^m (1+t)^{m-n-1} t^{2r}\, dt = \sum_{s=0}^{s \leq \frac{n+1}{2}} \binom{n+1}{2s} B\left(m-n, r+s+\frac{1}{2}\right),$$

et de même

$$(12) \qquad \int_{-1}^{+1} (1-t)^m (1+t)^{m-n-1} t^{2r+1}\, dt = -\sum_{s=0}^{s \leq \frac{n}{2}} \binom{n+1}{2s+1} B\left(m-n, r+s+\frac{3}{2}\right).$$

La substitution des valeurs (11) et (12) de ces intégrales dans le second membre de (10) ne semble pas offrir beaucoup d'intérêt. Mais nous nous proposons de comparer les coefficients de la série en $\frac{1}{z}$ ainsi obtenue aux coefficients de la série de même nature que l'on peut obtenir pour représenter le second membre de (4). Nous devons donc auparavant établir le développement de $K_m^n(z)$ suivant une telle série.

Or, en supposant toujours $|z| > 1$, l'intégrale définie représentant $K_m^n(z)$ admet le développement

$$K_m^n(z) = \frac{(z+1)^n}{2^{m+1} z^{m+n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-m-n-1}{k} (-z)^{-k} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^m t^k\, dt;$$

cette dernière intégrale, nulle pour les valeurs impaires de k, prend d'autre part les valeurs

$$\int_{-1}^{+1} (1-t^2)^m t^{2r}\, dt = B\left(m+1, r+\frac{1}{2}\right);$$

il vient donc

$$(13)\quad K_m^n(z) = \frac{(z+1)^n}{2^{m+1} z^{m+n+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(m+n+1)(m+n+2)\cdots(m+n+2r)}{(2r)!} B\left(m+1, r+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{z}\right)^{2r},$$

qui se réduit aisément à la forme

$$(13')\qquad K_m^n(z) = \frac{B\left(m+1, \frac{1}{2}\right)}{2^{m+1}} \frac{(z+1)^n}{z^{m+n+1}} F\left(\frac{m+n+1}{2}, \frac{m+n}{2}+1, m+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right).$$

23. Ceci établi, le développement du second membre de (4) suivant les puissances de $\frac{1}{z}$ s'écrit, après le changement de s en $n+1-s$, et en utilisant (13),

$$(14)\qquad \frac{(z+1)^n}{2^{m-n} z^m} \sum_{s=0}^{n+1} \sum_{r=0}^{\infty} l_{n+1-s}(m,n) \times$$
$$\times \frac{(m+s)(m+s+1)\cdots(m+s+2r-1)}{(2r)!} B\left(m-n+s, r+\frac{1}{2}\right) \frac{1}{2^s z^{s+2r}}.$$

En introduisant les coefficients $\lambda_s(m,n)$ liés aux $l_s(m,n)$ par la formule (14) Ch. II, cette dernière somme double s'écrit

$$\sum_{s=0}^{n+1} \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_{n+1-s}(m,n) \frac{\Gamma(1-m+n-s)\,\Gamma(m-n+s)}{\Gamma(1-m-s)\,\Gamma(m+s)} \frac{\Gamma(m+s+2r)\,\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}{(2r)!\,\Gamma\left(m-n+r+s+\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{2^s z^{s+2r}},$$

et le second membre de (4), représenté par (14), devient

$$\frac{(-z-1)^n}{2^{m-n} z^m} \sum_{s=0}^{n+1} \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_{n+1-s}(m,n) \frac{\Gamma(m+s+2r)\,\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}{(2r)!\,\Gamma\left(m-n+r+s+\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{2^s z^{s+2r}};$$

enfin, en remplaçant $\dfrac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2r+1)}$ par $\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(r+1)\,2^{2r}}$, puis remplaçant r par k, le second membre de (4) prend la forme

$$(15)\qquad \frac{\sqrt{\pi}}{2^{m-n}} \frac{(-z-1)^n}{z^m} \sum_{s=0}^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{n+1-s}(m,n) \frac{\Gamma(m+s+2k)}{k!\,\Gamma\left(m-n+k+s+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{2z}\right)^{s+2k}.$$

