

# ÜBER DIE EXISTENZ VON EIGENFUNKTIONEN EINER REELLEN VARIABELN BEI LINEAREN HOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG UND RANDBEDINGUNGEN MIT KOMPLEXEN KOEFFIZIENTEN; ENTWICKELUNG WILLKÜRLICHER FUNKTIONEN UND ANWENDUNG AUF PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

VON

GEORG TAUTZ

in Breslau.

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorwort . . . . .	25
Überblick . . . . .	26
1. <i>Abschnitt.</i> Die Randbedingungen $u(0)=u(a)$ ; $u'(0)=u'(a)$	
1. Bemerkungen zum reellen Problem . . . . .	30
2. Lösung des komplexen Randwertproblems und Abschätzung des Konturintegrals . . . . .	35
§ 1. Existenz unendlich vieler Eigenwerte . . . . .	35
§ 2. Asymptotische Darstellung der Eigenwerte . . . . .	38
§ 3. Abschätzung des Konturintegrals . . . . .	39
§ 4. Verallgemeinerung mit Hilfe des Lebesgueschen Integralbegriffes . . . . .	48
§ 5. Verhalten des Konturintegrals in den Randpunkten und gleichmässige Konvergenz . . . . .	50
3. Entwicklungssatz, bilineare Formel und Konvergenzfragen . . . . .	53
§ 6. Ein Satz über die Pole der Greenschen Funktion . . . . .	53
§ 7. Doppelte Nullstellen von $\mathcal{L}$ und doppelte Eigenwerte . . . . .	59
§ 8. Bestimmung der Residuen, Entwicklungssatz und bilineare Formel . . . . .	63
§ 9. Nachweis des Gibbsschen Höckers . . . . .	66
§ 10. Absolute Konvergenz für den Fall reeller Differentialgleichungen . . . . .	69

	Seite
4. Gliedweise Differenzierbarkeit und Anwendung auf partielle Differentialgleichungen . . . . .	72
§ 11. Zweimalige gliedweise Differenzierbarkeit . . . . .	72
§ 12. Einmalige gliedweise Differenzierbarkeit unter einfacheren Bedingungen . . . . .	77
§ 13. Entwickelbarkeit spezieller Lösungen der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (p(t) + kq(x))u = 0$ nach partikulären Lösungen . . . . .	80
§ 14. Lösung derselben partiellen Differentialgleichung bei gewissen Anfangsbedingungen . . . . .	87
§ 15. Wärmeleitung im inhomogenen Ring . . . . .	92
2. Abschnitt. Die Randbedingungen $W_1(u) = W_2(u) = 0$ ; $A_{12} = A_{34}$ ; $A_{24} \neq 0$	
1. Lösung der Randwertaufgabe und Entwicklungssatz . . . . .	94
§ 1. Existenz unendlich vieler Eigenwerte . . . . .	94
§ 2. Konturintegral und Entwicklungssatz . . . . .	97
2. Sätze über gleichmässige und absolute Konvergenz, sowie gliedweise Differenzierbarkeit . . . . .	99
§ 3. Verhalten des Konturintegrals an den Randpunkten und gleichmässige Konvergenz . . . . .	99
§ 4. Asymptotische Darstellung der Eigenfunktionen und bilinearen Reihe . . . . .	102
§ 5. Absolute Konvergenz . . . . .	105
§ 6. Sätze über gliedweise Differenzierbarkeit . . . . .	107
§ 7. Die Lösung der partiellen Differentialgleichung unter abgeänderten Bedingungen . . . . .	109
3. Abschnitt. Die Randbedingungen $W_1(u) = W_2(u) = 0$ ; $A_{12} = A_{34}$ ; $A_{24} = 0$	
1. Charakterisierung der wesentlichen Unterfälle . . . . .	111
2. Lösung des Randwertproblems für den Fall $A_{14} + A_{32} \neq 0$ ; Entwicklungssatz . . . . .	114
§ 1. Diskussion der transzendenten Gleichung . . . . .	114
§ 2. Konturintegral und Entwicklungssatz . . . . .	117
3. Sätze über gleichm., abs. Konvergenz, Differenzierbarkeit . . . . .	118
§ 3. Randwerte des Konturintegrals, gleichm. Konvergenz . . . . .	118
§ 4. Asymptotische Darstellungen . . . . .	123
§ 5. Absolute Konvergenz . . . . .	126
§ 6. Gliedweise Differenzierbarkeit; part. Differentialgleichung . . . . .	127
4. Der Fall: $b_1 a_4 + a_2 b_3 = B = 0$ . . . . .	130
§ 7. Die Randbedingung: $u(0) = u(a) = 0$ . . . . .	130
§ 8. Die Randbedingung $\pm iu'(0) + a_3 u(a) + u'(a) = 0$ $u(0) \pm iu(a) = 0$ . . . . .	133
<i>Schlussfolgerungen.</i>	
1. Verallgemeinerung der Differentialgleichung . . . . .	142
2. Zusammenfassung der Sätze über die partielle Differentialgleichung . . . . .	145

### Vorwort.

Die an den verschiedensten Punkten der mathematischen Physik sich darbietenden Randwertprobleme sind naturgemäss schon Gegenstand vieler Bearbeitungen gewesen. Sturm und Liouville haben die Aufmerksamkeit besonders auf einen Typ von linearen Differentialgleichungen hingelenkt, nämlich derjenigen, die einen verfügbaren Parameter  $\lambda$  linear enthalten. Es wurden dabei folgende Randbedingungen vorzugsweise behandelt:

I.  $u(0)=u(a)=0$ ; II.  $u'(0)=u'(a)=0$ ;

III.  $k(0)u'(0)-hu(0)=k(a)u'(a)+Hu(a)=0$ ;  $\left(\begin{matrix} h \\ H \end{matrix}\right) \geq 0$ ,

sowie Kombinationen derselben. Die Differentialgleichung legte man in folgender Form zu Grunde:

$$\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) + (g(x) \cdot \lambda - l(x)) u(x) = 0,$$

wo  $k(x)$  und  $g(x)$  im Definitionsbereich im allgemeinen als von Null verschieden angenommen wurden. Während die klassischen Methoden von Sturm in neuerer Zeit von M. Bôcher weiter ausgebaut wurden, ergab die Aufdeckung des Zusammenhanges mit den Integralgleichungen neue Möglichkeiten für die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Sturm-Liouvilleschen Eigenfunktionen. Dieser Zusammenhang wurde insbesondere von D. Hilbert und A. Kneser erforscht, Ein weiteres Hilfsmittel ergab sich in der asymptotischen Darstellungsweise der Eigenfunktionen.

Randbedingungen von allgemeinerer Form sind wohl zuerst von D. A. Westfall, M. Mason, G. D. Birkhoff und W. Stekloff behandelt worden. Westfall fusst wesentlich auf der Theorie von Hilbert, Mason benutzt Methoden der Variationsrechnung und Stekloff die von ihm für eindimensionale Probleme ausgebaute Schwarz-Poincarésche Methode. Bei allen ist mithin die Reellität der eingehenden Grössen Voraussetzung.

Der Fall nun, dass die Differentialgleichung komplexe Koeffizienten enthält, ist vor allem von Kneser, Hilb und Birkhoff in Angriff genommen worden. Die hier in verschiedenen Abwandlungen benutzte Methode der Partialbruchentwicklung der darzustellenden Funktion geht im wesentlichen auf Cauchy und Poincaré zurück. Während Kneser und Hilb die erwähnten speziellen Rand-

bedingungen behandelten bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, geht Birkhoff von allgemeineren Randbedingungen und Differentialgleichungen  $n^{\text{ter}}$  Ordnung aus. Jedoch sind seine Resultate manchen Einschränkungen unterworfen. Darauf wird im nachfolgenden Überblick noch näher eingegangen werden.

Die vorliegende Arbeit will nun in einer Reihe positiver Sätze einer möglichst abgeschlossene Theorie des Eigenwertproblems und der Darstellung willkürlicher Funktionen für die Lösungen komplexer Differentialgleichungen zweiter Ordnung liefern, wenn die Koeffizienten der Randbedingungen

$$\begin{aligned} a_1 u(0) + a_2 u'(0) + a_3 u(a) + a_4 u'(a) &= 0 \\ b_1 u(0) + b_2 u'(0) + b_3 u(a) + b_4 u'(a) &= 0 \end{aligned}$$

den Parameter  $\lambda$  nicht enthalten, der Relation

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_3 b_4 - a_4 b_3^1$$

genügen, im übrigen aber beliebige komplexe Werte annehmen. In der Differentialgleichung werden die Funktionen  $k(x)$ ,  $g(x)$  zunächst gleich 1 gesetzt, wovon wir uns zum Schluss jedoch wieder — unter gewissen Einschränkungen — frei machen werden.

### Überblick.

Das Randwertproblem ist unter den genannten Bedingungen ohne wesentliche Einschränkung gelöst worden. Immer existieren unendlich viele Eigenwerte.

Beim Entwicklungssatz jedoch musste der Fall:  $\frac{a_2}{a_4} = \frac{b_2}{b_4} = \pm i$  ausgeschlossen werden.

Für den Beweis des Satzes waren die Ausführungen Birkhoffs<sup>2</sup> von wesentlichem Nutzen, weniger dagegen für die Lösung des Eigenwertproblems. Birkhoff behandelt in seiner zweiten Arbeit die Differentialgleichungen  $n^{\text{ter}}$  Ordnung. Bei seinen Abschätzungen muss er die Koeffizienten der Randbedingungen gewissen

Einschränkungen unterwerfen, die z. B. in dem erwähnten Falle:  $\frac{a_2}{a_4} = \frac{b_2}{b_4} = \pm i$  nicht erfüllt sind. Durchgeführt sind seine Beweise nur für ungerade  $n$ .

Es ist notwendig, einige Bemerkungen über den Fall gerader  $n$  zu machen. Setzt man den Parameter  $\lambda$  gleich  $q^n$ , so braucht man statt der Vollebene nur

<sup>1</sup> Die Abstreifung von dieser Bedingung sei einer evtl. Ergänzung dieser Arbeit vorbehalten.

<sup>2</sup> Vgl. Transact. of the Am. Math. Soc. 1908; S. 219/373.

Über den Existenz von Eigenfunktionen einer reellen Variablen bei linearen etc. 27

einen in gewissen Grenzen willkürlichen Sektor der  $\varrho$ -Ebene zu betrachten; in den anderen Sektoren herrschen dann analoge Verhältnisse.<sup>1</sup>

So gelangt Birkhoff zur transzendenten Gleichung:

$$\varrho \cdot A = B + 2l\pi i + \frac{\psi}{\varrho} \quad (l \text{ ganzzahlig}),$$

wobei  $\psi$  im Inneren und auf den Rändern des Sektors zwischen endlichen und von  $\varrho$  unabhängigen Schranken verbleibt.  $A$ , das ebenso wie  $B$  unabhängig von  $\varrho$  ist, hängt mit der Wahl des Sektors zusammen, und ist jedenfalls so beschaffen, dass die durch die Gleichung

$$\varrho^* \cdot A = B + 2l\pi i$$

definierten Werte von  $\varrho$  im Inneren oder auf dem Rande des Sektors liegen. Letzteres ist dann der Fall, wenn  $B$  gleich 0 oder  $\pi i$  ist. Auf diesen Fall ist die von Birkhoff sonst durchgeführte Methode nicht mehr anwendbar. Er verweist hier auf eine Stetigkeitsbetrachtung, die jedenfalls für  $n=2$  nicht durchführbar ist, und gerade da ist in der Mehrzahl der Fälle:  $B = \begin{cases} 0 \\ \pi i \end{cases}$ ; d. h. die Eigenwerte, bzw. ihre Quadratwurzeln nähern sich in den meisten Fällen asymptotisch der reellen Achse.

Die Ausführungen Birkhoffs gipfeln in dem Resultat, dass jede stückweise stetige Funktion mit stückweise stetiger Ableitung in eine nach den Eigenfunktionen des Randwertproblems fortschreitende Fourierreihe entwickelt werden kann. Die Reihe ist nach Ausschluss der Unstetigkeits- und Randpunkte im Restintervall gleich der Funktion, in Unstetigkeitsstellen gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Grenzwerte von rechts und links. Der Wert in den Randpunkten wird nicht näher bestimmt. Dieser letztere Mangel macht eine Aussage über gleichmässige Konvergenz im abgeschlossenen Intervall, die in mancher Hinsicht sehr erwünscht wäre, zur Unmöglichkeit. In unseren hier behandelten Fällen gelingt es jedoch durchweg, die Randwerte der Reihen zu bestimmen und Bedingungen für gleichmässige Konvergenz anzugeben. Weiterhin wird in den meisten Fällen

---

<sup>1</sup> Der Sektor muss jedenfalls ein  $n$ tel der Vollebene sein, wird aber noch in 2 Hälften zerpalten derart, dass in jedem Halbsektor die Relationen:  $Re(\varrho w_1) \leq \dots \leq Re(\varrho w_n)$ ,  $w_\mu^n = -1$ , gelten, wenn für jeden eine besondere, aber feste Numerierung geeignet gewählt wird. Hierbei bildet aber der Fall  $n=2$  eine Ausnahme, insofern die den obigen analoge Relation:  $Re(\varrho i) \leq Re(\varrho(-i))$  in der ganzen oberen Halbebene gilt, nicht bloss in einem Quadranten.

auf Grund asymptotischer Darstellungen bei geeigneten Voraussetzungen auch die absolute Konvergenz der Reihen bewiesen. Diese Sätze ermöglichen es auch, die mehrmalige gliedweise Differenzierbarkeit der Reihen zu untersuchen, mit deren Hilfe dann die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (p(t) - kq(x))u = 0,$$

welche gegebenen Anfangsbedingungen genügt<sup>1</sup>, durch eine Fourierreihe dargestellt werden kann.

Noch von einer weiteren Einschränkung des Birkhoff'schen Entwicklungssatzes werden wir uns frei machen können, nämlich von der Forderung einfacher Eigenwerte. Tatsächlich hat der von ihm aufgestellte Entwicklungssatz, insofern er behauptet, dass die auftretenden Residuen die Glieder einer Fourierschen Reihe darstellen, nur hypothetischen Charakter. Einmal deshalb, weil diejenigen Eigenwerte, die in den asymptotischen Abschätzungen als einfach erkannt werden, absolut oberhalb einer gewissen Schranke liegen. Über die darunter liegenden Eigenwerte kann nichts ausgesagt werden, weil die reellen Methoden nicht anwendbar sind. Andererseits ist es aber auch bei einfachen Eigenwerten nicht ohne weiteres evident, dass die Greensche Funktion an diesen Stellen nur Pole erster Ordnung besitzt, was andererseits für die gewünschte Form der Reihenglieder aber durchaus notwendig ist. Diese Schwierigkeiten lösen sich jedoch mittels des im ersten Abschnitt (vgl. § 6) allgemein, auch für Differentialgleichungen  $n^{\text{ter}}$  Ordnung bewiesenen Satzes, dass bei beliebigen homogenen Randbedingungen die Greensche Funktion immer nur Pole erster Ordnung besitzen kann. Wenn man bedenkt, dass bei Differentialgleichungen höherer Ordnung die Greenschen Funktionen im allgemeinen nicht symmetrisch sind, so sieht man, dass dieser allerdings nur für eine besondere Klasse von Kernen geltende Satz in zweifacher Hinsicht eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes darstellt, dass der lösende Kern nur Pole erster Ordnung besitzt, falls der ursprüngliche Kern reell und symmetrisch ist<sup>2</sup>.

Der Entwicklungssatz wird dann noch in der Weise verallgemeinert, dass man als darzustellende Funktionen solche zulässt, die durch die Gleichung

<sup>1</sup>  $u(t_0, x) = F(x); \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\right)_{t=t_0} = G(x).$

<sup>2</sup> Vgl. A. Kneser: Die Integralgleichungen, 2. Aufl. S. 282.

$$f(x) = \int_0^x \varphi(x) dx + C,$$

oder eine endliche Summe solcher Integrale definiert sind, wobei  $\varphi(x)$  nur eine im Sinne von Lebesgue summable Funktion zu sein braucht<sup>1</sup>.

Vermöge der asymptotischen Darstellung, die in gewissen Fällen allerdings nicht gelang, aber durch eine andere zweckmässige Darstellung ersetzt werden konnte, liess sich der Satz beweisen, dass die Fourierentwickelungen aller Funktionen, für die der Entwicklungssatz gilt, auch an Unstetigkeitsstellen genau gleich sind den Entwicklungen derselben Funktionen nach den trigonometrischen. Damit ist insbesondere das Auftreten des Gibbsschen Höckers nachgewiesen. Aber auch andere für trigonometrische Reihen geltende Sätze könnte man auf diese Weise für komplexe Sturm-Liouvillesche Reihen fruchtbar machen.

Im ersten Abschnitt wird wegen seiner Bedeutung in den Anwendungen und seinen besonderen Eigenschaften der Fall

$$u(x) \Big|_a^0 = u'(x) \Big|_a^0 = 0$$

behandelt, bei welchem, abgesehen von einigen verwandten Fällen, allein unendlich viele doppelte Eigenwerte auftreten können. Am Schluss dieses Abschnittes gehen wir auf bestimmte partielle Differentialgleichungen ein und zwar auf das Problem der Entwicklung gewisser durch Anfangs- und Randbedingungen festgelegter Lösungen nach partikulären Lösungen. Dies liefert unter anderem einige Tatsachen über die Funktionen des elliptischen Zylinders. Ausserdem wird das bereits erwähnte Problem und die Wärmeleitung im inhomogenen Ring behandelt.

Im zweiten Abschnitt werden die allgemeinen Randbedingungen zu Grunde gelegt, unter der Voraussetzung, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet. Diese Lücke wird dann in einem besonderen dritten Abschnitt ausgefüllt.

---

<sup>1</sup> Dieselbe Form des Entwicklungssatzes, aber auf anderem Wege abgeleitet, findet sich auch bei W. Stekloff: Sur certaines questions d'analyse. . . ; mémoires de l'acad. Impér. des sciences de St. Petersburg.

Während bei all diesen Ausführungen immer von der speziellen Differentialgleichung

$$u'' + (\lambda - L(x))u = 0$$

ausgegangen wurde, werden zum Schluss noch die gewonnenen Resultate auf die allgemeine Differentialgleichung

$$u'' + p_1(x)u' + (\lambda p_2(x) + p_3(x))u = 0$$

mit komplexen Koeffizienten übertragen, allerdings nur mit gewissen Einschränkungen.

Andererseits werden die Sätze über die Lösung der erwähnten partiellen Differentialgleichung so zusammengefasst, dass sie im Wesentlichen ohne Erwähnung von Randbedingungen ausgesprochen werden können. Es wird im allgemeinen nur verlangt, dass die Relation

$$\begin{vmatrix} F'(0) & G(0) \\ F'(a) & G(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F'(a) & G(a) \\ F'(0) & G(0) \end{vmatrix}$$

erfüllt ist, die ebenso wie die Relation

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_3 b_4 - a_4 b_3$$

nur eine hinreichende Bedingung darstellt. Ausserdem müssen in gewissen Sonderfällen die Randwerte der zweiten Ableitungen noch gewissen Bedingungen unterworfen werden.

#### 1. Abschnitt.

#### Erster Abschnitt. Die Randbedingungen:

$$u(0) = u(a); \quad u'(0) = u'(a).$$

##### 1. Bemerkungen zum reellen Problem.

Ist in der Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + (\lambda - L(x))u = 0^1, \quad (0 \leq x \leq a)$$

die wir des weiteren unseren Ausführungen zu Grunde legen wollen, die Funk-

---

<sup>1</sup> G. Hoheisel hat den periodischen Fall auch nach der Integralgleichungsmethode behandelt, doch in anderer Weise als es hier geschieht; vgl. S. Göschen Nr. 920 und auch hierzu M. Böcher: Leçons sur les méthodes de Sturm.



tion  $L(x)$  reell und stetig, so kann man sich der Methode der Integralgleichungen bedienen, mittels deren sich das Problem in sehr übersichtlicher kurzer Weise erledigen lässt.

Wir behaupten zunächst: Gibt es für gewisse Werte von  $\lambda$  Lösungen der Gleichung (1), welche den Randbedingungen

$$(2) \quad u(x) \Big|_a^0 = u'(x) \Big|_a^0 = 0$$

genügen, so bilden die Parameterwerte  $\lambda_n$ , die sog. Eigenwerte unseres Problems, eine diskrete nach unten beschränkte Wertreihe.

$u_1(x), u_2(x)$  sei ein Fundamentalsystem von (1) mit den Anfangswerten:

$$(2a) \quad u_1(0) = u_2'(0) = 1; \quad u_2(0) = u_1'(0) = 0.$$

Ist dann

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$$

eine Lösung des Randwertproblems, so ergeben sich durch Einsetzen in die Randbedingungen zwei homogene lineare Gleichungen für  $c_1$  und  $c_2$ , für deren Lösbarkeit hinreichend und notwendig das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} u_1'(a) & u_2'(a) - 1 \\ u_1(a) - 1 & u_2(a) \end{vmatrix} = -2 + u_1(a) + u_2'(a)$$

ist.<sup>1</sup> Da die Anfangswerte von  $u_1$  und  $u_2$  unabhängig von  $\lambda$  festgelegt sind, so ist dieser Ausdruck in der ganzen Ebene eine eindeutige, reguläre Funktion von  $\lambda$ , also entweder ganz rational oder transzendent. Sie verschwindet demnach entweder identisch, oder besitzt discrete Nullstellen.

Ersteres kann aber nicht der Fall sein, da für solche Werte von  $\lambda$ , für welche  $\lambda - L(x)$  in  $[0, a]$  negativ ist, das Problem keine Lösung mehr besitzt, wie folgende Überlegung zeigt.

Unter dieser Voraussetzung hat nämlich jede Lösung der Differentialgleichung auf Grund bekannter Liouvillescher Schlüsse im ganzen Intervall höchstens eine Nullstelle. Liegt tatsächlich eine solche vor, so können wir den einen Randwert einer solchen Lösung positiv annehmen; dann aber ist der andere sicher negativ oder Null. Hat  $u(x)$  aber keine Nullstelle in  $[0, a]$ , so ist auch  $u''(x)$

---

<sup>1</sup> Denn die Wronskische Determinante von  $u_1, u_2$  ist gleich der Einheit.

ebenso wie  $\lambda - L(x)$  überall von Null verschieden,  $u'(x)$  mithin eine monotone Funktion, und die Gleichung

$$u'(0) = u'(a)$$

nur erfüllbar, wenn  $u'(x)$  konstant, also  $u''(x)$  identisch Null ist. In beiden Fällen ist also die eine oder andere Randbedingung ohne Widerspruch nicht erfüllbar. Damit sind aber beide Behauptungen bewiesen.

Unter diesen Umständen nun lässt sich eine Greensche Funktion bilden. Diese ist eine Lösung der Differentialgleichung, welche folgende Bedingungen erfüllt

$$\begin{aligned} G(x, s) &= \varphi(x); & x \leq s \\ &= \psi(x); & x \geq s \\ \varphi(0) &= \psi(a) & \varphi(s) - \psi(s) &= 0 \\ \varphi'(0) &= \psi'(a) & \varphi'(s) - \psi'(s) &= 1. \end{aligned}$$

Wir versuchen den Ansatz

$$\varphi(x) = a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x); \quad \psi(x) = a_3 u_1(x) + a_4 u_2(x).$$

Die vier Bedingungen führen zu folgendem inhomogenen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a_1 & & -a_3 u_1(a) - a_4 u_2(a) &= 0 \\ & a_2 & -a_3 u_1'(a) - a_4 u_2'(a) &= 0 \\ a_1 u_1(s) + a_2 u_2(s) - a_3 u_1(s) - a_4 u_2(s) &= 0 \\ a_1 u_1'(s) + a_2 u_2'(s) - a_3 u_1'(s) - a_4 u_2'(s) &= 1. \end{aligned}$$

Für die Determinante  $\Delta$  des Systems erhält man, wenn man die letzten beiden Kolonnen zu den ersten addiert:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 - u_1(a), & -u_2(a), & -u_1(a), & -u_2(a) \\ -u_1'(a), & 1 - u_2'(a), & -u_1'(a), & -u_2'(a) \\ 0, & 0, & -u_1(s), & -u_2(s) \\ 0, & 0, & -u_1'(s), & -u_2'(s) \end{vmatrix} \\ &= (1 - u_1(a) - u_2'(a) \\ & \quad + u_1(a) u_2'(a) - u_1'(a) u_2(a)) \cdot 1 \\ &= 2 - u_1(a) - u_2'(a). \end{aligned}$$

Von diesem Ausdruck ist aber bereits bewiesen worden, dass er nur für eine diskrete Reihe von  $\lambda$ -Werten verschwindet. Es existieren also  $\lambda$ -Werte in hinreichender Anzahl, für welche das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. Für die Unbekannten erhält man die Ausdrücke:

$$a_1 = \frac{1}{\mathcal{A}} [-u_1(s) u_2(a) - u_2(s) (1 - u_1(a))]$$

$$a_2 = \frac{1}{\mathcal{A}} [u_2(s) u_1'(a) + u_1(s) (1 - u_2'(a))]$$

$$a_3 = \frac{-1}{\mathcal{A}} [u_1(s) u_2(a) - u_2(s) (1 - u_2'(a))]$$

$$a_4 = \frac{1}{\mathcal{A}} [-u_1(s) (1 - u_1(a)) + u_2(s) u_1'(a)]$$

$$\varphi = \frac{1}{\mathcal{A}} \{u_1(x) [-u_1(s) u_2(a) - u_2(s) (1 - u_1(a))] + u_2(x) [u_1(s) (1 - u_2'(a)) + u_2(s) u_1'(a)]\}$$

$$\psi = \frac{1}{\mathcal{A}} \{u_1(x) [-u_1(s) u_2(a) + u_2(s) (1 - u_2'(a))] + u_2(x) [-u_1(s) (1 - u_1(a)) + u_2(s) u_1'(a)]\}.$$

Vertauscht man in einem dieser Ausdrücke  $x$  mit  $s$ , so geht er in den anderen über;  $G(x, s)$  ist also auch symmetrisch.

Auf Grund des Hauptsatzes über symmetrische Kerne muss aber dann die Integralgleichung

$$v(x) = \mu \int_0^a G(x, s) \cdot v(s) ds$$

mindestens eine nichttriviale Lösung haben für irgend einen Wert  $\mu_n$ , den wir gleich  $\lambda_n - \lambda$  setzen. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dx^2} &= (\lambda_n - \lambda) \int_0^a \frac{\partial^2 G(x, s)}{\partial x^2} v(s) ds - v(x) (\lambda_n - \lambda) \\ &= -(\lambda - L(x)) v(x) - (\lambda_n - \lambda) v(x). \end{aligned}$$

Da nun  $v(x)$  ebenso wie  $G(x, s)$  die Randbedingungen erfüllt und mit seiner ersten Ableitung stetig ist, so ist es eine Lösung unseres Problems.

Umgekehrt erhält man, wenn man auf die Gleichungen

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + (\lambda_n - L(x)) u = 0$$

$$\frac{\partial^2 G(x, s)}{\partial x^2} + (\lambda - L(x)) G(x, s) = 0$$

die Greensche Operation anwendet:

$$u'(x) G(x, s) - u(x) \frac{\partial G(x, s)}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=a} - \frac{\partial G(x, s)}{\partial x} \Big|_{x=s+0}^{x=s-0} \cdot u(s) = -(\lambda_n - \lambda) \int_0^a G(x, s) u(x) dx$$

$$u(x) = (\lambda_n - \lambda) \int_0^a G(x, s) u(s) ds.$$

Die Differentialgleichung liefert also in der Tat das vollständige System.

Da nun, wie zu Anfang bewiesen, nur endlich viele negative Eigenwerte existieren, gilt nach dem Mercerschen Satz die bilineare Formel

$$G(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(s)}{\lambda_n - \lambda} \quad (\varphi_n(x) \text{ normiert}).$$

Dass wirklich unendlich viele Eigenfunktionen vorhanden sind, folgert man wie bei Kneser<sup>1</sup> aus der Stetigkeit von  $\varphi'_n(x)$  einerseits und der Unstetigkeit von  $\frac{\partial G(x, s)}{\partial x}$  andererseits. In der obigen Formel konvergiert nun die Reihe der absolut genommenen Glieder gleichmässig. Die absolute Konvergenz ist, wie wir sehen werden, im komplexen Falle nicht beweisbar.

Bezgl. der asymptotischen Darstellung der Eigenfunktionen sei auf § 10 verwiesen.

Aus der gleichmässigen Konvergenz der bilinearen Entwicklung folgert man weiter in bekannter Weise die Entwickelbarkeit quellenmässiger Funktionen

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^a F(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha.$$

<sup>1</sup> Vgl. Kneser l. c. § 28.

Über die Darstellbarkeit nicht quellenmässiger Funktionen und absolute Konvergenz vergleiche man weiter Satz 7. S. 65 und Satz 8. S. 72.

2. Lösung des komplexen Randwertproblems und Abschätzung des Konturintegrals.

§ 1. Existenz unendlich vieler Eigenwerte.

Gehen wir wieder aus von Gleichung (1), wobei wir aber jetzt  $L(x)$  als komplexe Funktion der reellen Variablen  $x$  ansehen. Das Fundamentalsystem  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  sei wie früher definiert. Somit erhalten wir auch jetzt zur Bestimmung der Eigenwerte die Gleichung:

$$(3) \quad A = 2 - u_1(a) - u_2'(a) = 0.$$

Bei dieser Gelegenheit sei eine Arbeit von O. Volk erwähnt<sup>1</sup>, in welcher unter anderem der periodische Fall für die Differentialgleichung des elliptischen Cylinders behandelt wird. Das dortige Verfahren basiert auf der asymptotischen Darstellung der (—nicht normierten—) Eigenfunktionen, und liesse sich, wenn es wirklich einwandfrei wäre, bei einfacher Modifikation ohne weiteres auf den allgemeinen Sturm-Liouvilleschen Fall bei komplexer Differentialgleichung anwenden und würde auch noch speziellere Resultate erzielen.

Volks Aussage über die Eigenwerte stellt aber nur eine notwendige Bedingung dar. Es bleibt die Verträglichkeit der Forderungen 14 a, b (§ 3), welche die Koinzidenz zweier Randwertprobleme aussagen, unbewiesen, wenn nicht die Existenz der Heineschen Funktionen vorher schon angenommen wird<sup>1</sup>.

Auch wir benutzen asymptotische Darstellungen. In ähnlicher Weise wie bei Kneser<sup>2</sup> erhält man, wenn  $\lambda = \varrho^2$  gesetzt wird, und  $\varrho$  einen nach unten beschränkten Imaginärteil hat:

$$(4 a) \quad u_1(x) e^{\varrho i x} = \frac{e^{2\varrho i x} + 1}{2} + \frac{\psi}{\varrho}; \quad u_2(x) e^{\varrho i x} = \frac{e^{2\varrho i x} - 1}{2 i \varrho} + \frac{\psi}{\varrho^2}.$$

---

<sup>1</sup> O. Volk, Dissertation, München 1920. Es handelt sich um die Gleichungen (14 a):  $\cos \varrho \pi = 1 - \frac{8 B \alpha^2}{\varrho \cdot A}$  und (14 b):  $\sin \varrho \pi = -\frac{8 \alpha^2 C}{\varrho \cdot A}$ , aus denen (15):  $\operatorname{tg} \varrho \pi = -8 \alpha^2 C/A \left( \varrho - \frac{8 \alpha^2 B}{A} \right)$  folgt. (15) definiert ein System von  $\varrho$ -Werten und (14 b) ein anderes. Dass beiden Systemen gewisse Werte gemein sind, wird nicht gezeigt.

<sup>2</sup> l. c. § 49.

Dabei werden mit dem Zeichen  $\psi$  ohne Unterschied alle Grössen belegt, die absolut unter einer von  $\varrho$  unabhängigen Schranke verbleiben. Es folgt weiter aus den leicht zu verifizierenden Formeln:

$$\begin{aligned}
 u_1(x) &= \cos \varrho x + \frac{1}{\varrho} \int_0^x L' u_1' \sin \varrho(x-x') dx' \\
 & \qquad \qquad \qquad (u(x')=u') \\
 \frac{du_1(x)}{dx} &= -\varrho \sin \varrho x + \int_0^x L' u_1' \cos \varrho(x-x') dx' \\
 (4 a) \quad e^{\varrho i x} \cdot \frac{du_1(x)}{dx} &= \varrho \left[ -\frac{e^{2\varrho i x} - 1}{2i} + \frac{1}{\varrho} \int_0^x L' u_1' \cdot e^{\varrho i x'} \frac{e^{2\varrho i(x-x')} + 1}{2} \cdot dx' \right] \\
 &= \varrho \left[ -\frac{e^{2\varrho i x} - 1}{2i} + \frac{\psi}{\varrho} \right]
 \end{aligned}$$

und ähnlich

$$e^{\varrho i x} \frac{du_2(x)}{dx} = \frac{e^{2\varrho i x} + 1}{2} + \frac{\psi}{\varrho},$$

da in jedem Gebiet:  $I(\varrho)^1 \geq -b^2$  die Grössen  $|e^{\varrho i x}|$ ,  $\left| \frac{e^{2\varrho i x} + 1}{2} \right|$ ,  $\left| \frac{e^{2\varrho i x} - 1}{2i} \right|$  unterhalb einer von  $\varrho$  unabhängigen Schranke verbleiben. Für das Gebiet  $I(\varrho) \leq +b^2$  gelangt man zu einer ähnlichen Darstellung

$$(4 b) \quad u_1(x) e^{-\varrho i x} = \frac{e^{-2\varrho i x} + 1}{2} + \frac{\psi}{\varrho}, \text{ etc.,}$$

wenn man gleichzeitig bedenkt, dass die Anfangswerte von  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  unabhängig von  $\varrho$ , und diese Funktionen selbst also gerade Funktionen von  $\varrho$  sind.

Für Gleichung (3) erhält man also in den beiden Gebieten die Darstellungen

$$\mathcal{A} = \begin{cases} e^{-\varrho i a} \left( 2 e^{\varrho i a} - e^{2\varrho i a} - 1 + \frac{\psi}{\varrho} \right); & I(\varrho) \geq -b^2 \\ e^{\varrho i a} \left( 2 e^{-\varrho i a} - e^{-2\varrho i a} - 1 + \frac{\psi}{\varrho} \right); & I(\varrho) \leq +b^2. \end{cases}$$

<sup>1</sup>  $I(\varrho)$  = Imaginärteil von  $\varrho$ .

Aus der ersten dieser Gleichungen erhält man

$$\begin{aligned} (e^{e^{ia}} - 1)^2 &= \frac{\psi}{\varrho} \\ e^{e^{ia}} &= 1 + \sqrt{\frac{\psi}{\varrho}} \\ e^{ia} &= \pm 2n\pi i + \sqrt{\frac{\psi_0}{\varrho}}; \end{aligned}$$

auf denselben Ausdruck führt aber auch die zweite Gleichung. Man sieht also, dass etwaige Lösungen von (3) von einem hinreichend gross gewählten  $n_0$  an in einer gewissen Umgebung der Stellen  $\pm \frac{2n\pi}{a}$  liegen müssen, und speziell nicht mehr aus dem Streifen  $-b^2 \leq I(\varrho) \leq +b^2$  herausfallen können. Da in diesem beide asymptotischen Darstellungen gelten, so können wir uns des weiteren auf eine von beiden beschränken.

Wir zeigen nun, dass zu jeder Zahl  $n > n_0$  auch wirklich immer ein Paar von Lösungen existiert.

Wir schlagen um die Stellen  $\frac{2n\pi}{a}$  sich gegenseitig nicht schneidende Kreise von festem Radius. Ist  $n_0$  hinreichend gross, so fallen die etwaigen Lösungen sicherlich in das Innere der Kreise hinein. Da in unserem Streifen  $|e^{-e^{ia}}|$  beschränkt ist, so gilt, wenn  $\varrho$  die Kreisperipherieen durchläuft, die Darstellung

$$\frac{\mathcal{A}}{4} = \left( \frac{e^{\frac{\varrho ia}{2}} - e^{-\frac{\varrho ia}{2}}}{2i} \right)^2 + \frac{\psi}{\varrho} = \sin^2 \varrho \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{\psi_1}{\varrho} \right),$$

denn  $\left| \frac{1}{\sin^2 \varrho \frac{a}{2}} \right|$  bleibt gleichfalls unter einer Schranke. Die Grösse  $1 + \frac{\psi_1}{\varrho}$  besitzt

bei grossem  $\varrho$  keine,  $\sin^2 \varrho \frac{a}{2}$  aber eine doppelte Nullstelle im Inneren jedes Kreises.

Die Grösse  $\mathcal{A}$  ändert also ihr Winkelargument bei einmaliger Umkreisung genau um  $4\pi$ , besitzt also im Inneren jedes Kreises je ein Paar von Nullstellen  $\varrho_n^{1,2}$ , die möglicherweise auch zusammenfallen können. Ihre Quadrate bezeichnen wir in üblicher Weise als Eigenwerte. Damit ist die Behauptung bewiesen. Satz 1.

