MÉMOIRE SUR LES SÉRIES D'INTERPOLATION.

Par

RENÉ LAGRANGE,

à DIJON.

Introduction.

Les séries de factorielles ont donné lieu à de nombreuses généralisations, mais on doit reconnaître que celles-ci se sont généralement bornées à des études de domaine de convergence, sans que fût sérieusement entreprise l'étude des rapports entre la fonction analytique représentée et la série. L'intérêt de ces recherches, même celles si intéressantes de Carmichaël[1], demeure assez restreint, tandis qu'il n'en serait plus nécessairement de même si l'on pouvait résoudre, pour de telles séries, les mêmes problèmes que pour les séries classiques de Newton et de facultés: détermination d'une série représentant une fonction analytique donnée, unicité ou multiplicité du développement; conditions nécessaires et conditions suffisantes pour qu'une fonction soit développable en une série de l'espèce considérée.

Le but de ce travail est de montrer que l'on peut répondre à la plupart de ces questions pour des classes assez générales de séries de fractions rationnelles, du type

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_n)}, \tag{1}$$

où les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots$ sont 2 suites de constantes, sur lesquelles nous serons amenés à faire des hypothèses plus ou moins restrictives. Cette étude a été rendue possible par l'emploi d'une identité que je crois inédite, qui généralise l'identité classique

[1] »On series of iterated linear fractionnal functions» Rend. Circ. M. di Palermo, (1914), t. 36.

1 — 34472. *Acta mathematica*. 64. Imprimé le 28 août 1934.

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0)(\zeta - z_1)} + \frac{(z - z_0)(z - z_1)}{(\zeta - z_0)(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} + \cdots + \\ + \frac{(z - z_0)\cdots(z - z_n)}{(\zeta - z_0)\cdots(\zeta - z_n)}\frac{1}{\zeta - z},$$

et que j'établis au premier paragraphe. On peut ainsi former le développement limité d'une fonction holomorphe $F(z)$, où les coefficients et le reste s'expriment par des intégrales de contour. Les coefficients s'expriment d'ailleurs en fonction des valeurs que prend $F(z)$ aux points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, tout au moins sous certaines conditions très générales. L'expression du reste permet de rechercher des conditions suffisantes pour que $F(z)$ admette un développement en série.

En dehors des possibilités de recherche que présentent les séries de cette nature, il est intéressant d'observer que leur forme reste invariante pour toute transformation homographique de la variable, les 2 suites des α_n et β_n, ou bases de la série, subissant alors la même transformation.

Dans ce travail on considère les séries dont les 2 bases ont la même limite, qu'on peut supposer infinie à l'aide de la remarque précédente, ou 2 limites distinctes qu'on peut supposer respectivement nulle et infinie.

Dans le premier cas on est conduit à étudier plus particulièrement les séries dont les 2 bases sont, tout au moins à partir d'un certain rang, des progressions arithmétiques dont les raisons u et v sont telles que $\Re\left(\frac{v}{v-u}\right)$ soit positif, cette restriction ayant pour but de permettre de déterminer les coefficients de la série en fonction des valeurs qu'elle prend aux points $\alpha_n = \alpha + nu \, (n = 1, 2, \ldots)$. Ces séries, dont les analogies avec les séries de Newton sont remarquables, constituent le genre (N).

Dans le deuxième cas, je supposerai que les 2 séries $\Sigma \alpha_n$ et $\Sigma \frac{1}{\beta_n}$ sont absolument convergentes; les séries correspondantes forment le genre (E), et se comportent à beaucoup de points de vue comme les séries entières.

Le premier chapitre est consacré à l'étude de la forme du domaine de convergence de ces deux genres de séries. On obtient l'analogue du théorème de Jensen-Bendixson pour celles du genre (N), et du théorème d'Abel sur les séries entières pour celles du genre (E), de sorte que les domaines de convergence ont respectivement la forme d'un demi-plan et d'un cercle.

Le chapitre II traite de la convergence absolue, et montre la possibilité de l'existence d'une bande de simple convergence pour le genre (N). Pourtant les séries de ces deux genres donnent lieu à des développements de zéro, et c'est cette qualité commune, ainsi que les analogies des méthodes d'étude, qui nous a fait paraître utile de les considérer dans un même travail.

Dans le chapitre III on apprend à déterminer la frontière de convergence. A l'exception de points appartenant aux 2 bases, une série (E) converge aux mêmes points que la série entière $\sum \frac{(-1)^n a_n z^n}{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n}$. Le demi-plan de convergence d'une série du genre (N) est défini par l'inégalité

$$\Re\left(\frac{z-\alpha}{u} - \frac{z-\beta}{v}\right) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{L\left|\sum_{s=n}^{\infty} a_s \left(\frac{u}{v}\right)^s\right|}{Ln}$$

lorsque le deuxième membre a un sens, sinon par l'inégalité

$$\Re\left(\frac{z-\alpha}{u} - \frac{z-\beta}{v}\right) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{L\left|\sum_{s=0}^{n} a_s \left(\frac{u}{v}\right)^s\right|}{Ln}.$$

On voit en outre que deux séries (N), pour lesquelles les quantités $\frac{1}{u} - \frac{1}{v}$, $\frac{\alpha}{u} - \frac{\beta}{v}$, $a_s\left(\frac{u}{v}\right)^s$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ sont égales, convergent aux mêmes points, à l'exception possible de certains α_n et β_n. Cette propriété est l'extension du théorème de Landau sur les séries de Newton et de facultés associées.

Les transformations linéaires et prolongements analytiques sont l'objet du chapitre IV.

Enfin les deux derniers chapitres sont consacrés à la possibilité de développer une fonction analytique en séries de cette nature. Toute fonction méromorphe à l'origine admet un développement de genre (E). Toute fonction $F(z)$ méromorphe dans un demi-plan fermé, et d'ordre fini par rapport à $e^{|z|}$ dans ce demi-plan, est développable en série de genre (N); cette propriété asymptotique est justement la condition suffisante énoncée pour le développement d'une fonction, holomorphe dans un demi-plan $\Re\left(\frac{z}{u}\right) > h$, en une série générale de Newton $\Sigma a_n (z-u)(z-2u)\cdots(z-nu)$. Observons d'ailleurs que ces séries de Newton sont la forme limite des séries de genre (N) où v devient infini. Cette propriété asymptotique est précisée lorsqu'il s'agit d'obtenir un développement de bases données, c'est à dire lorsqu'on se donne les 4 paramètres α, β, u, v; on obtient ainsi l'analogue du théorème de Carlson-Nörlund relatif aux séries ordinaires de Newton. La fonction caractéristique $\psi(\theta)$ qui apparait dans la condition