La comparaison des deux développements (10) et (15) va ainsi nous fournir deux espèces d'identités, suivant qu'on identifiera les termes en $\frac{1}{z^{m+2r}}$ ou $\frac{1}{z^{m+2r+1}}$. Dans le premier cas, il vient, compte tenu de (11),

$$\frac{m(m+1)\cdots(m+2r-1)}{(2r)!}\sum_{s=0}^{s\leq\frac{n+1}{2}}\binom{n+1}{2s}B\left(m-n, r+s+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=(-1)^{n+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+2r)\,2^{n+1-2r}\sum_{s=0}^{s\leq r,\frac{n+1}{2}}\frac{\lambda_{n+1-2s}(m,n)}{(r-s)!\,\Gamma\left(m-n+r+s+\frac{1}{2}\right)},$$

c'est-à-dire

$$(16)\qquad \sum_{s=0}^{s\leq\frac{n+1}{2}}\binom{n+1}{2s}B\left(m-n, r+s+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\sqrt{\pi}\,\Gamma(m)\,\Gamma(2r+1)(-2)^{n+1-2r}\sum_{s=0}^{s\leq r,\frac{n+1}{2}}\frac{\lambda_{n+1-2s}(m,n)}{(r-s)!\,\Gamma\left(m-n+r+s+\frac{1}{2}\right)}.$$

Dans le second cas, il vient de même, compte tenu de (12),

$$\frac{m(m+1)\cdots(m+2r)}{(2r+1)!}\sum_{s=0}^{s\leq\frac{n}{2}}\binom{n+1}{2s+1}B\left(m-n, r+s+\frac{3}{2}\right)=$$
$$=(-1)^{n}\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+2r+1)\,2^{n-2r}\sum_{s=0}^{s\leq r,\frac{n}{2}}\frac{\lambda_{n-2s}(m,n)}{(r-s)!\,\Gamma\left(m-n+r+s+\frac{3}{2}\right)},$$

c'est-à-dire

$$(17)\qquad \sum_{s=0}^{s\leq\frac{n}{2}}\binom{n+1}{2s+1}B\left(m-n, r+s+\frac{3}{2}\right)=$$
$$=\sqrt{\pi}\,\Gamma(m)\,\Gamma(2r+2)(-2)^{n-2r}\sum_{s=0}^{s\leq r,\frac{n}{2}}\frac{\lambda_{n-2s}(m,n)}{(r-s)!\,\Gamma\left(m-n+r+s+\frac{3}{2}\right)}.$$

Ces deux identités (16) et (17) sont valables quel que soit m, n et r désignant deux nombres entiers non négatifs. On peut remarquer que, dans ces conditions, on peut faire abstraction des limites supérieures des sommes, puisque les termes dont l'indice s surpasse une de ces limites s'annulent systématiquement.

24. Lorsqu'on donne à r la valeur zéro, les sommes aux seconds membres de (16) et (17) se réduisent à leurs premiers termes, d'indice $s=0$, respectivement égaux à

$$\frac{(-2)^{n+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(m)\,\lambda_{n+1}(m,n)}{\Gamma\left(m-n+\frac{1}{2}\right)}$$

et

$$\frac{(-2)^{n}\sqrt{\pi}\,\Gamma(m)\,\lambda_{n}(m,n)}{\Gamma\left(m-n+\frac{3}{2}\right)}.$$

En remplaçant $\lambda_s(m,n)$ par sa valeur (16) Ch. II, cette première fraction s'écrit

$$\frac{2^{n+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(m)\,m(2m-2n-1)}{(2m-n)(2m-n-1)\cdots(2m-2n-1)\,\Gamma\left(m-n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{2^{n+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(2m-2n)}{\Gamma(2m-n+1)\,\Gamma\left(m-n+\frac{1}{2}\right)}$$
$$=2^{2m-n}B(m-n,m+1),$$

et la deuxième devient

$$\frac{2^{n}\sqrt{\pi}\,\Gamma(m)(n+1)m(2m-2n+1)}{(2m-n+1)(2m-n)\cdots(2m-2n)\,\Gamma\left(m-n+\frac{3}{2}\right)}=$$
$$=\frac{2^{n}\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(2m-2n+2)}{\Gamma(2m-n+2)\,\Gamma\left(m-n+\frac{3}{2}\right)}\,\frac{n+1}{2m-2n}$$
$$=\frac{n+1}{m-n}\,2^{2m-n}B(m-n+1,m+1)$$
$$=\frac{n+1}{m+1}\,2^{2m-n}B(m-n,m+2).$$