§ 2. *Asymptotische Darstellung der Eigenwerte.*

Mit Hilfe der Gleichungen (4 a) lässt sich die Grösse  $\psi$  der Gleichung

$$(5) \quad \mathcal{A} = -4 \sin^2 \varrho \frac{a}{2} + \frac{\psi}{\varrho}$$

leicht näher bestimmen:

$$\psi = \int_0^a L' (u_1' \sin \varrho (a-x') + \varrho u_2' \cos \varrho (a-x')) dx'$$

Setzt man für  $u_1'$  und  $u_2'$  die Ausdrücke

$$u_1(x') = \cos \varrho x' + \frac{1}{\varrho} \int_0^{x'} L'' u_1'' \sin \varrho (x'-x'') dx''$$

$$u_2(x') = \frac{\sin \varrho x'}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \int_0^{x'} L'' u_2'' \sin \varrho (x'-x'') dx''$$

so erhält man bei Zerspaltung der trigonometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned} \psi &= \sin \varrho a \int_0^a L' dx' + \int_0^a dx' L' \frac{\sin \varrho (a-x')}{\varrho} \int_0^{x'} L'' u_1'' \sin \varrho (x'-x'') dx'' \\ &\quad + \int_0^a dx' L' \cos \varrho (a-x') \int_0^{x'} L'' u_2'' \sin \varrho (x'-x'') dx'' \\ &= \sin \varrho a \int_0^a L' dx' + \frac{\psi_0}{\varrho}. \end{aligned}$$

Dies in (5) eingesetzt ergibt:

$$\left| 4 \sin^2 \varrho \frac{a}{2} \right| = \left| \frac{\psi}{\varrho} \right| = \left| \frac{1}{|\varrho|} \right| \left| \sin \varrho a \int_0^a L' dx' + \frac{\psi_0}{\varrho} \right|.$$



Setzen wir

$$\varrho = \varrho_n = \frac{2 n \pi}{a} + \varepsilon,$$

so ist

$$|\varepsilon|^2 \cdot C \leq |\varepsilon| \frac{C_1}{|\varrho|} + \frac{|\psi_0|}{|\varrho|^2};$$

$C, C_1, \dots$  sind reelle, endliche, nicht negative Grössen. Verschwindet  $\varepsilon$ , dann ist

$$\varrho_n = \pm \frac{2 n \pi}{a}.$$

Verschwindet  $\varepsilon$  nicht, so kann man offenbar setzen:

$$|\varepsilon|^2 = \frac{C_2}{|\varrho|} \cdot |\varepsilon| + \frac{C_3}{|\varrho|^2}.$$

Denn da  $\varepsilon$  auf alle Fälle mit wachsendem  $|\varrho|$  gegen die Null strebt, so bleibt

$$C = a^2 \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon a}{2} \right)^2 \frac{1}{3!} \pm \dots \right]^2$$

oberhalb einer von  $\varrho$  unabhängigen Schranke. Die quadratische Gleichung liefert schliesslich den Wert

$$|\varepsilon| = \frac{C_2}{2|\varrho|} \pm \sqrt{\frac{C_2^2}{4|\varrho|^2} + \frac{C_3}{|\varrho|^2}} = \frac{C_4}{|\varrho|}$$

$$\varrho_n^{1,2} = \frac{2 n \pi}{a} + \frac{\psi_{1,2}}{n}$$

$$\varrho_n^2 = \lambda_{(1,2)}^2 = \frac{4 n^2 \pi^2}{a^2} + \psi_{1,2}.$$

### § 3. Abschätzung des Konturintegrals.

$K_n (n=1, 2, \dots)$  sei eine Folge von Halbkreisen in der oberen  $\varrho$ -Halbebene um den Nullpunkt, welche keinen der im Vorangehenden konstruierten Schutzkreise um die Stellen  $\pm \frac{2 n \pi}{a}$  berühren oder schneiden. Dann kommt es uns im Folgenden auf den Wert des Integrals

$$(6) \quad \lim_{\kappa_n \rightarrow \infty} \frac{-1}{2\pi i} \int_{\kappa_n}^{\kappa_n} 2 \varrho d\varrho \int_0^a G(x, s; \varrho) \cdot f(s) ds = \lim I_n,$$

an, falls ein Grenzwert überhaupt existiert.  $G(x, s)$  ist hierbei die Greensche Funktion,  $f(s)$  eine noch näher zu charakterisierende Funktion, deren Fourierentwicklung wir im Auge haben.

Wir benutzen hier zweckmässig die von Birkhoff angewendete Abschätzungsmethode<sup>1</sup>, welche wir in diesem § in leicht modifizierter Weise entwickeln wollen. Es ist dies schon insofern von Interesse, als die Methode sich unter den vereinfachten Verhältnissen wesentlich übersichtlicher gestaltet.

Die Greensche Funktion ist genau wie oben beim reellen Problem definiert. Den dort entwickelten Beweis für ihre Existenz können wir ohne weiteres übernehmen. Auch jetzt gibt es zu vorgegebenem  $\lambda$  nur eine einzige Greensche Funktion. Wir benötigen jedoch eine etwas andere Form ihrer Darstellung, die wir bald etwas allgemeiner anlegen wollen.<sup>2</sup>

Sei  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$  ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (1) und  $a$ ,  $b$ , seien komplexe von  $\varrho$  unabhängige Konstanten. Wir setzen:

$$\begin{aligned} a_1 v_{1,2}(0) + a_2 v'_{1,2}(0) + a_3 v_{1,2}(a) + a_4 v'_{1,2}(a) &= W_1(v_{1,2}) \\ b_1 v_{1,2}(0) + b_2 v'_{1,2}(0) + b_3 v_{1,2}(a) + b_4 v'_{1,2}(a) &= W_2(v_{1,2}), \\ \pm \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1(s) & v_2(s) \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} v_1'(s) & v_2'(s) \\ v_1(s) & v_2(s) \end{array} \right| &= \gamma(x, s) \begin{pmatrix} + : x \leq s \\ - : x \geq s \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dann besagt ein Satz von Westfall<sup>2</sup>:

Wenn  $\lambda$  kein durch die Bedingungen

$$W_1(u) = W_2(u) = 0$$

definierter Eigenwert der Differentialgleichung (1) ist, so existiert eine und nur eine Greensche Funktion von der Form

$$(7) \quad G(x, s; \lambda) = \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) & \gamma(x, s; \lambda) \\ W_1(v_1) & W_1(v_2) & W_1(\gamma) \\ W_2(v_1) & W_2(v_2) & W_2(\gamma) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} W_1(v_1) & W_1(v_2) \\ W_2(v_1) & W_2(v_2) \end{vmatrix},$$

<sup>1</sup> l. c. in zwei Aufsätzen S. 219 und 373.

<sup>2</sup> Vgl. hierüber D. A. Westfall, Diss. Göttingen 1905; ausserdem M. Böcher l. c. cap. V.

Über die Existenz von Eigenfunktionen einer reellen Variablen bei linearen etc. 41  
 welche ihrer adjungierten gleich ist. Sie ist, wie man sieht, eine Lösung von  
 (1) und genügt den Randbedingungen, sowie der Gleichung  $\left. \frac{\partial G(x, s)}{\partial x} \right|_{s=0}^{s=0} = 1$ . Da  
 die linke Seite von (1) sich selbst adjungiert ist, so gilt, wenn auch die Rand-  
 bedingungen sich selbst adjungiert sind<sup>1</sup>, mithin die Symmetriebeziehung:

$$G(x, s) = G(s, x).$$

In unserem Falle ist

$$W_1(u) = u'(0) - u'(a); \quad W_2(u) = u(0) - u(a).$$

Wesentlich für die Birkhoffsche Abschätzung ist sein besonders definiertes Funda-  
 mentalsystem, dessen Behandlung in seiner ersten Arbeit enthalten ist. Wir be-  
 schränken  $\varrho$  auf die obere Halbebene.  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  sei das schon früher benutzte  
 Fundamentalsystem. Dann setzen wir

$$(8) \quad u_1 + \varrho i u_2 = w_1 = e^{\varrho i x} + \frac{1}{\varrho} \int_0^x L' w_1' \sin \varrho(x-x') dx'$$

$$u_1 - \varrho i u_2 = w_2 = e^{-\varrho i x} + \frac{1}{\varrho} \int_0^x L' w_2' \sin \varrho(x-x') dx'$$

und weiter

$$(8 a) \quad v_2(x) = w_2(x)$$

$$v_1(x) = w_1(x) + c w_2(x); \quad c = \frac{1}{\varrho} \int_0^a \frac{e^{\varrho i \alpha}}{2 i} L(\alpha) v_1(\alpha) d\alpha,$$

falls eine solche Funktion  $v_1$  existiert. Dies ist offenbar dann der Fall, wenn  
 die Integralgleichung

$$v_1(x) = w_1(x) + \frac{1}{\varrho} \int_0^a \frac{e^{\varrho i \alpha}}{2 i} w_2(x) \cdot L(\alpha) v_1(\alpha) d\alpha$$

lösbar ist und zwar für beliebig grosse  $|\varrho|$ . Um dies zu beweisen, multiplizieren  
 wir sie mit  $e^{\varrho i x}$  und setzen für den Augenblick

---

<sup>1</sup> Dies ist der Fall, wenn  $a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_3 b_4 - a_4 b_3$  ist, vgl. hierüber den Anfang des zweiten  
 Abschnittes S. 94.

$$v_1(x) e^{\rho i x} = \zeta(x); \quad \frac{w_2(x) e^{\rho i x} \cdot L(\alpha)}{2 i \rho} = K(x, \alpha).$$

Aus (8) folgt:

$$|w_1(x) e^{\rho i x}| < M; \quad |w_2(x) e^{\rho i x}| < M_1; \quad |K(x, \alpha)| < \frac{N}{|\rho|},$$

für alle zugelassenen  $x$  und  $\rho$ . Da die Fredholmschen Sätze auch für komplexe Kerne gelten, so besitzt mithin entweder die inhomogene Integralgleichung

$$\zeta(x) = w_1(x) e^{\rho i x} + \int_0^a K(x, \alpha) \zeta(\alpha) d\alpha$$

eine und nur eine Lösung, oder aber die homogene ist lösbar. Letzteres ist aber für grosse  $|\rho|$  auszuschliessen, denn, bedeutet  $Q$  das Maximum von  $|\zeta(x)|$  in  $[a, b]$ , dann wäre, falls  $\zeta(x)$  eine Lösung der homogenen Gleichung wäre,

$$Q \leq \frac{1}{|\rho|} N \cdot Q \cdot a$$

$$|\rho| \leq N \cdot a$$

woraus für hinreichend grosse  $\rho$  die Behauptung folgt. Es bleibt noch zu zeigen, dass  $v_1$  und  $v_2$  linear unabhängig sind. Aus der Definition von  $w_1$ ,  $w_2$  und  $c$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= e^{\rho i x} + c e^{-\rho i x} + \frac{1}{\rho} \int_0^x L(\alpha) (w_1 + c w_2) \sin \rho(x - \alpha) d\alpha \\ &= e^{\rho i x} + \frac{1}{\rho} \int_0^a \frac{e^{-\rho i(x-\alpha)}}{2i} L(\alpha) v_1(\alpha) d\alpha + \frac{1}{\rho} \int_0^x L(\alpha) v_1(\alpha) \sin \rho(x - \alpha) d\alpha \\ &= e^{\rho i x} + \frac{1}{\rho} \int_x^a \frac{e^{-\rho i(x-\alpha)}}{2i} L(\alpha) v_1(\alpha) d\alpha + \frac{1}{\rho} \int_0^x \frac{e^{\rho i(x-\alpha)}}{2i} L(\alpha) v_1(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Dies entspricht der Gleichung (53) in der ersten Arbeit von Birkhoff, die dort auf etwas anderem Wege gefolgert wird. Schreiben wir nun

$$v_1(x) e^{-\rho i x} = \eta(x),$$

so ist

$$\eta(x) = 1 + \frac{1}{\varrho} \int_0^x \frac{L(\alpha)}{2i} \eta(\alpha) d\alpha + \frac{1}{\varrho} \int_x^a \frac{e^{-2\varrho i(x-\alpha)}}{2i} L(\alpha) \eta(\alpha) d\alpha.$$

Nun ist aber  $e^{2\varrho i(\alpha-x)}$  beschränkt auf der Strecke  $x \leq \alpha \leq a$ , mithin

$$\text{Max } |\eta(x)| = R \leq 1 + \frac{RM \cdot a}{|\varrho|},$$

wenn

$$\left. \begin{array}{l} |L(\alpha)| \\ |e^{2\varrho i(\alpha-x)} \cdot L(\alpha)| \end{array} \right\} \leq M \quad \begin{array}{l} 0 \leq \alpha \leq x \\ x \leq \alpha \leq a \end{array}$$

ist.

Also gilt

$$\begin{aligned} \eta(x) &= 1 + \frac{\psi}{\varrho} \\ (9) \quad v_1(x) &= e^{\varrho i x} \left( 1 + \frac{\psi}{\varrho} \right) \\ v_2(x) &= e^{-\varrho i x} \left( 1 + \frac{\psi}{\varrho} \right). \end{aligned}$$

Letzteres folgt direkt aus (8). Durch diese beiden Ausdrücke wird die Unabhängigkeit für grosse  $\varrho$  in Evidenz gesetzt. Aus ihnen ergeben sich noch die weiteren Ausdrücke für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} v_1'(x) &= \varrho i e^{\varrho i x} \left( 1 + \frac{\psi}{\varrho} \right) \\ v_2'(x) &= -\varrho i e^{-\varrho i x} \left( 1 + \frac{\psi}{\varrho} \right) \\ \left| \begin{array}{cc} v_1'(s) & v_2'(s) \\ v_1(s) & v_2(s) \end{array} \right| &= 2i\varrho. \end{aligned}$$

Mittels dieser Ausdrücke formen wir nun (7) (p. 40) um. Indem wir zur Abkürzung allgemein

$$A + \frac{\psi}{\varrho} = \bar{A}$$

schreiben, erhalten wir

$$\begin{aligned}
W_1(v_1) &= \rho i (\bar{1} + e^{\rho i a} (-\bar{1})) & W_1(v_2) &= -\rho i (1 - e^{-\rho i a} \cdot \bar{1}) \\
W_2(v_1) &= \bar{1} - e^{\rho i a} \cdot \bar{1} & W_2(v_2) &= 1 + e^{-\rho i a} (-\bar{1}) \\
\mathcal{A} &= 2 \rho i [2 - e^{\rho i a} \cdot \bar{1} - e^{-\rho i a} \cdot \bar{1}] = 2 \rho i (\bar{1} - e^{\rho i a} \cdot \bar{1}) (\bar{1} - e^{-\rho i a} \cdot \bar{1}) \\
\gamma(x, s; \lambda) &= \pm \frac{1}{4 i \rho} (e^{\rho i(x-s)} \cdot \bar{1} - e^{-\rho i(x-s)} \cdot \bar{1}).
\end{aligned}$$

Addiert man zur letzten Spalte der Zählerdeterminante in (7) die mit  $-\frac{v_2(s)}{4 i \rho}$  multiplizierte erste und die mit  $-\frac{v_1(s)}{4 i \rho}$  multiplizierte zweite Spalte hinzu, so geht die letzte über in

$$\begin{aligned}
\frac{-v_1(x) v_2(s)}{2 i \rho} &= \frac{-e^{\rho i(x-s)} \cdot \bar{1}}{2 i \rho} \text{ (für } 0 \leq s \leq x); & \frac{-v_2(x) v_1(s)}{2 i \rho} &= -\frac{e^{-\rho i(x-s)} \cdot \bar{1}}{2 i \rho} \text{ (} x \leq s \leq a). \\
\frac{-v_2'(0) v_1(s)}{2 i \rho} + \frac{v_1'(a) v_2(s)}{2 i \rho} &= \frac{\rho i}{2 i \rho} (e^{\rho i(a-s)} \cdot \bar{1} + e^{\rho i s} \cdot \bar{1}) \\
\frac{-v_2(0) v_1(s)}{2 i \rho} + \frac{v_1(a) v_2(s)}{2 i \rho} &= \frac{1}{2 i \rho} (e^{\rho i(a-s)} \cdot \bar{1} - e^{\rho i s} \cdot \bar{1}).
\end{aligned}$$

Mit  $\mathcal{A}$  dividieren wir nun in die Zählerdeterminante hinein. Der Faktor  $\frac{1}{2}$  bleibt draussen,  $\rho i$  kürzt sich gegen den gleichen Faktor, der in der zweiten Zeile auftaucht, mit dem nächsten Faktor  $\bar{1} - e^{-\rho i a} \cdot \bar{1}$  dividieren wir die Elemente der ersten, mit  $\bar{1} - e^{-\rho i a} \cdot \bar{1}$  die Elemente der zweiten Zeile, welche wir noch mit  $e^{\rho i a}$  erweitern. Dann ist

$$(10) \quad G(x, s; \lambda) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{e^{\rho i x} \cdot \bar{1}}{\bar{1} - e^{\rho i a} \cdot \bar{1}}, & \frac{e^{\rho i(a-x)} \cdot \bar{1}}{e^{\rho i a} \cdot \bar{1} - \bar{1}}, & -\frac{1}{2 i \rho} e^{\rho i(x-s)} \cdot \bar{1} \\ \frac{\bar{1} - e^{\rho i a} \cdot \bar{1}}{\bar{1} - e^{\rho i a} \cdot \bar{1}}, & \frac{\bar{1} - e^{\rho i a} \cdot \bar{1}}{e^{\rho i a} \cdot \bar{1} - \bar{1}}, & \frac{1}{2 i \rho} (e^{\rho i(a-s)} \cdot \bar{1} + e^{\rho i s} \cdot \bar{1}) \\ \frac{\bar{1} - e^{\rho i a} \cdot \bar{1}}{\bar{1} - e^{\rho i a} \cdot \bar{1}}, & -\frac{\bar{1} - e^{\rho i a} \cdot \bar{1}}{e^{\rho i a} \cdot \bar{1} - \bar{1}}, & \frac{1}{2 i \rho} (e^{\rho i(a-s)} \cdot \bar{1} - e^{\rho i s} \cdot \bar{1}) \end{vmatrix},$$

oder wenn wir die Nenner der ersten, bzw. zweiten Spalte beziehentlich mit  $M_1$  und  $M_2$  bezeichnen, den Faktor  $\frac{1}{2}$  in die zweite Zeile hineinziehen, und beide Seiten der Gleichung mit  $2 \rho$  multiplizieren:

$$(10a) \quad 2\varrho G(x, s; \varrho) = \begin{vmatrix} \frac{e^{\varrho i x} \cdot \bar{1}}{M_1}, \frac{e^{\varrho i(a-x)} \cdot \bar{1}}{M_2}, i \cdot e^{\varrho i \pm(x-s)} \cdot \bar{1} \\ \frac{1 - e^{\varrho i a} \cdot \bar{1}}{2M_1}, \frac{\bar{1} - e^{\varrho i a} \cdot \bar{1}}{2M_2}, -\frac{i}{2}(e^{\varrho i(a-s)} \cdot \bar{1} + e^{\varrho i s} \cdot \bar{1}) \\ \frac{\bar{1} - e^{\varrho i a} \cdot \bar{1}}{M_1}, -\frac{\bar{1} - e^{\varrho i a} \cdot \bar{1}}{M_2}, -i(e^{\varrho i(a-s)} \cdot \bar{1} - e^{\varrho i s} \cdot \bar{1}) \end{vmatrix}.$$

Wie ein Vergleich mit (7) lehrt, hat der Minor, welcher durch Streichung der ersten Zeile, und dritten Spalte entsteht, den Wert

$$\begin{vmatrix} W_1(v_1) & W_1(v_2) \\ W_2(v_1) & W_2(v_2) \end{vmatrix} : \mathcal{A} = 1.$$

Wir entwickeln (10a) nach der ersten Reihe. Das dritte Glied liefert zum Konturintegral den Beitrag

$$(11) \quad \begin{aligned} & \frac{-1}{2\pi i} \int_{k_n} d\varrho \cdot i \left[ \int_0^x e^{\varrho i(x-s)} \cdot \bar{1} \cdot f(s) ds + \int_x^a e^{\varrho i(a-s)} \cdot \bar{1} \cdot f(s) ds \right] \\ & = \frac{-1}{2\pi i} \int_{k_n} d\varrho \left[ \int_0^x e^{\varrho i(x-s)} f(s) ds + \int_x^a e^{\varrho i(s-x)} f(s) ds + \frac{1}{\varrho} \int_0^x e^{\varrho i(x-s)} \cdot \psi_1 ds \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{1}{\varrho} \int_x^a e^{\varrho i(s-x)} \cdot \psi_2 ds \right]. \end{aligned}$$

Wir machen jetzt die allerdings nicht notwendige Annahme, dass  $f(x)$  und  $f'(x)$  in  $[0, a]$  stückweise stetig sind. Dann können wir partiell integrieren und erhalten:

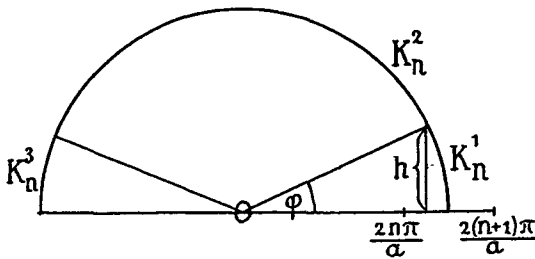
$$(11a) \quad \frac{-1}{2\pi} \int_{k_n} d\varrho \left[ \frac{-1}{\varrho i} (f(x-0) - e^{\varrho i x} f(0)) + \frac{1}{\varrho i} (e^{\varrho i(a-x)} f(a) - f(x+0)) \right] + \varepsilon + \frac{N}{\sqrt{n}},$$

wobei unter  $\varepsilon$  und  $\frac{N}{\sqrt{n}}$  asymptotisch verschwindende Summanden gesammelt sind,

wie wir sofort zeigen werden. Mit  $\frac{N}{\sqrt{n}}$  sind diejenigen Summanden bezeichnet, welche durch die partielle Integration an etwaigen Unstetigkeitspunkten von  $f(x)$

entstehen. Diese haben ähnlich wie die entsprechenden Ausdrücke für die Randpunkte die Form

$$(12) \quad \int_{K_n} d\varrho e^{\varrho i\alpha} \cdot \frac{\psi}{\varrho} \quad (\alpha > 0).$$



Zur Abschätzung teilen wir den Halbkreis  $K_n$  in drei Abschnitte  $K_n^1, K_n^2, K_n^3$ . Die Länge der äusseren Bögen  $K_n^1$  und  $K_n^3$  sei gleich  $n^{\frac{1}{2}}$ , wenn der Halbkreis zwischen den Punkten  $\frac{2n\pi}{a}$  und  $\frac{2(n+1)\pi}{a}$  die positive reelle Achse schneidet; dann ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{K_n} \right| &\leq \left| \int_{K_n^1} \right| + \left| \int_{K_n^2} \right| + \left| \int_{K_n^3} \right| \leq M \left( \frac{2}{z \cdot \sqrt{n}} + \pi \cdot e^{-\sqrt{n} \cdot \gamma \cdot a} \right) \\ &< \frac{\bar{M}}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

falls  $n$  hinreichend gross gewählt ist. Hierbei ist der Radius des Kreises gleich  $n \cdot z$  gesetzt, und  $\gamma$  ist gleich  $\frac{\sin \varphi}{\varphi}$ , also ein positiver echter Bruch, der bei grossem  $n$  beliebig nahe an 1 liegt.<sup>1</sup>  $M$  ist das Maximum von  $|\psi|$  und  $\bar{M}$  eine von  $x$  und  $\varrho$  unabhängige Zahl. Unter den Typus (12) fallen auch noch die mit den Faktoren  $e^{\varrho i x}, e^{\varrho i(a-x)}$  versehenen Glieder in (11 a), falls

$$0 < \eta \leq x \leq a - \eta < a \quad (\eta \text{ beliebig klein})$$

ist.

Die  $\varepsilon$ -Summanden haben nun folgende Form:

$$(12 a) \quad \int_{K_n} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^x e^{\varrho i(x-s)} \cdot \psi ds \quad \text{oder} \quad \int_{K_n} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_x^a e^{\varrho i(s-x)} \cdot \psi ds.$$

<sup>1</sup> Diese Abschätzung von  $e^{\varrho i\alpha}$  ergibt sich, wenn man  $I(\varrho) = z \cdot n \cdot \sin \varphi = z \cdot n \cdot \gamma \varphi$  bildet,  $\gamma > \frac{2}{\pi}$ .



Hierzu gehören also die letzten beiden Summanden von (11) und die in der partiellen Integration abgespaltenen Integrale. Es genügt, das erste dieser Integrale zu betrachten. Wir teilen das Integrationsintervall  $[0, x]$  auf in  $[0, x-n^{-\frac{1}{2}}]$  und  $[x-n^{-\frac{1}{2}}, x]$ . Dann gilt für das erste Intervall:

$$\left| \int_{K_n} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^{x-n^{-\frac{1}{2}}} e^{\varrho i(x-s)} \cdot \psi ds \right| \leq \left| \int_{K_n^1} \right| + \left| \int_{K_n^2} \right| + \left| \int_{K_n^3} \right|$$

$$\leq \frac{2aM}{z \cdot \sqrt{n}} + \int_{K_n} \frac{d\varrho}{|\varrho|} e^{-\sqrt[4]{n} \cdot \gamma \cdot a} \cdot M \leq \frac{\bar{M}}{\sqrt{n}}.$$

Für das zweite Intervall gilt:

$$\left| \int_{K_n} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_{x-n^{-\frac{1}{2}}}^x e^{\varrho i(x-s)} \cdot \psi ds \right| \leq \frac{\bar{M}}{n^{\frac{1}{4}}}.$$

Ähnliches gilt für den zweiten Typ. (11) hat also schliesslich die Form:

$$\frac{-1}{2\pi} \int_{K_n} \frac{d\varrho}{\varrho i} [-f(x-0) - f(x+0) + f(0)e^{\varrho i x} + f(a)e^{\varrho i(a-x)}] + \frac{\psi}{n^{\frac{1}{4}}}.$$

Das erste Glied in der Entwicklung von (10a) nach der ersten Zeile hat nun die Form:

$$(13) \quad \bar{g}(s) = \frac{e^{\varrho i x} \cdot \bar{1}}{i \cdot 2M_1} \begin{vmatrix} \frac{\bar{1} - e^{\varrho i a} \cdot \bar{1}}{M_2} & e^{\varrho i(a-s)} \bar{1} + e^{\varrho i s} \bar{1} \\ -\frac{\bar{1} - e^{\varrho i a} \cdot \bar{1}}{M_2} & e^{\varrho i(a-s)} \bar{1} - e^{\varrho i s} \bar{1} \end{vmatrix} = \frac{e^{\varrho i x} \cdot \bar{1}}{2iM_1} \cdot \mathcal{A}_1.$$

$|M_1|$  und  $|M_2|$  bleiben sicherlich über einer positiven Schranke, denn ihre einzigen Nullstellen sind ja die Wurzeln aus den Eigenwerten, deren Abstand von den Schutzkreisen immer positiv bleibt. Also sind die Elemente der ersten Spalte von  $\mathcal{A}_1$  unabhängig von  $\varrho$  beschränkt. Die Elemente der zweiten Spalte ergeben nach Multiplikation mit  $f(s)$  und Integration über  $s$  Grössen von der Form  $\psi/\varrho$ . Denn es ist z. B., wenn  $\beta$  und  $\gamma$  zwei konsekutive Unstetigkeitsstellen von  $f(x)$  sind

$$\int_{\beta}^{\gamma} e^{i(a-s)} f(s) \cdot \bar{i} ds = \int_{\beta}^{\gamma} e^{i(a-s)} f(s) ds + \frac{\psi}{\rho}$$

$$= -\frac{e^{i(a-\gamma)} f(\gamma) - e^{i(a-\beta)} f(\beta)}{\rho i} + \frac{1}{\rho i} \int_{\beta}^{\gamma} e^{i(a-s)} f'(s) ds + \frac{\psi}{\rho} = \frac{\psi}{\rho}.$$

Also liefert das ganze erste Glied zum Konturintegral Beiträge von der Form (12), die wir gleich  $\frac{\psi}{\sqrt{n}}$  setzen können. Dasselbe gilt vom zweiten Gliede. Also erhält man schliesslich als Wert von  $I_n$  bis auf asymptotisch verschwindende Glieder (schlimmstenfalls wie  $\frac{\psi}{n^{\frac{1}{2}}}$ ):

$$\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0)).$$

Wir fassen also noch einmal zusammen:

Satz 2. Gehört  $x$  einem Intervall  $[\varepsilon, a-\varepsilon]$  ( $\varepsilon > 0$ ) an, und ist  $f(x)$  mit seiner Ableitung in  $[0, a]$  stückweise stetig, so ist

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)].^1$$

#### § 4. Verallgemeinerung des Resultates mit Hilfe des Lebesgueschen Integralbegriffes.

Wie bereits bemerkt, ist die stückweise Stetigkeit der ersten Ableitung keine notwendige Bedingung, besonders dann, wenn von 0 bis  $a$  im Lebesgueschen Sinne integriert wird. Dann sei  $f(x)$  wie folgt definiert:

$$f(x) = C + \int_0^x \varphi(x) dx,$$

<sup>1</sup> Soweit gehen auch die Aussagen Birkhoffs; der Konvergenzbeweis ist bei ihm nur in den wesentlichen Zügen angegeben.

und  $\varphi(x)$  sei summabel. Dann ist  $f(x)$  stetig<sup>1</sup> und  $\varphi(x)$  bis auf eine Nullmenge die Ableitung von  $f(x)$ . Es gilt weiter die Formel der partiellen Integration

$$\int_0^a U \cdot v dx = U(a)V(a) - U(0)V(0) - \int_0^a u \cdot V dx,$$

wo  $u(x), v(x)$  summabel und  $U(x), V(x)$  ihre unbestimmten Integrale sind. Ausserdem gilt die Abschätzungsformel

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b-a) \quad (|f(x)| \leq M \text{ in } [a, b]).$$

$\varphi(x)$  und  $f(x)$  können natürlich auch komplex gewählt werden. Setzen wir jetzt

$$u(x) = \varphi(x); \quad U(x) = f(x); \quad v(x) = e^{ix}, \text{ etc.},$$

so erkennt man, dass alle aufgestellten Abschätzungen in Geltung bleiben. Offenbar darf auch  $f(x)$  aus einer Reihe verschiedener Funktionen des obigen Typus zusammengesetzt sein und wir erhalten so den Satz:

Sind  $x_1, x_2, \dots, x_k$  endlich viele Punkte von  $[0, a]$ , und ist  $0 < x < a$ , so gilt Satz 3. für jede Funktion  $f(x)$  von der Form

$$\begin{aligned} f(x) &= C_1 + \int_0^x \varphi_1(x) dx; \quad (0 \leq x \leq x_1) \\ (15) \quad &= C_2 + \int_0^x \varphi_2(x) dx; \quad (x_1 < x \leq x_2) \text{ etc.}, \end{aligned}$$

wenn  $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$  usw. summabel sind, die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)].$$

$x_1, x_2, \dots$  sind im allgemeinen Sprungstellen von  $f(x)$ .

<sup>1</sup> Vgl. hierzu und zu den weiteren Behauptungen: H. Lebesgue: *Leçons sur l'intégration*, cap. VIII, *Leçons sur les séries trigon.* 1906, S. 12 ff.

§ 5. Verhalten des Konturintegrals in den Randpunkten und gleichmässige Konvergenz.

Birkhoff bemerkt am Schlusse seiner zweiten Arbeit noch mit Recht, dass für  $x$  gleich Null ausser dem letzten Gliede der ersten Reihe noch die anderen Glieder endliche Beiträge liefern. Diese lassen sich in unserem Falle leicht bestimmen. Wählen wir beispielsweise den Punkt Null. Dann liefert das zweite Glied in der Entwicklung von (10 a) nach der ersten Zeile wieder asymptotisch verschwindende Beiträge, wegen des Faktors  $e^{i\alpha}$ . Anders das erste Glied. Es geht für  $x=0$  (vgl. (13) p. 47) über in

$$\bar{g}(s) = \frac{\bar{I}}{2iM_1} \cdot \mathcal{A}_1$$

und liefert also zum Konturintegral einen Beitrag von der Form

$$\int_{K_n} \frac{d\varrho}{\varrho} \cdot \psi,$$

wir bilden zunächst

$$\int_0^a \bar{g}(s) f(s) ds.$$

Lassen wir in  $\bar{g}(s)$  die Querstriche fort, wobei  $\bar{g}(s)$  in  $g(s)$  übergehen möge, so können wir schreiben:

$$\int_0^a \bar{g}(s) f(s) ds = \int_0^a g(s) f(s) ds + \frac{\psi}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \left[ \int_0^a e^{i(a-s)} \cdot \psi ds + \int_0^a e^{is} \cdot \psi ds \right].^1$$

Der letzte Ausdruck führt bei der Integration über  $\varrho$  zu Integralen von ähnlicher Form wie (12 a), welche also mindestens wie  $n^{-\frac{1}{2}}$  verschwinden. Berücksichtigen wir also nur den ersten Summanden auf der rechten Seite, so ist

<sup>1</sup> Denn offenbar ist  $\bar{I} - e^{i\alpha} \cdot \bar{I} = 1 - e^{i\alpha} + \frac{\psi}{\varrho}$  und

$$\frac{1}{\bar{I} - e^{i\alpha} \cdot \bar{I}} = \frac{1}{(1 - e^{i\alpha}) \left(1 + \frac{\psi}{\varrho}\right)} = \frac{1}{1 - e^{i\alpha}} + \frac{\psi}{\varrho}$$

auf der Kontur.

$$g(s) = \frac{1}{2i(1-e^{\rho ia})} \left| \begin{array}{l} -1, e^{\rho i(a-s)} + e^{\rho is} \\ +1, e^{\rho i(a-s)} - e^{\rho is} \end{array} \right| = i \frac{e^{\rho i(a-s)}}{1-e^{\rho ia}}$$

$$\int_0^a g(s)f(s)ds = \frac{i}{1-e^{\rho ia}} \left[ \frac{-f(a) + e^{\rho ia}f(0)}{\rho i} + \frac{1}{\rho i} \int_0^a e^{\rho i(a-s)}f'(s)ds \right].$$

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{K_n} d\rho \int_0^a g(s)f(s)ds = \frac{-1}{2\pi i} \int \frac{d\rho}{\rho} \cdot \frac{-f(a)}{1-e^{\rho ia}} + \frac{\psi}{n^{\frac{1}{2}}}$$

$$(16)^* \qquad = \frac{f(a)}{2\pi i} \int_{K_n} \frac{d\rho}{\rho} \left( 1 + \frac{e^{\rho ia}}{1-e^{\rho ia}} \right) + \frac{\psi}{n^{\frac{1}{2}}} = \frac{f(a)}{2} + \frac{\psi_1}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

Im dritten Gliede fällt nun das Integral von 0 bis  $x$  fort (vgl. (11)) und entsprechend der Summand  $\frac{f(x-0)}{2}$ . Also wird schliesslich

$$(16) \qquad \lim I_n = \frac{f(0) + f(a)}{2}.$$

Im anderen Randpunkt ergibt sich natürlich derselbe Wert, wie man bei Anwendung der Substitution  $y = a - x$  sofort erkennt. Das Konturintegral erfüllt also auf alle Fälle die Randbedingungen, ungeachtet, ob dies auch bei  $f(x)$  der Fall ist oder nicht. Das eben gewonnene Resultat ist bei periodischen Reihen ein bekanntes.<sup>1</sup> Man gewinnt es dort so, dass man sich  $f(x)$  über die Ränder hinaus periodisch fortgesetzt denkt, und integriert z. B. in dem Intervall  $\left[ -\frac{a}{2}, +\frac{a}{2} \right]$ . Dies geht wohl an bei Differentialgleichungen, deren Koeffizienten sich zugleich periodisch und stetig fortsetzen lassen über das Grundgebiet hinaus, wie z. B. bei trigonometrischen Funktionen. Wir bemerken daher ausdrücklich, dass in unserem Falle von der bei Behandlung des periodischen Falles gewöhnlich angesetzten Bedingung

$$L(0) = L(a)$$

hier nirgends Gebrauch gemacht worden ist, die Anwendbarkeit der eben erwähnten Methode also durchaus keine notwendige Voraussetzung zum Beweis der Formel (16) darstellt.

---

<sup>1</sup> Vgl. Picard: *Traité d'analyse*, 3. Aufl., Bd. II, S. 187 ff.

Ist nun  $f(0)$  ungleich  $f(a)$ , so kann das Konturintegral, das ja in beliebiger Nähe der Ränder der Funktion  $f(x)$  gleich ist, nicht bis in die Randpunkte hinein gleichmässig konvergieren, sondern springt vielmehr um  $\mp \frac{f(0) - f(a)}{2}$ . Ist aber  $f(0)$  gleich  $f(a)$ , so lässt sich die gleichmässige Konvergenz beweisen. Zunächst sieht man, dass in diesem Falle das Konturintegral in den Randpunkten selbst die richtigen Wert  $f(0) = f(a)$  liefert. Es ist noch zu zeigen, dass auch der Grenzprozess  $x \rightarrow 0$  auf dieselben Werte führt.

Es möge der Punkt  $x$  bereits in solcher Nachbarschaft von Null liegen, dass auf der Strecke  $0 \leq x < x_0$  keine Unstetigkeit von  $f(x)$  mehr vorhanden sei. Es ist jetzt im dritten Gliede der ersten Reihe von (10a) noch das Integral von 0 bis  $x$  zu berücksichtigen. Es liefert also insgesamt den Beitrag (vgl. (11))

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{K_n} \frac{d\varrho}{\varrho} (e^{\varrho i x} f(0) - 2f(x)).$$

Das erste Glied der Reihe erhält man, wenn man einfach in (16)\* unter dem Integralzeichen noch mit  $e^{\varrho i x}$  multipliziert:

$$\frac{f(a)}{2\pi i} \int_{K_n} \frac{d\varrho}{\varrho} \cdot e^{\varrho i x} = \frac{f(0)}{2\pi i} \int_{K_n} \frac{d\varrho}{\varrho} e^{\varrho i x}.$$

Addiert man die beiden so erhaltenen Beiträge zusammen, so ergibt sich

$$\frac{2 \cdot f(x)}{2\pi i} \int_{K_n} \frac{d\varrho}{\varrho} = f(x),$$

und es gilt mithin folgender Satz:

**Satz 4.** Erfüllt die Funktion  $f(x)$  die Bedingungen des Satzes 3 (p. 49), so konvergiert das Konturintegral, wenn man die Unstetigkeitsstellen und Randpunkte durch beliebig kleine offene Intervalle ausschliesst, in den Restgebieten gleichmässig gegen  $f(x)$ . Der Wert an den Sprungstellen ist  $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ , in den Randpunkten  $\frac{f(0) + f(a)}{2}$ . Das Integral konvergiert gleichmässig auch bis in die Randpunkte hinein, falls

$$f(0) = f(a)$$

ist.