$$\left| F\left(h + \frac{r e^{i\theta}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}\right) \right| < C(1 + r)^{k+\varepsilon(r)} e^{r\psi(\theta)}$$

a été déterminée de façon aussi précise que possible; une étude assez détaillée en est faite, au cours de laquelle apparait comme jouissant de propriétés spéciales la catégorie des séries (N) pour lesquelles $|u|$ est inférieur à $|v|$; ce n'est en effet que pour ces séries que $\psi(\theta)$ est positif, tandis que cette fonction est essentiellement négative lorsque $|u| \geq |v|$; or une fonction $F(z)$ non identiquement nulle ne peut vérifier, dans un demi-plan d'holomorphie, une inégalité de la forme

$$|F(z)| < Ce^{-K|z|} \qquad K > 0.$$

L'étude du développement d'un polynôme en une série de genre (N), faite dans les derniers paragraphes de ce mémoire, éclaire la classification de ces séries, et conduit à les partager en 3 catégories suivant que $|u|$ est inférieur, égal ou supérieur à $|v|$, les développements de ces différentes catégories existant respectivement dans tout le plan, dans un demi-plan dépendant du degré du polynôme, et n'existant pas pour la dernière catégorie. Cet exemple illustre le chapitre VI consacré d'autre part à la recherche d'une condition suffisante et de valeur effective pour qu'une fonction $F(z)$ admette un développement où $v = -u$. L'étude détaillée de la fonction caractéristique générale $\psi(\theta)$ que l'on a faite au cinquième chapitre montrait en effet qu'il y avait intérêt, pour les séries des deuxième et troisième catégorie, à représenter le reste du développement limité, pour lequel on recherche une valeur majorante, à l'aide d'un contour de dimensions infiniment grandes par rapport au nombre des termes qui précèdent ce reste. Nous avons ainsi réussi à démontrer qu'une fonction holomorphe et d'ordre fini par rapport à z dans un demi-plan est développable sous la forme $\sum a_n \frac{(z-\alpha-u)(z-\alpha-2u)\cdots(z-\alpha-nu)}{(z-\beta+u)(z-\beta+2u)\cdots(z-\beta+nu)}$. Le cas des développements quelconques de la seconde catégorie doit pouvoir être traité par la même méthode, grâce à des modifications de détails, qu'il semblerait intéressant d'étudier. En tout cas, les développements particuliers auxquels nous avons dû nous borner présentent l'intérêt d'être aisément calculables pour les polynômes et les fractions rationnelles à pôles simples, comme il est montré à la fin de ce travail.

Chapitre I.

Convergence de certaines séries

$$\sum a_n \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_n)}.$$

1. Considérons deux suites de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$, et $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n, \ldots$, ainsi que l'identité évidente

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha_1} + \frac{z-\alpha_1}{\zeta-\alpha_1}\frac{1}{\zeta - z}; \tag{1}$$

Considérons également, d'une manière plus générale, l'identité

$$\frac{z-\beta_n}{\zeta - z} = \frac{-\beta_n + \alpha_{n+1}}{\zeta - \alpha_{n+1}} + \frac{z-\alpha_{n+1}}{\zeta - \alpha_{n+1}}\frac{\zeta-\beta_n}{\zeta - z}.$$

Posons

$$\gamma_n = -\beta_n + \alpha_{n+1} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

et écrivons cette dernière identité sous la forme

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{\gamma_n}{\zeta - \alpha_{n+1}}\frac{1}{z-\beta_n} + \frac{\zeta-\beta_n}{\zeta-\alpha_{n+1}}\frac{z-\alpha_{n+1}}{z-\beta_n}\frac{1}{\zeta - z}. \tag{3}$$

Ceci établi, substituons à la fraction $\frac{1}{\zeta - z}$ au second membre de (1) l'expression qu'en donne (3) pour $n = 1$. Il vient

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta-\alpha_1} + \frac{\gamma_1}{(\zeta-\alpha_1)(\zeta-\alpha_2)}\frac{z-\alpha_1}{z-\beta_1} + \frac{\zeta-\beta_1}{(\zeta-\alpha_1)(\zeta-\alpha_2)}\frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}{z-\beta_1}\frac{1}{\zeta - z}.$$

On peut de nouveau remplacer la dernière fraction $\frac{1}{\zeta - z}$ par l'expression qu'en donne (3) pour $n = 2$, et ainsi de suite. En convenant de faire

$$\begin{cases} \gamma_\nu(\zeta-\beta_1)(\zeta-\beta_2)\cdots(\zeta-\beta_{\nu-1}) = 1 \text{ pour } \nu = 0, \\ (\zeta-\beta_1)(\zeta-\beta_2)\cdots(\zeta-\beta_{\nu-1}) = 1 \text{ pour } \nu = 1, \end{cases} \tag{4}$$

ce procédé nous conduit à l'identité

(5) $$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{\nu=0}^{n}\gamma_\nu\frac{(\zeta-\beta_1)(\zeta-\beta_2)\cdots(\zeta-\beta_{\nu-1})}{(\zeta-\alpha_1)(\zeta-\alpha_2)\cdots(\zeta-\alpha_{\nu+1})}\frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_\nu)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_\nu)}+R_n,$$

où

(6) $$R_n=\frac{(\zeta-\beta_1)(\zeta-\beta_2)\cdots(\zeta-\beta_n)}{(\zeta-\alpha_1)(\zeta-\alpha_2)\cdots(\zeta-\alpha_{n+1})}\frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{n+1})}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_n)}\frac{1}{\zeta-z}.$$

Considérons alors une fonction $F(z)$ holomorphe dans un domaine B limité par une frontière rectifiable C supposée ne contenir aucun des α_ν. La formule de Cauchy

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

où l'on remplace $\frac{1}{\zeta-z}$ par le développement au second membre de (5), fournit l'identité

(7) $$F(z)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu\frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_\nu)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_\nu)}+R_n[F],$$

avec

(8) $$a_\nu=\frac{\gamma_\nu}{2\pi i}\int_C F(\zeta)\frac{(\zeta-\beta_1)(\zeta-\beta_2)\cdots(\zeta-\beta_{\nu-1})}{(\zeta-\alpha_1)(\zeta-\alpha_2)\cdots(\zeta-\alpha_{\nu+1})}d\zeta,$$

et

(9) $$R_n[F]=\frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{n+1})}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_n)}\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\frac{(\zeta-\beta_1)(\zeta-\beta_2)\cdots(\zeta-\beta_n)}{(\zeta-\alpha_1)(\zeta-\alpha_2)\cdots(\zeta-\alpha_{n+1})}d\zeta.$$