On obtient ainsi, comme cas particuliers de (16) et (17), les identités suivantes relatives à la fonction d'Euler de première espèce

$$\sum_{s=0}^{s\leq\frac{n+1}{2}}\binom{n+1}{2s}B\left(m-n,s+\frac{1}{2}\right)=2^{2m-n}B(m-n,m+1),\tag{18}$$

$$\sum_{s=0}^{s\leq\frac{n}{2}}\binom{n+1}{2s+1}B\left(m-n,s+\frac{3}{2}\right)=\frac{n+1}{m+1}\,2^{2m-n}B(m-n,m+2).\tag{19}$$

Ces deux identités sont d'ailleurs susceptibles d'acquérir une forme unique, à condition de les exprimer à l'aide de la fonction d'Euler de deuxième espèce. C'est ainsi qu'après la substitution de $n-1$ et $m-1$ à n et m, (18) prend la forme

$$\sum_{s=0}^{s\leq\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2s+1)\,\Gamma(n-2s+1)\,\Gamma\left(m-n+s+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{2m-n-1}\,\Gamma(m)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(2m-n)};$$

en remplaçant $\frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2s+1)}$ et $\frac{\Gamma\left(m-n+s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2m-2n+2s)}$ par les expressions que fournit la formule classique (9), (17) prend ainsi la forme remarquable

$$(19)\qquad \sum_{s=0}^{s\leq\frac{n}{2}} \frac{1}{s!\,(n-2s)!}\,\frac{\Gamma(m-n+s)}{\Gamma(2m-2n+2s)} = \frac{2^n}{n!}\,\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(2m-n)}.$$

Un calcul tout à fait semblable effectué à partir de (18) où l'on change m en $m-1$, sans modifier n, conduit également à l'identité (19).

25. Cette identité peut être enfin assimilée à un développement intéressant en série de Newton. Remplaçons y en effet les lettres m et n par $x+\alpha$ et x, de sorte que x désigne, tout au moins de manière provisoire, un nombre entier non négatif, α étant quelconque. (19) peut alors s'écrire

$$(20)\qquad \frac{2^x\,\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+2\alpha)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(2\alpha+2s)}\,\frac{x(x-1)\cdots(x-2s+1)}{s!},$$

et la somme au second membre est bien automatiquement limitée au terme dont l'indice s est la partie entière de $\frac{x}{2}$.

D'autre part, lorsque x désigne une variable complexe arbitraire, la série de Newton au second membre de (20) est absolument convergente dans le demi-plan $\Re(x) > \Re(-\alpha)$ et représente une fonction holomorphe dans ce demi-plan. Or la fonction au premier membre est effectivement holomorphe dans ce demi-plan, son pôle le plus à droite étant $x=-\alpha$ si $\alpha \neq 0$, et sa valeur asymptotique à l'infini de ce demi-plan est de l'ordre de $r^{-\Re(\alpha)}\,e^{r\cos\theta\, L 2}$, où l'on a posé $x+\alpha = r\,e^{i\theta}$. On a donc, dans ce demi-plan,

$$\left| \frac{2^x \Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+2\alpha)} \right| < e^{r \cos\theta L 2} (1+r)^{-\Re(\alpha)+\varepsilon(r)},$$

où $\varepsilon(r)$ est une fonction de r tendant uniformément vers 0 avec $\frac{1}{r}$, et où $\cos\theta L 2$ est inférieur à la fonction

$$\psi(\theta) = \cos\theta L(2\cos\theta) + \theta\sin\theta \qquad |\theta| \leq \frac{\pi}{2}.$$

En vertu d'un théorème de Carlson, précisé par Nörlund[1], cette fonction est bien développable en une série de Newton dont l'abscisse de convergence est au plus égale à $\Re\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)$. Les coefficients de ce développement sont déterminés par les valeurs de la fonction pour les valeurs entières de x non négatives et supérieures à $\Re(-\alpha)$.

Si $\Re(\alpha) > 0$, cette détermination est unique, de sorte que l'identité des deux membres de (20) pour $x = 0, 1, 2, \ldots$ entraîne leur identité dans le demi-plan de convergence $\Re(x) > \Re(-\alpha)$.