3. Entwicklungssatz, bilineare Formel und Konvergenzfragen.

§ 6. Ein Satz über die Pole der Greenschen Funktion.

Gleichung (7) (S. 40) zeigt, dass  $G(x, s; \lambda)$  in  $\lambda$  meromorph ist, da die Funktion an den Eigenwertstellen  $\lambda_n$  Pole besitzt. Denn einerseits verschwindet an diesen Stellen die Determinante

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} W_1(v_1) & W_1(v_2) \\ W_2(v_1) & W_2(v_2) \end{vmatrix} \quad (\text{vgl. auch S. 95})$$

andererseits muss  $G(x, s; \lambda)$  auch wirklich unendlich werden, denn andernfalls müsste die nicht identisch verschwindende Lösung  $u_n(x)$  der Integralgleichung

$$u_n(x) = (\lambda_n - \lambda) \int_0^a G(x, s; \lambda) u_n(s) ds$$

mit  $\lambda_n - \lambda$  absolut unter jede vorgegebene positive Schranke herabgedrückt werden können;  $u_n(x)$  hängt aber gar nicht von  $\lambda$  ab.

Die Zahlen  $\lambda_n$  erscheinen nun in dreifacher Eigenschaft, als Nullstellen von  $\mathcal{A}$ , als Pole von  $G(x, s; \lambda)$  und als Eigenwerte des Randwertproblems, Begriffe, die durchaus gegen einander abgegrenzt werden müssen. In dem Falle, dass  $\lambda$  eine einfache Nullstelle von  $\mathcal{A}$  ist, ist selbstverständlich die Ordnung des Poles und Eigenwertes gleich derjenigen der Nullstelle. Ist aber  $\lambda_n$  eine mehrfache Nullstelle, so folgt daraus zunächst noch nichts über die Ordnung des Eigenwertes oder Poles.<sup>1</sup> Bzgl. des letzteren werden wir sogar zeigen, dass er in jedem Falle nur einfacher Pol sein kann bei Nullstellen beliebiger Ordnung und auch für Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Andererseits ist erwiesen, dass es Nullstellen höherer Ordnung gibt, da ihre Ordnung mindestens gleich der Ordnung des Eigenwerts ist<sup>2</sup>; diese ist aber z. B. schon bei den periodischen Lösungen der Differentialgleichung:  $u'' + (c^2 + \lambda_n)u = 0$  gleich zwei.

Mittels der Satzes über die Pole der Greenschen Funktion gelingt es weiter, zu zeigen, dass man, — im Gegensatz zu dem in Fussnote 1 Gesagten —, spe-

<sup>1</sup> Es wäre denkbar, dass  $W_1(v_1)$  und  $W_2(v_1)$  den Faktor  $(\lambda - \lambda_n)^2$  enthielten,  $v_2$  aber keine Eigenfunktion wäre; dann wäre  $\lambda_n$  doppelte Nullstelle aber nur einfacher Eigenwert.

<sup>2</sup> Vgl. M. Bôcher über nombres caractéristiques l. c.

ziell bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung aus einer mehrfachen Nullstelle mit Bestimmtheit auf einer zweifachen Eigenwert schliessen kann.

Satz 5. Vorläufig ist also zu zeigen, dass die Greensche Funktion nur Pole erster Ordnung haben kann. Wir beweisen den Satz für beliebige lineare Differentialgleichungen  $n^{\text{ter}}$  Ordnung, die auf die Form

$$\frac{d^n u}{dx^n} + * + p_{n-2} \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} + \dots + p_1 \frac{du}{dx} + (p_0 + \lambda)u = 0$$

gebracht sind bei beliebigen homogenen linearen Randbedingungen, insbesondere auch für nicht selbstadjungierte Fälle, in denen die Greensche Funktion nicht mehr symmetrisch ist. Die Greensche Funktion hat dann folgende Gestalt:

$$G(x, s; \lambda) = (-1)^n \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) & \dots & v_n(x) & \gamma(x, s; \lambda) \\ W_1(v_1) & W_1(v_2) & \dots & W_1(v_n) & W_1(\gamma) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_n(v_1) & W_n(v_2) & \dots & W_n(v_n) & W_n(\gamma) \end{vmatrix} \cdot W^{-1},$$

wo  $W_v(u) = 0$  die Randbedingungen sind,

$$\gamma(x, s; \lambda) = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} v_1(x) & \dots & v_n(x) \\ v_1^{(n-2)}(s) & \dots & v_n^{(n-2)}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ v_1(s) & \dots & v_n(s) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_1^{(n-1)}(s) & \dots & v_n^{(n-1)}(s) \\ v_1^{(n-2)}(s) & \dots & v_n^{(n-2)}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ v_1(s) & \dots & v_n(s) \end{vmatrix} \begin{pmatrix} + : x \leq s \\ - : x \geq s \end{pmatrix}$$

und

$$W = \begin{vmatrix} W_1(v_1) & \dots & W_1(v_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_n(v_1) & \dots & W_n(v_n) \end{vmatrix}$$

ist. Bzgl. der Herleitung verweisen wir auf Fussnote 2 S. 40. Ist  $\lambda_n$  ein  $m$ -facher Eigenwert, so sind  $m$  Spalten von  $W$  linear abhängig, und lassen sich durch lineare Kombinationen zum Verschwinden bringen. Wir können also annehmen, dass

$$\begin{aligned} c_{v,1} W_\rho(v_1) + \dots + c_{v,n} W_\rho(v_n) &= 0 & v &= 1, 2, \dots, m \\ & & \rho &= 1, 2, \dots, n \\ |c_{v,\sigma}| &\neq 0 & \sigma &= 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

ist.  $v_1, \dots, v_n$  sei ein Fundamentalsystem, dessen Anfangswerte von  $\lambda$  unabhängig festgelegt seien. Wir definieren nun ein neues Fundamentalsystem:





so existiert

$$\lim_{\lambda=\lambda_n} A_\nu(\lambda) \cdot (\lambda_n - \lambda)^k = B_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

und es ist mithin

$$(17 \text{ b}) \quad \mathfrak{R}_k(x, s) = \sum_{\nu=1}^n B_\nu u_\nu(s)$$

$(n-1)$  mal stetig differenzierbar, verschwindet also entweder identisch, oder ist eine Eigenfunktion. Betrachten wir weiter die Funktion

$$F(x, s; \lambda) = G(x, s; \lambda) - \frac{\mathfrak{R}_k(x, s)}{(\lambda_n - \lambda)^k}.$$

Offenbar ist

$$(18) \quad \lim_{\lambda=\lambda_n} (\lambda_n - \lambda)^{k-1} \cdot F' = \mathfrak{R}_{k-1},$$

wo  $\mathfrak{R}_{k-1}(x, s)$  auf Grund ganz ähnlicher Schlüsse dieselben Eigenschaften besitzt wie  $\mathfrak{R}_k(x, s)$ ; denn mit  $G(x, s)$  und  $\mathfrak{R}_k(x, s)$  erfüllen auch  $F(x, s)$  und  $\mathfrak{R}_{k-1}(x, s)$  die Randbedingungen. Schreiben wir kurz:

$$z^{(n)}(x) + \dots + p_1(x)z'(x) + (\lambda + p_0(x))z(x) = \frac{M}{\lambda}(z),$$

so ist

$$\frac{M}{\lambda}(G(x, s; \lambda)) = 0; \quad \frac{M}{\lambda}(\mathfrak{R}_k) - (\lambda - \lambda_n)\mathfrak{R}_k = \frac{M}{\lambda_n}(\mathfrak{R}_k) = 0,$$

also

$$(19) \quad \frac{M}{\lambda} [(\lambda_n - \lambda)^{k-1} \cdot F'] = \frac{-\frac{M}{\lambda}(\mathfrak{R}_k)}{\lambda_n - \lambda} = \mathfrak{R}_k(x, s).$$

Unter Benutzung von (18) erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda=\lambda_n} \frac{M}{\lambda} [(\lambda_n - \lambda)^{k-1} \cdot F'] &= \frac{M}{\lambda_n} [\lim_{\lambda=\lambda_n} (\lambda_n - \lambda)^{k-1} \cdot F'] \\ &= \frac{M}{\lambda_n} (\mathfrak{R}_{k-1}). \end{aligned}$$

Aus (18) und (19) folgt:

$$(20) \quad \frac{M}{\lambda_n} (\mathfrak{R}_{k-1}) = \frac{\partial^n \mathfrak{R}_{k-1}}{\partial x^n} + \dots + (\lambda_n + p_0) \mathfrak{R}_{k-1} = \mathfrak{R}_k.$$

Setzen wir

$$(20 a) \quad \frac{M}{\lambda} (\mathfrak{R}_{k-1}) = \chi(x, s; \lambda) = \chi_\lambda,$$

und  $G(x, s; \lambda)$  kurz gleich  $G_\lambda$ , so ist  $\mathfrak{R}_{k-1}$  durch  $\chi_\lambda$  quellenmässig darstellbar, denn, wie im Anschluss an (18) bemerkt, erfüllt  $R_{k-1}$  die Randbedingungen und ist mit seinen Ableitungen stetig. Es gilt also die durch Differentiation unter Benutzung der Gleichung

$$\left. \frac{\partial^{n-1} G(x, s)}{\partial x^{n-1}} \right|_{x=s-\circ}^{x=s+\circ} = 1$$

leicht zu verifizierende Formel:

$$(21) \quad \mathfrak{R}_{k-1}(x, s) = - \int_0^a G_\lambda(x, \alpha) \chi_\lambda(\alpha, s) d\alpha;$$

wo nun im allgemeinen Fall genau auf die Reihenfolge der Variablen zu achten ist. (21) gilt zunächst nur wenn  $\lambda$  kein Eigenwert ist. Nun ist  $\int_0^a G_\lambda \chi_\lambda d\alpha$  eine in  $\lambda$  meromorphe Funktion.  $\lambda_n$  ist also im schlimmsten Falle ein Pol, in dessen Umgebung also  $\left| \int_0^a G_\lambda \chi_\lambda d\alpha \right|$  anwachsen müsste. Gleichung (21) gilt aber bis in beliebige Nähe von  $\lambda_n$ . Es kann also kein Pol vorliegen und es existiert der endliche Grenzwert

$$(22) \quad \lim_{\lambda=\lambda_n} - \int_0^a G_\lambda \chi_\lambda d\alpha = \mathfrak{R}_{k-1}(x, s).$$

Wir können nun zeigen, dass dies nur dann möglich ist, wenn

$$\chi_{\lambda_n} = \mathfrak{R}_k$$

identisch verschwindet. Es ist nämlich bei kurzer Schreibweise

$$\int G_\lambda \chi_\lambda = \frac{1}{(\lambda_n - \lambda)^k} \int \mathfrak{R}_k \chi_\lambda + \dots + \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \int \mathfrak{R}_1 \chi_\lambda + \int \mathfrak{P} \cdot \chi_\lambda.$$

Da nach (22) aber die linke Seite gegen einen endlichen Grenzwert, nämlich  $\mathfrak{R}_{k-1}$ , konvergiert, so müssen wir notwendig annehmen, dass

$$(23) \quad \lim_{\lambda=\lambda_n} \int \mathfrak{R}_i \chi_\lambda \equiv \int \mathfrak{R}_i \chi_{\lambda_n} \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

ist. Mit diesen Gleichungen geraten wir aber in Widerspruch bei der Annahme, dass  $\chi_{\lambda_n}$  nicht identisch verschwindet. Da nämlich  $\chi_{\lambda_n}$  der Integralgleichung gehorchen muss, so hätten wir

$$0 \equiv \chi_{\lambda_n} = (\lambda_n - \lambda) \int G_\lambda \chi_{\lambda_n} = \frac{1}{(\lambda_n - \lambda)^{k-1}} \int \mathfrak{R}_k \chi_{\lambda_n} + \dots + \int \mathfrak{R}_1 \chi_{\lambda_n} + (\lambda_n - \lambda) \int \mathfrak{P} \cdot \chi_{\lambda_n}.$$

Auf Grund einer eben angewandten Schlussweise muss aber der endliche Grenzwert existieren:

$$\lim_{\lambda=\lambda_n} (\lambda_n - \lambda) \int G_\lambda \chi_{\lambda_n} = \chi_{\lambda_n},$$

was nur möglich ist, wenn

$$\begin{aligned} \int \mathfrak{R}_i \chi_{\lambda_n} &= 0 & (i = 2, \dots, k) \\ \int \mathfrak{R}_1 \chi_{\lambda_n} &= \chi_{\lambda_n} \neq 0 \end{aligned}$$

ist im Gegensatz zu (23). Daraus und aus (20) folgt

$$\begin{aligned} \chi_{\lambda_n}(x, s) &= \mathfrak{R}_k(x, s) \equiv 0 \\ \mathfrak{R}_{k-1}(x, s) &\equiv \begin{cases} 0 \text{ oder} \\ \text{Eigenfunktion.} \end{cases} \end{aligned}$$

So kann man weiter schliessen bis man zu  $\mathfrak{R}_1$  gelangt; es ist also

$$\mathfrak{R}_k = \mathfrak{R}_{k-1} = \dots = \mathfrak{R}_2 \equiv 0,$$

und  $\mathfrak{R}_1$ , das nun nicht mehr identisch verschwinden kann, ist eine Eigenfunktion bzw. ein lineares Aggregat von solchen.

§ 7. *Doppelte Nullstellen von  $\mathcal{A}$  und doppelte Eigenwerte.*

Zu Beginn des vorigen § erwähnten wir bereits, dass man bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung bei Vorhandensein einer mehrfachen Nullstelle auf einen zweifachen Eigenwert schliessen kann, was durchaus nicht so selbstverständlich ist, wie es scheinen mag. Aus dem eben bewiesenen Satze über die Pole darf man nämlich nicht schliessen, dass in (17) S. 55  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 1$  ist; in diesem Falle allerdings wäre das eben Behauptete trivial. Auf Grund des Satzes folgt nur, dass in den Gleichungen (17 a, b) z. B.

$$\lim_{\lambda=\lambda_n} A_1(\lambda) \cdot (\lambda_n - \lambda) = B_1$$

endlich sein muss. Nun ist

$$A_1 = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} W_1(v_2) & \dots & W_1(v_n) & W_1(\gamma) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_n(v_2) & \dots & W_n(v_n) & W_n(\gamma) \end{vmatrix}.$$

Die Nullstellen der  $W_\rho(v_2), \dots, W_\rho(v_n)$  ( $\rho = 1, \dots, n$ ) heben sich genau fort gegen die entspr. des Nenners. Im letzteren kann man nun aus der ersten Spalte den Faktor  $(\lambda - \lambda_n)^{\alpha_1}$  herausziehen. Da man fürs erste nichts Näheres über die  $W_\rho(\gamma)$  aussagen kann, so wäre es denkbar, dass sich noch ein Faktor  $(\lambda - \lambda_n)^{\alpha_1 - 1}$  fort hebt, so dass, trotzdem  $\alpha_1 > 1$  ist, doch die Gleichung

$$\lim_{\lambda=\lambda_n} A_1(\lambda_n - \lambda) = B_1$$

gilt.

Die Betrachtung der  $A_\nu$  führt schon bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu etwas weitläufigen Betrachtungen, und liefern das erwähnte Resultat. Wir wollen sie nun durchführen.

Den Beweis führen wir indirekt und nehmen an, dass  $W_1(u_1)$  und  $W_2(u_1)$  für  $\lambda = \lambda_n$  eine mehrfache Nullstelle besitzen, dagegen  $W_1(u_2)$  und  $W_2(u_2)$  nicht beide verschwinden, sodass nur ein einfacher Eigenwert vorliegt. Wir entwickeln  $G(x, s; \lambda)$  nach der ersten Zeile der Zählerdeterminante, dann bleibt  $A_2$  für  $\lambda = \lambda_n$  endlich, da sich der Pol weghebt. Dagegen bleibt in

$$A_1 = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} W_1(u_2) & W_1(\gamma) \\ W_2(u_2) & W_2(\gamma) \end{vmatrix}$$

im Nenner die doppelte Nullstelle bestehen, wenn nicht, wie wir es nach dem letzten Satz fordern müssen, die Determinante

$$\begin{vmatrix} W_1(u_2) & W_1(\gamma) \\ W_2(u_2) & W_2(\gamma) \end{vmatrix}$$

identisch in  $s$  verschwindet. Schreiben wir in leicht verständlicher Bedeutung:

$$W_*(u_\rho) = W_{*,0}(u_\rho) + W_{*,a}(u_\rho)$$

also

$$W_*(\gamma) = W_{*,0}(\gamma) + W_{*,a}(\gamma)$$

und setzen

$$\gamma(x, s) = \pm (c_1(s)u_1(x) + c_2(s)u_2(x)).$$

Dann ist

$$(24) \quad \begin{vmatrix} W_1(u_2) & W_1(\gamma) \\ W_2(u_2) & W_2(\gamma) \end{vmatrix} \equiv c_1(s) \begin{vmatrix} W_1(u_2) & W_{1,0}(u_1) - W_{1,a}(u_1) \\ W_2(u_2) & W_{2,0}(u_1) - W_{2,a}(u_1) \end{vmatrix} \\ + c_2(s) \begin{vmatrix} W_1(u_2) & W_{1,0}(u_2) - W_{1,a}(u_2) \\ W_2(u_2) & W_{2,0}(u_2) - W_{2,a}(u_2) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Setzen wir die beiden Determinanten des mittleren Ausdruckes gleich Null, so ergibt eine Addition der ersten zur Determinante  $\mathcal{A}$ :

$$(24 \text{ a}) \quad \begin{vmatrix} W_1(u_2) & W_{1,0}(u_1) \\ W_2(u_2) & W_{2,0}(u_1) \end{vmatrix} = 0.$$

In der zweiten Determinante kombinieren wir die Spalten:

$$(24 \text{ b}) \quad 0 = \begin{vmatrix} W_1(u_2) & W_{1,0}(u_2) - W_{1,a}(u_2) \\ W_2(u_2) & W_{2,0}(u_2) - W_{2,a}(u_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} W_{1,0}(u_2) & W_{1,0}(u_2) - W_{1,a}(u_2) \\ W_{2,0}(u_2) & W_{2,0}(u_2) - W_{2,a}(u_2) \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} W_{1,0}(u_2) & W_{1,a}(u_2) \\ W_{2,0}(u_2) & W_{2,a}(u_2) \end{vmatrix}.$$

Nehmen wir nun zunächst an, dass alle Elemente der letzten Determinante ungleich Null sind, so können wir setzen

$$W_{1,a}(u_2) = c \cdot W_{1,0}(u_2); \quad W_{2,a}(u_2) = c \cdot W_{2,0}(u_2).$$

Dies in (24 a) eingesetzt, liefert, da gemäss der Annahme  $c \neq -1$  ist:

$$\begin{aligned} 0 &= (1+c) \cdot \begin{vmatrix} W_{1,0}(u_2) & W_{1,0}(u_1) \\ W_{2,0}(u_2) & W_{2,0}(u_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 u_1(0) + a_2 u_1'(0) & a_1 u_2(0) + a_2 u_2'(0) \\ b_1 u_1(0) + b_2 u_1'(0) & b_1 u_2(0) + b_2 u_2'(0) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_1'(0) & u_2'(0) \\ b_1 u_1(0) + b_2 u_1'(0) & b_1 u_2(0) + b_2 u_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1'(0) & u_2'(0) \\ u_1(0) & u_2(0) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

falls  $a_2$  ungleich Null ist. Andernfalls liefert eine entsprechende Betrachtung mit  $b_2$  dasselbe Ergebnis, falls  $b_2$  nicht auch verschwindet. D. h. also, man stösst mit unserer Annahme auf den Widerspruch, dass die Wronskische Determinante verschwinden müsste.

Verschwinden  $a_2$  und  $b_2$  beide, so folgt aus der Orthogonalitätsrelation, dass

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_3 b_4 - a_4 b_3 = 0$$

sein muss. Da wir annahmen, dass alle Elemente der letzten Determinante von (24 b) verschieden von Null seien, ist es nicht möglich, dass etwa

$$\begin{aligned} a_3 = a_4 = 0; \text{ oder } b_3 = b_4 = 0, \text{ also} \\ u_2(0) = 0; \quad a_3 v_2(a) + a_4 v_2'(a) = 0 \end{aligned}$$

ist. Diese Determinante lässt sich also schreiben:

$$u_2(0) \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 u_2(a) + a_4 u_2'(a) \\ b_1 & d(a_3 u_2(a) + a_4 u_2'(a)) \end{vmatrix} = u_2(0) (a_3 u_2(a) + a_4 u_2'(a)) \cdot \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ b_1 & d \end{vmatrix} = 0.$$

Also ist

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ b_1 & d \end{vmatrix} = 0; \quad b_1 = d a_1; \quad d = \frac{b_3}{a_3} = \frac{b_4}{a_4}.$$

Damit haben wir in Wirklichkeit aber nur eine Randbedingung, was wir natürlich ausschliessen.

Nun nehmen wir an, dass in der letzten Determinante von (24 b) irgend ein Element verschwindet. Dann muss gleichzeitig noch ein zweites Element entweder aus derselben Spalte oder derselben Zeile verschwinden. Sei etwa

$$W_{1,0}(u_2) = W_{2,0}(u_2) = 0.$$

Da wiederum

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_3 b_4 - a_4 b_3 = 0$$

sein muss, sind die Koeffizienten der Randbedingungen darstellbar durch die Schemata:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & da_3 & da_4 \end{pmatrix},$$

bzw., wenn  $a_3$  und  $a_4$ , oder  $a_1$  und  $a_2$  verschwinden:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Man sieht aber sofort, dass sich das erste Schema durch lineare Kombination auf das zweite zurückführen lässt. Legen wir also dieses zu Grunde, so können  $a_1$  und  $a_2$  nicht gleichzeitig verschwinden. Nach unserer Voraussetzung ist nun

$$W_{1,0}(u_2) = 0,$$

ausserdem ist

$$W_{1,0}(u_1) = 0,$$

da  $u_1$  Eigenfunktion ist. Dies führt aber wieder zur Forderung, dass die Wronskische Determinante verschwinden muss.

Zu dem gleichen Widerspruch gelangen wir, wenn wir voraussetzen, dass die Elemente einer Zeile in (24 b) verschwinden. Sei also

$$W_{1,0}(u_2) = W_{1,a}(u_2) = 0.$$

D. h. es ist

$$W_1(u_2) = 0.$$

Wegen (24 a) muss, da dann  $W_2(u_2)$  ungleich Null ist,

$$W_{1,0}(u_1) = 0$$

sein; und da  $W_1(u_1)$  verschwindet, so ist auch

$$W_{1,a}(u_1) = 0.$$

Aus  $W_{1,a}(u_2) = W_{1,a}(u_1) = W_{1,0}(u_2) = W_{1,0}(u_1)$  folgt aber wieder das Verschwinden der Wronskischen Determinante, da nicht alle vier Grössen  $a_v$  verschwinden dürfen; diese Widersprüche lösen sich nur, wenn

$$W_1(u_2) = W_2(u_2) = 0$$

ist. Es gilt also der Satz:



Ist  $\lambda_n$  eine mindestens zweifache Nullstelle der Determinante

Satz 6.

$$A = \begin{vmatrix} W_1(u_1) & W_1(u_2) \\ W_2(u_1) & W_2(u_2) \end{vmatrix},$$

so ist es auch ein zweifacher Eigenwert der Differentialgleichung (1).

§ 8. *Bestimmung der Residuen, Entwicklungssatz und bilineare Formel.*

Am Schluss von § 6 bemerkten wir bereits, dass das Residuum  $\mathfrak{R}_n(x, s)$  von  $G(x, s; \lambda)$ , als Funktion einer der beiden Variablen betrachtet, eine lineare Kombination von Eigenfunktionen sein muss. In der Darstellung (7) (S. 40) sind nun die  $v_r(x)$  mit den  $W_r(\gamma)$  linear verknüpft, und die  $W_r(\gamma)$  ihrerseits enthalten die Funktionen  $v_r(s)$  selbst linear.  $\mathfrak{R}_n(x, s)$  muss also eine Bilinearform in den Eigenfunktionen

$$u_n^{(r)}(x), \quad u_n^{(r)}(s)$$

sein; d. h. bei einem einfachen Eigenwert ist

$$\mathfrak{R}_n(x, s) = c \cdot u_n(x) \cdot u_n(s),$$

bei einem doppelten

$$\mathfrak{R}_n(x, s) = \sum_{\substack{r \\ \rho}} c_{r, \rho} u_n^{(r)}(x) \cdot u_n^{(\rho)}(s).$$

Es genügt die Betrachtung des letzteren Falles zur Bestimmung der Constanten. Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \left[ (\lambda_n - \lambda) \int_0^a G(x, s; \lambda) u_n^{(1)}(s) ds \right] &= u_n^{(1)}(x) \\ &= \int_0^a \mathfrak{R}_n(x, s) u_n^{(1)}(s) ds = c_{11} u_n^{(1)}(x) \int_0^a (u_n^{(1)}(s))^2 ds + c_{21} u_n^{(2)}(x) \int_0^a (u_n^{(1)}(s))^2 ds, \end{aligned}$$

falls wir  $u_n^{(1)}$  und  $u_n^{(2)}$  als orthogonalisiert annehmen.<sup>1</sup> Da diese Funktionen un-

---

<sup>1</sup> Etwa wie folgt. Sei  $\int u_1 u_2 ds \neq 0$ . Ist dann etwa  $\int u_1^2 dx = \int u_2^2 dx = 0$ , so ist, wenn  $c_1 \cdot c_2 \neq 0$  ist, auch  $\int v_1^2 dx = \int (c_1 u_1 + c_2 u_2)^2 dx \neq 0$ . Sei jetzt  $v_2(x)$  unabhängig von  $v_1(x)$  und  $\int v_1 v_2 dx \neq 0$ , dann lässt sich  $\frac{d_1}{d_2}$  so bestimmen, dass, für  $w = d_1 v_1 + d_2 v_2$ ,  $\int v_1 \cdot w dx = 0$  ist, und dass  $w$  und  $v_1$  linear unabhängig sind.

abhängig sind, so folgt

$$c_{21} = 0$$

und ähnlich auch

$$c_{12} = 0;$$

$$c_{11} = \frac{I}{\int_0^a (u_n^{(1)}(s))^2 ds}; \quad c_{22} = \frac{I}{\int_0^a (u_n^{(2)}(s))^2 ds}.$$

Da  $\mathfrak{R}_n(x, s)$  und  $u_n^{(v)}(x)$  endlich sind, so gilt dies auch von den Normierungsfaktoren. Es ist also

$$\mathfrak{R}_n(x, s) = \varphi_n^{(1)}(x) \varphi_n^{(1)}(s) + \varphi_n^{(2)}(x) \varphi_n^{(2)}(s),$$

wenn  $\varphi_n^{(v)}(x)$  normierte, orthogonale Eigenfunktionen sind. Bemerket sei noch, dass die Normierungsfaktoren zwar nicht unendlich sein dürfen, wohl aber ist es denkbar, dass sie mit wachsendem  $n$  über alle Grenzen wachsen.

Aus den Residuen der Greenschen Funktion lassen sich nun leicht auch die Residuen des Konturintegrals bestimmen. Es war

$$I = \lim_{K_n \rightarrow \infty} \frac{-1}{2\pi i} \int_{K_n} d\lambda \int_0^a G(x, s; \lambda) f(s) ds$$

(vgl. (5) S. 40). Da  $\mathcal{O}(\lambda) = \int_0^a G \cdot f ds$  nur einfache Pole besitzt, so ist

$$\begin{aligned} \text{Res } \mathcal{O}(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) \mathcal{O}(\lambda) = \int_0^a [\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) G] \cdot f ds \\ &= - \int_0^a \mathfrak{R}_n(x, s) f(s) ds = - \varphi_n(x) \int_0^a f(s) \varphi_n(s) ds \end{aligned}$$

bzw.

$$= - \varphi_n(x) \int_0^a f(s) \varphi_n(s) ds - \varphi_{n+1}(x) \int_0^a f(s) \varphi_{n+1}(s) ds.$$

Nach (14) (S. 48) ist also

Satz 7.

$$(25) \quad I = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^a f(s) \varphi_n(s) ds,$$

falls  $f(x)$  die Bedingungen von Satz 2. oder 3. erfüllt.  $\varphi_n(x)$  bedeuten hier, wie auch des weiteren im I Abschnitt die normierten, orthogonalen Eigenfunktionen des in diesem Abschnitt behandelten Randwertproblems, falls ein besonderer Hinweis fehlt; Entsprechendes gilt auch in den anderen Abschnitten.

Es ist zu beachten, dass die Partialsummen

$$\sum_{n=1}^N \varphi_n(x) \cdot A_n$$

nach Gliedern von der Form

$$\varphi_n(x) A_n + \varphi_{n+1}(x) A_{n+1}$$

fortschreiten, wobei die Indizes  $n$  und  $n+1$  immer je einem Paar der nämlichen Stelle  $\frac{2n\pi}{a}$  benachbarter Eigenwerte zugehören, weil ja die Konturen nicht zwischen zwei solchen Eigenwerten, deren Abstand wie  $\frac{1}{n}$  abnimmt, hindurch gelegt werden dürfen.

Wählen wir in Einklang mit den Bedingungen über  $f(x)$  als darzustellende Funktion  $G(x, t; \mu)$ , so erhält man

$$(26) \quad G(x, t; \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(t)}{\lambda_n - \mu}$$

und diese Reihe konvergiert gleichmässig im ganzen Intervall nach Satz 4. (S. 52), weil  $G(x, t; \mu) \Big|_{x=0}^{x=a}$  verschwindet.

Setzen wir weiter

$$f(x) = \frac{\partial}{\partial t} G(x, t; \mu).$$

Dies darf deshalb geschehen, weil  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} G(x, t; \mu)$  existiert und sogar im ganzen Intervall stetig ist. Da nämlich  $W_*(y)$  in  $v_1(t)$  und  $v_2(t)$  linear ist, so folgt aus (7)

$$G(x, t; \mu) = \pm c(v_1(x)v_2(t) - v_2(x)v_1(t)) + d(v_1(x)w_1(t) + v_2(x)w_2(t)),$$

wo  $w_1(t)$  und  $w_2(t)$  lineare Kombinationen von  $v_1(t)$  und  $v_2(t)$  sind.  $v_1'(x)v_2'(t) - v_2'(x)v_1'(t)$  verschwindet aber für  $x=t$ . Nach (25) ist also

$$(27) \quad \frac{\partial}{\partial t} G(x, t; \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^a G(s, t) \varphi_n(s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n'(t) \varphi_n(x)}{\lambda_n - \mu}$$

womit die gliedweise Differenzierbarkeit der bilinearen Formel bewiesen ist. Da  $\frac{\partial}{\partial t} G(x, t; \mu) \Big|_{t=0}^{t=a} \Big|_{x=0}^{x=a}$  verschwindet, so gilt (27) mit Ausnahme der Stelle  $x=t$ . Halten wir also eine Variable fest, so konvergiert mithin die Reihe nach Ausschluss der Stelle  $x=t$  durch ein beliebig kleines offenes Intervall gleichmässig im ganzen übrigen Intervall.<sup>1</sup>

### § 9. Nachweis des Gibbsschen Höckers.

Wenn es gelänge, für die normierten Eigenfunktionen eine geeignete asymptotische Darstellung durch trigonometrische Funktionen zu finden, wäre es leicht, den Gibbsschen Höcker an Unstetigkeitsstellen nachzuweisen. Die Darstellung gelingt aber nicht. Das hängt zusammen einmal mit der komplexen Natur der Eigenfunktionen, andererseits auch mit der Besonderheit des in Frage stehenden Randwertproblems, speziell mit den paarig angeordneten Eigenwerten. Ist nämlich  $v(x)$  eine (noch nicht normierte) Eigenfunktion,  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  das eingangs definierte Fundamentalsystem, so lässt sich in der Gleichung

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$$

das Verhältnis  $c_1 : c_2$  nicht genau genug abschätzen. Da  $c_1$  und  $c_2$  komplex sein können, so gelingt es weiterhin nicht den Normierungsfaktor, welcher die Grösse  $\frac{1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$  multiplikativ enthält, abzuschätzen.

Diese Schwierigkeit ist charakteristisch für die Randwertprobleme, bei denen möglicherweise unendlich viele doppelte Eigenwerte auftreten können, während bei den anderen die asymptotische Darstellung immer gelingt.

---

<sup>1</sup> In derselben Weise lässt sich bei Differentialgleichungen  $n$ ter Ordnung die  $(n-1)$ -malige Differenzierbarkeit der adjungierten Greenschen Funktion, und damit auch dieser selbst herleiten.

Wir versuchen darum eine asymptotische Darstellung des Konturintegrals selbst. Sei  $K(x, s; \lambda)$  die Greensche Funktion, welche der Differentialgleichung

$$(28) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} + \lambda w = 0$$

genügt. Auch für diese gilt die Darstellung (10 a) (S. 45). Wir dürfen dabei sogar die Querstriche fortlassen, welche nur durch die Funktion  $L(x)$  hereingekommen sind. Wir wollen die Elemente dieser ungestrichenen Determinante kurz mit  $\alpha_{\nu\rho}$  bezeichnen mit Ausnahme der letzten beiden Glieder der letzten Spalte; hier wollen wir

$$\frac{e^{q i(\alpha-s)}}{2 i q} = \beta_1; \quad \frac{e^{q i s}}{2 i q} = \beta_2$$

setzen. Sei nun  $f(x)$  eine die Forderungen des Entwicklungssatzes erfüllende Funktion. Dann bilden wir die mit den Greenschen Funktionen  $G(x, s; \lambda)$  bzw.  $K(x, s; \lambda)$  hergestellten Konturintegrale  $I_n$  bzw.  $I_n^*$ . Wir werden zeigen, dass  $I_n - I_n^*$  unabhängig von  $x$  wie  $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$  gegen Null strebt. Nach der eingeführten

Bezeichnungsweise ist

$$\begin{aligned} 2(G(x, s; \lambda) - K(x, s; \lambda)) &= \begin{vmatrix} \bar{\alpha}_{11}, \bar{\alpha}_{12}, \bar{\alpha}_{13} \\ \bar{\alpha}_{21}, \bar{\alpha}_{22}, \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 \\ \bar{\alpha}_{31}, \bar{\alpha}_{32}, \bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_{31}, \alpha_{32}, \beta_1 - \beta_2 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{q} \begin{vmatrix} \alpha_{11} \psi_{11}, \alpha_{12} \psi_{12}, \alpha_{13} \psi_{13} \\ \bar{\alpha}_{21}, \bar{\alpha}_{22}, \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 \\ \bar{\alpha}_{31}, \bar{\alpha}_{32}, \bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{q} \begin{vmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13} \\ \alpha_{21} \psi_{21}, \alpha_{22} \psi_{22}, \beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2 \\ \bar{\alpha}_{31}, \bar{\alpha}_{32}, \bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2 \end{vmatrix} + \\ & \quad + \frac{1}{q} \begin{vmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_{31} \psi_{31}, \alpha_{32} \psi_{32}, \beta_1 \psi_3 - \beta_2 \psi_4 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Die in § (3) angewandte Abschätzungsweise zeigt, dass der Beitrag der rechten Seite zum Konturintegral in der angegebenen Weise gegen Null konvergiert. Man hat nach den letzten Spalten der Determinanten zu entwickeln; in diesen gibt es Glieder von der Form  $\bar{\alpha}$  und  $\bar{\beta}$ , oder aber von der Form  $\alpha \psi$ ,

$\beta\psi$ . Auf die ersten wendet man partielle Integration an, die anderen schätzt man nach Art der Ausdrücke (12 a) (S. 46) ab. Nach dem Entwicklungssatz erhält man nun für  $K(x, s; \lambda)$  leicht die Formel

$$K(x, s; \lambda) = - \frac{\cos \varrho \left( \mp x \pm s - \frac{a}{2} \right)}{2 \varrho \sin \varrho \frac{a}{2}} =$$

$$= \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{-\lambda} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{a}(x-s)}{\frac{4n^2\pi^2}{a^2} - \lambda} \right], \quad \begin{cases} (x \leq s: \text{ob. Zeichen}) \\ (x \geq s: \text{unt. Zeichen}) \end{cases}$$

die von Kneser (l. c. § 7) für reelle negative  $\lambda$  bewiesen worden ist, und weiter

$$\frac{\partial}{\partial x} K(x, s) = - \frac{4\pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2n\pi}{a}(x-s)}{\frac{4n^2\pi^2}{a^2} - \lambda} = - \frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2n\pi}{a}(x-s)}{n} + \frac{\psi}{n^2}.$$

Die Reihe rechts weist aber den Gibbsschen Höcker auf. Dieser schleicht sich dann mit in die Reihenentwicklungen unstetiger Funktionen nach trigonometrischen Funktionen ein. Ist nämlich  $f(x)$  eine entwickelbare Funktion, die an endlich vielen Stellen  $\eta$ , Sprünge vom Betrage  $a$ , macht, dann ist die Funktion

$$\Phi(x) = f(x) + \sum_{\nu} a_{\nu} \left( \frac{\partial K(\eta, x)}{\partial \eta} \right)_{\eta=\eta_{\nu}}$$

auch entwickelbar, aber stetig mit eventueller Ausnahme der Randpunkte. Die Entwicklung von  $f(x)$  selbst weist somit an den Unstetigkeitsstellen den mit  $a$ , multiplizierten Höcker auf, wie man sieht, wenn man die Zusatzglieder nach links herüber bringt. Ist  $R(x)$  die Fourierreihenentwicklung von  $f(x)$  nach den Funktionen  $\varphi_n(x)$ ,  $R^*(x)$  die Entwicklung nach trigonometrischen, so ist

$$I^* - R^*(x) \equiv 0; \quad I - R(x) \equiv 0$$

$$I - I^* \equiv 0; \quad R(x) - R^*(x) \equiv 0; \quad (0 \leq x \leq a).$$

Das heisst also, die Fourierreihenentwicklungen einer Funktion nach trigonometrischen

und Sturm-Liouvilleschen Eigenfunktionen stimmen genau überein, falls  $f(x)$  überhaupt entwickelbar ist.