En particulier, il résulte de (4) que

$$a_0=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{F(\zeta)}{\zeta-\alpha_1}d\zeta,\qquad a_1=\frac{\gamma_1}{2\pi i}\int_C\frac{F(\zeta)}{(\zeta-\alpha_1)(\zeta-\alpha_2)}d\zeta;$$

on voit ainsi que a_0 est égal à $F(\alpha_1)$ ou à 0 suivant que α_1 est intérieur au non à B. D'une manière générale, lorsque les α_ν sont distincts, on a

(10) $$a_\nu=\gamma_\nu\sum_{s=1}^{\nu+1}{}_B\frac{(\alpha_s-\beta_1)(\alpha_s-\beta_2)\cdots(\alpha_s-\beta_{\nu-1})\,F(\alpha_s)}{(\alpha_s-\alpha_1)(\alpha_s-\alpha_2)\cdots(\alpha_s-\alpha_{s-1})(\alpha_s-\alpha_{s+1})\cdots(\alpha_s-\alpha_{\nu+1})},$$

l'indice B affecté au signe de sommation exprimant que la somme ne doit être étendue qu'aux α_s intérieurs à B. Il est clair que, si tous les $\alpha_\nu (\nu \leq n)$ sont extérieurs à B, l'identité (7) se réduit à la formule de Cauchy relative à

$$F(z)\frac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_n)}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{n+1})}.$$

2. Lorsque n croît infiniment, on est amené à considérer les séries de terme général

(11) $$a_n(z) = a_n\frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_n)}.$$

Dans ce qui suit, nous supposerons que les 2 suites

$$\begin{aligned}&[\alpha]:\quad \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n,\ \ldots\\ &[\beta]:\quad \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_n,\ \ldots\end{aligned}$$

que nous appellerons les »bases» de la série, ont toutes les deux des limites. En remarquant que ce terme général est de forme invariante pour la transformation homographique la plus générale effectuée sur la variable z, ce qui revient à affectuer sur les 2 bases la même transformation homographique, on peut, grâce à une telle transformation, se borner à l'étude des 2 cas suivants:

1°. Les 2 bases ont la même limite, que l'on choisit égale à l'infini:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\beta_n = \infty;$$

2°. Les 2 bases ont des limites distinctes, que l'on choisit l'une à l'origine, l'autre à l'infini:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0,\ \lim_{n\to\infty}\beta_n = \infty.$$

Dans ce qui suit, nous serons conduits à faire d'autres hypothèses sur ces bases, que nous introduirons quand besoin sera.

3. Considérons tout d'abord la série

(12) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) \qquad \lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\beta_n = \infty,$$

et supposons qu'elle converge pour une valeur z_0 de z différente des α_n. Posons

$$c_n = \frac{a_n(z)}{a_n(z_0)}$$

et écrivons la formule sommatoire d'Abel

$$(13) \qquad \sum_{s=n}^{m} c_s a_s(z_0) = \sum_{s=n}^{m-1} (c_s - c_{s+1}) \sum_{\nu=n}^{s} a_\nu(z_0) + c_m \sum_{\nu=n}^{m} a_\nu(z_0).$$

A tout nombre positif ε on peut associer un nombre n_0 tel que $n \geq n_0$ entraîne

$$(14) \qquad \left| \sum_{\nu=n}^{s} a_\nu(z_0) \right| < \varepsilon \qquad s \geq n;$$

d'autre part

$$\frac{c_s}{c_{s-1}} - 1 = \frac{(z-z_0)(\alpha_s - \beta_s)}{(z_0 - \alpha_s)(z - \beta_s)} = (z - z_0)\left(\frac{1}{\beta_s} - \frac{1}{\alpha_s}\right)\left(1 + \frac{z_0}{\alpha_s} + \frac{z}{\beta_s} + \frac{p_s}{\alpha_s^2} + \frac{q_s}{\alpha_s \beta_s} + \frac{r_s}{\beta_s^2}\right),$$

p_s, q_s, r_s étant des fonctions de z_0, z et s qui restent uniformément bornées, quand s augmente infiniment, dans tout domaine borné situé à distance non nulle des β_n. On en déduit que

$$(15) \qquad \frac{c_s}{c_{s-1}} = e^{(z-z_0)\left(\frac{1}{\beta_s} - \frac{1}{\alpha_s}\right)\left[1 + \frac{z+z_0}{2}\left(\frac{1}{\alpha_s} + \frac{1}{\beta_s}\right) + \frac{p'_s}{\alpha_s^2} + \frac{q'_s}{\alpha_s \beta_s} + \frac{r'_s}{\beta_s^2}\right]},$$

où p'_s, q'_s, r'_s ont la même propriété que p_s, q_s, r_s.

Supposons donc que les 3 séries

$$(16) \qquad \sum \frac{1}{\alpha_n^2}\left(\frac{1}{\beta_n} - \frac{1}{\alpha_n}\right), \quad \sum \frac{1}{\alpha_n \beta_n}\left(\frac{1}{\beta_n} - \frac{1}{\alpha_n}\right), \quad \sum \frac{1}{\beta_n^2}\left(\frac{1}{\beta_n} - \frac{1}{\alpha_n}\right)$$

convergent absolument. Dans ces conditions, s étant supérieur ou égal à n_0, on déduit de (15) que

$$(17) \qquad \frac{c_s}{c_{n_0}} = [1 + \varepsilon(n_0, s)]\, e^{(z-z_0)\sum\limits_{\nu=n_0+1}^{s}\left(\frac{1}{\beta_\nu} - \frac{1}{\alpha_\nu}\right) + \frac{z^2 - z_0^2}{2}\sum\limits_{\nu=n_0+1}^{s}\left(\frac{1}{\beta_\nu^2} - \frac{1}{\alpha_\nu^2}\right)},$$

où $|\varepsilon(n_0, s)| < \varepsilon'$, quel que soit le nombre positif ε', pourvu que n_0 soit suffisamment grand.

Il vient ensuite

$$c_s - c_{s+1} = c_s\left(1 - \frac{c_{s+1}}{c_s}\right) =$$

$$= - c_s(z - z_0)\left(\frac{1}{\beta_{s+1}} - \frac{1}{\alpha_{s+1}}\right)\left[1 + \frac{z_0}{\alpha_{s+1}} + \frac{z}{\beta_{s+1}} + \frac{p_{s+1}}{\alpha_{s+1}^2} + \cdots\right],$$

et, par conséquent, grâce à (17),

$$(18) \qquad c_s - c_{s+1} =$$

$$= - [1 + \varepsilon'(n_0, s)]\, c_{n_0}(z - z_0)\left(\frac{1}{\beta_{s+1}} - \frac{1}{\alpha_{s+1}}\right) e^{(z - z_0)\sum\limits_{\nu=n_0+1}^{s}\left(\frac{1}{\beta_\nu} - \frac{1}{\alpha_\nu}\right) + \frac{z^2 - z_0^2}{2}\sum\limits_{\nu=n_0+1}^{s}\left(\frac{1}{\beta_\nu^2} - \frac{1}{\alpha_\nu^2}\right)}$$

avec $|\varepsilon'(n_0, s)| < \varepsilon'$ si n_0 est assez grand.