Si $\Re(\alpha) < 0$, on sait que la fonction au premier membre de (20) est représentable dans le demi-plan $\Re(x) > \Re(-\alpha)$ par une infinité de séries de Newton, dépendant des valeurs arbitraires que l'on attribue à la somme de la série pour les valeurs entières de x non négatives et inférieures à $\Re(-\alpha)$; mais ces séries ne diffèrent que par l'addition de séries de Newton qui représentent zéro à droite de $\Re(-\alpha)$, et le second membre de (20) est l'une de celles-là puisque sa somme coïncide avec le premier membre pour les valeurs entières de x supérieures à $\Re(-\alpha)$; c'est même une série réduite de cette fonction.

Nous avons donc démontré que la fonction $\frac{2^x \Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+2\alpha)}$ est toujours représentée, dans son demi-plan d'holomorphie $\Re(x) > \Re(-\alpha)$, par la série de Newton au second membre de (20).

On peut encore donner à cette identité la forme intéressante

$$(21) \quad \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{2^x \Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+2\alpha)} = 1 + \frac{1}{2\alpha+1} \frac{x(x-1)}{2!} + \frac{1 \cdot 3}{(2\alpha+1)(2\alpha+3)} \frac{x(x-1)\cdots(x-3)}{4!} + \cdots$$

dont la loi de formation est très simple. Pour $\alpha = 0$, le premier membre prend la valeur 2^{x-1}, et l'on a

[1] Cf. N. E. Nörlund: Leçons sur les séries d'interpolation, p. 131.

$$2^{x-1} = 1 + \frac{x(x-1)}{2!} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!} + \cdots,$$

qui donne la somme connue des polynômes de degrés pairs. La différence finie des deux membres fournit la somme, égale à celle-ci, des polynômes de Newton de degrés impairs

$$2^{x-1} = \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \frac{x(x-1)\cdots(x-4)}{5!} + \cdots;$$

cette dernière formule est d'ailleurs contenue dans (21); il suffit d'y faire $\alpha=1$ et d'y remplacer x par $x-1$.

D'une manière générale, on voit que la différence finie des deux membres de (21) reproduit cette identité, au changement près de x et de α en $x-1$ et $\alpha+1$.

Remarquons enfin que l'on peut considérer le second membre de (21) comme une série de facultés d'argument $\alpha + \frac{1}{2}$. En désignant cet argument par z, (21) s'écrit encore

$$(21') \qquad 2^x \frac{\Gamma(2z-1)\,\Gamma\left(z+x-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z-\frac{1}{2}\right)\Gamma(2z+x-1)} = 1 + \frac{1}{2}\frac{x(x-1)}{2!}\frac{1}{z} +$$

$$+ \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x(x-1)\cdots(x-3)}{4!}\frac{2!}{z(z+1)} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x(x-1)\cdots(x-5)}{6!}\frac{3!}{z(z+1)(z+2)} + \cdots,$$

et nous savons que cette série de facultés en z converge absolument dans le demi-plan $\Re(z) > \Re\left(\frac{1}{2}-x\right)$, à l'exception des points d'affixe entier nul ou négatif situés dans ce demi-plan, et qui sont d'ailleurs des pôles, et en nombre fini. Or la fonction au premier membre est effectivement holomorphe pour $\Re(z)$ supérieur à 0 et à $\Re\left(\frac{1}{2}-x\right)$. Le demi-plan $\Re(z) > \Re\left(\frac{1}{2}-x\right)$ est donc bien le demi-plan de convergence de cette série.

26. On peut étendre ces résultats aux valeurs positives du nombre entier r dont dépendent les identités (16) et (17). En remplaçant $\lambda_{n+1-2s}(m,n)$ par sa valeur comme il a déjà était fait, le second membre de (16) peut s'écrire, par exemple,

$$(22)\quad 2^{n+1-2r}\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(2r+1)\times$$
$$\times\sum_{s=0}^{r}\binom{n+1}{2s}\frac{(2m-2n+4s-1)\,\Gamma(2m-2n+2s-1)}{(r-s)!\,\Gamma(2m-n+2s+1)\,\Gamma\left(m-n+r+s+\frac{1}{2}\right)},$$

puisque, si $r > \frac{n+1}{2}$, les termes d'indice $s > \frac{n+1}{2}$ disparaissent automatiquement, en supposant toujours n entier ≥ 0. Mais ceci a maintenant un sens quel que soit n.