Speziell folgt daraus das Vorhandensein des Gibbsschen Höckers an Unstetigkeitsstellen. Aber auch andere Eigenschaften, die man direkt zunächst nur für trigonometrische Reihen nachweisen kann, gelten dann automatisch für die entsprechenden Sturm-Liouvilleschen Reihen.

§ 10. Absolute Konvergenz für den Fall reeller Differentialgleichungen.

Ist die Funktion  $L(x)$  reell, so können wir die bisherigen Sätze verschärfen. Unter Benutzung des in (2 a) definierten und in (4 a) (S. 36) asymptotisch dargestellten Fundamentalsystems, können wir, da  $\varrho_n^{1,2} = \frac{2n\pi}{a} + \frac{\psi_{1,2}}{n}$  ist, eine Eigenfunktion  $u(x)$  in folgender Weise schreiben

$$\begin{aligned} (29) \quad u(x) &= c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) = c_1 \cos \varrho_n(x) + \frac{c_2}{\varrho_n} \sin \varrho_n(x) + \frac{\psi}{\varrho_n} \\ &= c_1 \cos \frac{2n\pi}{a}x + \frac{c_2}{\varrho_n} \sin \frac{2n\pi}{a}x + \frac{\psi}{n}. \end{aligned}$$

Der Normierungsfaktor hat dann die Form

$$(29 \text{ a}) \quad \frac{1}{\sqrt{\int_0^a u(x)^2 dx}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{2} \left( c_1^2 + \frac{c_2^2}{\varrho_n^2} \right) + \frac{\psi^2}{n}}} = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_1^2 + \frac{c_2^2}{\varrho_n^2}}} + \frac{\psi}{n}$$

falls wir etwa  $c_1$ , soweit dies möglich ist, einen festen von Null verschiedenen Wert erteilen; für die Eigenfunktionen, für welche  $c_1$  verschwindet, setzen wir einfach  $c_2 = \varrho_n$ , woraus gleichfalls die Gültigkeit der Abschätzung (29 a) folgt.

$\sqrt{c_1^2 + \frac{c_2^2}{\varrho_n^2}}$  bleibt also auf alle Fälle oberhalb einer positiven Schranke, da in unserem Falle ja Eigenwerte und -funktionen reell sind. Wird nun in (29)  $\frac{c_2}{\varrho_n} = c_3$  bei festem  $c_1$  mit  $\varrho_n$  gross, so hebt sich dies in der normierten Funktion so heraus, dass diese beschränkt bleibt:

$$\left| \sqrt{\frac{2}{a} \frac{c_3 \sin \frac{2n\pi}{a} x}{\sqrt{c_1^2 + c_3^2 + \frac{\psi}{n}}}} \right| = \left| \sqrt{\frac{2}{a} \frac{\sin \frac{2n\pi}{a} x}{\sqrt{1 + \frac{c_1^2}{c_3^2} + \frac{\psi}{n}}}} \right|.$$

Die normierten Eigenfunktionen sind also beschränkt.

Ist nun  $F(x)$  quellenmässig darstellbar, also

$$F(x) = \int_0^a G(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha,$$

dann ist

$$\left| \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n - \lambda} \int_0^a f(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha \right| \leq \frac{M}{\lambda_n - \lambda} = \frac{a^2 M}{4n^2\pi^2} + \frac{\psi}{n^2} = \frac{\psi_0}{n^2},$$

wo  $M$ ,  $\psi$ ,  $\psi_0$ , unabhängig von  $x$  und  $n$  sind.

Die Reihen quellenmässiger Funktionen konvergieren also absolut und gleichmässig. Dies gilt auch dann noch, wenn die Ableitung von  $F(x)$  nur stückweise stetig ist, die Randbedingungen aber zunächst noch erfüllt bleiben. Denn, ist

$$F'(x) \Big|_{\xi - 0}^{\xi + 0} = b,$$

so konvergiert die Reihe der Funktion

$$F(x) - b G(x, \xi) = \Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

absolut.<sup>1</sup> Dann ist

$$\left| \varphi_n(x) \int_0^a F \varphi_n d\alpha \right| = \left| A_n + b \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(\xi)}{\lambda_n - \lambda} \right| \leq |A_n| + \left| \frac{b \varphi_n(x) \varphi_n(\xi)}{\lambda_n - \lambda} \right|.$$

Nun können wir uns noch von der einen Randbedingung befreien. Ist

$$F'(a) - F'(0) = \beta,$$

<sup>1</sup> Es ist dies das bei Kneser l. c. § 30 eingeschlagene Verfahren, um sich von der Bedingung der Stetigkeit zu befreien.



so schreiben wir die Greensche Funktion in der Form

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G_1(x, \xi), & x \leq \xi \\ G_2(x, \xi), & x \geq \xi; \quad G_1'(\xi, \xi) - G_2'(\xi, \xi) = 1. \end{cases}$$

Offenbar ist nun

$$G_2'(a, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} G_2'(a, x) = \lim_{x \rightarrow 0} G_1'(0, x) = G_1'(0, 0), \quad \left( G_1'(x, \xi) = \frac{\partial G_1(x, \xi)}{\partial x} \right),$$

andererseits aber

$$G_1'(0, 0) - G_2'(0, 0) = 1.$$

Daraus folgt:

$$G_2'(a, 0) - G_2'(0, 0) = 1.$$

Ist also  $F(x)$  stetig,  $F'(x)$  und  $F''(x)$  stückweise stetig, und  $F(0) = F(a)$ , so ist die Funktion

$$\Psi(x) = F(x) - \sum_{\nu} b_{\nu} G(x, \xi_{\nu}) - \beta G_2(x, 0)$$

quellenmässig darstellbar. Da  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(0)}{\lambda_n - \lambda}$  absolut konvergiert, so folgt in ähnlicher Weise wie soeben die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^a F'(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha.^1$$

Es ist dabei unwesentlich, ob  $F(x)$  eine reelle oder komplexe Funktion von  $x$  ist. Denn dann ist

$$\varphi_n(x) \int_0^a F'(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha = A_n + i B_n$$

$$|A_n + i B_n| = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} < |A_n| + |B_n|.$$

Wir haben also folgendes Ergebnis:

<sup>1</sup> Für die Funktionen, welche die Bedingung  $F(0) = F(a)$  nicht erfüllen, lässt sich, wenigstens nach der obigen Methode die absolute Konvergenz nicht beweisen, da man dann die Ableitung der Greenschen Funktion benötigte, die im allgemeinen nicht absolut konvergiert.

*Satz 8.*  $F(x)$  sei eine reelle oder komplexe stetige Funktion von  $x$ . Ausserdem seien  $F'(x)$  und  $F''(x)$  stückweise stetig, und

$$F(0) = F(a).$$

Dann konvergiert die mit reellen Eigenfunktionen  $\varphi_n(x)$  gebildete Fourierreihe von  $F(x)$  absolut und gleichmässig in  $[0, a]$ .

Dieser Satz wird uns später bei der Behandlung der partiellen Differentialgleichung von Nutzen sein.

#### 4. Gliedweise Differenzierbarkeit der Sturm-Liouvilleschen Reihen und Anwendung auf partielle Differentialgleichungen.

##### § 11. Zweimalige gliedweise Differenzierbarkeit.

Es erweist sich aus bald ersichtlichen Gründen als zweckmässig, sofort die zweite Ableitung der zu entwickelnden Funktion  $f(x)$  ins Auge zu fassen. Wir werden nun in diesem § folgenden Satz beweisen:

*Satz 9.* Es sei die Funktion  $L(x)$  wieder komplex und stetig, ausserdem  $L'(x)$

stückweise stetig, oder von der Form:  $L(x) = L(0) + \int_0^x \varphi(x) dx$  und  $\varphi(x)$  sum-

mabel, und

$$L(0) = L(a). \quad \left( \int_0^a \varphi(x) dx = 0 \right)$$

Ist dann die Funktion  $f(x)$  zweimal stetig differenzierbar,  $f'''(x)$  stückweise stetig

(oder:  $f''(x) = f''(0) + \int_0^x f'''(x) dx$  und  $f'''(x)$  summabel, also bis auf eine Null-

menge gleich der Ableitung von  $f''(x)$ ), und

$$f(x) \Big|_0^a = f'(x) \Big|_0^a = f''(x) \Big|_0^a = 0,$$

dann gelten in  $[0, a]$  die Gleichungen:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x) \int_0^a f(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha; \quad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n''(x) \int_0^a f(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha.$$

Zur Vereinfachung des Beweises nehmen wir die Greensche Funktion für den Parameterwert  $\lambda=0$ . Ist dies gerade ein Eigenwert, dagegen etwa  $\lambda^*$  nicht, so setzen wir einfach

$$L(x) - \lambda^* = L_1(x).$$

Nach Satz 4. (S. 52) ist  $f''(x)$  in eine gleichmässig konvergente Fourierreihe entwickelbar

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^a f''(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x).$$

Eine zweimalige partielle Integration ergibt:

$$\begin{aligned} \int_0^a f''(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha &= f'(\alpha) \varphi_n(\alpha) \Big|_0^a - f(\alpha) \varphi_n'(\alpha) \Big|_0^a + \int_0^a f(\alpha) \varphi_n''(\alpha) d\alpha \\ &= \int_0^a f(\alpha) (L(\alpha) - \lambda_n) \varphi_n(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Ist nun  $|\lambda_n|$  hinreichend gross, so ist  $L(x) - \lambda_n$  im ganzen Intervall verschieden von Null. Unter Benutzung der Identität:

$$\frac{1}{L(x) - \lambda_n} = -\frac{1}{\lambda_n} + \frac{L(x)}{\lambda_n} \cdot \frac{1}{L(x) - \lambda_n}$$

können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) \int_0^a f''(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha &= \frac{\varphi_n''(x)}{L(x) - \lambda_n} \int_0^a f''(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha = -\frac{\varphi_n''(x)}{\lambda_n} \int_0^a f(\alpha) (L(\alpha) - \lambda_n) \varphi_n(\alpha) d\alpha \\ (30) \qquad \qquad \qquad &+ \frac{L(x)}{\lambda_n} \varphi_n(x) \int_0^a f''(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha \\ &= \varphi_n''(x) \int_0^a f(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha - \frac{\varphi_n''(x)}{\lambda_n} \int_0^a f(\alpha) L(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha + L(x) \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} \int_0^a f''(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Da nun die bilineare Reihe gleichmässig konvergiert, so darf man mit einer stetigen Funktion  $\Phi(\alpha)$  multiplizieren und gliedweise integrieren, dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} \int_0^a \Phi(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha$$

ebenfalls gleichmässig. Dies gilt mithin auch von der Reihe, welche aus den dritten Summanden  $L(x) \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} \int_0^a f''(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha$  auf der rechten Seite der letzten

Gleichung gebildet ist. Den zweiten Summanden können wir schreiben:

$$(30 a) \quad -\frac{\varphi_n''(x)}{\lambda_n} \int_0^a f(\alpha) \varphi_n(\alpha) L(\alpha) d\alpha = -L(x) \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} \int_0^a f(\alpha) L(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha \\ + \varphi_n(x) \int_0^a f(\alpha) L(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha.$$

Auf Grund der Voraussetzungen konvergiert die mit der Funktion  $f(x) \cdot L(x)$  gebildete Reihe gleichmässig. Bringen wir nun in (30) die beiden letzten Summanden der rechten Seite auf die linke, so erkennt man, dass die Reihe

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n''(x) \int_0^a f(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha$$

gleichmässig konvergiert. Wir dürfen also gliedweise integrieren:

$$\int_{x_2}^{x_1} R(x) dx = \Sigma [\varphi_n'(x_1) - \varphi_n'(x_2)] B_n; \quad \left( B_n = \int_0^a f(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha \right).$$

Diese Reihe konvergiert in beiden Argumenten gleichmässig auf der Strecke  $0 \leq x \leq a$ . Wir können also über  $x_1$  nochmals integrieren

$$\int_{x_0}^x dx_1 \int_{x_2}^{x_1} R(x) dx = R_1(x, x_0, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0) - (x - x_0) \varphi_n'(x_2)] \cdot B_n.$$

Diese Reihe ist nun wieder in  $x$  und  $x_0$  gleichmässig konvergent; da dies aber auch von der Entwicklung von  $f(x)$  selbst gilt, so konvergiert somit auch die Reihe

$$R_1(x, x_0, x_2) - f(x) - f(x_0) = - (x - x_0) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x_2) \cdot B_n$$

gleichmässig. Daraus folgt sofort die Gleichung

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x) \cdot B_n$$

und daraus

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n''(x) \cdot B_n.$$

Diese letzte Gleichung hätten wir natürlich schon aus (30) folgern können nach Erledigung des Konvergenzbeweises unter Benutzung der Gleichung

$$f(x) = \int_0^a G(x, \alpha) [f(\alpha) L(\alpha) - f''(\alpha)] d\alpha$$

und von (30 a), wenn man einmal die Funktionen aufstellt, deren Entwicklungskoeffizienten gerade die in (30) auftretenden Summanden sind. Sie reduzieren sich auf  $f''(x)$ .

Ein ähnliches Verfahren liesse sich auch auf die dritte und höhere Ableitungen von  $f(x)$  anwenden, wenn man die Voraussetzungen über  $f(x)$  entsprechend verschärft. Für die vierte Ableitung sei der Weg noch kurz skizziert. Aus (1) folgt durch Differentiation:

$$\varphi_n^{(IV)} + (\lambda_n - L) \varphi_n'' - 2 L' \varphi_n' - L'' \varphi_n = 0.$$

Die Reihe  $\sum \varphi_n^{IV}(x) \cdot \int_0^a F(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha$  konvergiert offenbar dann gleichmässig, wenn

dies von der Reihe

$$\Sigma \lambda_n \varphi_n''(x) \int_0^a F(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha$$

gilt, und  $F(x)$  die Bedingungen für die zweimalige gliedweise Differenzierbarkeit ihrer Reihendarstellung erfüllt. Es sei nun

$$F''(x) - L(x) F(x) = -f(x),$$

und  $f(x)$  erfülle seinerseits wiederum die genannten Bedingungen ( $f'''(x)$  summabel,  $f''(0) = f''(a)$ , etc.). Dann ist

$$\Sigma \varphi_n''(x) \int_0^a f(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha$$

gleichmässig konvergent. Da offenbar  $F(x)$  quellenmässig darstellbar ist, so gilt die Gleichung

$$\frac{1}{\lambda_n} \int_0^a f(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha = \int_0^a F(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha;$$

mithin ist dann

$$\Sigma \varphi_n''(x) \int_0^a f(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha = \Sigma \lambda_n \varphi_n''(x) \int_0^a F(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha$$

gleichmässig konvergent, was wir gerade beweisen wollten. Man braucht also

offenbar nur  $F, \dots, F^{(IV)}$  stetig anzunehmen,  $F^{(IV)} = F^{(IV)}(0) + \int_0^x F^{(V)} dx$  ( $F^{(V)}$  sum-

mabel) anzusetzen, und ausserdem zu fordern  $L''(x) = L''(0) + \int_0^x L'''(x) dx$

( $L'''$  summabel),

$$L, L', L'', F, F', F'', F''', F^{(IV)} \Big|_0^a = 0;$$

d. h. es sind einfach die ursprünglichen Bedingungen um 2 Ableitungen hinausgeschoben. Man überzeugt sich leicht, dass dies auch für die  $2k^{\text{te}}$  Ableitung gilt.

§ 12. *Einmalige gliedweise Differenzierbarkeit unter einfacheren Bedingungen.*

Im vorigen § haben wir aus der zweimaligen gliedweisen Differenzierbarkeit die einmalige gefolgert. Man kann vermuten, dass, wenn man nur die letztere allein beweisen will, man der Funktion  $f(x)$  nicht soviel Bedingungen aufzuerlegen braucht als beim Nachweis der zweimaligen Differenzierbarkeit. Wir wollen dies für reelle Probleme bestätigen.

Sei die Funktion  $F(x)$  zunächst quellenmässig darstellbar. Dies ist, wie man weiss, dann und nur dann der Fall, wenn  $F(x)$  und  $F'(x)$  stetig,  $F''(x)$  stückweise stetig ist, und  $F(x)$  den Randbedingungen genügt.<sup>1</sup> Differenziert man die Gleichung

$$F(x) = \int_0^a G(x, s) f(s) ds$$

nach  $x$ , und setzt für  $\frac{\partial}{\partial x} G(x, s)$  die Reihe ein, so erhält man

$$F'(x) = \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n'(x) \varphi_n(s)}{\lambda_n - \lambda} f(s) ds.$$

Da die Reihe unter dem Integralzeichen nicht gleichmässig konvergiert, so dürfen wir vor der Hand nicht gliedweise integrieren. Wir zeigen nun, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n'(x)}{\lambda_n - \lambda} \int_0^a \varphi_n(s) f(s) ds$$

gleichmässig konvergiert. Wir betrachten also die Folge der Partialsummen

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{\varphi_n'(x)}{\lambda_n - \lambda} \int_0^a f(s) \varphi_n(s) ds.$$

Sei zunächst  $x$  ein innerer Punkt von  $[0, a]$ . Wir schliessen ihn in das ganz in  $[0, a]$  liegende Intervall  $x - \frac{\varepsilon}{2} < x < x + \frac{\varepsilon}{2}$  ein, wobei wir  $\varepsilon$  noch in geeigneter Weise von  $N$  abhängig machen werden, und betrachten die Folge

---

<sup>1</sup> Vgl. Kneser l. c. p. 104/105.

$$T_N = \sum_{n=1}^N \frac{\varphi_n'(x)}{\lambda_n - \lambda} \int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}} f(s) \varphi_n(s) ds.$$

Sei  $\varepsilon = \frac{1}{N^2}$ . Da nach § 10 der Normierungsfaktor  $\frac{1 + \frac{\psi}{\varrho}}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$ , sowie die Grössen  $\frac{c_1 + \frac{\psi}{\varrho}}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$ ,  $\frac{c_2 + \frac{\psi}{\varrho}}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$  unabhängig von  $\varrho$  beschränkt sind, wenn wir uns eine Eigenfunktion  $u(x)$  gegeben denken in der Form

$$u(x) = c_1 u_1(x) + \varrho_n c_2 u_2(x) \quad \left( u_2(x) = \frac{\psi}{\varrho_n} \right),$$

wo  $u_1, u_2$  das schon mehrfach erwähnte Fundamentalsystem ist, so folgt aus der Abschätzung von  $u_1'(x), u_2'(x)$  (vgl. (4 a) S. 36; der Faktor  $e^{\varrho_n x}$  ist ja jetzt beschränkt), dass sowohl

$$\frac{\varphi_n'(x)}{n^2} = \frac{\psi}{n},$$

als auch

$$\left| \frac{\varphi_n'(x)}{\lambda_n - \lambda} \right| \leq \frac{M}{n}$$

gesetzt werden darf, wo  $M$  für alle  $n$  fest gewählt und endlich ist. Es sei weiterhin

$$M_1 = \text{Max} (|f(x) \varphi_n(x)|) \quad \text{für } 0 \leq x \leq a; n=1, 2, \dots$$

Offenbar ist für  $T_N$

$$\varepsilon \leq \frac{1}{N \cdot n}$$

$$T_N \leq M \cdot M_1 \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} < M \cdot M_1 \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Wächst also  $N$  über alle Grenzen, so ergibt sich

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_N = 0.$$



Nun ist aber

$$F''(x) = \int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\partial}{\partial x} G(x, s) f(s) ds + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n'(x)}{\lambda_n - \lambda} \left[ \int_0^{x-\frac{\varepsilon}{2}} f(s) \varphi_n(s) ds + \int_{x+\frac{\varepsilon}{2}}^a f(s) \varphi_n(s) ds \right],$$

weil in den hier benutzten Intervallen die gliedweise Integration gestattet ist.

Da aber

$$\left| \int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\partial}{\partial x} G(x, s) f(s) ds \right| \leq \varepsilon M_2$$

ist, so folgt

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{\varphi_n'(x)}{\lambda_n - \lambda} \left[ \int_0^{x-\frac{\varepsilon}{2}} f(s) \varphi_n(s) ds + \int_{x+\frac{\varepsilon}{2}}^a f(s) \varphi_n(s) ds \right] - F''(x) \right| < \eta,$$

wo  $\eta$  unabhängig von  $x$  beliebig klein vorgegeben sein darf (Was die Rand-

punkte betrifft, so fällt für  $x=0$  z. B.  $\int_0^{x-\frac{\varepsilon}{2}}$  einfach fort), wenn nur  $N$  hinreichend

gross gewählt wird. Also folgt

$$|S_N - F''(x)| < \eta + \frac{M_3}{N}.$$

Dies gilt zunächst nur für innere Punkte. In den Randpunkten fällt das eine oder andere der Intervalle  $\left[0, x - \frac{\varepsilon}{2}\right]$ ,  $\left[x + \frac{\varepsilon}{2}, a\right]$  fort, und die letzte Ungleichung gilt erst recht. Es ist also

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} S_N &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n'(x)}{\lambda_n - \lambda} \int_0^a \varphi_n(s) f(s) ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x) \int_0^a F(s) \varphi_n(s) ds = F''(x). \end{aligned}$$

Ist nun  $F'(x)$  nur stückweise stetig, erfüllt aber die übrigen Forderungen, so setzen wir, falls etwa

$$F'(x) \Big|_{s_\nu - 0}^{s_\nu + 0} = a_\nu$$

ist, nach der Methode von Kneser (l. c., § 30)

$$F(x) - \sum_\nu a_\nu G(x, s_\nu) = \Phi(x).$$

Dann ist  $\Phi(x)$  quellenmässig darstellbar, und es gilt

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x) \int_0^a \Phi(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x) \left[ \int_0^a F(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha - \sum_\nu \frac{a_\nu \varphi_n(s_\nu)}{\lambda_n - \lambda} \right] \\ &= F'(x) - \sum_\nu a_\nu \frac{\partial G(x, s_\nu)}{\partial x} \\ F'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x) \int_0^a F(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Satz 10. Hiermit ist unter der Voraussetzung, dass  $F(x)$  stetig,  $F'(x)$ ,  $F''(x)$  stückweise stetig sind, und dass  $F(x)$  die Randbedingungen erfüllt, die einmalige gliedweise Differenzierbarkeit bewiesen.

Wir merken noch an, dass man sich auch von der Bedingung  $F'(0) = F'(a)$  frei machen könnte, indem man sich der in § 10 benutzten Funktionen  $G_1(x, a)$  oder  $G_2(x, 0)$  in ähnlicher Weise wie dort bedient, denn für sie ist die einmalige Differenzierbarkeit ja nachgewiesen. Allerdings wird dann die abgeleitete Reihe im allgemeinen in den Randpunkten unstetig sein.

### § 13. Entwickelbarkeit spezieller Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (p(t) + kq(x))u = 0 \quad (k, p, q \text{ komplex})$$

nach partikulären Lösungen.

Es sei  $k$  eine komplexe Konstante, und  $p(t)$ ,  $q(x)$  komplexe stetige Funktionen ihres Arguments mit stückweise stetigen Ableitungen in den Intervallen

$$x_0 < x < x_1; \quad t_0 < t < t_1.$$

Wir wollen annehmen, dass unter den weiteren Voraussetzungen

$$x_0 < 0 < a < x_1; \quad q(0) = q(a)$$

die Differentialgleichung

$$(31) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (p(t) + kq(x))u = 0$$

eine zweimal stetig differenzierbare Lösung mit stückweise stetigen dritten Ableitungen nach beiden Variablen besitzt, die identisch in  $t$  die Gleichungen

$$U(t, x) \Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{x=0}^{x=a} = 0$$

erfüllt. Dann wird behauptet, dass  $U(t, x)$  darstellbar ist in der Form

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) \varphi_n(x),$$

wobei die  $u_n(t, x)$  auch der Differentialgleichung (31) genügen, aus welcher durch den Ansatz

$$u_n(t, x) = \psi_n(t) \cdot \varphi_n(x)$$

für  $\psi_n$  und  $\varphi_n$  die Differentialgleichungen folgen:

$$(31 a) \quad \varphi_n''(x) + (\lambda_n + q(x))\varphi_n(x) = 0; \quad \varphi_n(x) \Big|_a^0 = \varphi_n'(x) \Big|_a^0,$$

wo  $\lambda_n$  alle Eigenwerte durchläuft,

$$(31 b) \quad \psi_n''(t) + (-k\lambda_n + p(t))\psi_n(t) = 0.$$

Nehmen wir die  $\varphi_n(x)$  als normiert und orthogonal an, so folgt durch Multiplikation von  $U(t, x)$  mit  $\varphi_n(x)$  und gliedweise Integration, — was vorläufig natürlich alles nur rein formalen Charakter hat —,

$$\psi_n(t) = \int_0^a U(t, \alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha$$

$$\psi_n'(t) = \int_0^a \frac{\partial U(t, \alpha)}{\partial t} \cdot \varphi_n(\alpha) d\alpha.$$

Aus den Voraussetzungen folgt zunächst die Gültigkeit der Entwicklung:

$$(32) \quad U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^a U(t, \alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha.$$

Diese Reihe ist zweimal nach  $x$  gliedweise differenzierbar nach § 11. Ausserdem ist auch

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^a U(t, \alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha,$$

indem wir erlaubterweise Differentiation mit Integration vertauschen. Daraus folgt Entsprechendes für die erste Ableitung nach  $t$ . Die Reihe (32) genügt also auch bei Anwendung gliedweiser Differentiation der Differentialgleichung (31). Setzen wir also (32) in (31) ein und ordnen nach  $n$ , so ist die eine Hälfte aller Summanden, welche die Form

$$k \int_0^a U(t, \alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha \cdot [\varphi_n''(x) + q(x) \varphi_n(x)]$$

hat, gleich

$$-k \int_0^a U(t, \alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha \cdot \lambda_n \varphi_n(x),$$

weil  $\varphi_n(x)$  der Gleichung (31 a) genügt. Man erhält so die Forderung, wenn wir

$$(32 \text{ a}) \quad \int_0^a U(t, \alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha = \bar{\psi}_n(t)$$

setzen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) [\bar{\psi}_n''(t) + (-k\lambda_n + p(t)\bar{\psi}_n(t))] = 0.$$

Multipliziert man mit  $\varphi_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) und integriert von 0 bis  $a$ , so folgt aus der Orthogonalität der  $\varphi_n(x)$

$$\bar{\psi}_n''(t) + (-k\lambda_n + p(t))\bar{\psi}_n(t) = 0.$$

Damit sind unsere Behauptungen bewiesen.

Nun spezialisieren wir

$$k = -1, \quad p(x) = q(x); \quad t_0 < 0 < a < t_1.$$

Ausserdem genüge  $U(t, x)$  auch in  $t$  denselben Randbedingungen wie in  $x$ . Über die Randwerte der zweiten Ableitung nach  $t$  braucht nichts vorausgesetzt zu werden; sie sind, wie sich zeigt, von selbst gleich.

Es genügt also jetzt  $\psi_n(t)$  derselben Differentialgleichung wie  $\varphi_n(x)$ . Aus der Gleichung

$$(33) \quad \psi_n(t) = \int_0^a U(t, \alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha$$

folgt, dass auch die Funktionen  $\psi_n(t)$  den Randbedingungen genügen müssen, was man aus der Gleichung

$$U(t, x) = \sum \varphi_n(x) \psi_n(t)$$

direkt nicht hätte folgern können. Für einfache Eigenwerte  $\lambda_n$  sind also bis auf einen konstanten Faktor die Funktionen  $\varphi_n(x)$  und  $\psi_n(t)$  identisch, und genügen also wegen (33) der homogenen Integralgleichung

$$(33 \text{ a}) \quad \varphi_n(x) = C_n \int_0^a U(x, \alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha.$$

$C_n$  lässt sich bestimmen, indem entweder mit  $\varphi_n(x)$  multipliziert und integriert, oder erst quadriert und dann integriert wird:

$$\frac{1}{C_n} = \int_0^a \int_0^a U(\alpha, \beta) \varphi_n(\alpha) \varphi_n(\beta) d\alpha d\beta = \sqrt{\int_0^a d\beta \left[ \int_0^a U(\beta, \alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha \right]^2}.$$

Diese Integralgleichung ist von E. T. Whittaker<sup>1</sup> für den speziellen Fall der

<sup>1</sup> Vgl. Proceedings of the 5. Intern. Congress of Math. (1912) S. 366.

Funktionen des elliptischen Cylinders abgeleitet worden. Ist also die Funktion  $U(t, x)$  zu allen Eigenfunktionen mit doppeltem Eigenwert orthogonal, so muss sie symmetrisch sein. Andernfalls braucht sie das natürlich nicht. Denn seien  $\varphi_n(x)$  und  $\bar{\varphi}_n(x)$  zwei linear unabhängige Lösungen von (31 a), so genügt die Funktion  $\varphi_n(x) \cdot \bar{\varphi}_n(t)$ , wie man leicht verifiziert auch der Differentialgleichung (31), ist aber nicht symmetrisch. In jedem Falle aber ist

$$\left(\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2}\right)_{t=a},$$

weil wegen  $q(0) = q(a)$  auch  $\varphi_n''(0) = \varphi_n''(a)$  ist.

Um auf die Formeln von Whittaker zu kommen, haben wir nur

$$a = 2\pi; \quad q(x) = p(x) = k^2 \cos^2 x \quad (k \text{ komplex})$$

zu setzen. Der Beweis von Whittaker ist etwas anders gehalten. Er geht von einer nachher noch zu erwähnenden elliptischen Differentialgleichung aus, während die jetzt betrachtete von der Form

$$(34) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2 (\cos^2 t - \cos^2 x) u = 0$$

ist. Für unsere Zwecke geeignete Lösungen sind z. B. die folgenden symmetrischen Funktionen

$$e^{k \cos t \cos x}, \quad e^{k \sin t \sin x}, \quad I_0 \left( \frac{ik}{\sqrt{2}} \sqrt{\cos 2t + \cos 2x} \right),^1$$

Jede dieser Funktionen liefert, als Kern genommen, einen Teil der Funktionen des elliptischen Cylinders, die ja in die vier Klassen

$$\mathfrak{E}_k^{(1)}(x), \quad \mathfrak{E}_l^{(2)}(x), \quad \mathfrak{E}_m^{(3)}(x), \quad \mathfrak{E}_n^{(4)}(x)$$

nach der Bezeichnungsweise von Heine<sup>2</sup> zerfallen. Die unteren Indizes, die sich auf die Ordnung der Eigenfunktion beziehen, sind in den 4 Klassen sämtlich verschieden, da nach Heine keine doppelten Eigenwerte auftreten können.  $\mathfrak{E}^{(1)}$  und  $\mathfrak{E}^{(2)}$  sind gerade,  $\mathfrak{E}^{(3)}$  und  $\mathfrak{E}^{(4)}$  ungerade Funktionen.  $\mathfrak{E}^{(1)}$  und  $\mathfrak{E}^{(4)}$  haben

<sup>1</sup> Wo  $I_0(z)$  der Besselschen Gleichung  $y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$  genügt.

<sup>2</sup> Vgl. E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, I. § 104 Nr. 5, S. 411.

bereits die Periode  $\pi$ , während  $\mathfrak{E}^{(2)}$  und  $\mathfrak{E}^{(3)}$  als kleinste Periode  $2\pi$  besitzen. Man erkennt, dass z. B.  $e^{k \cos t \cos x}$  nur Funktionen der ersten beiden Klassen liefern kann, da

$$\int_0^a e^{k \cos t \cos \alpha} \varphi_n(\alpha) d\alpha$$

sicher eine gerade Funktion von  $t$  ist.  $e^{k \sin t \sin x}$  lässt sich in  $\cos(k \sin t \sin x)$  und  $\sin(k \sin t \sin x)$  zerlegen. Man erhält so die Funktionen  $\mathfrak{E}^{(1)}$  und  $\mathfrak{E}^{(3)}$ . Da  $k$  komplex sein darf, so könnte man auch  $e^{-k \cos t \cos x}$  in entsprechender Weise zerlegen und so die Funktionen  $\mathfrak{E}^{(1)}$  und  $\mathfrak{E}^{(3)}$  erhalten.  $I_0\left(\frac{ik}{\sqrt{2}} \sqrt{\cos 2t + \cos 2x}\right)$

liefert nur Funktionen der ersten Klasse. Zu den übrigen  $\mathfrak{E}$ -Funktionen, welche nicht als Lösung einer Integralgleichung mit einem der eben behandelten Kerne auftreten können, ist dieser natürlich orthogonal, wie aus seiner zu Anfang des Paragraphen bewiesenen Reihendarstellung hervorgeht. Man überzeugt sich auch leicht, dass ein solcher Kern nur die Funktionen  $\mathfrak{E}_c^{(v)}$  als Eigenfunktionen besitzen kann und keine anderen, denn ist  $U(t, \alpha)$  symmetrisch und

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(t) \varphi_n(x)}{C_n},$$

so genügen nach (32) die  $\varphi_n(x)$  den Gleichungen (31 a). Es sei nun  $\varphi(t)$  irgend eine Lösung der Integralgleichung

$$\varphi(t) = C \int_0^a U(t, \alpha) \varphi(\alpha) d\alpha;$$

dann muss  $C$  gleich einem der  $C_n$  sein, da zu verschiedenen  $C_n$  orthogonale Eigenfunktionen gehören,  $\int_0^a U(t, \alpha) \varphi(\alpha) d\alpha$  also verschwinden müsste. Ist also  $C$  etwa gleich  $C_{n_0}$ , so ist

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= C_{n_0} \int_0^a \frac{\varphi_{n_0}(t) \varphi_{n_0}(\alpha) d\alpha}{C_{n_0}} \\ &= \varphi_{n_0}(t) \cdot \int_0^a \varphi_{n_0}(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Das Ergebnis der bisherigen Betrachtungen ist, dass die Existenz der Funktionen des elliptischen Cylinders auch für komplexe  $k$  nachgewiesen wurde, und dass man bei geeigneter Wahl von Lösungen der partiellen Differentialgleichung (34), die wir kurz als Kernfunktionen bezeichnen wollen, auch die Existenz der vier Heineschen Klassen nachweisen kann. Weiterhin folgt die Gültigkeit bilinearer Formeln für die Kernfunktionen.

Wir wollen nun noch einen anderen Spezialfall der Differentialgleichung (31) ins Auge fassen:

$$(35) \quad \begin{aligned} k &= +1; \quad p(t) = k^2 \mathfrak{C} \mathfrak{v}^2(t); \quad q(x) = -k^2 \cos^2 x \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2 (\mathfrak{C} \mathfrak{v}^2(t) - \cos^2 x) u &= 0 \quad (0 \leq x \leq a). \end{aligned}$$

Diese folgt offenbar aus (34), wenn dort  $x$  durch  $ix$  und  $t$  durch  $it$  ersetzt wird. Vermöge dieser Substitution kann man leicht die den früheren für die Kernfunktionen geltenden Formeln analogen aufstellen, wobei natürlich jetzt die Periodizität in  $t$  aufhört. Diese Formeln haben einige Bedeutung für die Aufgabe der Beugung elektrischer Wellen an einem Schirm von elliptischen Querschnitt, die von B. Sieger<sup>1</sup> durchgeführt worden ist. Es werden dort Entwicklungen der Funktionen des elliptischen Cylinders nach Besselschen u. a. Funktionen benötigt. Diese ergeben sich uns sofort aus der aus (33 a) folgenden Formel

$$(35 a) \quad \varphi_n(xi) = \bar{C}_n \int_0^a U(ix, \alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha,$$

wenn man unter dem Integralzeichen  $\varphi_n(\alpha)$  in eine passende trigonometrische Reihe entwickelt und gliedweise integriert. Man erhält auf diese Weise leicht die Reihen (28) von Sieger, der die Formel (35 a) zwar auch erwähnt, aber ausdrücklich als nicht bewiesen hinstellt (Ende von § 3). Desgleichen sind auch die Reihen des dritten Kapitels

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{p_s} \mathfrak{C}_s(i\xi) \mathfrak{C}_s(\eta); \quad \sum_{s=0}^{\infty} A_s \cdot \mathfrak{F}_s(i\xi) \cdot \mathfrak{C}_s(\eta)$$

nicht als konvergent nachgewiesen. Sie sind es aber in der Tat, wie aus den Darlegungen dieses § hervorgeht.

---

<sup>1</sup> Die Beugung einer ebenen elektrischen Welle an einem Schirm von elliptischen Querschnitt. Ann. d. Phys. 1908, Bd. 27.



§ 14. Lösung der partiellen Differentialgleichung (31) bei gewissen Anfangsbedingungen.

Bisher gingen wir aus von bekannten Lösungen von (31), die wir durch unendliche Summen von Partikulärlösungen darstellten. Wir behandeln jetzt das in gewissem Sinne umgekehrte Problem, bei gegebenen Anfangsbedingungen eine Lösung erst aufzusuchen, indem wir sie in Form einer Fourierreihe ansetzen, und zeigen, dass diese unter geeigneten Bedingungen konvergiert und der Differentialgleichung genügt.