Par exemple, lorsque les α_n et β_n sont les valeurs des itérées de 2 fonctions homographiques, de la forme

$$\alpha_n = \alpha_0 + k^n(\alpha - \alpha_0), \quad \beta_n = \beta_0 + h^n(\beta - \beta_0), \quad |k| \text{ et } |h| > 1,$$

ou de la forme

$$\alpha_n = \alpha + nu, \quad \beta_n = \beta + nu,$$

les séries (16) convergent absolument, et même la série $\sum\left(\frac{1}{\beta_n} - \frac{1}{\alpha_n}\right)$. Par conséquent, $|c_m|$ et $\sum\limits_{s=n}^{m-1}|c_s - c_{s+1}|$ sont bornés quels que soient $n \geq n_0$ et $m > n$, donc il résulte de (13) que la série (12) converge uniformément dans tout domaine de variation de z borné et situé à distance non nulle des β_n. D'ailleurs la convergence absolue de la série $\sum\left(\frac{1}{\beta_n} - \frac{1}{\alpha_n}\right)$ entraînant celle des séries (16), nous pouvons énoncer le

Théorème. *Si la série* $\sum\left(\frac{1}{\beta_n} - \frac{1}{\alpha_n}\right)$ *est absolument convergente, ou bien la série* $\Sigma a_n(z)$ *ne converge en aucun point différent d'un* α_n, *ou bien elle converge uniformément dans tout domaine borné situé à distance non nulle des* β_n.

Dans le cas de la convergence, la somme de cette série est donc une fonction analytique de z, régulière en tout point autre que les β_n, ces points étant d'ailleurs des pôles de cette fonction.

4. Ce cas assez peu intéressant étant écarté, supposons que

$$\alpha_n = \alpha + nu, \quad \beta_n = \beta + nv, \quad u \neq v,$$

α, β, u, v étant 4 constantes. Dans ces conditions,

$$\frac{1}{\beta_n} - \frac{1}{\alpha_n} = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right)\frac{1}{n} - \left(\frac{\beta}{v^2} - \frac{\alpha}{u^2} + \varepsilon_n\right)\frac{1}{n^2},$$

où ε_n est infiniment petit avec $\frac{1}{n}$. Par conséquent la convergence absolue des séries (16), ainsi que celle de $\sum\left(\frac{1}{\beta_n^2} - \frac{1}{\alpha_n^2}\right)$, est assurée. On peut également écrire

$$\sum_{\nu=n_0+1}^{s}\left(\frac{1}{\beta_\nu} - \frac{1}{\alpha_\nu}\right) = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right)\sum_{\nu=n_0+1}^{s}\frac{1}{\nu} - \left[\frac{\beta}{v^2} - \frac{\alpha}{u^2} + h(n_0, s)\right]\sum_{\nu=n_0+1}^{s}\frac{1}{\nu^2},$$

où $h(n_0, s)$ est infiniment petit avec $\frac{1}{n_0}$, donc

$$\sum_{\nu=n_0+1}^{s}\left(\frac{1}{\beta_\nu} - \frac{1}{\alpha_\nu}\right) = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right)\left[L\frac{s}{n_0} - k(n_0, s)\right] - \left[\frac{\beta}{v^2} - \frac{\alpha}{u^2} + h(n_0, s)\right]\sum_{\nu=n_0+1}^{s}\frac{1}{\nu^2},$$

où $k(n_0, s)$ tend également vers 0 avec $\frac{1}{n_0}$. Par conséquent, il résulte de (17) que

$$c_s = [1 + \varepsilon(n_0, s)]\, c_{n_0}\left(\frac{s}{n_0}\right)^{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right)(z - z_0)}, \tag{19}$$

et

$$|c_s| = |1 + \varepsilon(n_0, s)|\, |c_{n_0}|\left(\frac{s}{n_0}\right)^{\Re\left[\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right)(z - z_0)\right]}, \tag{20}$$

où $\varepsilon(n_0, s)$ n'a pas la même valeur que dans (17), mais possède la même propriété, et où $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z.

D'autre part, l'application de la formule (18) donne ici

$$c_s - c_{s+1} = -[1 + \varepsilon''(n_0, s)]\, c_{n_0}(z - z_0)\left(\frac{1}{\beta_{s+1}} - \frac{1}{\alpha_{s+1}}\right)\left(\frac{s}{n_0}\right)^{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right)(z - z_0)}$$

$$= -[1 + \varepsilon'''(n_0, s)]\, c_{n_0}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right)(z - z_0)\frac{n_0^{\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)(z - z_0)}}{s^{1 + \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)(z - z_0)}},$$

où $\varepsilon''(n_0, s)$ et $\varepsilon'''(n_0, s)$ tendent vers o avec $\frac{1}{n_0}$, de façon que l'on ait $|\varepsilon'''(n_0, s)| < \varepsilon'$ pour n_0 assez grand. Il vient donc

$$(21) \qquad |c_s - c_{s+1}| < (1 + \varepsilon')\,|c_{n_0}|\, n_0^{\,\Re\left\{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)(z-z_0)\right\}} \frac{\left|\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)(z - z_0)\right|}{s^{1+\Re\left\{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)(z-z_0)\right\}}},$$

et, par conséquent, pour $n > n_0$

$$(22) \qquad \sum_{s=n}^{m-1} |c_s - c_{s+1}| <$$

$$< (1 + \varepsilon')\,|c_{n_0}|\, n_0^{\,\Re\left\{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)(z-z_0)\right\}} \left|\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)(z - z_0)\right| \sum_{s=n}^{m-1} \frac{1}{s^{1+\Re\left\{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)(z-z_0)\right\}}}.$$

Ce second membre reste borné quels que soient n et m, supérieurs à n_0, lorsque l'on a

$$(23) \qquad \Re\left\{\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)(z - z_0)\right\} > 0.$$

D'une manière plus précise, on peut écrire, en posant $\varrho = \Re\left\{\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)(z - z_0)\right\} > 0$,

$$\sum_{s=n}^{m-1} \frac{1}{s^{1+\varrho}} < \int_{n-1}^{m-1} \frac{dx}{x^{1+\varrho}} = \frac{1}{\varrho}\left[\frac{1}{(n-1)^\varrho} - \frac{1}{(m-1)^\varrho}\right].$$