D'autre part, le premier membre de (16) peut s'écrire

$$(23)\quad \sum_{s=0}^{\infty}\binom{n+1}{2s}\frac{\Gamma(m-n)\,\Gamma\left(r+s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m-n+r+s+\frac{1}{2}\right)}=$$
$$=2^{2m-2n-1}\,\Gamma(m-n)\sum_{s=0}^{\infty}\binom{n+1}{2s}\frac{\Gamma(2r+2s+1)\,\Gamma(m-n+r+s)}{\Gamma(r+s+1)\,\Gamma(2m-2n+2r+2s)}.$$

En posant $n+1=x$, $m-n=\alpha$, (22) et (23) deviennent respectivement, après quelques modifications simples dans (22),

$$(22')\quad 2^{x+2\alpha-1}\,\Gamma(x+\alpha)\,\Gamma(2r+1)\sum_{s=0}^{r}\binom{x}{2s}\frac{(2\alpha+4s-1)\,\Gamma(2\alpha+2s-1)\,\Gamma(\alpha+r+s)\,2^{2s}}{(r-s)!\,\Gamma(x+2\alpha+2s)\,\Gamma(2\alpha+2r+2s)},$$

$$(23')\quad 2^{2\alpha-1}\,\Gamma(\alpha)\sum_{s=0}^{\infty}\binom{x}{2s}\frac{\Gamma(2r+2s+1)\,\Gamma(\alpha+r+s)}{\Gamma(r+s+1)\,\Gamma(2\alpha+2r+2s)},$$

ce qui fournit enfin, pour les valeurs entières positives de x, l'identité

$$(24)\quad \frac{2^{x}\,\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+2\alpha)}\sum_{s=0}^{r}\frac{x(x-1)\cdots(x-2s+1)\,2^{2s}}{(x+2\alpha)(x+2\alpha+1)\cdots(x+2\alpha+2s-1)}\times$$
$$\times\frac{(2\alpha+4s-1)(2r)!}{(2s)!\,(r-s)!}\,\frac{\Gamma(2\alpha+2s-1)\,\Gamma(\alpha+r+s)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(2\alpha+2r+2s)}=$$
$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2r+2s+1)\,\Gamma(\alpha+r+s)}{\Gamma(r+s+1)\,\Gamma(2\alpha+2r+2s)}\,\frac{x(x-1)\cdots(x-2s+1)}{(2s)!}.$$

Un calcul analogue permet de déduire de (17), après avoir remplacé n et $m-n+1$ par x et α, l'identité

$$(25)\quad \frac{2^x\,\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+2\alpha)}\sum_{s=0}^{r}\frac{x(x-1)\cdots(x-2s+1)\,2^{2s+1}}{(x+2\alpha)(x+2\alpha+1)\cdots(x+2\alpha+2s-1)}\times$$

$$\times\frac{(2\alpha+4s-1)(2r+1)!}{(2s+1)!\,(r-s)!}\,\frac{\Gamma(2\alpha+2s-2)\,\Gamma(\alpha+r+s)}{\Gamma(\alpha-1)\,\Gamma(2\alpha+2r+2s)}=$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2r+2s+2)\,\Gamma(\alpha+r+s)}{\Gamma(r+s+1)\,\Gamma(2\alpha+2r+2s)}\,\frac{x(x-1)\cdots(x-2s+1)}{(2s+1)!},$$

également établie pour x entier ≥ 0.

Ces deux sortes d'identité sont distinctes pour $r > 0$, alors que nous savons qu'elles coïncident pour $r=0$. Leurs premiers membres sont des fonctions analytiques de x holomorphes dans le demi-plan $\Re(x) > \Re(-\alpha)$, tandis que leurs seconds membres deviennent, lorsque x est un nombre complexe variable, des séries de Newton absolument convergentes dans ce demi-plan. D'autre part, on voit immédiatement que les fonctions aux premiers membres possédent, à l'infini de ce demi-plan, des valeurs asymptotiques satisfaisant à la condition de Carlson, et admettent donc des développements en série de Newton. Ces développements sont justement les séries aux seconds membres, puisque ces identités sont satisfaites pour $x = 0, 1, 2, \ldots$ En résumé les identités (24) et (25) sont satisfaites dans le demi-plan $\Re(x) > \Re(-\alpha)$; les séries aux seconds membres sont même des développements réduits des fonctions aux premiers membres.