Sei  $k$  eine positive Konstante und  $q(x)$  reell.  $p(t)$  und  $q(x)$  seien wieder stetig für  $t_0 \leq t$  bzw.  $0 \leq x \leq a$ .  $q'(x)$  und  $q''(x)$  seien ausserdem stückweise stetig und

$$q(0) = q(a).$$

Dann laute die Differentialgleichung

$$(36) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (p(t) - kq(x))u = 0.$$

Wir suchen eine Lösung von (36), für die

$$U(t_0, x) = F(x); \quad \left( \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right)_{t=t_0} = G(x)$$

ist, wobei  $F(x)$  und  $G(x)$  stetig differenzierbar sind. Ausserdem sei  $F''(x)$  stetig,  $F'''(x)$ ,  $F^{(IV)}(x)$ ,  $G''(x)$  stückweise stetig, und

$$F(x) \Big|_0^a = F'(x) \Big|_0^a = F''(x) \Big|_0^a = G(x) \Big|_0^a = G'(x) \Big|_0^a = 0.$$

Um partikuläre Lösungen zu erhalten, setzen wir wieder an

$$u(t, x) = T(t) \cdot X(x)$$

und erhalten

$$\frac{T''}{T} + p(t) = k \left( \frac{X''}{X} + q(x) \right) = -k\lambda$$

$$T'' + (k\lambda + p)T = 0; \quad X'' + (\lambda + q)X = 0; \quad X(x) \Big|_0^a = X'(x) \Big|_0^a = 0.$$

Die Differentialgleichung für  $X$  hat, wie wir wissen, unendlich viele Lösungen für bestimmte Parameterwerte  $\lambda_n$ . Für jedes dieser  $\lambda_n$  bestimmen wir aus der Gleichung für  $T(t)$  ein Fundamentalsystem mit den Anfangswerten

$$\psi_1(t_0) = \psi_2'(t_0) = 1; \quad \psi_1'(t_0) = \psi_2(t_0) = 0.$$

Dann, behaupten wir, ist die Funktion

$$(37) \quad U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \psi_{1n}(t) + B_n \psi_{2n}(t)] \varphi_n(x),$$

in welcher  $A_n$  und  $B_n$  die Fourierkoeffizienten von  $F(x)$  bzw.  $G(x)$  sind, die Lösung unserer Aufgabe.

Da unter den angesetzten Voraussetzungen für  $t = t_0$  sowohl bei  $U(t, x)$  wie bei  $\frac{\partial U(t, x)}{\partial t}$  der Darstellungssatz gilt, so genügt diese Funktion jedenfalls den Anfangsbedingungen. Es ist noch zu zeigen, dass  $U(t, x)$  auch für  $t > t_0$  konvergiert und der Differentialgleichung genügt.

Für die Funktionen  $\psi_{1n}$  und  $\psi_{2n}$  gelten die asymptotischen Ausdrücke (4 a) auch nach Multiplikation mit  $e^{-e_n t}$ , da ja  $e_n$  jetzt reell ist. Nach Satz 8. (S. 72) konvergieren aber  $\sum A_n \varphi_n(x)$  und  $\sum B_n \varphi_n(x)$  absolut, mithin auch bei gliedweiser Multiplikation mit endlichen Faktoren. Damit ist der erste Teil unserer Behauptung bewiesen.

Wir beweisen nun, dass  $U(t, x)$  zweimal nach beiden Variablen gliedweise differenziert werden darf, woraus dann von selbst folgt, dass  $U(t, x)$  gemäss der Definition von  $\psi_n(t)$  und  $\varphi_n(x)$  der Differentialgleichung genügt.

Auf Grund der Voraussetzungen konvergieren die Reihen

$$(38) \quad \sum A_n \varphi_n'(x), \quad \sum A_n \varphi_n''(x)$$

gleichmässig und absolut. Denn aus Satz 8. folgt, dass  $\sum \varphi_n(x) \int_0^a F''(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha$

absolut und gleichmässig konvergiert. Erinnern wir uns nun der Gleichungen (30) und (30 a), so sehen wir, dass auch

$$\sum \varphi_n''(x) \int_0^a F(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha$$

Über die Existenz von Eigenfunktionen einer reellen Variablen bei linearen etc. 89  
absolut und gleichmässig konvergieren muss; da nämlich wiederum nach Satz 8.  
von den Reihen

$$\sum \frac{\varphi_n''(x)}{\lambda_n} \int_0^a F(\alpha) q(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha \quad \text{und} \quad q(x) \sum \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} \int_0^a F''(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha$$

das Gleiche gilt, so konvergiert auch die Reihe, die aus den Gliedern

$$\bar{A}_n = \left| \varphi_n(x) \int_0^a F'' \varphi_n d\alpha \right| + \left| \frac{\varphi_n''(x)}{\lambda_n} \int_0^a F q \varphi_n d\alpha \right| + \left| q(x) \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} \int_0^a F'' \varphi_n d\alpha \right|$$

gebildet ist. Aus (30) folgt aber

$$|\varphi_n'' \cdot A_n| \leq |\bar{A}_n|.$$

Wir dürfen also wieder mit gleichmässig beschränkten Faktoren multiplizieren,  
womit die gleichmässige Konvergenz der Reihen

$$\sum A_n \varphi_n''(x) \psi_{1n}(t), \quad \sum A_n \varphi_n'(x) \psi_{1n}(t)$$

bewiesen ist. Daraus aber folgt, dass sie die Ableitungen von  $\sum A_n \varphi_n(x) \psi_{1n}(t)$   
darstellen.

Aus der hiermit bewiesenen gliedweisen Differenzierbarkeit nach  $x$ , lässt  
sich leicht diejenige nach  $t$  folgern. Wegen

$$\varphi_n''(x) = -(\lambda_n + q(x)) \varphi_n x$$

folgt aus der Konvergenz<sup>1</sup> von  $\sum \varphi_n''(x) A_n \psi_{1n}(t)$  leicht diejenige von

$$\sum \lambda_n \varphi_n(x) A_n \psi_{1n}(t)$$

und hieraus, wegen

$$\psi_{1n}''(t) = -(k\lambda_n + p(t)) \psi_{1n}(t),$$

die Konvergenz von  $\sum A_n \varphi_n(x) \psi_{1n}''(t)$ .

Wir haben jetzt noch den zweiten Summanden von (37)

$$\sum B_n \varphi_n(x) \psi_{2n}(t)$$

<sup>1</sup> Mit 'Konvergenz' ist in diesem Paragraphen immer die gleichmässige gemeint, wenn es  
nicht ausdrücklich anders gesagt wird.

zu betrachten. Setzen wir

$$B_n'' = \int_0^a G''(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha,$$

so können wir leicht beweisen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{B_n''}{\sqrt{\lambda_n}} \right|$$

konvergiert.  $G''(\alpha)$  ist ja nach Voraussetzung stückweise stetig, also quadratisch integrierbar. Da es sich um ein reelles Problem handelt, so muss nach einem bekannten Satz  $\sum B_n''^2$  konvergieren. Betrachtet man nun das geometrische und arithmetische Mittel der Grössenpaare  $B_n''^2$  und  $\frac{1}{n^2}$ , so ist

$$\frac{|B_n''|}{n} \leq \frac{1}{2} B_n''^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{n^2};$$

also konvergiert

$$\sum \frac{|B_n''|}{n},$$

und da

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{\frac{2n\pi}{a} + \frac{\psi}{n}} = \frac{a}{2n\pi} + \frac{\psi}{n^2}$$

ist, auch

$$(39) \quad \sum \frac{|B_n''|}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Da die  $|\varphi_n(x)|$  beschränkt sind, so konvergiert also auch

$$(39 a) \quad \sum \left| \frac{B_n''}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot \varphi_n(x) \right|.$$

Nun erfüllt  $G(x)$  die Randbedingungen; es ist also nach § 11

$$\int_0^a G''(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha = \int_0^a G(\alpha) \varphi_n''(\alpha) d\alpha$$

Über die Existenz von Eigenfunktionen einer reellen Variablen bei linearen etc. 91  
 und es gelten weiterhin die Gleichungen (30) und (30 a) (auch unabhängig davon, ob  $\sum B_n'' \varphi_n(x)$  konvergiert). Setzen wir also dort  $L(x) = -q(x)$ , so gilt

$$B_n \varphi_n''(x) = B_n'' \varphi_n(x) - \frac{\varphi_n''(x)}{\lambda_n} \int_0^a G(\alpha) q(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha + q(x) \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} \cdot B_n''$$

$$\left| \frac{B_n \varphi_n''(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right| \leq \left| \frac{B_n'' \varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right| + \left| \frac{\varphi_n''(x)}{\sqrt{\lambda_n} \cdot \lambda_n} \int_0^a G(\alpha) q(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha \right| + \left| \frac{q(x) \varphi_n(x) B_n''}{\sqrt{\lambda_n} \cdot \lambda_n} \right|.$$

Im mittleren Summanden der rechten Seite ersetzen wir  $\varphi_n''(x)$  durch  $-(\lambda_n + q(x)) \varphi_n(x)$ . Da  $G(\alpha) q(\alpha)$  stetig ist, so ist nach (39 a)

$$\sum \left| \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^a G(\alpha) q(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha \right|$$

konvergent. Da auch die übrigen Summanden der rechten Seite konvergente Reihen erzeugen, so ist erst recht

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{B_n \varphi_n''(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right|$$

konvergent. Von der Funktion  $\psi_{\tau_n}(t)$  gelten aber die Abschätzungen (4 a), sodass wir setzen können

$$\psi_{\tau_n}(t) = \frac{\psi}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Mithin konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \varphi_n''(x) \psi_{\tau_n}(t)$$

absolut und gleichmässig für  $0 \leq x \leq a$ ;  $t_0 \leq t$ . Daraus folgt leicht das Gleiche für

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \varphi_n'(x) \psi_{\tau_n}(t),$$

woraus sich wieder die Gleichheit der Ableitungen mit den gliedweise differenzierten Reihen ergibt. Das gleiche Resultat folgt für die Ableitungen nach  $t$  in derselben Weise wie bei  $\sum A_n \varphi_n(x) \psi_{\tau_n}(t)$ .

Damit ist die gliedweise Differenzierbarkeit für beide Variablen vollständig bewiesen und die in (37) definierte Funktion  $U(t, x)$  in der Tat als Lösung unseres Problems erkannt.

### § 15. Wärmeleitung im inhomogenen Ring.

Betrachten wir nun zum Schluss noch die Differentialgleichung der Wärmeleitung<sup>1</sup>:

$$(40) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = r^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x) u \right).$$

Bei den in diesem Abschnitt zu Grunde gelegten Randbedingungen wäre dies etwa die mathematische Formulierung des Problems der Wärmeleitung in einem inhomogenen Ring bei seitlicher Ausstrahlung in ein Medium, das auf der Temperatur  $u = 0$  gehalten wird.  $q(x)$  ist wieder reell und stetig; sodann

$$q(0) = q(a).$$

Ist dann  $F(x)$  eine stetige Funktion mit stückweise stetiger Ableitung, oder auch nur eine stetige Funktion, die den Bedingungen von Satz 3 (S. 49) genügt, so wird für die Intervalle  $[0, a]$  und  $0 < t$  eine Lösung von (40) gesucht, die für  $t = 0$  gleich der gegebenen Funktion  $F(x)$  ist, von welcher wir dem physikalischen Sinn der Aufgabe entsprechend noch verlangen, dass

$$F(0) = F(a)$$

ist. Aus dem Ansatz

$$u(t, x) = T(t) \cdot X(x),$$

folgt leicht für  $T(t)$  der Ausdruck

$$T(t) = \text{const. } e^{-\lambda_n r^2 t}$$

und für  $X(x)$  die Differentialgleichung (31 a). Da in den zusammenhängenden Stellen 0 und  $a$  des Ringes keine Wärmequelle liegen soll, so ist zu fordern

$$X(x) \Big|_0^a = X'(x) \Big|_0^a = 0.$$

<sup>1</sup> Von A. Kneser bei denselben Randbedingungen für den Fall:  $q(x) = \text{const.}$  behandelt; vgl. I. c. § 7.

Über die Existenz von Eigenfunktionen einer reellen Variablen bei linearen etc. 93

Sind dann wieder  $\varphi_n(x)$  die normierten Eigenfunktionen, so wird die Lösung des Problems gegeben durch

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) e^{-\lambda_n t^2} \int_0^a F(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha.$$

Nach den Sätzen 2, 3, und 4, ist für  $t = 0$  in der Tat

$$U(0, x) = F(x).$$

Andererseits ist aber für  $0 < \varepsilon \leq t$   $U(t, x)$  wirklich eine Lösung von (40). Denn da

$$\lambda_n = \frac{4n^2\pi^2}{a^2} + \psi$$

ist, so konvergiert für jede feste endliche Zahl  $k$  die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot |\lambda_n^k e^{-\lambda_n t^2}|,$$

wo die  $|c_n|$  unter einer festen Schranke verbleiben. Es konvergieren also die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) e^{-\lambda_n t^2} \int_0^a F(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x) e^{-\lambda_n t^2} \int_0^a F(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha$$

absolut und gleichmässig in  $x$  und  $t$ . Da

$$\varphi_n''(x) = -(\lambda_n + q(x)) \varphi_n(x)$$

ist, so folgt aus der Konvergenz dieser Reihen leicht die Konvergenz der zweimal nach irgend einer der Variablen gliedweise differenzierten Reihe  $U(t, x)$ . Daraus folgt rückwärts die Konvergenz der einmal differenzierten Reihe, und die Gleichheit dieser Reihen mit den Ableitungen von  $U(t, x)$ .

Genau genommen haben wir für  $U(t, x)$  nur die Konvergenz in einem Intervall  $\varepsilon \leq t$  und für  $t = 0$  selbst bewiesen. Dass trotzdem  $U(t, x)$  für  $0 \leq t$  gleichmässig konvergiert, folgt aus einem bekannten Satz<sup>1</sup>, nach welchem  $\lim_{t \rightarrow +0} U(t, x)$  existiert und gleich  $U(0, x)$  ist, falls nämlich  $U(0, x)$  konvergiert, was ja hier der Fall ist. Ausserdem muss für die Gültigkeit des erwähnten Satzes  $\lim_{t \rightarrow +0} u(t, x)$

<sup>1</sup> Vgl. Knopp: Die unendlichen Reihen S. 340, Satz 2.

existieren, was auch erfüllt ist. Die letzte Bedingung braucht nicht mehr erfüllt zu sein bei den Ableitungen, wenn man nicht an  $F(x)$  schärfere Forderungen stellt, etwa die Bedingungen für Satz 9 (S. 72); dann konvergiert

$$\Sigma \varphi_n''(x) \int_0^a F(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha \quad \text{und} \quad \Sigma \lambda_n \varphi_n(x) \int_0^a F(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha$$

also auch ohne den Exponentialfaktor. Die erwähnten limites existieren und  $U(t, x)$  konvergiert mit seinen Ableitungen gleichmässig für  $0 \leq t$ .

## 2. Abschnitt.

### Zweiter Abschnitt. Die Randbedingungen:

$$(I) \quad \begin{aligned} W_1(u) &= a_1 u(0) + a_2 u'(0) + a_3 u(a) + a_4 u'(a) = 0 \\ W_2(u) &= b_1 u(0) + b_2 u'(0) + b_3 u(a) + b_4 u'(a) = 0, \end{aligned}$$

unter der Voraussetzung, dass  $a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_3 b_4 - a_4 b_3$ ;  $a_2 b_4 - a_1 b_3 \neq 0$  ist.

#### 1. Lösung der Randwertaufgabe und Entwicklungssatz.

##### § 1. Existenz unendlich vieler Eigenwerte.

Schreiben wir

$$A_{r\varrho} = \begin{vmatrix} a_r & a_\varrho \\ b_r & b_\varrho \end{vmatrix}, \quad (\text{in dieser Reihenfolge})$$

so besagt die Bedingung

$$(2) \quad A_{12} = A_{34},$$

dass die eventuellen Lösungen des Randwertproblems ein Orthogonalsystem bilden. Wäre (2) nicht erfüllt, so müsste man nach einem von Bôcher<sup>1</sup> angegebenen Verfahren zwei neue Randbedingungen konstruieren derart, dass die Lösungen dieses neuen Problems zu denen des alten orthogonal sind. Aus der Forderung, dass diese neuen Randbedingungen lineare Kombinationen der ursprünglichen sind, ergibt sich dann von selbst die Relation (2), welche von Stekloff direkt als notwendige und hinreichende Bedingung der Orthogonalität nachgewiesen worden ist. Wir wollen durchweg in dieser Arbeit die »Orthogo-

<sup>1</sup> Vgl. Bôcher l. c. cap. II, 8, und S. 39/40.



Über die Existenz von Eigenfunktionen einer reellen Variablen bei linearen etc. 95

nalitätsrelation» als erfüllt voraussetzen, wie es ja bei dem im ersten Abschnitt behandelten Problem in der Tat der Fall ist.

Wir stellen die Bedingung für das Vorhandensein von Eigenwerten auf. Es sei  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$  ein beliebiges Fundamentalsystem. Dann versuchen wir die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  so zu bestimmen, dass die Funktion

$$u(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$$

die Randbedingungen erfüllt. Es muss also gelten:

$$\begin{aligned} c_1 W_1(v_1) + c_2 W_1(v_2) &= 0 \\ c_1 W_2(v_1) + c_2 W_2(v_2) &= 0, \end{aligned}$$

wofür als notwendige und hinreichende Bedingung die Gleichung

$$\Delta = \begin{vmatrix} W_1(v_1) & W_1(v_2) \\ W_2(v_1) & W_2(v_2) \end{vmatrix} = 0$$

zu fordern ist.

Wir wählen jetzt speziell das in (2 a, I)<sup>1</sup> definierte und (4 a, b, I) asymptotisch dargestellte Fundamentalsystem. Es ist

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_1 + a_3 u_1(a) + a_4 u_1'(a) & a_2 + a_3 u_2(a) + a_4 u_2'(a) \\ b_1 + b_3 u_1(a) + b_4 u_1'(a) & b_2 + b_3 u_2(a) + b_4 u_2'(a) \end{vmatrix} \\ (3) \quad &= \Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13} u_2(a) + \Delta_{14} u_2'(a) + \Delta_{32} u_1(a) + \Delta_{42} u_1'(a) = 0, \end{aligned}$$

wobei die Relation  $\begin{vmatrix} u_1(x) & u_1'(x) \\ u_2(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} = 1$  benutzt wurde. Bei asymptotischer Darstellung erhält man also für ein Gebiet, wo  $I(\varrho) \geq -b^2$  ist,

$$\begin{aligned} (3 \text{ a}) \quad \Delta e^{\varrho i a} &= 2 \Delta_{12} e^{\varrho i a} + (\Delta_{14} + \Delta_{32}) \frac{e^{2\varrho i a} + 1}{2} + \left( \frac{\Delta_{13}}{\varrho} + \varrho \Delta_{24} \right) \frac{e^{2\varrho i a} - 1}{2i} + \Delta_{42} \psi_1 + \frac{\psi_2}{\varrho} \\ &= \varrho \left( \Delta_{24} \frac{e^{2\varrho i a} - 1}{2i} + \frac{\psi}{\varrho} \right). \end{aligned}$$

Die Grösse  $\Delta_{24}$  ist also wesentlich für den asymptotischen Typus der transzendenten Gleichung. Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, dass

---

<sup>1</sup> (2 a, I) bedeutet: Gleichung (2 a) im I. Abschnitt.

$$(4) \quad \mathcal{A}_{24} \neq 0$$

ist. (3 a) ergibt als notwendige Bedingung für das Auftreten von Nullstellen im Gebiet  $I(\varrho) \geq -b^2$ :

$$e^{2\varrho ia} = 1 + \frac{\psi}{\varrho}$$

$$2\varrho ia = \lg \left( 1 + \frac{\psi}{\varrho} \right) \pm 2n\pi i$$

$$\varrho = \pm \frac{n\pi}{a} + \frac{\psi}{\varrho}$$

Dasselbe folgt analog wie im ersten Abschnitt für das Gebiet  $I(\varrho) \leq +b^2$ . Nehmen wir also  $|\varrho|$  hinreichend gross, und schlagen um sämtliche Punkte  $\pm \frac{n\pi}{a}$  der  $\varrho$ -Ebene Kreise von festem Radius  $r$  ( $0 < r < \frac{\pi}{2a}$ ), so liegen etwaige Nullstellen, deren Betrag eine gewisse Grösse übersteigt, sämtlich im Inneren dieser Kreise, haben insbesondere also beschränkte Imaginärteile. Nehmen wir nun  $b^2 > r^2$ , so gilt im Inneren und auf der Peripherie die Darstellung (3 a). Da  $e^{-\varrho ia}$  im Streifen  $-b^2 \leq I(\varrho) \leq +b^2$  für beliebige  $\varrho$  unter einer festen Schranke bleibt, so können wir (3 a) mit  $e^{-\varrho ia}$  multiplizieren und erhalten

$$\mathcal{A} = \varrho \cdot \mathcal{A}_{24} \left( \sin \varrho a + \frac{\psi}{\varrho} \right).$$

Auf den Kreisen bleibt  $|\sin \varrho a|$  über einer festen Schranke und es gilt also

$$\mathcal{A} = \varrho \mathcal{A}_{24} \sin \varrho a \cdot \left( 1 + \frac{\psi}{\varrho} \right) \quad \left( \varrho = \pm \frac{n\pi}{a} + r e^{i\varphi}; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right).$$

Da von den Faktoren der rechten Seite nur  $\sin \varrho a$  bei  $\varrho = \pm \frac{n\pi}{a}$  eine Nullstelle und zwar eine einfache besitzt, so ändert sich bei einmaliger Umkreisung dieser Stellen das Winkelargument von  $\mathcal{A}$  ebenso wie dasjenige von  $\sin \varrho a$  um genau  $2\pi$ . Also besitzt  $\mathcal{A}$  in der Tat im Inneren jedes Kreises eine einfache Nullstelle, falls  $n$  eine gewisse angebbare Schranke übersteigt. Nun ist  $\mathcal{A}$  wiederum eine ganze transzendente Funktion von  $\varrho$ , deren Nullstellen sich im Endlichen nicht häufen können. Es kann also insbesondere nur eine endliche Anzahl doppelter Nullstellen geben, im Gegensatz zu dem vorher behandelten Problem.

Aus (3) folgt weiter für eine Nullstelle  $\varrho_n$  von  $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \sin \varrho_n a &= \frac{\psi}{\varrho_n} = \frac{\bar{\psi}}{n} = \sin \left( \pm \frac{n\pi}{a} + \varepsilon_n \right) \\ &= \pm \varepsilon_n \cdot C, \end{aligned}$$

wo  $|C|$  für beliebig grosse  $|\varrho|$  unter einer festen Schranke verbleibt. Also können wir setzen

$$(5) \quad \varrho_n = \pm \frac{n\pi}{a} + \frac{\psi}{n}.$$

Bezeichnen wir die Grössen  $\varrho_n^2 = \lambda_n$  wieder als Eigenwerte, so können wir Satz 11. sagen, das in den Bedingungen (1) mit den Einschränkungen (2) und (4) enthaltene Randwertproblem hat unendlich viele Lösungen. Unter den Eigenwerten, deren Quadratwurzeln die Form (5) besitzen, gibt es nur endlich viel zweifach zählende.

### § 2. Konturintegral und Entwicklungssatz.

Um ähnlich wie im ersten Abschnitt das Konturintegral

$$I_n = \frac{-1}{2\pi i} \int_{K_n} 2\varrho d\varrho \int_0^a G(x, s; \varrho) f(s) ds \quad (\lambda = \varrho^2)$$

abschätzen zu können, stellen wir wieder die Greensche Funktion unter Benutzung von (7) (vgl. S. 40 ff.) und des in (8) und (9) definierten Fundamentalsystems  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$  asymptotisch dar. Die Ausdrücke  $W_r(v_\varrho)$  nehmen folgende Form an

$$\begin{aligned} W_1(v_1) &= \varrho i (\bar{a}_2 + e^{\varrho i a} \bar{a}_4) & W_2(v_1) &= \varrho i (\bar{b}_2 + e^{\varrho i a} \bar{b}_4) \\ W_1(v_2) &= -\varrho i (\bar{a}_2 + e^{-\varrho i a} \bar{a}_4) & W_2(v_2) &= -\varrho i (\bar{b}_2 + e^{-\varrho i a} \bar{b}_4), \end{aligned}$$

wo wieder  $\bar{A}$  statt  $A + \frac{\psi}{\varrho}$  geschrieben wurde. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \varrho^2 \begin{vmatrix} \bar{a}_2 + e^{\varrho i a} \bar{a}_4 & \bar{a}_2 + e^{-\varrho i a} \bar{a}_4 \\ \bar{b}_2 + e^{\varrho i a} \bar{b}_4 & \bar{b}_2 + e^{-\varrho i a} \bar{b}_4 \end{vmatrix} = \varrho^2 (\bar{0} + e^{-\varrho i a} \bar{\mathcal{A}}_{24} - e^{\varrho i a} \bar{\mathcal{A}}_{24}) \\ &= \varrho^2 (\bar{1} + e^{\varrho i a}) (-\bar{\mathcal{A}}_{24} + e^{-\varrho i a} \bar{\mathcal{A}}_{24}) = -\varrho^2 \bar{\mathcal{A}}_{24} (\bar{1} + e^{\varrho i a}) (\bar{1} - e^{-\varrho i a}). \end{aligned}$$

Indem wir (7) derselben Umformung unterwerfen wie auf S. 44, behält das dritte Glied der letzten Spalte die damalige Form bei (II), (II a), da es ja gar nicht von den Koeffizienten der Randbedingungen abhängt. Für die anderen Glieder der letzten Spalte erhält man

$$W_j(\gamma) - \frac{v_2(s)}{4i\rho} W_j(v_1) - \frac{v_1(s)}{4i\rho} W_j(v_2) = \begin{cases} -\frac{1}{2i\rho} [\rho i e^{\rho i(\alpha-s)} \bar{a}_1 - \rho i e^{\rho i s} \bar{a}_2] & (j=1) \\ -\frac{1}{2i\rho} [\rho i e^{\rho i(\alpha-s)} \bar{b}_1 - \rho i e^{\rho i s} \bar{b}_2] & (j=2). \end{cases}$$

Da im Nenner der Greenschen Funktion die Grösse  $\mathcal{A}$  steht, so kürzt sich aus der zweiten und dritten Zeile der Zählerdeterminante der Faktor  $\rho$  gegen  $\rho^2$  im Nenner. Die anderen Faktoren von  $\mathcal{A}$  verteilen wir auf die ersten beiden Spalten, deren zweite wir mit  $e^{\rho i a}$  erweitern. Nun können wir noch aus den letzten beiden Zeilen den Faktor  $i$  herausziehen, welcher sich gegen das Minuszeichen im Nenner kompensiert. Dann ist

$$(6) \quad 2\rho G(x, s; \lambda) = \frac{1}{\mathcal{A}_{24}} \begin{vmatrix} \frac{e^{\rho i x} \bar{1}}{\bar{1} + e^{\rho i a}}, & -\frac{e^{\rho i(a-x)}}{1 - e^{\rho i a} \bar{1}}, & i e^{\rho i \pm(x-s)} \\ \frac{\bar{a}_2 + e^{\rho i a} \bar{a}_1}{\bar{1} + e^{\rho i a}}, & \frac{\bar{a}_1 + e^{\rho i a} \bar{a}_2}{1 - e^{\rho i a} \bar{1}}, & i [\bar{a}_1 e^{\rho i(a-s)} - \bar{a}_2 e^{\rho i s}] \\ \frac{\bar{b}_2 + e^{\rho i a} \bar{b}_1}{\bar{1} + e^{\rho i a}}, & \frac{\bar{b}_1 + e^{\rho i a} \bar{b}_2}{1 - e^{\rho i a} \bar{1}}, & i [\bar{b}_1 e^{\rho i(a-s)} - \bar{b}_2 e^{\rho i s}] \end{vmatrix}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in  $I_n$  ein, so gilt, wenn  $f(s)$  und  $f'(s)$  stückweise stetig sind, für das Intervall  $\varepsilon \leq x \leq a - \varepsilon$  offensichtlich dieselbe Abschätzung wie im ersten Abschnitt, da die asymptotisch verschwindenden Beiträge von damals jetzt nur mit endlichen Faktoren  $\bar{a}_2, \bar{a}_1, \dots$  multipliziert auftreten. Das dritte Glied der ersten Zeile ist aber genau das frühere bis auf Summanden der Form  $\frac{\psi}{\rho}$ ; sein Faktor in der Entwicklung der Determinante ist natürlich wieder 1.

Das Konturintegral wird also wieder dem Werte

$$\frac{1}{2} (f(x - 0) + f(x + 0))$$

zustreben. Wie früher können die Bedingungen über  $f(x)$  durch die in Satz 3 des ersten Abschnittes angegebenen ersetzt werden. Aus der im ersten Abschnitt allgemein gegebenen Residuenbestimmung folgt dann sofort der Entwicklungssatz.

2. Sätze über gleichmässige und absolute Konvergenz sowie gliedweise Differenzierbarkeit.

§ 3. Verhalten des Konturintegrals an den Randpunkten und gleichmässige Konvergenz.

Das Verhalten des Konturintegrals in den Randpunkten lässt sich in ganz analoger Weise wie in § 5 des ersten Abschnittes bestimmen. Wir entwickeln wieder  $G(x, s)$  nach der ersten Zeile. Das mittlere Glied der Entwicklung liefert wieder wegen des Faktors  $e^{\rho i(a-x)}$  einen asymptotisch verschwindenden Beitrag zum Konturintegral für den Wert im Punkte 0. Für das erste Glied  $\bar{g}(x, s)$  findet man leicht

$$2 \rho \bar{g}(x, s) = \frac{i e^{\rho i x} \bar{1}}{\Delta_{21} (\bar{1} + e^{\rho i a})} \left[ \frac{\bar{a}_1 + e^{\rho i a} \bar{a}_2}{1 - e^{\rho i a} \bar{1}}, \bar{a}_1 e^{\rho i(a-s)} - \bar{a}_2 e^{\rho i s} \right]$$

$$\left[ \frac{\bar{b}_1 + e^{\rho i a} \bar{b}_2}{1 - e^{\rho i a} \bar{1}}, \bar{b}_1 e^{\rho i(a-s)} - \bar{b}_2 e^{\rho i s} \right].$$

Setzen wir

$$\bar{g}(x, s) = g(x, s) + g^*(x, s),$$

wo  $g(x, s)$  aus  $\bar{g}(x, s)$  durch Fortlassung der Querstriche auf der rechten Seite entsteht, so besteht  $g^*(x, s)$  aus Gliedern derselben Art wie bei der entsprechenden Zerlegung im ersten Abschnitt (§ 5), die mithin asymptotisch verschwindende Beiträge zum Konturintegral liefern. Es ist

$$2 \rho g(x, s) = \frac{i e^{\rho i x}}{1 - e^{2 \rho i a}} \cdot [e^{\rho i s} + e^{\rho i(2a-s)}].$$

Wir multiplizieren mit  $f(s)$  und integrieren partiell nach  $s$ ; dann liefert der zweite Summand der Klammer einen Ausdruck von der Form

$$\frac{e^{\rho i a} \cdot \psi}{\rho} \quad (\alpha > 0),$$

also genau von der Form des Integranden in (12, I; S. 46), dessen Beitrag zum Konturintegral asymptotisch verschwindet. Nun ist

$$\int_0^a e^{is} f(s) ds = -\frac{f(0)}{\rho i} + \frac{e^{ia} f(a)}{\rho i} - \frac{1}{\rho i} \int_0^a e^{is} f'(s) ds.$$

Auch die letzten beiden Summanden liefern nach (12, 12 a; I) asymptotisch Verschwindendes. Wir behalten schliesslich nur noch das Integral

$$(7) \quad \frac{-1}{2\pi i} \int_{K_n} \frac{-f(0)e^{\rho iz}}{\rho(1-e^2 \rho ia)} d\rho = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_n} \frac{f(0)e^{\rho iz}}{\rho} d\rho + \frac{1}{2\pi i} \int_{K_n} \frac{f(0)e^{\rho iz} e^{2\rho ia}}{\rho(1-e^2 \rho ia)} d\rho.$$

Sei zunächst wieder  $x=0$ , so ist

$$(7 a) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{K_n \rightarrow \infty} \frac{f(0)}{\rho(1-e^2 \rho ia)} d\rho = \frac{f(0)}{2\pi i} \int_{K_n \rightarrow \infty} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{f(0)}{2}.$$

Der Beitrag des dritten Gliedes der Entwicklung von  $G(x, s)$  zum Konturintegral ist durch Gleichung (11; I) gegeben. Für  $x=0$  fällt das von 0 bis  $x$  erstreckte Integral fort, und es bleibt nur der Summand

$$\frac{f(x+0)}{2} = \frac{f(0)}{2}.$$

Das Konturintegral hat also von selbst, ohne dass man den Werten  $f(0)$  und  $f(a)$  irgendwelche Bedingung aufzuerlegen brauchte, den richtigen Wert

$$I(0) = f(0).$$

Es lässt sich aber auch leicht zeigen, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} I(x) = f(0)$$

ist. Denn in Gleichung (11 a; I) steht unter anderem der Summand

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{K_n} \frac{f(0)e^{\rho iz}}{\rho} d\rho;$$

dieser hebt sich aber bis auf asymptotisch verschwindende Glieder mit dem Ausdruck (7). Der Rest von (11; I) aber wird asymptotisch gleich  $f(x)$ , wenn  $x$

kleiner als die kleinste Unstetigkeitsstelle von  $f(x)$  angenommen wird. Wir können also sagen:

Erfüllt die Funktion  $f(x)$  die Bedingungen von Satz 2 oder 3, so ist sie *Satz 12.* auf die Fouriersche Art nach den Eigenfunktionen unseres Randwertproblems entwickelbar; die Reihe ist in jedem Falle in den Randpunkten der Funktion gleich, und konvergiert, wenn man die Unstetigkeitsstellen von  $f(x)$  durch beliebig kleine offene Intervalle ausschliesst, in den Restintervallen gleichmässig.

Nun setzen wir wieder

$$f(x) = G(x, t; \mu)$$

bzw.

$$f(x) = \frac{\partial}{\partial t} G(x, t; \mu),$$

und erhalten die Formeln:

$$(8) \quad G(x, t; \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(t)}{\lambda_n - \mu}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x, t; \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n'(t) \varphi_n(x)}{\lambda_n - \mu}.$$

Die erste Reihe konvergiert gleichmässig für beide Variablen im ganzen Intervall, die andere konvergiert in der einen Variablen gleichmässig, wenn man die andere festhält und die Stelle  $t = x$  durch ein offenes Intervall ausschliesst. Letzteres erübrigt sich, wenn die eine Variable auf einem Randpunkt festgehalten wird. Dann gilt nämlich, wenn z. B.  $t = 0$  gesetzt wird, für  $\frac{\partial}{\partial t} G(x, t; \mu)$ , das in den Intervallen  $0 \leq x < t$ ,  $t \leq x \leq a$  beziehentlich durch  $\frac{\partial}{\partial t} G_1(x, t; \mu)$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} G_2(x, t; \mu)$  definiert sein möge, dieselbe Entwicklung wie für die im ganzen Intervall  $[0, a]$  stetige Funktion  $\frac{\partial}{\partial t} G_2(x, t; \mu)_{t=0}$ .<sup>1</sup> D. h.: die Reihe

---

<sup>1</sup> Denn die Entwicklungskoeffizienten von  $\left(\frac{\partial}{\partial t} G(x, t)\right)_{t=\varepsilon}$  haben die Form

$$\int_{\varepsilon}^a \left(\frac{\partial}{\partial t} G_2(x, t)\right)_{t=\varepsilon} \cdot \varphi_n(x) dx + \int_0^{\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial t} G_1(x, t)\right)_{t=\varepsilon} \varphi_n(x) dx,$$

und das zweite Integral strebt mit  $\varepsilon$  gegen Null.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n'(0) \varphi_n(x)}{\lambda_n - \mu}$$

konvergiert gleichmäßig in  $[0, a]$ , und es ist insbesondere

$$(9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n'(0) \varphi_n(0)}{\lambda_n - \mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t} G_2(0, t; \mu) \right)_{t=0}.$$

Daraus folgt für den umgekehrten Fall:  $x=0$  und  $t$  variabel, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n'(t) \varphi_n(0)}{\lambda_n - \mu},$$

welche für  $t \neq \begin{cases} 0 \\ a \end{cases}$  gleich der Funktion  $\frac{\partial G_1(0, t)}{\partial t}$  ist, wegen  $x=0 < t$ , nicht gleichmäßig konvergiert, denn es ist nach Definition von  $G_1, G_2$

$$(10a) \quad \left( \frac{\partial G_1(x, t)}{\partial t} \right)_{\substack{t=0 \\ x=0}} = \left( \frac{\partial G_2(x, t)}{\partial t} \right)_{\substack{t=0 \\ x=0}} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n'(0) \varphi_n(0)}{\lambda_n - \mu} - 1$$

und ähnlich für  $x=t=a$ , wie aus der Fussnote Seite 101 folgt

$$(10b) \quad \left( \frac{\partial G_1(x, t)}{\partial t} \right)_{\substack{t=a \\ x=a}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n'(a) \varphi_n(a)}{\lambda_n - \mu} = \left( \frac{\partial G_2(x, t)}{\partial t} \right)_{\substack{t=a \\ x=a}} - 1.^1$$

Diese eben abgeleiteten Beziehungen benötigt man, wie wir später sehen werden, bei der Aufstellung der Bedingungen für die einmalige gliedweise Differenzierbarkeit.