En résumé, l'identité (13) donne, dans ces conditions,

$$(24) \qquad \left|\sum_{s=n}^{m} a_s(z)\right| < \varepsilon(1 + \varepsilon')\,|c_{n_0}|\, n_0^\varrho \left\{\frac{\left|\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)(z - z_0)\right|}{\varrho} \frac{1}{(n-1)^\varrho} + \frac{1}{m^\varrho}\right\}.$$

Bien plus, lorsque z tend vers z_0 dans la région définie par (23), le facteur de ε au second membre de (24) reste borné pourvu que

$$(25) \qquad \frac{\Re\left\{\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)(z - z_0)\right\}}{\left|\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)(z - z_0)\right|} > k,$$

k étant un nombre positif fixe quelconque. (23) exprime que z reste dans un demi-plan limité par une droite passant par z_0, et (24) nous apprend que la convergence de la série est uniforme dans tout domaine borné intérieur à ce demi-plan.[1] On voit même, en interprétant l'inégalité (25), que la frontière de ce domaine peut contenir z_0, pourvu qu'elle reste, au voisinage de z_0, dans un certain angle de sommet z_0 et intérieur par ailleurs au demi-plan (23). Nous pouvons ainsi énoncer le

Théorème I. *Lorsque la série* (12), *où* $\alpha_n = \alpha + nu$, $\beta_n = \beta + nv$ ($u \neq v$, $uv \neq 0$) *converge en un point* z_0, *différent d'un* α_n, *elle converge uniformément dans tout secteur borné* D, *de sommet* z_0, *situé dans le demi-plan*

$$\Re\left\{\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)(z - z_0)\right\} > 0, \tag{23}$$

dont les côtés font en z_0 *des angles non nuls avec la frontière de ce demi-plan, étant entendu que les voisinages des* β_n *appartenant à ce secteur doivent en être exclus.*

Il est clair que ces résultats subsistent, en remplaçant $\frac{1}{v}$ par 0, lorsque les β_n ne sont plus de la forme $\beta + nv$, mais tels que la série $\Sigma \frac{1}{\beta_n}$ soit absolument convergente. De même, lorsque $\beta_n = \beta + nv$, la série $\Sigma \frac{1}{\alpha_n}$ étant absolument convergente. Comme cas limite, on peut supposer que tous les β_n deviennent infinis avec v dans l'expression $\beta + nv$, et appliquer ce théorème aux séries de Newton, ou, au contraire, que les α_n deviennent infinis avec u dans l'expression $\alpha + nu$, et l'appliquer aux séries de Facultés.

Remarquons que, pour $z = \alpha_n$, le premier membre de (23) devient du signe de $\Re\left(1 - \frac{u}{v}\right)$ lorsque n croît infiniment, et que, pour $z = \beta_n$, il devient du signe de $\Re\left(\frac{v}{u} - 1\right)$. Dans le cas particulier intéressant où $v = -u$, le demi-plan (23) ne contient donc qu'un nombre fini de points β_n, et tous les α_n à partir d'un certain rang.

[1] L'hypothèse que ce domaine est à distance non nulle de tout β_n est toujours sous-entendue.

5. Supposons maintenant que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty,$$

de façon que les 2 séries

$$(26) \qquad \sum \alpha_n \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{\beta_n}$$

convergent absolument.

z_0 et z étant supposés différents de zéro, admettons que (12) converge pour $z = z_0$. En conservant les notations, il vient ici

$$\frac{c_s}{c_{s-1}} = \frac{(z-\alpha_s)(z_0-\beta_s)}{(z-\beta_s)(z_0-\alpha_s)} = \frac{z}{z_0}\,\frac{\left(1-\frac{\alpha_s}{z}\right)\left(1-\frac{z_0}{\beta_s}\right)}{\left(1-\frac{\alpha_s}{z_0}\right)\left(1-\frac{z}{\beta_s}\right)},$$

c'est à dire

$$\frac{z_0}{z}\,\frac{c_s}{c_{s-1}} = 1 + (z-z_0)\frac{\frac{1}{\beta_s} + \frac{\alpha_s}{z_0 z} - \frac{\alpha_s(z_0+z)}{\beta_s z z_0}}{\left(1-\frac{\alpha_s}{z_0}\right)\left(1-\frac{z}{\beta_s}\right)}$$

$$= 1 + \frac{z-z_0}{z}\left(\frac{z}{\beta_s} + \frac{\alpha_s}{z_0} + p_s\alpha_s^2 + q_s\frac{\alpha_s}{\beta_s} + \frac{r_s}{\beta_s^2}\right),$$

p_s, q_s, r_s étant des fonctions de z_0, z et s qui restent uniformément bornées, quand s croît infiniment, dans tout domaine borné situé à distance non nulle des β_n. On peut encore écrire

$$\frac{z_0}{z}\,\frac{c_s}{c_{s-1}} = e^{\left(1-\frac{z_0}{z}\right)\left(\frac{z}{\beta_s} + \frac{\alpha_s}{z_0} + p'_s\alpha_s^2 + q'_s\frac{\alpha_s}{\beta_s} + \frac{r'_s}{\beta_s^2}\right)},$$

où p'_s, q'_s, r'_s jouissent de la même propriété que p_s, q_s, r_s, et, par conséquent, pour $s \geq n_0$,

$$\frac{c_s}{c_{n_0}} = \left(\frac{z}{z_0}\right)^{s-n_0} e^{\left(1-\frac{z_0}{z}\right)\left[\sum_{\nu=n_0+1}^{s}\left(\frac{z}{\beta_s}+\frac{\alpha_s}{z_0}\right) + \varepsilon(n_0, s)\right]},$$

où $\varepsilon(n_0, s)$ tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n_0}\cdot$ Grâce à (26), on a donc

$$(27)\qquad |c_s| = |c_{n_0}|\left|\frac{z}{z_0}\right|^{s-n_0}\left|1 + \varepsilon(n_0, s)\left(1 - \frac{z_0}{z}\right)\right|,$$