#### § 4. Asymptotische Darstellung der Eigenfunktionen und bilinearen Reihe.

$u_1(x), u_2(x)$  sei das schon öfter benutzte (2 a, I) Fundamentalsystem speziell für einen Eigenwert  $\lambda_n$  genommen,  $u(x)$  sei die zugehörige Eigenfunktion ( $\lambda_n$  möge bereits im Gebiet der einfachen Eigenwerte liegen). Es sei

<sup>1</sup> Aus (9), (10 b) sowie der Gleichung

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n'(x) \varphi_n(x)}{\lambda_n - \mu} = \left( \frac{\partial G_2(x, t)}{\partial t} \right)_{t=x} - \frac{1}{2} \quad (0 < x < a)$$

kann man beiläufig folgern, dass die Funktion  $F(x)$  im Intervall  $(0, a)$  stetig ist, dass aber:

$$F(0) = \lim_{x \rightarrow 0} F(x) + \frac{1}{2}; \quad F(a) = \lim_{x \rightarrow a} F(x) - \frac{1}{2} \text{ ist.}$$



Über die Existenz von Eigenfunktionen einer reellen Variablen bei linearen etc. 103

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x),$$

dann ist

$$W_1(u) = c_1 W_1(u_1) + c_2 W_1(u_2) = c_1 W_{11} + c_2 W_{12} = 0$$

$$W_2(u) = c_1 W_{21} + c_2 W_{22} = 0$$

$$\frac{c_2}{c_1} = -\frac{W_{11}}{W_{12}} = -\frac{W_{21}}{W_{22}} \quad (\text{bzw. } W_{12} = W_{22} = 0, \text{ falls } c_1 = 0).$$

Unter Benutzung der asymptotischen Darstellung von  $u_1(x)$  und  $u_2(x)$  (4 a; I) erhält man nach Multiplikation mit  $e^{-\varrho_n x}$  (das ja ebenso wie der Imaginärteil von  $\varrho_n$  beschränkt ist)

$$W_{11} = a_1 + a_3 \cos \varrho_n a - a_4 \varrho_n \sin \varrho_n a + \psi$$

$$W_{12} = a_2 + a_4 \cos \varrho_n a + \frac{a_3 \sin \varrho_n a}{\varrho_n} + \frac{\psi}{\varrho_n},$$

$W_{11}$  ist also beschränkt, da  $\sin \varrho_n a$ , wie bewiesen, die Form  $\frac{\psi}{\varrho_n}$  hat. Weiter ist

$$W_{12} = a_2 + a_4 \cos \varrho_n a + \frac{\psi}{\varrho_n} = a_2 \pm a_4 + \frac{\psi}{\varrho_n},$$

weil

$$\cos \varrho_n a = \cos \left( \frac{n\pi}{a} + \frac{\psi}{\varrho_n} \right) a = \pm 1 + \frac{\psi}{\varrho_n^2} \text{ ist.}$$

Wäre nun  $a_2 = \mp a_4$ , so nehmen wir statt  $W_{11}$  und  $W_{12}$  die Grössen  $W_{21}$  und  $W_{22}$ , welche dieselbe Form haben, nur dass die  $a_v$  mit den  $b_v$  vertauscht sind; da  $\mathcal{A}_{24} \neq \text{Null}$  sein muss, ist dann sicherlich  $b_2 \neq \pm b_4$ . Der oben erwähnte Fall, dass  $W_{12}$  und  $W_{22}$  verschwinden, kann also nicht eintreten; einer der beiden Werte muss sogar über einer festen Schranke verbleiben. Ist also  $n_0$  hinreichend gross, so ist für alle  $\varrho_n$ ,  $n \geq n_0$ ,

$$\left| \frac{c_2}{c_1} \right| < M,$$

wo  $M$  eine feste endliche Zahl ist. Es ist dann also

$$u(x) = c_1 \cos(\varrho_n x) + \frac{c_2}{\varrho_n} \sin(\varrho_n x) + \frac{\psi}{\varrho_n} = c_1 \cos(\varrho_n x) + \frac{\psi}{\varrho_n},$$

falls  $|c_1|$  und somit auch  $|c_2|$  unter einer von  $n$  unabhängigen Schranke liegt.

Setzen wir  $c_1 = 1$ , so ist, wegen  $\varrho_n = \pm \frac{n\pi}{a} + \frac{\psi}{\varrho_n}$ ,

$$u(x) = \cos \frac{n\pi x}{a} + \frac{\psi}{n},$$

und die normierte Eigenfunktion schreibt sich

$$(11) \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{n\pi x}{a} + \frac{\psi}{n}.$$

Ähnlich wie bei Kneser<sup>1</sup> findet man

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \psi; \quad \frac{1}{\lambda_n} = \frac{a^2}{n^2 \pi^2} \left( 1 + \frac{\psi}{n^2} \right)$$

$$\frac{\varphi_n'(x)}{\lambda_n - \lambda} = -\frac{a}{n\pi} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} + \frac{\psi}{n^2}$$

$$(11 \text{ a, b}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(s)}{\lambda_n - \lambda} = \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi s}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n'(x) \varphi_n(s)}{\lambda_n - \lambda} = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi s}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n}{n^2},$$

wobei rechts in geeigneter Weise Summanden hinzugefügt und wieder abgezogen wurden.

Aus dieser asymptotischen Darstellung der Greenschen Funktion und ihrer Ableitung erschliesst man einerseits die absolute Konvergenz der bilinearen Reihe, da von einem gewissen  $n$  an

$$\frac{\varphi_n(x) \varphi_n(s)}{\lambda_n - \lambda} = \frac{1}{n^2} \left( \frac{2a}{\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi s}{a} + \frac{\psi}{n^2} \right)$$

ist, andererseits ergibt sich das Vorhandensein des Gibbschen Höckers bei der abgeleiteten Reihe, da ja  $\sum \frac{\psi_n}{n^2}$  gleichmässig konvergiert, der trigonometrische Teil der Reihe aber den Höcker aufweist.

<sup>1</sup> Vgl. l. c. §§ 29, 30.

§ 5. Absolute Konvergenz der allgemeinen Sturm-Liouvilleschen Reihen.

Im Gegensatz zur Annahme in § 10 des vorigen Abschnittes lassen wir jetzt  $L(x)$  komplex.  $F(x)$  setzen wir zunächst wieder als quellenmässig dargestellt voraus. Dann folgt die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^a F(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n - \lambda} \int_0^a f(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha$$

genau wie in § 10 (S. 69) aus der asymptotischen Darstellung der normierten Eigenfunktionen (I, II). In derselben Weise wie damals können wir auch jetzt die Forderung der Stetigkeit von  $F'(x)$  durch die Bedingung bloss stückweiser Stetigkeit ersetzen. Von dem Erfülltsein der Randbedingungen können wir uns jedoch jetzt gänzlich frei machen.

Wir schreiben die Greensche Funktion in folgender Form

$$(12) \quad \begin{aligned} G(x, s; \lambda) &= c_1(s)u_1(x) + c_2(s)u_2(x) = G_1(x, s) \quad (x \leq s) \\ &= c_3(s)u_1(x) + c_4(s)u_2(x) = G_2(x, s) \quad (x \geq s). \end{aligned}$$

Falls nun die zwei Funktionen  $G_2(x, 0)$  und  $G_1(x, a)$  für  $0 \leq x \leq a$  ein Fundamentalsystem bilden, so ist

$$\begin{vmatrix} W_1(G_2(x, 0)) & W_1(G_1(x, a)) \\ W_2(G_2(x, 0)) & W_2(G_1(x, a)) \end{vmatrix} \neq 0,$$

da ja  $\lambda$  kein Eigenwert ist. Folglich lassen sich bei vorgegebenem  $A$  und  $B$  zwei Grössen  $d_1$  und  $d_2$  durch die Forderung bestimmen:

$$\begin{aligned} W_1[d_1 G_2(x, 0) + d_2 G_1(x, a)] &= A \\ W_2[d_1 G_2(x, 0) + d_2 G_1(x, a)] &= B. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass  $G_1(x, a)$  und  $G_2(x, 0)$  wirklich ein Fundamentalsystem bilden. Dazu untersuchen wir ihre Wronskische Determinante, müssen aber vorher noch die  $c_v(s)$  genauer bestimmen. Unter Benutzung des bekannten Fundamentalsystems  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  erhält man

$$W_{11} = a_1 + a_3 u_1(a) + a_4 u_1'(a); \quad W_{12} = a_2 + a_3 u_2(a) + a_4 u_2'(a); \text{ etc.}$$

Damit gehen wir in (7; I) (S. 40). Es ist zunächst

$$W_1(\gamma) = \frac{1}{2} [-u_2(s)(a_1 - a_3 u_1(a) - a_4 u_1'(a)) + u_1(s)(a_2 - a_3 u_2(a) - a_4 u_2'(a))]; \text{ etc.}$$

Führen wir dies in  $G(x, s)$  ein und addieren zur letzten Spalte die mit  $u_2(s)$  multiplizierte erste und die mit  $-u_1(s)$  multiplizierte zweite Spalte, indem wir das obere Vorzeichen von  $\gamma(x, s)$  wählen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \cdot G_1(x, s) &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} u_1(x) & & , & u_2(x) & & , & 0 \\ a_1 + a_3 u_1(a) + a_4 u_1'(a), & a_2 + a_3 u_2(a) + a_4 u_2'(a), & 2 u_2(s)(a_3 u_1(a) + a_4 u_1'(a)) \\ & & - 2 u_1(s)(a_3 u_2(a) + a_4 u_2'(a)) \\ b_1 + b_3 u_1(a) + b_4 u_1'(a), & b_2 + b_3 u_2(a) + b_4 u_2'(a), & 2 u_2(s)(b_3 u_1(a) + b_4 u_1'(a)) \\ & & - 2 u_1(s)(b_3 u_2(a) + b_4 u_2'(a)) \end{vmatrix} \\ &= -u_1(x) u_1(s) \begin{vmatrix} a_2 & a_3 u_2(a) + a_4 u_2'(a) \\ b_2 & b_3 u_2(a) + b_4 u_2'(a) \end{vmatrix} + u_1(x) u_2(s) (\mathcal{A}_{23} u_1(a) + \mathcal{A}_{24} u_1'(a) - \mathcal{A}_{34}) \\ &\quad - u_2(x) u_2(s) \begin{vmatrix} a_1 & a_3 u_1(a) + a_4 u_1'(a) \\ b_1 & b_3 u_1(a) + b_4 u_1'(a) \end{vmatrix} + u_2(x) u_1(s) (\mathcal{A}_{13} u_2(a) + \mathcal{A}_{14} u_2'(a) + \mathcal{A}_{34}). \end{aligned}$$

Man erhält also z. B. für  $G_1(x, s)$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \cdot G_1(x, s) &= -u_1(x) u_1(s) (\mathcal{A}_{23} u_2(a) + \mathcal{A}_{24} u_2'(a)) - u_1(x) u_2(s) (\mathcal{A}_{34} - \mathcal{A}_{23} u_1(a) - \mathcal{A}_{24} u_1'(a)) \\ (13) \quad &\quad - u_2(x) u_2(s) (\mathcal{A}_{13} u_1(a) + \mathcal{A}_{14} u_1'(a)) + u_2(x) u_1(s) (\mathcal{A}_{34} + \mathcal{A}_{13} u_2(a) + \mathcal{A}_{14} u_2'(a)). \end{aligned}$$

$G_2(x, s)$  ergibt sich hieraus einfach durch Vertauschung von  $x$  und  $s$ .

Wegen  $\begin{vmatrix} u_1(x) u_2(x) \\ u_1'(x) u_2'(x) \end{vmatrix} = 1$ , ist

$$D = \begin{vmatrix} G_2(x, 0) & G_2'(x, 0) \\ G_1(x, a) & G_1'(x, a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_3(0) & c_4(0) \\ c_1(a) & c_2(a) \end{vmatrix} \cdot 1.$$

Indem wir die Werte von  $c_1(a), \dots$  gemäss (13) einsetzen, erhalten wir

$$\mathcal{A} \cdot D = \begin{vmatrix} -\mathcal{A}_{23} u_2(a) - \mathcal{A}_{24} u_2'(a), & -\mathcal{A}_{34} + \mathcal{A}_{23} u_1(a) + \mathcal{A}_{24} u_1'(a) \\ -u_1(a) (\mathcal{A}_{23} u_2(a) + \mathcal{A}_{24} u_2'(a)) - & -u_2(a) (\mathcal{A}_{13} u_1(a) + \mathcal{A}_{14} u_1'(a)) + \\ -u_2(a) (\mathcal{A}_{34} - \mathcal{A}_{23} u_1(a) - \mathcal{A}_{24} u_1'(a)), & +u_1(a) (\mathcal{A}_{34} + \mathcal{A}_{13} u_2(a) + \mathcal{A}_{14} u_2'(a)) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} -\mathcal{A}_{23}u_2(a) - \mathcal{A}_{24}u_2'(a) & -\mathcal{A}_{34} + \mathcal{A}_{23}u_1(a) + \mathcal{A}_{24}u_1'(a) \\ -\mathcal{A}_{24} - \mathcal{A}_{34}u_2(a) & \mathcal{A}_{14} + \mathcal{A}_{34}u_1(a) \end{vmatrix} \\
 &= -\mathcal{A}_{24}\mathcal{A}_{34} - u_2(a)(\mathcal{A}_{23}\mathcal{A}_{14} + \mathcal{A}_{34}^2) - u_2'(a)\mathcal{A}_{14}\mathcal{A}_{24} - \mathcal{A}_{21}\mathcal{A}_{34} + \\
 &\qquad\qquad\qquad + u_1(a)\mathcal{A}_{23}\mathcal{A}_{24} + u_1'(a)\mathcal{A}_{34}^2.
 \end{aligned}$$

Bilden wir nun

$$-\mathcal{A}_{24} \cdot \mathcal{A}_{13} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 - a_1 \\ b_3 - a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{13} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{23} \end{vmatrix} = -(\mathcal{A}_{23}\mathcal{A}_{14} + \mathcal{A}_{34}^2),$$

so erhalten wir also den Faktor von  $u_2(a)$  im vorhergehenden Ausdruck. Ersetzt man diesen also durch  $-\mathcal{A}_{24}\mathcal{A}_{13}$ , so folgt aus (3; II)

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{A} \cdot D &= \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}_{24} \\
 -D &= \mathcal{A}_{24} \neq 0,
 \end{aligned}$$

was wir beweisen wollten. Man sieht aber gleichzeitig, dass diese Methode nur auf den eben behandelten Fall zugeschnitten ist.

Somit sind wir in der Lage, eine Funktion,  $F(x)$ , welche, in die Randgleichungen eingesetzt, diesen beliebige Werte  $A$  und  $B$  erteilt, darzustellen in der Form

$$(14) \qquad F(x) = \mathcal{O}(x) + d_1 G_2(x, 0) + d_2 G_1(x, a),$$

wobei  $\mathcal{O}(x)$  die Randbedingungen erfüllt.

Damit ist die absolute und gleichmässige Konvergenz der Reihen aller stetigen Funktionen mit stückweise stetiger erster und zweiter Ableitung bewiesen. Satz 13.

### § 6. Sätze über gliedweise Differenzierbarkeit.

Da bei unserem vorliegenden Problem die asymptotische Darstellung der komplexen Eigenfunktionen gelungen ist, so übertragen sich die Ausführungen von (§ 12; I. S. 77) wörtlich auf den jetzigen Fall bei komplexem  $L(x)$ . Wir können jetzt sogar noch mehr aussagen, nämlich von dem Erfülltsein beider Randbedingungen absehen. Sind nämlich  $F(x)$  und  $\mathcal{O}(x)$  die der Gleichung (14) des vorigen § zu Grunde liegenden Funktionen, und  $\mathcal{O}(x)$  stetig,  $\mathcal{O}'(x)$  und  $\mathcal{O}''(x)$  stückweise stetig, so sind die Reihen aller drei Funktionen der rechten Seite gliedweise differenzierbar, also auch die Entwicklung der linken Seite. Allerdings wird dann nach den Schlussbemerkungen von § 3 dieses Abschnittes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x) \int_0^a F(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha$$

in den Randpunkten im allgemeinen nicht gleich  $F'(0)$  bzw.  $F'(a)$  sein.

Auch die Behandlung der zweiten Ableitung ist dieselbe wie früher (§ 11; I S. 72); jedoch ergeben sich noch Vereinfachungen. Damit nämlich die Fourierreentwicklung von  $f''(x)$  gleichmäßig konvergiert, braucht über die Randwerte von  $f''(x)$  nichts vorausgesetzt zu werden. Nur  $f(x)$  selbst muss die Randbedingungen erfüllen, damit der Greensche Ausdruck  $f'(\alpha) \varphi_n(\alpha) - f(\alpha) \varphi_n'(\alpha) \Big|_0^a$  verschwindet. Weiterhin ist für die gleichmäßige Konvergenz der Entwicklung von  $f(x) \cdot L(x)$  nicht mehr die Bedingung

$$L(0) = L(a)$$

erforderlich. Es folgt dann die Gleichung

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n''(x) \int_0^a f(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha$$

aus der Tatsache, dass unter den genannten Bedingungen bereits

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x) \int_0^a f(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha$$

ist. Die den früheren entsprechenden Sätze lauten also jetzt:

**Satz 14.** Ist die Funktion  $f(x)$  stetig,  $f'(x)$  und  $f''(x)$  stückweise stetig, so gilt die Gleichung

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x) \int_0^a f(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha$$

mit Ausnahme der Unstetigkeitsstellen von  $f'(x)$  und für den Fall, dass  $f(x)$  die Randbedingungen nicht erfüllt, auch der Randpunkte.

Erfüllt die zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f(x)$  die Randbedingungen, und ist  $f''(x)$  sowie  $L(x)$  in der Form

$$\psi(x) = \psi(0) + \int_0^x \varphi(x) dx$$

darstellbar, wo  $\varphi(x)$  summabel ist, so gilt auch die Gleichung

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n''(x) \int_0^a f(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha \quad (0 \leq x \leq a).$$

§ 7. Die Lösung der partiellen Differentialgleichung (36; I) unter abgeänderten Bedingungen.

In der partiellen Differentialgleichung (36; I) mögen jetzt  $p(t)$  und  $q(x)$  komplexe Funktionen der reellen Variablen  $t$  bzw.  $x$  sein. Im übrigen sollen die früheren Bedingungen gelten:  $p(t)$  und  $q(x)$  stetig,  $q'(x)$  und  $q''(x)$  stückweise stetig. Jedoch durchlaufe jetzt  $t$  nur ein endliches Intervall  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Die Randwerte von  $q(x)$  seien beliebig.

Die Funktionen  $F(x)$  und  $G(x)$  seien einmal stetig differenzierbar,  $F''(x)$  stetig,  $F'''(x)$ ,  $F^{(IV)}(x)$ ,  $G''(x)$  stückweise stetig, ausserdem mögen  $F(x)$  und  $G(x)$  die Randbedingungen (I; II) erfüllen. Es wird behauptet, dass dann die Funktion

$$(15) \quad U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \psi_n(t) + B_n \psi_n(t)] \varphi_n(x)$$

eine Lösung der Differentialgleichung ist, für welche

$$U(t_0, x) = F(x); \quad \left( \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right)_{t=t_0} = G(x) \text{ ist.}$$

Der Beweis verläuft fast genau wie im ersten Abschnitt. Die Funktionen  $\psi$  sind beschränkt, da auch  $e^{-\epsilon_n t x}$  beschränkt ist, allerdings nur unter der schon erwähnten Voraussetzung, dass  $t$  nicht beliebig grosse Werte annimmt, denn sonst würden die trigonometrischen Funktionen wachsen. Eine weitere Bemerkung ist nur noch notwendig bezgl. der Konvergenz von

$$\sum |B_n''|^2$$

wo  $B_n'' = \int_0^a G''(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha$  war. Dies gilt auch für komplexe  $B_n''$ . Denn sei etwa

$$G(x) = G_1(x) + i G_2(x) \quad (G_1, G_2 \text{ reell})$$

und entsprechend

$$\int_0^a G_v''(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha = B_{n,v}'',$$

was im allgemeinen natürlich nicht reell sein wird. Unter Benutzung der asymptotischen Darstellung von  $\varphi_n(x)$  ist

$$B_{n,v}'' = \int_0^a G_v''(\alpha) \sqrt{\frac{2}{a} \cos \frac{n\pi\alpha}{a}} d\alpha + \frac{1}{n} \int_0^a G_v''(\alpha) \psi(\alpha) d\alpha = C_n + \frac{D_n}{n}$$

$$|B_{n,v}''| \leq |C_n| + \frac{1}{n} |D_n| \quad (|D_n| \text{ beschränkt für alle } n).$$

Da  $G_{n,v}''(\alpha)$  quadratisch integrierbar ist, so konvergiert  $\sum |C_n|^2$ ; ausserdem konvergiert  $\sum \frac{1}{n^2} |D_n|^2$ . Mit  $\sum |C_n|^2$  ist auch  $\sum \frac{|C_n|}{n}$  konvergent. Also konvergiert schliesslich auch

$$\sum |B_{n,v}''|^2,$$

denn es ist

$$|B_{n,v}''|^2 \leq |C_n|^2 + \frac{1}{n^2} |D_n|^2 + 2 \frac{|C_n| \cdot |D_n|}{n}.$$

Also konvergiert auch

$$\sum |B_{n,1}''| \cdot |B_{n,2}''|,$$

und somit auch

$$\sum |B_n''|^2 \leq \sum (|B_{n,1}''|^2 + |B_{n,2}''|^2 + 2 |B_{n,1}''| |B_{n,2}''|).$$

Es ist also in der Taf (15) die Lösung unseres Problems.

### 3. Abschnitt.

#### Dritter Abschnitt. Die Randbedingungen:

$$a_1 u(0) + a_2 u'(0) + a_3 u(a) + a_4 u'(a) = 0,$$

$$b_1 u(0) + b_2 u'(0) + b_3 u(a) + b_4 u'(a) = 0,$$

bei den Voraussetzungen  $\mathcal{A}_{24} = 0$ ;  $\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{34}$ .



1. Charakterisierung der für die Abschätzungen wesentlichen Unterfälle.

Es sei

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

das Schema der durch die Randbedingungen gegebenen Koeffizienten. Wir zeigen nun, dass es ausreicht, das etwas speziellere Schema

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & b_3 & 0 \end{pmatrix}$$

zu betrachten. Nehmen wir vorweg den Fall

$$a_4 = b_4 = 0.$$

Damit ist jedenfalls

$$\mathcal{A}_{12} = 0.$$

Es sei zunächst noch  $b_2 \neq 0$  angenommen. Ist  $a_2 = 0$  so muss auch  $a_1$  verschwinden; das ergäbe das Schema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei das '=' Zeichen die Äquivalenz der Schemata ausdrücken soll. Substituieren wir in der Differentialgleichung  $\bar{x} = a - x$ , so würde sich das letzte Schema schreiben:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 - b_2 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

hätte also die gewünschte Form (1).

Ist nun  $a_2$  auch ungleich Null, und etwa  $b_2 = ca_2$ , so ist auch  $b_1 = ca_1$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ ca_1 & ca_2 & b_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 - ca_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 - ca_3 & 0 \end{pmatrix},$$

also wieder der eben erledigte Fall.

Ist aber  $a_2 = b_2 = 0$ , so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_3 & 0 \\ b_1 & 0 & b_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist, wenn wir überhaupt zwei Randbedingungen haben wollen, also  $\mathcal{A}_{13}$  ungleich Null sein soll, nur denkbar, wenn

$$u(0) = u(a) = 0$$

ist, ein Fall, der sich durch das Schema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

darstellen lässt, welches auch unter (1) fällt.

Es mögen um  $a_4$  und  $b_4$  nicht beide verschwinden, also etwa  $a_4$  ungleich Null sein. Nehmen wir zunächst an, dass  $b_2$  und  $b_4$  noch nicht zugleich Null sind, so muss bestimmt  $b_4$  ungleich Null sein, andernfalls müsste wegen  $a_2 b_4 - a_4 b_2 = 0$  auch  $b_2$  gleich Null sein entgegen der Annahme. Sei also

$$a_4 = c b_4 \neq 0, \text{ und somit auch: } a_2 = c b_2.$$

Dann ist

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ c b_1 & a_2 & c b_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ c b_1 - a_1 & 0 & c b_3 - a_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im letzten Summanden multiplizieren wir die erste Zeile mit  $c b_1 - a_1$  und addieren die mit  $-a_1$  multiplizierte zweite Zeile hinzu. Verschwände  $c b_1 - a_1$ , so müsste wegen

$$\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{34} \text{ und } a_4 \neq 0$$

auch  $c b_3 - a_3$  verschwinden, und wir hätten dann in Wirklichkeit nur eine Randbedingung. Man erhält also schliesslich

$$\begin{pmatrix} 0 & , & a_2(c b_1 - a_1), & a_3(c b_1 - a_1) - a_1(c b_3 - a_3), & a_4(c b_1 - a_1) \\ c b_1 - a_1, & 0 & , & c b_3 - a_3 & , & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies besagt aber zunächst nur, dass eine Funktion, welche die aus dem ursprünglichen Schema gebildeten Randbedingungen befriedigt, auch die aus dem letzten Schema gebildeten erfüllt. Jedoch gilt auch die Umkehrung. Da nämlich  $c b_1 - a_1$  und  $c$  nicht verschwinden, also als Divisoren benutzt werden können, so kann man alles wieder rückgängig machen; das ist auch beim vorweg behandelten Fall ( $a_4 = b_4 = 0$ ) so. Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft und Schema (1) als für unsere Zwecke ausreichend erkannt.

Setzen wir nun in Gleichung (3 a) des vorigen Abschnittes  $\mathcal{A}_{34}$  gleich Null (S. 95), so erhalten wir

$$(2) \quad \mathcal{A}e^{i\alpha} = 2\mathcal{A}_{12}e^{i\alpha} + (\mathcal{A}_{14} + \mathcal{A}_{32})\frac{e^{2i\alpha} + 1}{2} + \frac{\psi}{\varrho} = 0$$

als Bedingung für die Eigenwerte der oberen Halbebene und eines Streifens von endlicher Breite in der unteren Halbebene, der an die reelle Achse grenzt. Setzen wir

$$-a_2b_1 = \mathcal{A}_{12} = A; \quad \mathcal{A}_{14} + \mathcal{A}_{32} = -(a_4b_1 + a_2b_3) = B; \quad e^{i\alpha} = s,$$

so folgt, falls  $B$  nicht verschwindet, aus (2):

$$(3) \quad \begin{aligned} s^2B + 4As + \bar{B} &= 0 \\ s &= -\frac{2A}{B} \pm \frac{1}{B}\sqrt{4A^2 - B^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varrho i\alpha &= \pm 2n\pi i + \lg\left(\frac{-2A \pm \sqrt{4A^2 - B^2}}{B}\right) + \frac{\psi}{\varrho} \\ &= \pm 2n\pi i \pm \lg\left(\frac{-2A + \sqrt{4A^2 - B^2}}{B}\right) + \frac{\psi}{\varrho} \end{aligned}$$

Um dasselbe Ergebnis für die untere Halbebene zu erhalten, hätten wir nach früherem Muster in der ersten Gleichung (3) für  $s$  nur  $e^{-i\alpha}$  zu setzen, was zu denselben Ausdrücken führt. Wie man aus (3) sofort erkennt, müssen die Imaginärteile der evtl. Eigenwerte zwischen von  $\varrho$  unabhängigen Schranken liegen.

Die eben angewandte Umformung versagt, wenn  $B$  verschwindet. Nehmen  $B=A=0$ . wir zunächst auch noch an, dass  $A$  gleich Null ist, so verfallen wir auf ein bekanntes Randwertproblem. Aus

$$b_1a_4 + a_2b_3 = b_1a_2 = 0$$

folgt nämlich, da  $b_1$  oder  $a_2$  verschwinden muss,

$$b_1a_4 = a_2b_3 = b_1a_2 = 0.$$

Ist  $b_1=0$ ,  $a_2 \neq 0$ , so muss  $b_3$  verschwinden, und wir hätten überhaupt nur eine Randbedingung. Dasselbe tritt ein, wenn  $a_2=0$ ,  $a_4 \neq 0$  ist, denn dann muss

auch  $b_1$  und wegen  $b_1 a_2 = b_3 a_4$  auch  $b_3$  verschwinden. Es bleibt also nur die Möglichkeit

$$a_2 = a_4 = 0.$$

Damit erhält man das Schema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3 & 0 \\ b_1 & 0 & b_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also die bekannte Randbedingung  $u(0) = u(a) = 0$ .

In allen diesen Fällen haben die Quadratwurzeln aus den Eigenwerten immer beschränkte Imaginärteile. In dem noch übrig bleibenden Falle

$$B=0, A \neq 0.$$

$$B \neq 0, A \neq 0$$

jedoch werden die Imaginärteile gross etwa wie die Logarithmen der Realteile, wie wir am Schluss dieses Abschnittes noch zeigen werden. Dieser Typus von Randbedingungen gehört nicht mehr zu den von Birkhoff als 'regulär' bezeichneten, die er seinen Ausführungen zu Grunde legt. Die Forderung der Regularität besagt, dass in dem asymptotischen Ausdruck für  $\mathcal{A}$  die Faktoren von  $e^{\epsilon ia}$  und  $e^{-\epsilon ia}$ , — in unserem Falle ist es  $B$ —, bei Vernachlässigung der Grössen  $\frac{\psi}{\epsilon}$  nicht verschwinden dürfen. Die Randbedingungen müssen dabei aber reduziert sein, d. h. es müssen die ersten Ableitungen nach Möglichkeit eliminiert sein.<sup>1</sup> Darum ist auch die Randbedingung:  $u(0) = u(a) = 0$  nur scheinbar 'nicht regulär', denn in diesem Falle ergibt eine direkte Abschätzung:

$$0 = \mathcal{A} = \sin \epsilon a + \frac{\psi}{\epsilon} = e^{\epsilon ia} - e^{-\epsilon ia} + \frac{\psi}{\epsilon}.$$

2. Lösung des Randwertproblems und Entwicklungssatz für den Fall, dass

$$\mathcal{A}_{14} + \mathcal{A}_{32} = -(a_1 b_1 + a_2 b_3) \neq 0 \text{ ist.}$$

### § 1. Diskussion der transzendenten Gleichung.

Für unsere Abschätzung benutzen wir Gleichung (2; III), welche wir mit  $e^{-\epsilon ia}$  multiplizieren, indem wir uns auf einen genügend breiten Streifen sym-

<sup>1</sup> Vgl. Birkhoff l. c. zweite Abhandlung § 4, S. 382/383.

Über die Existenz von Eigenfunktionen einer reellen Variablen bei linearen etc. 115  
 metrisch zur reellen Achse beschränken. Wir schlagen Kreise, die sich nicht  
 treffen, von festem Radius um die Stellen

$$(4) \quad \varrho_n = \pm \left[ \frac{2n\pi}{a} \pm \frac{i}{a} \lg \left( \frac{-2A + \sqrt{4A^2 - B^2}}{B} \right) \right] = \pm \left[ \frac{2n\pi}{a} \pm \varrho_0 \right].$$

Etwaige Eigenwerte können dann nach (3; III) bei hinreichend grossem  $n$  nur  
 im Inneren der Kreise liegen.

Die Konstruktion der Kreise gelingt nur dann nicht, wenn immer zwei der  
 Stellen  $\bar{\varrho}_n$  zusammenfallen, was dann und nur dann eintritt, wenn

$$2A = \mp B$$

ist. Im ersteren Falle (oberes Vorzeichen) schlagen wir die Kreise um die Stellen  
 $\frac{2n\pi}{a}$ , im anderen Falle um die Stellen  $(2n+1)\frac{\pi}{a}$ . Setzen wir

$$\cos \varrho a + \frac{2A}{B} = \cos \varrho a - \cos \varrho_0 a = \varphi(\varrho),^1$$

so besitzt  $\varphi(\varrho)$  an den Stellen  $\bar{\varrho}_n$  und nur an ihnen für den Fall  $2A \neq \mp B$  ein-  
 fache, für den Fall  $2A = \mp B$  doppelte Nullstellen. Für  $2A = -B$  und  $a_3 = 0$   
 erhält man speziell die im ersten Abschnitt behandelten Randbedingungen. In  
 der Abschätzung spielt  $a_3$ , das ja gar nicht explizit auftritt, keine Rolle.

In der neuen Bezeichnungsweise lautet die transzendente Gleichung

$$\frac{A}{B} = \varphi(\varrho) + \frac{\psi}{\varrho} = 0.$$

Auf den betrachteten Kreisen ist  $\varphi(\varrho)$  ungleich Null; das Winkelargument die-  
 ser Grösse aber ändert sich bei einmaliger Umkreisung durch  $\varrho$  um  $2\pi$ , falls  
 $2A \neq \mp B$  ist, andernfalls um  $4\pi$ . Das Gleiche gilt mithin auch von der Grösse

$$A = \varphi(\varrho) \left( 1 + \frac{\psi}{\varrho \cdot \varphi(\varrho)} \right) = \varphi(\varrho) \left( 1 + \frac{\psi}{\varrho} \right).$$

---

<sup>1</sup> Mittels (4; III) bestätigt man leicht, dass in der Tat

$$\cos \varrho_0 a = -\frac{2A}{B} \text{ ist.}$$

Satz 15. Damit ist die Existenz unendlich vieler Eigenwerte gesichert. Nur für den Fall, dass  $2A = \mp B$  ist, können unendlich viele zweifache darunter auftreten. Ihre asymptotische Form ist folgende, wie wir gleich noch zeigen werden:

$$\varrho_n = \bar{\varrho}_n + \frac{\psi}{n} \quad (2A \neq \mp B)$$

$$\varrho_n = \frac{2n\pi}{a} + \frac{\psi}{n}, \text{ bzw. } \varrho_n = \frac{(2n \pm 1)\pi}{a} + \frac{\psi}{n} \quad (2A = \mp B).$$

Da die Grösse  $\varphi(\varrho)$ , falls  $2A \neq \mp B$  ist, an den Stellen  $\bar{\varrho}_n$  nur einfache Nullstellen besitzt, also in der Form

$$\varphi(\varrho) = (\varrho - \bar{\varrho}_n) \cdot \psi_0(\varrho) \quad (\psi_0(\varrho) \neq 0 \text{ für } |\varrho - \bar{\varrho}_n| < r)$$

geschrieben werden kann, wenn  $r$  der Radius der Schutzkreise ist, so ist

$$0 = \frac{A}{B} = \varphi(\varrho_n) + \frac{\psi}{\varrho_n}; \quad \varrho_n - \bar{\varrho}_n = \frac{\psi}{\varrho_n}$$

$$(5) \quad \varrho_n = \bar{\varrho}_n + \frac{\psi}{n}$$

Ist nun  $2A = \mp B$ , also  $a_1 = \mp a_2 \neq 0$ , und mithin  $b_3 = \mp b_1 \neq 0$ , -so können wir

$$a_2 = b_1 = 1$$

setzen, und erhalten

$$0 = -A = 2 \mp u_3'(a) \mp u_1(a) + a_3 u_2(a) = 2(1 \mp \cos \varrho_n a) + \frac{\psi}{\varrho_n}$$

$$= 4 \sin^2 \left( \frac{2n\pi}{2} + \varepsilon \right) + \frac{\psi}{n} \quad (2A = -B)$$

$$= 4 \cos^2 \left( \frac{(2n \pm 1)\pi}{2} + \varepsilon \right) + \frac{\psi}{n} = 4 \sin^2 \left( \frac{2n\pi}{2} + \varepsilon \right) + \frac{\psi}{n} \quad (2A = +B).$$

Dies sind dieselben Gleichungen wie (5; I). Erst innerhalb der Grösse  $\psi$  tritt zum Unterschied gegen früher noch ein Summand

$$\varrho \cdot a_3 \cdot u_2(a) = a_3 \sin \varrho_n a + \frac{\psi_1}{\varrho_n}$$

hinzu, und es ist jetzt

$$\psi = \sin \varrho_n a \left( \mp \int_0^a L(x) dx + a_3 \right) + \frac{\psi}{\varrho_n};$$

für den Fall, dass  $\varrho_n a = (2n \pm 1)\pi + \varepsilon$  ist, schreiben wir

$$\sin((2n \pm 1)\pi + \varepsilon) = -\sin(2n\pi + \varepsilon).$$

Es gelten also genau dieselben Schlüsse wie damals, d. h. es ist:

$$(6) \quad \varrho_n = \frac{2n\pi}{a} + \frac{\psi}{n} \text{ bzw. } \varrho_n = \frac{(2n \pm 1)\pi}{a} + \frac{\psi}{n}.$$

### § 2. Konturintegral und Entwicklungssatz.

Wir benutzen zur Darstellung von  $G(x, s; \lambda)$  nun wieder das Birkhoff'sche Fundamentalsystem  $v_1(x), v_2(x)$  (vgl. I; (8), (9)). Aus dem Schema

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & b_3 & 0 \end{pmatrix} (b_1 a_2 = b_3 a_4)$$

ergeben sich folgende Ausdrücke

$$W_1(v_1) = W_{11} = \varrho i(\bar{a}_2 + \bar{a}_4 e^{\varrho i a}); \quad W_{12} = -\varrho i(a_2 + \bar{a}_4 e^{-\varrho i a})$$

$$W_{21} = \bar{b}_1 + b_3 e^{\varrho i a} \quad ; \quad W_{22} = b_1 + \bar{b}_3 e^{-\varrho i a}$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{vmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{vmatrix} = \varrho i [4 \bar{a}_2 \bar{b}_1 + e^{\varrho i a} (\bar{b}_1 a_4 + a_2 \bar{b}_3) + e^{-\varrho i a} (\bar{b}_1 a_4 + a_2 \bar{b}_3)] \\ &= \varrho i [4(-\bar{A}) + e^{\varrho i a}(-\bar{B}) + e^{-\varrho i a}(-\bar{B})] \\ &= -\varrho i (\bar{C}_1 + \bar{C}_2 e^{\varrho i a}) (\bar{C}_1 + \bar{C}_2 e^{-\varrho i a}) = -\varrho i \cdot M_1 \cdot (M_2 \cdot e^{-\varrho i a}) \end{aligned} \right.$$

wobei

$$\sqrt{2A \pm \sqrt{4A^2 - B^2}} = C_1 \text{ bzw. } C_2$$

gesetzt worden ist.

In den Ausdruck für  $G(x, s)$  (7; I) S. 40 nehmen wir wieder die alten Umformungen vor, sodass das erste Element der letzten Spalte genau die frühere Form erhält (S. 44)

$$-\frac{1}{2i\varrho} e^{\varrho i \pm (x-s)},$$

weil die Koeffizienten der Randbedingungen gar nicht auftreten. Für die anderen Elemente der letzten Spalte erhält man

$$W_j(\gamma) - \frac{v_2(s)}{4i\varrho} W_j(v_1) - \frac{v_1(s)}{4i\varrho} W_j(v_2) = \begin{cases} -\frac{\varrho i}{2i\varrho} [\bar{a}_4 e^{\varrho i(a-s)} - \bar{a}_2 e^{\varrho i s}]; & j=1 \\ -\frac{1}{2i\varrho} [\bar{b}_3 e^{\varrho i(a-s)} + \bar{b}_1 e^{\varrho i s}]; & j=2. \end{cases}$$

Der Faktor  $\varrho i$  von  $\mathcal{L}$  kürzt sich gegen einen Faktor  $\varrho i$  in der zweiten Zeile der Zählerdeterminante. In die ersten beiden Spalten multiplizieren wir mit  $M_1$  und  $M_2$  hinein, und erweitern die zweite mit  $e^{\varrho i a}$ :

$$(8) \quad 2\varrho \cdot G(x, s; \varrho) = \dots \begin{vmatrix} \frac{e^{\varrho i x} \cdot \bar{1}}{M_1}, & \frac{e^{\varrho i(a-x)} \bar{1}}{M_2}, & i e^{\varrho i \pm (x-s)} \\ \frac{\bar{a}_2 + \bar{a}_4 e^{\varrho i a}}{M_1}, & -\frac{\bar{a}_4 + a_2 e^{\varrho i a}}{M_2}, & i [\bar{a}_4 e^{\varrho i(a-s)} - \bar{a}_2 e^{\varrho i s}] \\ \frac{\bar{b}_1 + \bar{b}_3 e^{\varrho i a}}{M_1}, & \frac{\bar{b}_3 + b_1 e^{\varrho i a}}{M_2}, & i [\bar{b}_3 e^{\varrho i(a-s)} + \bar{b}_1 e^{\varrho i s}] \end{vmatrix}.$$

Bilden wir nun in der früheren Weise das Konturintegral  $I$ , so ergeben sich fast dieselben Ausdrücke wie früher. Es gelten dieselben Abschätzungen wie in (§ 2, II). Es ist also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_k = I = \frac{1}{2} (f(x-0) + f(x+0)), \quad \varepsilon \leq x \leq a - \varepsilon$$

falls  $f(x)$  wieder den Bedingungen von Satz 2. oder 3. genügt; setzen wir weiter  $I$  gleich der Summe der Residuen, die wir in § 8 (I) bestimmt haben, so folgen die entsprechenden Entwicklungssätze.

3. Sätze über gleichmässige und absolute Konvergenz und gliedweise Differenzierbarkeit für den Fall:  $B \neq 0$ .

### § 3. Randwerte des Konturintegrals und gleichmässige Konvergenz.

Beschränken wir uns auf den Randpunkt 0; dann müssen wir in der Entwicklung von  $G(x, s; \lambda)$  nach der ersten Zeile noch den Beitrag des ersten Gliedes beachten. Dies lautet



$$-\bar{g}(x, s) = \frac{-e^{\varrho i x} \cdot \bar{I}}{2i\varrho \cdot M_1 M_2} \left| \begin{array}{l} -(\bar{a}_1 + a_2 e^{\varrho i a}) \bar{a}_4 e^{\varrho i(a-s)} - \bar{a}_2 e^{\varrho i s} \\ \bar{b}_3 + b_1 e^{\varrho i a} \bar{b}_3 e^{\varrho i(a-s)} + \bar{b}_1 e^{\varrho i s} \end{array} \right|.$$

Wir können wieder die Querstriche fortlassen, ohne asymptotisch etwas am Konturintegral zu ändern. Nun schreiben wir

$$-\int_K 2\varrho d\varrho \int_0^a f(s)g(x, s)ds = -\int_K \frac{d\varrho e^{\varrho i x}}{i M_1 M_2} \int_0^a f(s)[-2a_1 b_3 e^{\varrho i(a-s)} - e^{\varrho i s}(a_1 b_1 - a_2 b_3)]ds + \varepsilon.$$

Dabei ist  $\varepsilon$  bis auf einen konstanten Faktor

$$\int_K \frac{d\varrho e^{\varrho i x}}{M_1 M_2} \int_0^a e^{\varrho i(a+s)} f(s)ds \quad \text{bzw.} \quad \int_K \frac{d\varrho e^{\varrho i x}}{M_1 M_2} \int_0^a e^{\varrho i(2a-s)} f(s)ds.$$

Integriert man über  $s$  partiell, so ergibt sich

$$\int_K d\varrho \frac{e^{\varrho i a} \psi}{\varrho},$$

was asymptotisch verschwindet. Nun ist

$$\int_0^a e^{\varrho i(a-s)} f(s)ds = \frac{-f(a) + f(0)e^{\varrho i a}}{\varrho i} + \frac{1}{\varrho i} \int_0^a e^{\varrho i(a-s)} f'(s)ds;$$

$$\int_0^a e^{\varrho i s} f(s)ds = \frac{e^{\varrho i a} f(a) - f(0)}{\varrho i} - \frac{1}{\varrho i} \int_0^a e^{\varrho i s} f'(s)ds.$$

Mit Ausnahme der Grössen  $\frac{-f(a)}{\varrho i}$ ,  $\frac{-f(0)}{\varrho i}$  liefern diese Ausdrücke zum Konturintegral asymptotisch verschwindende Beiträge  $\varepsilon$ . Also ist

$$(9) \quad -\int_K 2\varrho d\varrho \int_0^a f(s)g(x, s)ds = -\int_K \frac{d\varrho e^{\varrho i x}}{i M_1 M_2} \left( \frac{2a_1 b_3}{\varrho i} f(a) + \frac{a_1 b_1 - a_2 b_3}{\varrho i} f(0) \right) + \varepsilon.$$

Setzen wir jetzt  $x=0$ , und berücksichtigen noch den Beitrag des dritten Gliedes der Entwicklung von  $G(x, s; \lambda)$

$$\int \frac{d\varrho}{\varrho} \cdot f(\varrho),$$

— das von 0 bis  $x$  erstreckte Integral fällt ja fort —, so erhalten wir

$$I = \frac{-1}{2\pi i} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_K \frac{d\varrho}{\varrho M_1 M_2} [f(\varrho) (-M_1 M_2 + a_2 b_3 - a_1 b_1) - 2f(a) a_4 b_3].$$

Aus (7) folgt

$$M_1 M_2 = B + B e^{2\varrho ia} + 4A e^{\varrho ia} + \frac{\psi}{\varrho};$$

also ist

$$\begin{aligned} I &= \frac{-1}{2\pi i} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_K \frac{d\varrho}{\varrho M_1 M_2} 2 [a_2 b_3 f(\varrho) - a_1 b_3 f(a)] \\ &= \frac{b_3 (a_4 f(a) - a_2 f(\varrho))}{\pi i} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_K \frac{d\varrho}{\varrho M_1 M_2}. \end{aligned}$$

Das auftretende Integral ist leicht zu berechnen. Nach (7) ist

$$M_1 = C_1 + C_2 e^{\varrho ia} + \frac{\psi}{\varrho}; \quad M_2 = C_2 + C_1 e^{\varrho ia} + \frac{\psi}{\varrho}$$

in der oberen Halbebene. Also ist

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \int_K \frac{d\varrho}{\varrho M_1 M_2} = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_K \frac{d\varrho}{\varrho (C_1 + C_2 e^{\varrho ia})(C_2 + C_1 e^{\varrho ia})} + \lim_{K \rightarrow \infty} \int_K \frac{d\varrho}{\varrho^2} \cdot \psi.$$

Der zweite Summand rechts ist Null. Da  $C_1 C_2$  verschieden von Null ist, können wir setzen

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_K \frac{d\varrho}{\varrho (C_1 + C_2 e^{\varrho ia})(C_2 + C_1 e^{\varrho ia})} &= \frac{1}{C_1 C_2} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_K \frac{d\varrho}{\varrho} \\ &+ \lim_{K \rightarrow \infty} \int_K \frac{d\varrho}{\varrho} \left[ \frac{1 - \frac{1}{C_1 C_2} (C_1 + C_2 e^{\varrho ia})(C_2 + C_1 e^{\varrho ia})}{(C_1 + C_2 e^{\varrho ia})(C_2 + C_1 e^{\varrho ia})} \right] \\ &= \frac{\pi i}{C_1 C_2} - \lim_{K \rightarrow \infty} \int_K \frac{d\varrho e^{\varrho ia}}{\varrho} \frac{\left[ \frac{C_1^2 + C_2^2}{C_1 C_2} + e^{\varrho ia} \right]}{(C_1 + C_2 e^{\varrho ia})(C_2 + C_1 e^{\varrho ia})} = \frac{\pi i}{C_1 C_2} = \frac{\pi i}{B}, \end{aligned}$$

Über die Existenz von Eigenfunktionen einer reellen Variablen bei linearen etc. 121  
 nach unseren früheren Abschätzungen. Wir bekommen also schliesslich

$$(10) \quad I^{x=0} = \frac{b_3(a_3 f(0) - a_4 f(a))}{b_1 a_4 + a_2 b_3}.$$

Erfüllt nun  $f(x)$  die zweite Randbedingung, so ist

$$b_3 f(a) = -b_1 f(0)^1$$

$$I^{x=0} = f(0).$$

Ähnliches gilt aus Symmetriegründen für den anderen Randpunkt, da ja  $a_3$  in (8) nicht explizit auftritt. Setzt man nun

$$s = a - \bar{s},$$

so vertauschen  $a_3$  und  $a_4$  sowie  $b_1$  und  $b_3$  ihre Rollen, die Vorzeichen kompensieren sich in passender Weise, und es folgt:

$$(10a) \quad I^{x=a} = \frac{b_1(a_4 f(a) - a_3 f(0))}{b_3 a_2 + a_4 b_1}$$

$$= f(a),$$

falls  $f(x)$  die zweite Randbedingung erfüllt. Nun vollziehen wir den Grenzprozess  $x \rightarrow 0$  unter der Bedingung

$$(10b) \quad b_1 f(0) + b_3 f(a) = 0.$$

Der Beitrag des Integrales von 0 bis  $x$  im dritten Gliede zum Konturintegral lautet jetzt

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_K \frac{d\varrho}{\varrho} (e^{ix} f(0) - 2f(x)).$$

Aus (9) folgt unter Berücksichtigung von (10b)

<sup>1</sup> Dies ist die Bedingung, welche Stekloff zum Nachweis der gleichmässigen Konvergenz benötigt (l. c. cap. 21 Gleich. 54 und 22); sie wird dort nur als hinreichend nachgewiesen. Aus den Werten für  $I^{x=0}$ ,  $I^{x=a}$ , geht hervor, dass sie auch notwendig ist. Denn für die gleichmässige Konvergenz ist offenbar erforderlich, dass  $I^{x=0} = f(0)$ ;  $I^{x=a} = f(a)$  ist, woraus sofort die Stekloffsche Bedingung folgt. Man sieht übrigens, dass die Ausdrücke  $I^{x=0}$ ,  $I^{x=a}$  in jedem Falle, wie es ja auch sein muss, die Randbedingungen erfüllen.

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2\pi i} \int_K 2\rho d\rho \int_0^a f(s) g(x, s) ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{d\rho e^{\rho i x}}{i M_1 M_2} \frac{(a_1 b_1 f(0) + a_2 b_2 f(0))}{\rho i} + \varepsilon \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{d\rho e^{\rho i x} B f(0)}{\rho M_1 M_2} + \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Vereinigt man dies mit dem Beitrage des dritten Gliedes, so ergibt sich

$$I = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\pi i} \int_K \frac{d\rho}{\rho} + \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{d\rho e^{\rho i x}}{\rho} \frac{B - M_1 M_2}{M_1 M_2} f(0).$$

Nun ist  $B - M_1 M_2 = -e^{\rho i a} (e^{\rho i a} B + 4A) + \frac{\psi}{\rho}$ , woraus erhellt, dass der zweite Summand verschwindet, und das Konturintegral während des Grenzprozesses:  $x \rightarrow 0$  ständig der Funktion  $f(x)$  gleich ist.

Damit ist die Bedingung von Stekloff (10 b) auch im komplexen Falle für die gleichmässige Konvergenz als hinreichend erwiesen. Ihre Notwendigkeit geht ja unmittelbar aus den Ausdrücken (10), (10 a) hervor. Der Beweis von Stekloff setzt wesentlich die Reellität der Eigenfunktionen voraus.

Satz 16. Es ist also jede Funktion, die die Bedingungen von Satz 2. oder 3. erfüllt, nach Fourier entwickelbar. Schliesst man die Unstetigkeitsstellen von  $f(x)$  durch beliebig kleine offene Intervalle aus, so ist die Reihe dann und nur dann in den abgeschlossenen Restintervallen gleichmässig konvergent, wenn

$$b_1 f(0) + b_2 f(a) = 0$$

ist.

In derselben Weise wie im vorigen Abschnitt folgen noch die Formeln

$$\begin{aligned}
 (11) \quad G(x, t; \mu) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(t)}{\lambda_n - \mu} \\
 \frac{\partial}{\partial t} G(x, t; \mu) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n'(t)}{\lambda_n - \mu}.
 \end{aligned}$$

Die bilineare Reihe selbst konvergiert in beiden Variablen gleichmässig. Die zweite Formel gilt nach Ausschluss der Stellen  $x = t$ , sowie der Randpunkte durch offene Intervalle.

§ 4. *Asymptotische Darstellungen.*

Wie sich gleich zeigen wird, gelingt die asymptotische Darstellung nur dann, wenn die Grösse  $a_2 \pm a_4$  nicht verschwindet. Da  $B$  ungleich Null sein soll, so können  $a_2$  und  $a_4$  nicht gleichzeitig verschwinden. Sei zunächst  $a_2$  ungleich Null, und setzen wir

$$a_4 = ca_2;$$

ganz ähnlich wie im vorigen Abschnitt (§ 4; S. 102) folgt bei gleicher Bedeutung der Grössen für eine Eigenfunktion

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$$

$$\frac{c_2}{c_1} = - \frac{W_{11}}{W_{12}} = - \frac{W_{21}}{W_{22}},$$

falls nicht  $W_{12}$  und  $W_{22}$  verschwinden, was, wie sich zeigen wird, sicher dann nicht der Fall ist, wenn  $c \neq \pm 1$  ist. Aus der asymptotischen Darstellung von  $u_1$  und  $u_2$  folgt

$$(12) \quad \frac{W_{11}}{W_{12}} = \frac{\varrho \left( -ca_2 \sin \varrho a + \frac{\psi}{\varrho} \right)}{a_2 \left( 1 + c \cos \varrho a + \frac{\psi}{\varrho} \right)}$$

Nun ist

$$\varrho_n a = 2n\pi \pm \varrho_0 a + \frac{\psi}{\varrho}$$

$$\cos \varrho_n a = \cos \varrho_0 a + \frac{\psi}{\varrho_n}; \quad \sin \varrho_n a = \pm \sin \varrho_0 a + \frac{\psi}{\varrho_n}; \quad \cos \varrho_0 a = - \frac{2A}{B}.^1$$

Aus der Relation  $a_2 b_1 = a_4 b_3$  folgt, dass, wenn  $a_4$  nicht verschwindet,

$$b_1 = cb_3$$

ist, oder aber es verschwindet mit  $a_4$  auch  $c$  und  $b_1$ . Daraus folgt

$$\cos \varrho_0 a = - \frac{2A}{B} = - \frac{2c}{1+c^2}; \quad \sin \varrho_0 a = + \frac{1-c^2}{1+c^2}.^2$$

<sup>1</sup> S. S. 115, Fussnote.

<sup>2</sup> Durch die willkürliche Wahl des + Zeichens wird die Wurzel in

$$\varrho_0 a = i \log \left( \frac{-2A + \sqrt{4A^2 - B^2}}{B} \right)$$

bestimmt.  $\varrho_0 a$  ist dann eindeutig bestimmt, wenn wir noch fordern, dass sein Realteil absolut genommen höchstens gleich  $\pi$  ist.

Ist  $a_4$  ungleich Null, und ausserdem

$$1 + c \cos \varrho_0 a = 1 - \frac{2c^2}{1+c^2} = \frac{1-c^2}{1+c^2} \neq 0,$$

so ist

$$\begin{aligned} \frac{c_2}{c_1} &= -\frac{W_{11}}{W_{12}} = \varrho \left[ \frac{\pm c a_2 \sin \varrho_0 a + \frac{\psi}{\varrho}}{a_2 (1 + c \cos \varrho_0 a) + \frac{\psi}{\varrho}} \right] = \varrho \left[ \pm \frac{c \sin \varrho_0 a}{1 + c \cos \varrho_0 a} + \frac{\psi}{\varrho} \right] \\ &= \pm \varrho \left( c + \frac{\psi}{\varrho} \right). \end{aligned}$$

Ist aber  $c^2 = 1$ , d. h.  $a_2 = \pm a_4 (2A = \pm B)$ , so ergibt sich ein nicht näher bestimmbarer Wert, auch wenn man die zweite Darstellung  $\frac{c_2}{c_1} = -\frac{W_{21}}{W_{22}}$  heranzieht, und die asymptotische Darstellung von  $u_1$  und  $u_2$  weiter treibt.

Es bleibt nun noch der Fall zu besprechen, dass  $a_2 = 0$ ,  $a_4 \neq 0$  ist. Damit ist auch  $b_3 = 0$  und also  $b_1 \neq 0$ .

$$\frac{c_1}{c_2} = -\frac{W_{22}}{W_{21}} = \frac{b_3 \frac{\sin \varrho a}{\varrho} + \frac{\psi}{\varrho}}{b_1 + b_3 \cos \varrho a + \frac{\psi}{\varrho}} = \frac{\psi}{\varrho^2} \cdot \frac{1}{b_1 + \frac{\psi}{\varrho}} = \frac{\psi_0}{\varrho^2}.$$

Setzen wir also  $c_2 = \varrho$ , so ist  $c_1 = \frac{\psi}{\varrho}$ .

Wir können also zusammenfassend sagen: Die asymptotische Darstellung der normierten Eigenfunktionen, aus welcher folgt, dass diese selbst ihrem Betrage nach unter einer von  $x$  und  $n$  unabhängigen Schranke verbleiben, gelingt nur für den Fall

$$a_2 \neq \pm a_4.$$

Je nachdem nun

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \quad a_2 \neq 0, \\ (\beta) \quad a_2 = 0, \\ (\gamma) \quad a_4 = 0 \end{array} \right\} \text{ist,}$$

erhält man

$$(\alpha) \quad \left. \begin{array}{l} \varphi_n(x) \\ \varphi_{n+1}(x) \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{2}{1+c^2}} \left[ \cos \left( \frac{2n\pi}{a} \pm \varrho_0 \right) x \pm c \sin \left( \frac{2n\pi}{a} \pm \varrho_0 \right) x \right] + \frac{\psi}{\varrho}$$

<sup>1</sup> Der Nenner  $\sqrt{1+c^2}$  kann nicht verschwinden. Ist nämlich  $c = \frac{a_4}{a_2} = \pm i$ , so ergibt sich leicht das Schema  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & a_3 & \pm i \\ 1 & 0 & \mp i & 0 \end{pmatrix}$ , also  $B = 0$ ,  $A \neq 0$ , was wir vorerst ausgeschlossen haben.

— hierbei sollen für  $\varphi_n(x)$  die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem  $Re(\varrho_n)$  negativ oder positiv ist. Dann sind nämlich, da  $|Re(\varrho_n a)| < \pi$  ist, die Eigenwerte nach steigenden Beträgen von  $\varrho_n$  geordnet —,

$$(\beta) \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \left( n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{a} + \frac{\psi}{\varrho}$$

$$(\gamma) \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \left( n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{a} + \frac{\psi}{\varrho}$$

Wir schreiben noch für den Fall, dass  $a_2 a_1$  nicht verschwindet, die bilineare Reihe auf, die sich nach elementarer Umformung unter Berücksichtigung, dass

$$\frac{1}{\varrho_n^2 - \lambda} = \frac{1}{\left( \frac{2n\pi}{a} \pm \varrho_0 + \frac{\psi}{n} \right)^2 - \lambda} = \frac{a^2}{4n^2\pi^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\psi}{n}} = \frac{a^2}{4n^2\pi^2} + \frac{\psi}{n^3}$$

ist, in folgender Form präsentiert

$$(13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(s)}{\lambda_n - \lambda} = \frac{a}{2\pi^2} \left[ \cos \varrho_0(x-s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{a}(x-s)}{n^2} + \right. \\ \left. + \sin \varrho_0(a-x-s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{a}(x+s)}{n^2} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi}{n^3}$$

Differenziert man nun gliedweise nach  $x$ , so folgt aus der asymptotischen Darstellung von  $u_1(x)u_2(x)$  (vgl. 4 a; I), dass in der letzten Reihe  $\frac{d\psi_n}{dx} = n \cdot \psi_n^*$  gesetzt werden darf. Die Reihe bleibt also gleichmässig konvergent; hält man nun eine Variable im Inneren fest, so konvergieren die Reihen, welche aus der Differentiation des mittleren Summanden hervorgehen, gleichmässig in  $[0, a]$  für die andere Variable, da  $0 < x + s < 2a$  ist, und  $\sin \varrho_0(a-x-s)$  für  $x + s = a$  verschwindet, also an der einzigen Stelle, wo im obigen Intervall  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2n\pi}{a}(x+s)}{n}$  eine Unstetigkeit hat. Nur die aus dem ersten Summanden von (13) entstehende

<sup>1</sup> Es sind dies die Eigenfunktionen des Randwertproblems, wo  $\varphi_n(x)$  an einem Ende verschwindet, während am anderen Ende der Ausdruck  $\varphi_n'(x) + h\varphi_n(x)$  gleich Null ist ( $h$  endlich!); vgl. Kneser l. c. § 49.

Reihe  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{2n\pi}{a}(x-s)}{n}$  hat bei  $x=s$ , wo  $\cos \varrho_0(x-s)$  gleich der Einheit wird, die bekannte Unstetigkeit, insbesondere auch den Gibbsschen Höcker.

Ähnliches gilt für die beiden anderen Fälle, deren Darstellung ja bekannt ist. Um für den Fall  $a_2 = \pm a_4$  den Gibbsschen Höcker nachzuweisen, kann man sich derselben Methode wie im ersten Abschnitt bedienen, die nur für den Fall, dass  $a_2 = a_4$  ist, eine unwesentliche Abänderung erfährt. (§ 9, S. 66).

Natürlich lässt sich die asymptotische Darstellung der normierten Eigenfunktionen, auch für den Fall  $a_2 = \pm a_4$  durchführen, wenn alle eingehenden Grössen reell sind. Es folgt dies genau wie in § 10 des ersten Abschnittes.

### § 5. Absolute Konvergenz.

Die asymptotische Darstellung hat ergeben, dass die Beträge der normierten Eigenfunktionen unter einer von  $x$  und  $n$  unabhängigen Schranke verbleiben, für den Fall, dass  $a_2 \pm a_4$  verschwindet, allerdings nur, wenn sie reell sind. In genau derselben Weise wie in den vorangehenden Abschnitten folgt somit die absolute Konvergenz der Fourierreihen stetiger Funktionen mit stückweise stetiger erster und zweiter Ableitung, wenn sie die Randbedingungen erfüllen. Wir können uns nun so wie im ersten Abschnitt vom Erfülltsein derjenigen Randbedingung befreien, in welcher auch die Randwerte der Ableitungen auftauchen. Es sei

$$\begin{aligned} G(x, s) &= G_1(x, s) \quad x \leq s \\ &= G_2(x, s) \quad x \geq s. \end{aligned}$$

Wir fragen nun nach dem Wert des Ausdruckes

$$a_2 G_1'(0, a) + a_3 G_1(a, a) + a_4 G_1'(a, a),$$

den man erhält, wenn  $G_1(x, a)$  in die linke Seite der ersten Randbedingung eingesetzt wird. Für die Greensche Funktion selbst ist:

$$a_2 G'(0, s) + a_3 G(a, s) + a_4 G'(a, s) = a_2 G_1'(0, s) + a_3 G_1(a, s) + a_4 G_2'(a, s) \equiv 0,$$

da  $G_2(a, s) = G_1(a, s)$  ist. Da weiter

$$G_1'(s, s) - G_2'(s, s) \equiv 1$$



Über die Existenz von Eigenfunktionen einer reellen Variablen bei linearen etc. 127

ist, so folgt

$$a_2 G'_1(0, a) + a_3 G_1(a, a) + a_4 (G'_1(a, a) - 1) = 0.$$

Der fragliche Ausdruck hat also den Wert  $a_4$ . Ist also  $a_4$  ungleich Null und  $W_1(F(x)) = A \neq 0$ , so ist

$$W_1 \left[ F(x) - \frac{A}{a_4} G_1(x, a) \right] = W_1(\Phi(x)) = 0.$$

Konvergiert also die Reihe von  $\Phi(x)$  absolut, so gilt dies ebenso von der Reihe von  $F(x)$ .

Ist  $a_4 = 0$ , also

$$a_2 G'(0, s) + a_3 G(a, s) = 0,$$

so schreiben wir

$$a_2 G'_1(0, 0) + a_3 G_2(a, 0) = a_2 (1 + G'_2(0, 0)) + a_3 G_2(a, 0) = 0;$$

d. h. für die Funktion  $G_2(x, 0)$  ist

$$W_1(G_2(x, 0)) = -a_2.$$

$a_2$  kann aber nicht gleich Null sein, da sonst  $B$  verschwindet.  $G_2(x, 0)$  leistet uns also jetzt dasselbe wie vorher  $G_1(x, a)$ .

Die Beseitigung der zweiten Randbedingung gelingt wiederum nicht nach dieser Methode, weil dann die absolute Konvergenz der Ableitung von  $G(x, s)$  benutzt werden müsste, welche nicht bewiesen worden ist.

Es gilt also folgender Satz:

Satz 17.

Ist  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^a F(a) \varphi_n(a) da$ , so konvergiert die rechte Seite auch

absolut und gleichmässig, wenn  $F(x)$  stetig,  $F'(x)$ ,  $F''(x)$  stückweise stetig,

$$b_1 F(0) + b_3 F(a) = 0$$

ist, und für den Fall, dass  $a_2 = \pm a_4$  ist, die Eigenfunktionen reell sind.

### § 6. Gliedweise Differenzierbarkeit und Weiterbehandlung der partiellen Differentialgleichung.

Es bleiben im jetzigen Falle fast durchweg die Ausführungen von §§ 6, 7 des vorigen Abschnittes in Geltung. Bzgl. der einmaligen Differenzierbarkeit

ist zu sagen, dass wir uns ähnlich wie im vorigen § nur von der ersten Randbedingung frei machen können, im übrigen gelten die alten Bedingungen über  $F(x)$ . Für den Fall, dass  $a_2 \pm a_1$  verschwindet, ist natürlich wieder Reellität der Eigenfunktionen zu verlangen.

Bzgl. der zweimaligen Differenzierbarkeit kommen zu den Bedingungen des vorigen Abschnittes noch die Bedingungen

$$b_1 f''(0) + b_3 f''(a) = 0; \quad L(0) = L(a)$$

hinzu, welche sich aus der Forderung der gleichmässigen Konvergenz der Reihen von  $f''(x)$  und  $f(x) \cdot L(x)$  ergeben. Nur, wenn  $b_1$  oder  $b_3$  verschwindet, sind  $L(0)$  und  $L(a)$  beliebig. Das Analogon von Satz 14 lautet also jetzt:

Satz 18. Ist die Funktion  $f(x)$  stetig,  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  stückweise stetig, und

$$b_1 f(0) + b_3 f(a) = 0,$$

so ist die Fourierreihe von  $f(x)$  einmal gliedweise differenzierbar, und diese Reihe konvergiert nach Ausschluss der Randpunkte<sup>1</sup> und Unstetigkeitsstellen von  $f(x)$  im Restintervall gleichmässig.

Erfüllt die zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f(x)$  die Randbedingungen, und ist  $f''(x)$ , sowie  $L(x)$  in der Form

$$\psi(x) = \psi(0) + \int_0^x \varphi(x) dx$$

darstellbar, wo  $\varphi(x)$  summabel ist, so gilt unter den weiteren Bedingungen

$$b_1 f''(0) + b_3 f''(a); \quad L(0) = L(a),$$

die Gleichung

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n''(x) \int_0^a f(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha \quad (0 \leq x \leq a).$$

<sup>1</sup> Falls  $f(x)$  beide Randbedingungen erfüllt, konvergiert die abgeleitete Reihe bis in die Randpunkte hinein gleichmässig; ist dies nicht der Fall, so kommt ein mit der Funktion  $G_1(x, a)$  gebildetes Zusatzglied hinzu. Ähnlich wie am Schluss von § 3, II ergibt sich unter Benutzung von (IO, IO a; III), dass dann z. B.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n'(0) \varphi_n(a)}{\lambda_n - \mu} = \left( \frac{\partial G_1(x, a; \mu)}{\partial x} \right)_{x=0} - \frac{b_1 b_3}{b_1^2 + b_3^2} \text{ ist.}$$

Über die Existenz von Eigenfunktionen einer reellen Variablen bei linearen etc. 129

Falls  $b_1$  oder  $b_3$  verschwindet, sind die Randwerte von  $L(x)$  beliebig.

Die bisherigen Sätze dieses Abschnittes sind genau analog denen des ersten Abschnittes, mit gewissen Korrekturen bzgl. der Reellität der Eigenfunktionen. Es gilt darum auch ein ganz analoger Satz über die Lösung der partiellen Differentialgleichung, den wir unter Übergehung des Beweises wegen der nötigen Abänderungen noch formulieren wollen.

In der Gleichung (36; I) sei  $k$  eine positive Konstante,  $q(x)$  und  $p(t)$  stetige Funktionen in den Intervallen  $[0, a]$  bzw.  $[t_0, t_1]$ ,  $q'(x)$  und  $q''(x)$  seien stückweise stetig, und, falls  $b_1, b_3$  verschieden von Null ist,

$$q(0) = q(a).$$

Genügt dann  $\varphi_n(x)$  der Gleichung

$$\varphi_n''(x) + (\lambda + q(x)) \varphi_n(x) = 0,$$

sowie den Randbedingungen mit dem Schema

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & b_3 & 0 \end{pmatrix}; \quad b_1 a_2 = b_3 a_4; \quad b_1 a_4 + a_2 b_3 \neq 0,$$

so ist

$$(14) \quad U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \psi_n(t) + B_n \psi_n(t)] \varphi_n(x)$$

eine Lösung der partiellen Differentialgleichung, welche den Anfangsbedingungen

$$U(t, x) = F(x); \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} U(t, x) \right)_{t=t_0} = G(x)$$

genügt, wo  $F(x)$  und  $G(x)$  in  $[0, a]$  stetig differenzierbar,  $F''(x)$  stetig,  $F'''(x)$ ,  $F^{IV}(x)$  und  $G''(x)$  stückweise stetig sind, und  $F(x)$  und  $G(x)$  die obigen Randbedingungen,  $F''(x)$  ausserdem die Bedingung

$$b_1 F''(0) + b_3 F''(a) = 0$$

erfüllt. Für den Fall, dass  $a_2 \pm a_4$  gleich Null ist, müssen  $p(t)$ ,  $q(x)$  und der Koeffizient  $a_3$  reell sein.

4. Der Fall:  $b_1 a_1 + a_2 b_2 = B = 0$ .

§ 7. Die Randbedingung

$$u(0) = u(a) = 0; (A = 0).$$

Diese Randbedingung ist für komplexe Differentialgleichungen schon von Kneser und Hilb<sup>1</sup> behandelt worden. Danach existieren unendlich viele Eigenwerte von der Form

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 + \psi.$$

Die normierten Eigenfunktionen haben die Form

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} + \frac{\psi}{n}.$$

Es gelten die Formeln

$$(15) \quad G(x, s; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(s)}{\lambda_n - \lambda}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, s; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n'(x) \varphi_n(s)}{\lambda_n - \lambda}.$$

Die bilineare Reihe konvergiert absolut und gleichmässig. Daraus folgt leicht die absolute und gleichmässige Konvergenz der Reihen quellenmässiger Funktionen, wobei man noch die Forderung der Stetigkeit für die erste Ableitung durch die Forderung stückweiser Stetigkeit ersetzen kann. Was nicht gelingt, — natürlich nur bei der Forderung absoluter Konvergenz —, ist die Befreiung von den Randbedingungen, da hierzu die Ableitung der Greenschen Funktion benötigt wird.

Wir wollen nun den Entwicklungssatz auch noch in der bisherigen Form beweisen.

Unter Benutzung des Fundamentalsystems  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$  erhält man in der früheren Weise<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Vgl. Kneser, l. c. § 49; Hilb, Math. Ann. Bd. 71, p. 76.

<sup>2</sup> Daraus und aus der asymptotischen Darstellung folgt sofort das Vorhandensein des Gibbsschen Höckers.

<sup>3</sup> Indem man etwa das Schema  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  benutzt.

$$\mathcal{A} = e^{-\varrho ia} \bar{1} - e^{\varrho ia} \bar{1} = (\bar{1} - e^{\varrho ia} \bar{1})(\bar{1} + e^{-\varrho ia} \bar{1}) = M_1 M_2 e^{-\varrho ia}$$

$$(16) \quad G(x, s; \lambda) = \begin{vmatrix} \frac{e^{\varrho ix} \bar{1}}{M_1} & \frac{e^{\varrho i(a-x)} \cdot \bar{1}}{M_2} & -\frac{1}{2i\varrho} e^{\varrho i+(x-s)} \\ \frac{1}{M_1} & \frac{e^{\varrho ia}}{M_2} & -\frac{e^{\varrho is} \cdot \bar{1}}{2i\varrho} \\ \frac{e^{\varrho ia} \bar{1}}{M_1} & \frac{\bar{1}}{M_2} & -\frac{e^{\varrho i(a-s)} \cdot \bar{1}}{2i\varrho} \end{vmatrix}.$$

Erfüllt die Funktion  $f(x)$  die Forderungen von Satz 2. oder 3., so gilt im Intervall  $(0, a)$  die in derselben Weise wie früher sich ergebende Gleichung

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{-1}{2\pi i} \int_K d\lambda \int_0^a G(x, s; \lambda) f(s) ds &= \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^a f(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Wertes im Punkte Null berechnen wir wieder den Beitrag des ersten Gliedes in der Entwicklung der Zählerdeterminante nach der ersten Reihe zum Konturintegral. Dieser ist bis auf asymptotisch verschwindende Summanden

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2\pi i} \int_K 2\varrho d\varrho \int_0^a g(x, s; \lambda) f(s) ds &= \frac{-1}{2\pi i} \int_K 2\varrho d\varrho \int_0^a ds f(s) \frac{i e^{\varrho ix}}{2\varrho(1 - e^{2\varrho ia})} \cdot \begin{vmatrix} e^{\varrho ia} & e^{\varrho is} \\ 1 & e^{\varrho i(a-s)} \end{vmatrix} \\ &= \frac{i}{2\pi i} \int_K d\varrho \int_0^a \frac{i e^{\varrho ix} e^{\varrho is}}{1 - e^{2\varrho ia}} f(s) ds + \varepsilon. \end{aligned}$$

Setzen wir  $x=0$  und integrieren partiell nach  $s$ , so wird dies

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{d\varrho}{\varrho} \frac{-f(0)}{1 - e^{2\varrho ia}} + \varepsilon_1 = -\frac{f(0)}{2} + \varepsilon_2;$$

und entsprechend für den anderen Randpunkt

$$\frac{-f(a)}{2} + \varepsilon_3.$$

Aus dem dritten Gliede der ersten Reihe gewinnt man den Beitrag

$$\frac{f(0)}{2} + \varepsilon, \text{ bzw. } \frac{f(a)}{2} + \varepsilon,$$

weil das von 0 bis  $x$  erstreckte Integral fortfällt.

Das Konturintegral, und mithin die Reihe, liefert also in den Randpunkten den Wert Null. Als notwendige Bedingung für die gleichmässige Konvergenz ist also zu fordern, dass die Funktion  $f(x)$  beide Randbedingungen erfüllt. Dass diese Bedingung neben der Stetigkeit im Inneren auch hinreicht, beweist wieder der Grenzprozess  $x \rightarrow 0$ . Ist nämlich  $f(0) = 0$ , so verschwinden alle Beiträge, welche den Faktor  $e^{0ix} \cdot f(0)$  enthalten unter dem Integralzeichen, insbesondere auch der Beitrag des ersten Gliedes, welcher allein die gleichmässige Konvergenz hätte stören können.

Die absolute Konvergenz und einmalige gliedweise Differenzierbarkeit der Reihen ergeben sich nach den bisherigen Methoden auf Grund der asymptotischen Darstellung der normierten Eigenfunktionen.

Es muss aber

$$f(0) = f(a) = 0$$

sein, weil jetzt in den Randbedingungen gar keine Ableitung mehr auftaucht.

Bzgl. der zweiten Ableitung ändern sich etwas die der Funktion  $f(x)$  aufzuerlegenden Bedingungen. Genau formuliert, können wir also sagen:

*Satz 19.* Erfüllt  $f(x)$  die Bedingungen von Satz 2. oder 3., so hat ihre Fourierreihenentwicklung nach den Eigenfunktionen des Randwertproblems

$$u(0) = u(a) = 0$$

in den Unstetigkeitspunkten den Wert  $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ , in den Randpunkten den Wert Null, sonst allenthalben den Wert  $f(x)$ . Die Reihe konvergiert dann und nur dann gleichmässig in  $[0, a]$ , wenn  $f(x)$  stetig ist und beide Randbedingungen erfüllt. Ist ausserdem noch  $f'(x)$  und  $f''(x)$  stückweise stetig, so konvergiert die Reihe auch absolut, darf einmal nach  $x$  gliedweise differenziert werden und stellt mit Ausnahme der Unstetigkeitsstellen von  $f'(x)$  die Funktion  $f(x)$  bzw. ihre Ableitung dar.

Über die Existenz von Eigenfunktionen einer reellen Variablen bei linearen etc. 133

Ist unter den gleichen Bedingungen<sup>1</sup>  $f'(x)$  und  $f''(x)$  stetig, und  $f''(x)$ , sowie  $L(x)$  in der Form

$$\text{const.} + \int_0^x \varphi(x) dx \quad (\varphi(x) \text{ summabel})$$

darstellbar, ausserdem  $f''(0) = f''(a) = 0$ , so ist auch

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n''(x) \int_0^a f(\alpha) \varphi_n(\alpha) d\alpha \quad (0 \leq x \leq a).$$

Bzgl. der Lösung der partiellen Differentialgleichung sind im Satz des (§ 6; III) folgende Abänderungen vorzunehmen. Es sei

$$F(0) = F(a) = G(0) = G(a) = F'''(0) = F'''(a) = 0,$$

im übrigen gelten dieselben Bedingungen. Die Randwerte von  $q(x)$  sind beliebig.