$\varepsilon(n_0, s)$ n'ayant pas la même signification que dans l'égalité précédente, mais possédant la même propriété. Une première conclusion est donc que c_s est infiniment petit avec $\frac{1}{s}$ pourvu que $|z| < |z_0|$. D'autre part, on a

$$c_s - c_{s+1} = c_s \frac{(\beta_{s+1} - \alpha_{s+1})(z - z_0)}{(z_0 - \alpha_{s+1})(z - \beta_{s+1})} = \left(1 - \frac{z}{z_0}\right) c_s (1 + \varepsilon_s) \qquad \lim_{s\to\infty} \varepsilon_s = 0,$$

donc

$$(28)\qquad |c_s - c_{s+1}| < (1 + \varepsilon_0)|c_{n_0}|\left|1 - \frac{z}{z_0}\right|\left|\frac{z}{z_0}\right|^{s-n_0},$$

quel que soit $\varepsilon_0 > 0$, pourvu que n_0 soit assez grand. On en conclut que

$$(29)\qquad \sum_{s=n}^{m-1} |c_s - c_{s+1}| < (1 + \varepsilon_0)|c_{n_0}|\left|1 - \frac{z}{z_0}\right| \sum_{s=n}^{m-1}\left|\frac{z}{z_0}\right|^{s-n_0}$$

$$= (1 + \varepsilon_0)|c_{n_0}| \frac{\left|1 - \frac{z}{z_0}\right|}{1 - \left|\frac{z}{z_0}\right|}\left[\left|\frac{z}{z_0}\right|^{n-n_0} - \left|\frac{z}{z_0}\right|^{m-n_0}\right];$$

par conséquent, lorsque $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, il résulte de (13) que

$$(30)\qquad \left|\sum_{s=n}^{m} a_s(z)\right| <$$

$$< \varepsilon(1 + \varepsilon_0)|c_{n_0}| \frac{\left|1 - \frac{z}{z_0}\right|}{1 - \left|\frac{z}{z_0}\right|}\left|\frac{z}{z_0}\right|^{n-n_0} + \varepsilon\,|c_{n_0}|\left|\frac{z}{z_0}\right|^{m-n_0}\left|1 + \varepsilon(n_0, m)\left(1 - \frac{z_0}{z}\right)\right|$$

à condition que n_0 soit assez grand pour que (27) et (28) soient valables. Remarquons que ces résultats subsistent quand z tend vers z_0. Cette inégalité (30) nous permet donc d'énoncer le

Théorème II. *Si les 2 séries $\Sigma \alpha_n$ et $\Sigma \frac{1}{\beta_n}$ sont absolument convergentes, la série (12), supposée convergente pour une valeur z_0 autre que 0 et qu'un α_n, est uniformément convergente dans tout domaine D complètement intérieur au cercle $|z| < |z_0|$;*

cette propriété subsiste, même si z_0 appartient à la frontière de D, à condition que celle-ci soit, au voisinage de z_0, dans un angle formé par 2 cordes du cercle $|z| = |z_0|$. Les voisinages des β_n appartenant à D sont évidemment exclus.

En faisant tendre les α_n vers o et les β_n vers l'infini, on retrouve les séries entières, auxquelles le théorème s'applique. Enfin remarquons qu'aussi bien dans le cas du § 4 que dans celui-ci, la somme de la série est une fonction méromorphe de z dans tout domaine D, ses pôles étant situés aux points β_n appartenant à ce domaine.

Chapitre II.

I. Développements de zéro.

6. Nous considérerons dorénavant des séries

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\dots(z-\beta_n)} \tag{1}$$

satisfaisant aux hypothèses des théorèmes I ou II du chapitre précédent, que nous appellerons respectivement conditions

(N): $\alpha_n = \alpha + nu, \quad \beta_n = \beta + nv,$

(E): $\Sigma \alpha_n$ et $\Sigma \frac{1}{\beta_n}$ absolument convergentes.

Il résulte des théorèmes énoncés que le domaine $\mathfrak{D}$ de convergence de (1) est alors soit un demi-plan

$$\varrho(z) = \Re\left[\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) z\right] > \lambda$$

dans le cas (N), soit un cercle

$$\varrho(z) = \frac{1}{|z|} > \frac{1}{R} = \lambda$$

dans le cas (E). Bien entendu les β_n sont toujours exclus, et l'on peut avoir $\lambda = -\infty$, ou $R = \infty$.

Les coefficients de (1) s'obtiendront de proche en proche en fonction des valeurs de $F(z)$ aux points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots,$ supposés situés dans $\mathfrak{D}$. Tous les α_n sont dans ce domaine, tout au moins à partir d'un certain rang, dans le cas (E). Ce n'est pas toujours vrai dans le cas (N); il n'en est ainsi que si $\Re\left[\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)\alpha_n\right]$ est positif pour n suffisamment grand, c'est à dire si

$$\Re\left(\frac{u}{v}\right) < 1, \tag{2}$$

ce que nous supposerons. Dans ces conditions, nous pouvons étudier simultanément la détermination des coefficients des 2 genres de série considérés; nous désignerons par α_{p+1}, α_{p+2}, ... les éléments de la 1e base qui sont intérieurs à $\mathfrak{D}$, α_p ne l'étant pas.

Ceci posé, les coefficients a_n de (1) sont déterminés par les équations (10) ch. I en fonction des quantités $F(\alpha_1)$, $F(\alpha_2)$, ... $F(\alpha_i)$, ..., qui sont les valeurs de la fonction analytique $F(z)$ en ces points α_i lorsque $i > p$, mais peuvent n'avoir rien de commun avec $F(z)$ lorsque $i \leq p$. Ces p premières quantités, égales en tout cas aux valeurs de la somme de la série aux points α_1, α_2, ... α_p, étant désignées par la notation A_i, on a donc

$$\begin{aligned} a_n = \gamma_n \sum_{s=1}^{p} \frac{(\alpha_s-\beta_1)(\alpha_s-\beta_2)\dots(\alpha_s-\beta_{n-1})A_s}{(\alpha_s-\alpha_1)\dots(\alpha_s-\alpha_{s-1})(\alpha_s-\alpha_{s+1})\dots(\alpha_s-\alpha_{n+1})} \\ + \gamma_n \sum_{s=p+1}^{n+1} \frac{(\alpha_s-\beta_1)(\alpha_s-\beta_2)\dots(\alpha_s-\beta_{n-1})F(\alpha_s)}{(\alpha_s-\alpha_1)\dots(\alpha_s-\alpha_{s-1})(\alpha_s-\alpha_{s+1})\dots(\alpha_s-\alpha_{n+1})}. \end{aligned} \tag{3}$$

Pour $n < p$, la seconde somme disparaît, et la première est limitée à $1 \leq s \leq n+1$.

Substituons ces expressions des coefficients dans (1), et isolons les termes en A_1, A_2, ... A_p. On peut ainsi écrire

$$F(z) = A_1\psi_1(z) + A_2\psi_2(z) + \cdots + A_p\psi_p(z) + \Phi(z), \tag{4}$$

avec

$$\begin{aligned} \psi_s(z) = \sum_{n=s-1}^{\infty} \gamma_n \frac{(\alpha_s-\beta_1)(\alpha_s-\beta_2)\dots(\alpha_s-\beta_{n-1})}{(\alpha_s-\alpha_1)\dots(\alpha_s-\alpha_{s-1})(\alpha_s-\alpha_{s+1})\dots(\alpha_s-\alpha_{n+1})} \cdot \\ \cdot \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\dots(z-\beta_n)}, \end{aligned} \tag{5}$$

et où $\Phi(z)$ représente une série de la forme de (1), indépendante des A_s, et dont la somme coïncide avec $F(z)$ dans le domaine de convergence commun à (1) et aux séries (5) ($s = 1, 2, \dots p$). Nous allons voir, effectivement, que $\psi_p(z)$ converge dans le domaine défini par l'inégalité $\varrho(z) > \varrho(\alpha_p)$, et que l'on a

$$\psi_p(z) = \begin{cases} 0 & \varrho(z) > \varrho(\alpha_p), \\ 1 & z = \alpha_p; \end{cases} \tag{6}$$

ces séries (5) fournissent donc des développements de zéro, généralisant la propriété classique des séries de Newton. Pour le vérifier, posons

$$\psi_p(z) = \frac{(\alpha_p - \beta_1)(\alpha_p - \beta_2) \ldots (\alpha_p - \beta_{p-1})}{(\alpha_p - \alpha_1)(\alpha_p - \alpha_2) \ldots (\alpha_p - \alpha_{p-1})} \frac{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_{p-1})}{(z - \beta_1)(z - \beta_2) \ldots (z - \beta_{p-1})} \varkappa_p(z), \tag{7}$$

de sorte que

$$\varkappa_p(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_{p+\nu} - \beta_{p+\nu-1}) \frac{(\alpha_p - \beta_p)(\alpha_p - \beta_{p+1}) \ldots (\alpha_p - \beta_{p+\nu-2})}{(\alpha_p - \alpha_{p+1})(\alpha_p - \alpha_{p+2}) \ldots (\alpha_p - \alpha_{p+\nu})} \cdot \frac{(z - \alpha_p)(z - \alpha_{p+1}) \ldots (z - \alpha_{p+\nu-1})}{(z - \beta_p)(z - \beta_{p+1}) \ldots (z - \beta_{p+\nu-1})}.$$

D'autre part, l'identité (5) ch. I appliquée aux 2 suites $\alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots$ et $\beta_p, \beta_{p+1}, \ldots$ donne

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha_p} + \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_{p+\nu} - \beta_{p+\nu-1}) \frac{(\zeta - \beta_p)(\zeta - \beta_{p+1}) \ldots (\zeta - \beta_{p+\nu-2})}{(\zeta - \alpha_p)(\zeta - \alpha_{p+1}) \ldots (\zeta - \alpha_{p+\nu})} \cdot \frac{(z - \alpha_p)(z - \alpha_{p+1}) \ldots (z - \alpha_{p+\nu-1})}{(z - \beta_p)(z - \beta_{p+1}) \ldots (z - \beta_{p+\nu-1})} + \frac{(\zeta - \beta_p)(\zeta - \beta_{p+1}) \ldots (\zeta - \beta_{p+n-1})}{(\zeta - \alpha_p)(\zeta - \alpha_{p+1}) \ldots (\zeta - \alpha_{p+n})} \cdot \frac{(z - \alpha_p)(z - \alpha_{p+1}) \ldots (z - \alpha_{p+n})}{(z - \beta_p)(z - \beta_{p+1}) \ldots (z - \beta_{p+n-1})} \frac{1}{\zeta - z};$$

en multipliant les 2 membres par $\zeta - \alpha_p$, et égalant ζ à α_p, on en déduit que la somme $\varkappa_{p,n}$ des $n + 1$ premiers termes de la série qui représente $\varkappa_p(z)$ est égale à

$$\varkappa_{p,n} = \frac{(\alpha_p - \beta_p)(\alpha_p - \beta_{p+1}) \ldots (\alpha_p - \beta_{p+n-1})}{(\alpha_p - \alpha_{p+1})(\alpha_p - \alpha_{p+2}) \ldots (\alpha_p - \alpha_{p+n})} \frac{(z - \alpha_{p+1})(z - \alpha_{p+2}) \ldots (z - \alpha_{p+n})}{(z - \beta_p)(z - \beta_{p+1}) \ldots (z - \beta_{p+n-1})}.$$

On en conclut immédiatement que la somme des $n + 1$ premiers termes de la série représentant $\psi_p(z)$ est nulle pour $z = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-1}, \alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \ldots \alpha_{p+n}$, et prend la valeur 1 pour $z = \alpha_p$. En outre, on peut écrire

$$\varkappa_{p,n} = \frac{z - \beta_{p+n}}{z - \beta_p} \frac{\alpha_p - \beta_p}{\alpha_p - \beta_{p+n}} \frac{(\alpha_p - \beta_{p+1})(\alpha_p - \beta_{p+2}) \ldots (\alpha_p - \beta_{p+n})}{(\alpha_p - \alpha_{p+1})(\alpha_p - \alpha_{p+2}) \ldots (\alpha_p - \alpha_{p+n})} \cdot \frac{(z - \alpha_{p+1})(z - \alpha_{p+2}) \ldots (z - \alpha_{p+n})}{(z - \beta_{p+1})(z - \beta_{p+2}) \ldots (z - \beta_{p+n})},$$

où le produit des 2 dernières fractions est l'expression $\dfrac{a_n(z)}{a_n(z_0)}$ lorsque les 2 bases sont les suites $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \ldots$ et $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots$, avec $z_0 = \alpha_p$. Mais alors les expressions (20) et (27) de $|c_s|$ établies au ch. I nous apprennent que cette quantité tend vers 0 pour $\varrho(z) > \varrho(\alpha_p)$ et croît au contraire infiniment en valeur absolue lorsque $\varrho(z) < \varrho(\alpha_p)$; elle diverge également pour $\varrho(z) = \varrho(\alpha_p)$ sauf pour $z = \alpha_p$. En résumé, *la série $\psi_p(z)$ est convergente et nulle pour $\varrho(z) > \varrho(\alpha_p)$ ainsi que pour tous les nombres $\alpha_n (n \neq p)$. Elle est infinie pour $\varrho(z) < \varrho(\alpha_p)$, et divergente et bornée sur la courbe frontière $\varrho(z) = \varrho(\alpha_p)$, sauf en α_p où $\psi_p(\alpha_p) = 1$.*

Ces conclusions sont d'ailleurs valables, dans le cas (N), sans faire état de la condition (2).