§ 8. Die Randbedingung:

$$\begin{aligned} \pm i u'(0) + a_3 u(a) + u'(a) &= 0 \\ & \quad (A \neq 0) \\ u(0) \pm i u(a) &= 0. \end{aligned}$$

Es bleibt nun nur noch der Fall:  $B = 0$ ,  $A \neq 0$  zur Besprechung übrig. Wegen  $a_2 b_1 = a_1 b_3$  ist auch  $a_1$  und  $b_3$  ungleich Null. Es ist

$$-B = b_1 a_4 + a_2 b_3 = b_3 \frac{a_4^2}{a_2} + a_2 b_3 = a_4^2 + a_2^2 = 0;$$

setzt man  $a_4 = b_1 = 1$ , so erhält man den Typ

$$\begin{pmatrix} 0 & \pm i & a_3 & 1 \\ 1 & 0 & \pm i & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der Gleichung

$$s^2 B + 4 A s + \bar{B} = 0 \quad (\text{vgl. S. 113})$$

folgt

$$(17) \quad e^{i\alpha} = \frac{\psi}{\varrho}$$

<sup>1</sup> Die Randwerte von  $L(x)$  sind beliebig, da ja  $f(0)L(0) = f(a)L(a) = 0$  ist.

für die obere Halbebene. Für  $\mathcal{A}$  erhält man unter Benutzung des Fundamentalsystems  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$ , für welches

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = 1$$

ist, den Ausdruck

$$(17 \text{ a}) \quad \mathcal{A} = \bar{+} 2i - a_3 u_2(a) + u_1(a) - u_2'(a).$$

Für unsere Zwecke benötigen wir eine genauere Abschätzung von  $u_1$  und  $u_2$ . Es war

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \cos \varrho x + \frac{1}{\varrho} \int_0^x L' u_1' \sin \varrho(x-x') dx' \\ u_2(x) &= \frac{\sin \varrho x}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \int_0^x L' u_2' \sin \varrho(x-x') dx' \\ \frac{du_2(x)}{dx} &= \cos \varrho x + \int_0^x L' u_2' \cos \varrho(x-x') dx'. \end{aligned}$$

Wir setzen unter dem Integralzeichen für  $u_1'$  und  $u_2'$  abermals die Ausdrücke der rechten Seite. Dann ist

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} u_1(x) &= \cos \varrho x + \frac{1}{\varrho} \int_0^x L' \cos \varrho x' \sin \varrho(x-x') dx' + \\ &\quad + \frac{1}{\varrho^2} \int_0^x dx' L' \sin \varrho(x-x') \int_0^{x'} L'' u_1'' \sin \varrho(x'-x'') dx'' \\ u_2(x) &= \frac{\sin \varrho x}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \int_0^x L' \sin \varrho x' \sin \varrho(x-x') dx' + \\ &\quad + \frac{1}{\varrho^2} \int_0^x dx' L' \sin \varrho(x-x') \int_0^{x'} L'' u_2'' \sin \varrho(x'-x'') dx'' \\ \frac{du_2(x)}{dx} &= \cos \varrho x + \frac{1}{\varrho} \int_0^x L' \sin \varrho x' \cos \varrho(x-x') dx' + \\ &\quad + \frac{1}{\varrho^2} \int_0^x dx' L' \cos \varrho(x-x') \int_0^{x'} L'' (\varrho u_2'') \sin \varrho(x'-x'') dx''. \end{aligned} \right.$$



Hieraus folgt für den Koeffizienten von  $\frac{1}{\varrho}$  in

$$(19) \quad e^{i a} (u_1(a) - u_2'(a)),$$

— das Glied mit  $\frac{1}{\varrho^0}$  hebt sich fort —,

$$(20) \quad e^{i a} \int_0^a L' \sin \varrho (a - 2 x') dx' = - \int_0^a L' \frac{e^{2 \varrho i x'} - e^{2 \varrho i (a - x')}}{2 i} dx'$$

$$= \frac{\psi}{\varrho} \quad (I(\varrho) \geq 0),$$

falls man annimmt, dass  $\frac{dL(x)}{dx}$  stückweise stetig ist<sup>1</sup>, und mithin partiell integriert werden darf. Auch der Rest von  $e^{i a} (u_1(a) - u_2'(a))$  hat die Form  $\frac{\psi}{\varrho^2}$ , denn z. B. der Restbeitrag von  $e^{i a} u_1(a)$  ist

$$(21) \quad \frac{1}{\varrho^2} \int_0^a dx' L' \frac{e^{2 \varrho i (a - x')} - 1}{2 i} \int_0^{x'} L'' \cdot (u_1'' e^{\varrho i x'}) \cdot \frac{e^{2 \varrho i (x' - x'')} - 1}{2 i} dx''.$$

Wir können also schreiben

$$(22) \quad \mathcal{A} e^{i a} = \frac{1}{2 i} e^{i a} - a_3 \frac{e^{2 \varrho i a} - 1}{2 i \varrho} + \frac{\psi}{\varrho^2}.$$

Die Grösse  $e^{2 \varrho i a} - 1$  ist für etwaige Nullstellen von  $\mathcal{A}$  von grossem Betrage sicher von Null verschieden, denn für  $\varrho = \frac{n \pi}{a}$  und hinreichend grosses  $n$  kann der obige Ausdruck nicht verschwinden. Wir schliessen diese Stellen also durch Halbkreise von der oberen Halbebene aus. Für den Rest derselben liegt also dann  $|e^{2 \varrho i a} - 1|$  zwischen zwei von Null verschiedenen endlichen und von  $\varrho$  unabhängigen Schranken. Wir nehmen zunächst an, es sei

$$a_3 \neq 0.$$

$$a_3 \neq 0.$$

<sup>1</sup> Dies geschieht nur der Übersichtlichkeit halber, notwendig ist diese Annahme natürlich nicht.

Setzen wir die rechte Seite von (22) gleich Null, so erhalten wir

$$e^{i a} = \pm a_3 \frac{e^{2 i a} - 1}{4 \varrho} + \frac{\psi}{\varrho^2},$$

und daraus folgt, wegen  $e^{i a} = \frac{\psi}{\varrho}$ , und daher  $e^{2 i a} = \frac{\psi}{\varrho^2}$ :

$$e^{i a} = \mp \frac{a_3}{4 \varrho} + \frac{\psi}{\varrho^2} = \mp \frac{a_3}{4 \varrho} \left( 1 + \frac{\psi_0}{\varrho} \right)$$

$$(23) \quad \varrho i a = 2 n \pi i + \lg \left( \mp \frac{a_3}{4} \right) - \lg \varrho + \frac{\psi_1}{\varrho}.$$

Wir setzen

$$\varrho = R e^{i \varphi}; \quad -\frac{i}{a} \lg \left( \mp \frac{a_3}{4} \right) = \gamma + i \delta$$

$$\varrho - \frac{i}{a} \lg \varrho - \gamma - i \delta - \frac{2 n \pi}{a} = \mathcal{O}_n(\varrho),$$

sodass (23) übergeht in:

$$(24) \quad \overline{\mathcal{O}_n(\varrho)} = \mathcal{O}_n(\varrho) + \frac{\psi_1}{\varrho} = 0.$$

Wir untersuchen zunächst die Nullstellen von  $\mathcal{O}_n(\varrho)$  in der oberen Halbebene. Trennt man Real- und Imaginärteil, so ergeben sich für die zwei Unbekannten  $R$  und  $\varphi$  die Gleichungen

$$R \cos \varphi + \frac{\varphi}{a} = \gamma + \frac{2 n \pi}{a}$$

(25 a, b)

$$R \sin \varphi - \frac{\lg R}{a} = \delta.$$

Diese besitzen, falls  $R$  hinreichend gross ist, sicher reelle Lösungen. Wir nehmen an, es sei  $R > R_0$ , und  $R_0$  so gewählt, dass

$$0 < \sin \varphi = \frac{\lg R}{a R} + \frac{\delta}{R} < 1,$$

also  $0 < \varphi < \pi$

ist. Verlangen wir noch, dass  $\varphi < \frac{\pi}{2}$  ist, so ist  $\varphi$  zu jedem  $R$  eindeutig bestimmt:  $\varphi = \varphi(R)$ . Dann ist  $\cos \varphi$  positiv. Die Funktion

$$R \cos \varphi + \frac{\varrho}{a} = R \sqrt{1 - \frac{1}{R^2} \left( \frac{(\lg R)^2}{a^2} + \frac{2 \delta \lg R}{a} + \delta^2 \right)} + \frac{\varphi(R)}{a}$$

durchläuft von einem bestimmten positiven Werte an mit wachsendem  $R$  die ganze positive reelle Achse; ist also  $0 < n_0$  genügend gross, so haben für jedes  $n > n_0$  die Gleichungen (25) genau eine reelle Lösung.

Nimmt man statt des ersten Quadranten den zweiten, gibt der Wurzel, welche gleich  $\cos \varphi$  ist, also das negative Zeichen  $\left( \varphi > \frac{\pi}{2} \right)$ , so erhält man auch für die negativen ganzen Zahlen von genügend grossem Absolutbetrag je eine Wurzel der Gleichungen (25) und mithin von

$$\Phi_n(\varrho) = 0.$$

Diese werden natürlich im allgemeinen zu den Wurzeln im ersten Quadranten nicht symmetrisch liegen.

Wir zeigen nun, dass die Funktionen  $|\Phi_n(\varrho)|$ , falls wir die eben genannten Stellen  $\varrho_n = R_n e^{i\varphi_n}$  mit passend gewählten kleinen Konturen umgeben, auf diesen über einer von  $n$  unabhängigen positiven Schranke verbleiben.

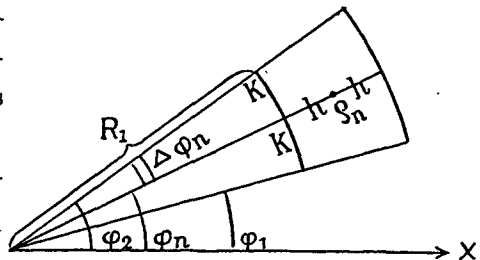
Die Konturen  $C_n$  seien die Begrenzungen der durch die Ungleichungen

$$R_1 = R_n - h < R < R_n + h = R_2$$

$$\varphi_1 = \varphi_n - \Delta \varphi_n < \varphi < \varphi_n + \Delta \varphi_n = \varphi_2; \quad R_1 \Delta \varphi_n = k$$

definierten Flächenstücke, wo  $h$  und  $k$  unabhängig von  $n$  und positive endliche Zahlen sind, welche nur so gewählt sind, dass die Konturen sich nicht treffen.

Aus (25 b) folgt, dass  $\sin \varphi$ , und somit  $\varphi$  bzw.  $\pi - \varphi$  wie  $\frac{\lg R}{R}$  gegen Null strebt.<sup>1</sup>



<sup>1</sup> Der Imaginärteil von  $\varrho_n$  wächst dagegen etwa wie  $\lg R$  über alle Grenzen.

Setzen wir

$$\operatorname{Re}(\mathcal{O}_n(\varrho)) = R \cos \varphi + \frac{\varphi}{a} - \gamma - \frac{2n\pi}{a} = f(R, \varphi)$$

$$\operatorname{I}(\mathcal{O}_n(\varrho)) = R \sin \varphi - \frac{\lg R}{a} - \delta = g(R, \varphi),$$

so ist nach dem Mittelwertsatz

$$f(R_n - h) = 0 - hf'(R_n - \theta h) = -h \cos \varphi_n$$

$$\begin{aligned} f(R_n - h, \varphi) &= -h \cos \varphi_n + (\varphi - \varphi_n) f'(\varphi_n + \theta_1(\varphi - \varphi_n)) = \\ &= -h \cos \varphi_n + \frac{\bar{k}}{R_1} \left( -R_1 \sin \tilde{\varphi} + \frac{1}{a} \right) \\ &= -h \cos \varphi_n + \psi \frac{\lg R_n}{R_n}, \quad 0 \leq |\varphi - \varphi_n| \leq \mathcal{A} \varphi, \quad |\bar{k}| \leq k; \quad \tilde{\varphi} = \varphi_n + \theta_1(\varphi - \varphi_n) \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck bleibt, da  $\cos \varphi_n = 1 - \psi \left( \frac{\lg R_n}{R_n} \right)^2$  gesetzt werden darf, über einer von  $n$  unabhängigen Schranke. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} g(R_n, \varphi_2) &= 0 + \mathcal{A} \varphi_n R_n \cos(\varphi_n + \theta_2 \mathcal{A} \varphi_n) = \frac{k}{R_1} R_n \cos \tilde{\varphi} \\ &= k \cos \tilde{\varphi} + \frac{\psi}{R_n} = k \cos \varphi_n + \frac{\psi_1}{R_n} = k + \frac{\psi_2}{R_n} \\ g(R_n + \bar{h}, \varphi_2) &= k + \frac{\psi_2}{R_n} + \bar{h} \left( \sin \varphi_2 - \frac{1}{a(R_n + \theta_3 \bar{h})} \right) \\ &= k + \psi_3 \frac{\lg R_n}{R_n}, \quad 0 \leq |\bar{h}| \leq h; \end{aligned}$$

auch dieser Ausdruck bleibt über einer von  $n$  unabhängigen positiven Schranke. Ähnliches gilt für die übrigen Berandungen.

Wir können also schreiben für  $\varrho$  auf  $C_n$

$$\bar{\mathcal{O}}_n(\varrho) = \mathcal{O}_n(\varrho) \left( 1 + \frac{\psi_2}{\varrho} \right).$$

Mittels der bekannten Schlussweise folgert man, dass im Inneren jeder Kontur sich mindestens eine Nullstelle von  $\mathcal{A}$  befinden muss. Aus unserem Beweisverfahren geht nicht hervor, ob wir auch alle Nullstellen von einem gewissen Ab-

solutbetrage an erfasst haben im Gegensatz zu den früheren Beweisen. Da  $\mathcal{A}(\varrho)$  eine gerade Funktion ist, so erhält man die übrigen Nullstellen in der unteren Halbebene durch Spiegelung am Nullpunkt. Die Nullstellen von einem gewissen, hinreichend grossen Absolutbetrage an sind einfach, falls sie zu den im Inneren der Konturen liegenden gehören, denn das Gleiche gilt auch von den Nullstellen der Grössen  $\Phi_n(\varrho)$ , deren Ableitung  $\Phi_n'(\varrho) = 1 - \frac{i}{\alpha\varrho}$  für grosse  $\varrho$  nicht mehr verschwinden kann; die hier angewandte Schlussweise ist für eventuelle andere Nullstellen von  $\mathcal{A}$  nicht anwendbar, da man nicht weiss, ob überall  $\Phi_n(\varrho)$  über einer von  $n$  unabhängigen Schranke verbleibt.

Es sei nun

$$a_3 = 0. \qquad a_2 = 0.$$

Dann zeigt die oben angewandte Methode, dass die Gleichung

$$\mathcal{A} = 0$$

immer dann unendlich viele Wurzeln hat, wenn sich Gleichung (17) in folgender Form schreiben lässt

$$(26) \qquad e^{i\alpha} = \frac{c}{\varrho^k} + \varepsilon \frac{\psi}{\varrho^k}, \quad c \neq 0; \quad \lim_{|\varrho| \rightarrow \infty} \varepsilon = 0,$$

wo  $c$  eine absolute Konstante ist. Dann ist nämlich

$$e^{i\alpha} = \frac{c}{\varrho^k} (1 + \varepsilon_1)$$

$$\varrho i \alpha = \lg c - k \lg \varrho + 2 n \pi i + \varepsilon_2.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich nur durch den Faktor  $k$  von (23), und lässt sich genau so wie diese behandeln. Wir übergehen den Beweis und zeigen nur noch, dass die in der letzten Behauptung geforderte Eigenschaft beispielsweise dann vorhanden ist, wenn

$$L(0) \neq L(a)$$

ist. Auf der rechten Seite von (26) ist  $k$  sicher mindestens 2, denn sie ist nach (17a) bis auf einen Faktor gleich dem Ausdruck

$$e^{i\alpha} (u_1 a - u_2'(a)) = \frac{A}{\varrho} + \frac{B}{\varrho^2}.$$

Aus (20) folgt aber, dass  $A = \frac{\psi}{\varrho}$  gesetzt werden kann, falls, wie wir auch jetzt annehmen wollen,  $\frac{dL(x)}{dx}$  stückweise stetig ist. Wir bestimmen  $A$  genauer. Aus (20) folgt

$$A = \frac{L(a) - L(0)}{4\varrho} + \frac{L(a) - L(0)}{4\varrho} e^{2\varrho ia} + \frac{1}{2i\varrho} \int_0^a \frac{dL}{dx} \cdot \frac{e^{2\varrho ix} + e^{2\varrho i(a-x)}}{2i} dx.$$

Nun ist nach (17)  $e^{i\alpha} = \frac{\psi}{\varrho}$ , also  $e^{i\gamma} = \left(\frac{\psi}{\varrho}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha}}$ . Der zweite Summand hat also die Form  $\frac{\psi}{\varrho^{\frac{\gamma}{\alpha}}}$ . Für den dritten schreiben wir

$$\varrho = \alpha + i\beta, \text{ also } e^{-\gamma\beta} = \left(\frac{\psi}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha}} = \varepsilon; \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon = 0, \text{ für } \gamma > 0$$

$$\beta = \frac{1}{\gamma} \lg \left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Sodann zerlegen wir ähnlich wie früher

$$\int_0^a = \int_0^{\frac{\sqrt{\beta}^{-1}}{\beta}} + \int_{\frac{\sqrt{\beta}^{-1}}{\beta}}^a \text{ bzw. } = \int_0^{a-\sqrt{\beta}^{-1}} + \int_{a-\sqrt{\beta}^{-1}}^a.$$

Daraus erkennt man leicht, dass das Integral im letzten Summanden von der Form  $\varepsilon$  ist. Es ist also

$$A = \frac{L(a) - L(0)}{4\varrho} + \frac{\varepsilon}{\varrho}.$$

Den Faktor  $B$  findet man leicht aus den Gleichungen (18)

$$B = \int_0^a dx' L' \cdot \frac{e^{\varrho i(a-x')} - 1}{2i} \cdot \int_0^{x'} L'' \cdot (u_1'' e^{\varrho i x''}) \cdot \frac{e^{2\varrho i(x'-x'')} - 1}{2i} dx'' - \\ - \int_0^a dx' L' \cdot \frac{e^{2\varrho i(a-x')} + 1}{2} \cdot \int_0^{x'} L'' \cdot (\varrho u_2'' e^{\varrho i x''}) \cdot \frac{e^{2\varrho i(x'-x'')} - 1}{2i} dx''.$$

Multipliziert man die Binome in den Integralen aus, so ergeben sich zum

Über die Existenz von Eigenfunktionen einer reellen Variablen bei linearen etc. 141

Teil Summanden, bei denen unter wenigstens einem der beiden Integralzeichen ein Faktor  $e^{2\varrho iz}$  steht<sup>1</sup>; diese haben nach dem eben Gesagten die Form  $\varepsilon$ . Der Rest ist

$$\frac{-1}{4} \int_0^a dx' \cdot L' \int_0^{x'} L''(u_1'' e^{\varrho iz''}) dx'' - \frac{i}{4} \int_0^a dx' L' \int_0^{x'} L''(\varrho u_2'' e^{\varrho iz''}) dx''.$$

Setzt man hier abermals für  $u_1'' e^{\varrho iz''}$ ,  $u_2'' e^{\varrho iz''}$  ihre asymptotischen Ausdrücke (vgl. (4; I)), so erhält man nach Ausmultiplikation Grössen, die unter dem zweiten Integralzeichen entweder einen Faktor  $e^{2\varrho iz''}$  oder  $\frac{1}{\varrho}$  haben. Die Summanden, die gar nicht mehr von  $\varrho$  abhängen, heben sich gerade fort. Wir erhalten also schliesslich die Gleichung

$$e^{\varrho ia} = \pm \frac{L(a) - L(0)}{8i\varrho^2} + \frac{\varepsilon}{\varrho^2},$$

was wir beweisen wollten.

Damit ist das Randwertproblem in gewissen Grenzen gelöst. Nicht gelungen ist dagegen, die Darstellung willkürlicher Funktionen zu beweisen, weder mit Hilfe des Konturintegrals noch mittels asymptotischer Darstellung, auch nicht im rein trigonometrischen Falle.

Wir fassen das Resultat noch einmal zusammen.

Das Randwertproblem

Satz 20.

$$\begin{aligned} \pm iu'(0) + a_3 u(a) + u'(a) &= 0 \\ u(0) \pm iu(a) &= 0 \end{aligned}$$

ist für den Fall, dass  $a_3$  nicht verschwindet, für eine unendliche Anzahl von  $\lambda$ -Werten lösbar, falls die Funktion  $L(x)$  eine stückweise stetige Ableitung besitzt.

Eine hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit, falls  $a_3$  verschwindet, ist neben der genannten Bedingung das Bestehen der Ungleichung

$$L(a) - L(0) \neq 0.$$

Bzgl. der Eigenwerte gilt: In einem gewissen zu beiden Seiten der  $x$ -Achse liegenden Keilgebiet, das sich mit zunehmendem  $|x|$  proportional mit  $\lg|x|$  erweitert, liegen keine Eigenwerte.

---

<sup>1</sup> Abgesehen natürlich von den zu  $u_1''$  und  $u_2''$  gehörigen Faktoren  $e^{\varrho iz''}$ , welche ja die Beschränktheit dieser Funktionen erst gewährleisten.

### Schlussfolgerungen.

#### 1. Verallgemeinerung der Differentialgleichung.

In der Differentialgleichung

$$(1) \quad y'' + p_1(x)y' + (\lambda p_2(x) + p_3(x))y = 0 \quad (0 \leq x \leq a)$$

seien die Funktionen  $p_r(x)$  in  $[0, a]$  stetig und vorläufig beliebig komplex. Durch Multiplikation mit  $e^{\int p_1 dx}$  kann man (1) auf die Form bringen

$$(2) \quad \frac{d}{dx}(k(x) \cdot y') + (g(x)\lambda - l(x))y = 0.$$

Diese Gleichung liesse sich natürlich auch direkt behandeln. Legt man aber den Funktionen  $k, g, l$  gewisse Einschränkungen auf, so können wir mit unseren bisherigen Sätzen auskommen, indem man (2) mittels einer bekannten Transformation in die bisher zu Grunde liegende Differentialgleichung transformiert.

Die zu (2) gehörigen Randbedingungen seien

$$(3) \quad \begin{aligned} a_1 y(0) + a_2 y'(0) + a_3 y(a) + a_4 y'(a) &= 0 \\ b_1 y(0) + b_2 y'(0) + b_3 y(a) + b_4 y'(a) &= 0 \\ \mathcal{A}_{12} &= \mathcal{A}_{34} \quad (a_r, b_r \text{ beliebig komplex}). \end{aligned}$$

Sind die Funktionen  $g, k, l$  reell und  $g$ , sowie  $k$  in  $[0, a]$  verschieden von Null, dann geht durch die umkehrbar eindeutige Transformation<sup>1</sup>

$$(4) \quad t = \frac{a}{\int_0^a \sqrt{g/k} dx} \cdot \int_0^x \sqrt{g/k} dx; \quad y = z \cdot (k \cdot g)^{-\frac{1}{4}},$$

falls noch die zweiten Ableitungen von  $k$  und  $g$  existieren, (2) und (3) über in:

<sup>1</sup> Denn  $\frac{dt}{dx}$  ist im ganzen Intervall endlich und verschieden von Null; über die Transformation vgl. Kneser l. c. p. 101/110.



$$\ddot{z} + z \left\{ \lambda \left( \frac{1}{a} \int_0^a \sqrt{g/k} dx \right)^2 - \left[ \frac{l}{g} \left( \frac{1}{a} \int_0^a \sqrt{g/k} dx \right)^2 - \frac{3 \dot{k} \dot{g}}{8 k g} - \frac{3}{16} \left( \frac{\dot{k} \dot{g}}{k g} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{\ddot{k} \ddot{g}}{k g} \right] \right\} = 0$$

(4 a, b)

$$z(0) \left[ \frac{a_1}{(k g)_0} - \frac{a_2 a}{4 C} \left( \frac{\dot{k} \dot{g}}{k^{3/4} g^{3/4}} \right)_0 \right] + \frac{a_2 a}{C} \dot{z}(0) (k^{-3/4} g^{1/4})_0 + z(a) \left[ \frac{a_3}{(k g)_a} - \frac{a_4 a}{4 C} \left( \frac{\dot{k} \dot{g}}{k^{3/4} g^{3/4}} \right)_a \right] +$$

$$+ \frac{a_4 a}{C} \dot{z}(a) (k^{-3/4} g^{1/4})_a = 0^1$$

$$z(0) \left[ \frac{b_1}{(k g)_0} - \frac{b_2 a}{4 C} \left( \frac{\dot{k} \dot{g}}{k^{3/4} g^{3/4}} \right)_0 \right] + \frac{b_2 a}{C} \dot{z}(0) (k^{-3/4} g^{1/4})_0 + z(a) \left[ \frac{b_3}{(k g)_a} - \frac{b_4 a}{4 C} \left( \frac{\dot{k} \dot{g}}{k^{3/4} g^{3/4}} \right)_a \right] +$$

$$+ \frac{b_4 a}{C} \dot{z}(a) (k^{-3/4} g^{1/4})_a = 0.$$

Dabei wurde  $\frac{df(t)}{dt} = \dot{f}(t)$  gesetzt. Man sieht, dass auch die transformierten Koeffizienten die Orthogonalitätsrelation erfüllen, falls  $k(0) = k(a)$  ist.

Sind nun  $g, k, l$  komplex, so wird im allgemeinen

$$t = u(x) + i v(x)$$

sein. Man ist also gezwungen  $x$  als komplexe Variable anzusehen. Die Funktionen  $k, g, l$ , werden dann als regulär vorausgesetzt in einem Bereich  $B$  der  $x$ -Ebene, dessen Bild in der  $t$ -Ebene  $B'$  sei. Dann lassen sich die gewonnenen Sätze über das Randwertproblem benutzen, wenn man annimmt, dass das Intervall  $0 \leq t \leq a$  in  $B'$  enthalten sei. Die Gleichungen (4 a, b) gelten aber nicht bloss für  $0 \leq t \leq a$  sondern in ganz  $B'$ , im Gegensatz zu den Entwicklungssätzen. Wir gehen auf diese Möglichkeit jedoch nicht näher ein, sondern fragen uns vielmehr nach den Bedingungen über  $g$  und  $k$ , unter welchen die Transformation (4) reell ausfällt für reelle Werte von  $x$ .

Offenbar muss dann  $\sqrt{\frac{g}{k}}$  und mithin  $g/k$  bis auf einen konstanten Faktor selbst reell sein. Es sei also

$$\frac{g}{k} = \frac{g_1 + i g_2}{k_1 + i k_2} = \frac{g_1 k_1 + g_2 k_2 + i(-g_1 k_2 + g_2 k_1)}{k_1^2 + k_2^2}$$

$$= \frac{g_1 k_1 + g_2 k_2}{k_1^2 + k_2^2} (1 + i D).$$

---

<sup>1</sup>  $C = \int_0^a \sqrt{g/k} dx.$

$$(5) \quad -g_1 k_2 + g_2 k_1 = D(g_1 k_1 + g_2 k_2); \quad k_1(g_2 - Dg_1) = k_2(g_1 + Dg_2),$$

und  $D$  reell. Daraus ergeben sich folgende Möglichkeiten:

Sind  $g_1$  und  $g_2$  linear abhängig, so sind es auch  $k_1$  und  $k_2$  und umgekehrt; beide Funktionen müssen dann im ganzen Intervall verschieden von Null sein.

Sind  $g_1$  und  $g_2$  unter sich, und  $k_1$  und  $k_2$  unter sich linear unabhängig, so dürfen höchstens zwei dieser Funktionen an demselben Punkte verschwinden, und zwar müssen sie dann gleichen unteren Index haben.

Genügen die Funktionen der Relation (5), so lässt sich leicht zeigen, dass dann  $\frac{g}{k}$  im ganzen Intervall von Null verschieden und endlich ist.

Aus der Tatsache, dass unter den genannten Bedingungen (Relation (5)) die Transformation umkehrbar eindeutig und reell ist, folgt sofort die Lösbarkeit des Randwertproblems (2), (3) in voller Allgemeinheit, da es ja für den Fall (4 a, b) bereits erledigt worden ist. Für den Entwicklungssatz müssen wir natürlich das Schema

$$(6) \quad \begin{pmatrix} 0 & \pm i & a_3 & 1 \\ 1 & 0 & \pm i & 0 \end{pmatrix}$$

oder ein diesem äquivalentes ausschliessen. Die Transformation (4) führt nämlich zu einem ähnlichen Schema in (4 b), in welchem nur  $a_3$  geändert ist.

$\varphi_n(t)$  seien nun die Eigenfunktionen der Aufgabe (4 a, b) und  $f(t)$  entwickelbar, dann folgt aus

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \int_0^a f(t) \varphi_n(t) dt,$$

wenn wir

$$\varphi_n(t) \cdot [k(x(t)) \cdot g(x(t))]^{-\frac{1}{2}} = \chi_n(x(t))$$

setzen, wo also  $\chi_n(x)$  den Gleichungen (2), (3) genügt:

$$(7) \quad f(t(x)) \cdot (k(x), g(x))^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(x) \int_0^a [f(t(\alpha)) (k(\alpha), g(\alpha))^{-\frac{1}{2}}] (k \cdot g)^{\frac{1}{2}} \cdot \chi_n(\alpha) dt(\alpha).$$

Für die Funktionen  $\chi_n(x)$  gelten die Relationen

$$(7 \text{ a}) \quad \frac{a}{\int_0^a \sqrt{g/k} dx} \cdot \int_0^a \chi_n(x) \chi_m(x) \cdot (k(x) g(x))^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{g/k} \cdot dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

und

$$\frac{a}{\int_0^a \sqrt{g/k} dx} \cdot \int_0^a F(x) \chi_n(x) g(x) dx$$

ist der Fourierkoeffizient von  $F(x)$ . Es ist klar, dass, wenn eine Funktion  $F(x)$  die Bedingungen (3) erfüllt, die Funktion  $F(x) (k(x) \cdot g(x))^{\frac{1}{2}}$  als Funktion von  $t$  betrachtet die Bedingungen (4 b) erfüllt. Es gilt insgesamt also folgender Satz:

Sind in (2) die Funktionen  $l, g, k$  stetige komplexe Funktionen von  $x, g$  Satz 21. und  $k$  ausserdem zweimal stetig differenzierbar und in  $[0, a]$  von Null verschieden, erfüllen sie ausserdem die Relationen

$$k(0) = k(a) \\ k_1(g_2 - Dg_1) = k_2(g_1 + Dg_2); \quad k = k_1 + ik_2, \quad g = g_1 + ig_2, \quad D \text{ bel. reell,}$$

so ist das Randwertproblem (2), (3) lösbar, nötigenfalls bei gewissen Sonderbedingungen im Falle (6).

Schiessen wir den letzteren Fall aus, so gilt für alle Funktionen, welche die Bedingungen von Satz 2. oder 3. erfüllen, der Entwicklungssatz im Sinne der Gleichungen (7). Eliminiert man aus den Randbedingungen die ersten Ableitungen, soweit es geht, und erfüllt die Funktion  $F(x)$  diejenigen Randbedingungen, welche keine Ableitungen mehr enthalten, so konvergiert ihre Entwicklung nach Ausschluss der Unstetigkeitsstellen durch beliebig kleine offene Intervalle im Restintervall gleichmässig. Auch über absolute Konvergenz und gliedweise Differenzierbarkeit lassen sich leicht die den früheren analogen Sätze ableiten.

## 2. Zusammenfassung der Sätze über die Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$(8) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (p(t) - kq(x))u = 0.$$

Wir beschränken uns auf den Fall, dass  $p(t)$  und  $q(x)$  reell sind. Ausserdem sei  $k$  positiv,  $p(t)$  und  $q(x)$  stetig,  $q'(x)$ ,  $q''(x)$  stückweise stetig für  $0 \leq x \leq a$ ,  $t$  beliebig und

$$\int_0^{\infty} p dx, \int_0^{-\infty} p dx \text{ integrierbar, sowie}$$

$$q(0) = q(a).$$

Dann ist folgender Satz beweisbar:

Satz 22. Es existiert eine Lösung  $U(t, x)$  von (8), für welche

$$U(t_0, x) = F(x); \quad \left( \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right)_{t=t_0} = G(x) \text{ ist,}$$

wo  $F(x)$ ,  $G(x)$  in  $[0, a]$  stetig differenzierbar sind, ausserdem  $F''(x)$  stetig,  $G''(x)$ ,  $F'''(x)$ ,  $F^{IV}(x)$  stückweise stetig sind. Die Randwerte dieser Funktionen sind dabei folgenden Bedingungen unterworfen: Schreiben wir zur Abkürzung:

$$F(0), F'(0), F(a), F'(a); \quad G(0), G'(0), G(a), G'(a); \\ = u_1, u_2, u_3, u_4; \quad = v_1, v_2, v_3, v_4;$$

$$\begin{vmatrix} u_r & v_r \\ u_\rho & v_\rho \end{vmatrix} = \delta_{r\rho} \quad \begin{vmatrix} a_r & b_r \\ a_\rho & b_\rho \end{vmatrix} = \mathcal{A}_{r\rho},$$

so ist in jedem Falle

$$\delta_{12} = \delta_{34},$$

verschwindet  $\delta_{13}$ , aber nicht sämtliche  $\delta_{r\rho}$ , so sei ausserdem

$$F''(0)\delta_{23} + F''(a)\delta_{12} = 0;$$

verschwinden aber alle  $\delta_{r\rho}$  und in  $\delta_{13}$  sämtliche Elemente<sup>1</sup>, so sei statt dessen

$$F'(0)F''(0) - F'(a)F''(a) = 0,$$

---

<sup>1</sup> Ist dies nicht der Fall, trotzdem alle  $\delta_{r\rho}$  gleich Null sind, so genügt allein die Bedingung  $\delta_{12} = \delta_{34}$ .

Über die Existenz von Eigenfunktionen einer reellen Variablen bei linearen etc. 147  
 falls ausserdem  $u_3$  und  $u_1$  nicht beide verschwinden. Andernfalls gelte die Bedingung

$$G'(0)F''(0) - G'(a)F''(a) = 0.$$

Die Lösung  $U(t, x)$  bestimmen wir in der Weise, dass wir zwei Koeffizientenreihen  $a_\nu, b_\nu$  herstellen derart, dass nicht alle  $\mathcal{A}_{\nu\varrho}$  verschwinden und

$$\begin{aligned} \Sigma a_\nu u_\nu &= \Sigma b_\nu u_\nu = \Sigma a_\nu v_\nu = \Sigma b_\nu v_\nu = 0 \\ \mathcal{A}_{12} &= \mathcal{A}_{34} \end{aligned}$$

ist. Damit ist das Problem auf eines der bereits behandelten zurückgeführt. Die Bedingung

$$\delta_{12} = \delta_{34}$$

ist wesentlich hervorgerufen durch die Forderung  $\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{34}$ , an die wir uns vorläufig binden müssen; sie ist wie diese wohl hinreichend, aber nicht notwendig. Der Beweis, dessen Durchführung sehr weitschweifig ist, verläuft so, dass wir zunächst  $\delta_{13} \neq 0$  annehmen. Man bestimmt dann aus den Gleichungen

$$\delta_{13} \neq 0.$$

$$\Sigma a_\nu u_\nu = \Sigma a_\nu v_\nu = 0, \text{ bzw. } \Sigma b_\nu u_\nu = \Sigma b_\nu v_\nu = 0$$

$a_3$  und  $a_1$  und ähnlich  $b_3$  und  $b_1$ , wobei die anderen  $a_\nu, b_\nu$  zunächst noch frei wählbar sind. Aus der Forderung  $\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{34}$  folgt dann leicht  $\delta_{12} = \delta_{34}$ ; da  $\mathcal{A}_{24}$  (wie man leicht zeigen kann) ungleich Null sein muss, so ist, wie ein Vergleich mit § 7; II (S. 109) lehrt, die Differentialgleichung in der Tat unter den angegebenen Bedingungen lösbar.

Dann setzen wir  $\delta_{13} = 0, \delta_{24} \neq 0$ . Es zeigt sich, dass jetzt  $\mathcal{A}_{24} = 0$  sein muss;  $\delta_{13} = 0; \delta_{24} \neq 0$ . im übrigen verläuft der Beweis ähnlich dem vorigen.<sup>1</sup>

Sodann nehmen wir  $\delta_{13} = \delta_{24} = 0$ , aber nicht zugleich  $\delta_{12} = \delta_{34} = 0$ . Auch  $\delta_{13} = \delta_{24} = 0$ . hier muss  $\mathcal{A}_{24} = 0$  genommen werden.<sup>1</sup>

Schliesslich seien alle  $\delta_{\nu\varrho} = 0$ . Es wird zunächst der Fall betrachtet

$$u_1 \text{ oder } u_3 \neq 0,$$

dann kann  $\mathcal{A}_{24} \neq 0$  genommen werden.

Dann folgt die Betrachtung des Falles

<sup>1</sup> Es kommt auf den Fall III; § 6 hinaus, wo  $B \neq 0$  ist.

$$u_1 = u_3 = 0; \quad u_2 u_4 \neq 0;$$

hier muss  $\mathcal{A}_{24}$  wieder verschwinden; jedoch kann die Grösse  $B$  des dritten Abschnittes verschieden von Null angenommen werden.

Auch im Falle, dass  $u_3$  oder  $u_4$  verschwindet, kann  $B \neq 0$  angenommen werden.

Sind alle  $u_v$  gleich Null, dann gelten für die  $v_v$  ähnliche Betrachtungen wie eben für die  $u_v$ , nur sind jetzt  $F'(0)$  und  $F'(a)$  durch  $G'(0)$  und  $G'(a)$  zu ersetzen.

Damit sind alle möglichen Fälle aufgeführt.