Nous avons ainsi démontré que toute fonction $F(z)$ représentable par une série (1) de la forme (N) ou (E) est représentable dans le domaine $\varrho(z) > \lambda$, $\varrho(z) > \varrho(\alpha_p)$ par une infinité de séries de cette forme, différant entre elles par des développements de zéro. Nous appellerons *séries réduites* les séries (1) dont la somme est égale à $F(z)$ en tous les points de la suite des α_n qui appartiennent au plus grand domaine $\varrho(z) > \mu$ dans lequel $F(z)$ est méromorphe et n'admet pas d'autre pôle[1] que des points β_n, et en supposant, bien entendu, que tous les α_n sont dans ce domaine à l'exclusion d'un nombre fini d'entre eux.

II. Convergence absolue.

7. Il résulte des formules (20) ch. I et (27) ch. I qu'une série (1), de la forme (N) ou (E), qui converge absolument pour $z = z_0$, converge absolument pour $\varrho(z) \geq \varrho(z_0)$. Elle possède donc un domaine de convergence absolue, ayant la même forme que le domaine $\mathfrak{D}$ de convergence ordinaire, défini par une inégalité

$$\varrho(z) > \mu \geq \lambda.$$

Mais alors que $\mathfrak{D}$ peut ne comprendre qu'une partie de sa frontière, le domaine de convergence absolue est fermé dès qu'un point de sa frontière, autre qu'un α_n, lui appartient.

Il résulte des mêmes formules que, si (1) converge au point $z = z_0$, elle converge absolument pour $\varrho(z) > \varrho(z_0) + 1$ lorsqu'elle est du genre (N), et pour

[1] Bien entendu, l'ordre de multiplicité d'un pôle β_n ne doit pas surpasser l'ordre de multiplicité de ce point dans la base $[\beta]$.

$|z| < |z_0|$, c'est à dire $\varrho(z) > \varrho(z_0)$ lorsqu'elle est du genre (E). On peut donc affirmer que

$$\mu - \lambda \begin{cases} \leq 1 & \text{dans le cas (N),} \\ = 0 & \text{dans le cas (E).} \end{cases}$$

Par exemple, le développement de zéro $\psi_p(z)$ diverge sur la frontière $\varrho(z) = \varrho(\alpha_p)$ de son domaine de convergence, sauf au point α_p où $\psi_p(\alpha_p) = 1$. Le domaine de convergence absolue est le même dans le cas (E), d'après ce qui précède, mais aussi dans le cas (N); en effet, le terme général de $\varkappa_p(z)$ est ici de l'ordre de

$$[\nu(u-v) + \alpha_p - \beta_{p-1}] \frac{\Gamma\left(\frac{\beta_p - \alpha_p}{v} + \nu - 1\right) \Gamma\left(\frac{\alpha_p - z}{u} + \nu\right)}{\Gamma(\nu + 1)\Gamma\left(\frac{\beta_p - z}{v} + \nu\right)} \sim (u-v)\nu^{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right)(z - \alpha_p) - 1}.$$

Chapitre III.

Détermination des frontières de convergence.

8. *Série de genre* (E). Considérons une telle série, supposée convergente en un point z autre que 0 ou qu'un α_n. Posons

$$d_n = \frac{\left(1 - \frac{z}{\beta_1}\right)\left(1 - \frac{z}{\beta_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{\beta_n}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{z}\right)\left(1 - \frac{\alpha_2}{z}\right) \cdots \left(1 - \frac{\alpha_n}{z}\right)},$$

et écrivons la formule sommatoire d'Abel sous la forme

$$(1) \qquad \sum_{s=n}^{m} a_s \frac{(-z)^s}{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s} = \sum_{s=n}^{m} d_s a_s(z) = d_n \sum_{\nu=n}^{m} a_\nu(z) + \sum_{s=n+1}^{m} (d_s - d_{s-1}) \sum_{\nu=s}^{m} a_\nu(z).$$

L'hypothèse faite sur la série permet de faire correspondre à tout nombre $\varepsilon > 0$ un nombre entier n_1 tel que $m > n > n_1$ entraînent

$$(2) \qquad \left| \sum_{\nu=n}^{m} a_\nu(z) \right| < \varepsilon.$$

Il vient alors

$$\left|\sum_{s=n}^{m}\frac{(-1)^s a_s}{\beta_1\beta_2\cdots\beta_s}z^s\right| < \varepsilon\left(|d_n| + \sum_{s=n+1}^{m}|d_s - d_{s-1}|\right). \tag{3}$$

D'autre part,

$$d_s - d_{s-1} = d_{s-1}\left(\frac{1-\dfrac{z}{\beta_s}}{1-\dfrac{\alpha_s}{z}} - 1\right) = d_{s-1}\frac{\dfrac{\alpha_s}{z}-\dfrac{z}{\beta_s}}{1-\dfrac{\alpha_s}{z}},$$

c'est à dire

$$\frac{d_s}{d_{s-1}} = 1 + \left(\frac{\alpha_s}{z} - \frac{z}{\beta_s}\right)(1 + p_s\alpha_s),$$

où p_s reste borné quand s croît indéfiniment, et, par conséquent,

$$\frac{d_s}{d_{s-1}} = e^{\left(\frac{\alpha_s}{z}-\frac{z}{\beta_s}\right)(1+\varepsilon_s)},$$

où ε_s tend vers 0 quand s croît indéfiniment. Il vient ainsi pour $s \geq n$

$$\frac{d_s}{d_{n_0}} = e^{\sum\limits_{\nu=n_0+1}^{s}\left(\frac{\alpha_\nu}{z}-\frac{z}{\beta_\nu}\right)(1+\varepsilon_\nu)} = 1 + \varepsilon(n_0, s), \tag{4}$$

$\varepsilon(n_0, s)$ tendant vers 0 avec $\dfrac{1}{n_0}\cdot$ On en conclut qu'à tout nombre $\varepsilon' > 0$ on peut faire correspondre n_0 tel que $s > n_0$ entraîne $|\varepsilon(n_0, s)| < \varepsilon'$ et

$$|d_s - d_{s-1}| < (1 + \varepsilon')|d_{n_0}|\left|\frac{\alpha_s}{z} - \frac{z}{\beta_s}\right|, \tag{5}$$

de sorte que (3) donne, pour $m > n > n_1$ et n_0, n_0 étant en outre assez grand,

$$\left|\sum_{s=n}^{m}\frac{(-1)^s a_s}{\beta_1\beta_2\cdots\beta_s}z^s\right| < \varepsilon(1 + \varepsilon')|d_{n_0}|\left[1 + \sum_{s=n+1}^{m}\left|\frac{\alpha_s}{z} - \frac{z}{\beta_s}\right|\right]. \tag{6}$$

La somme au second membre étant infiniment petite, ainsi que ε, avec $\dfrac{1}{n_1}$, cette inégalité exprime que la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a_n}{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}z^n \tag{7}$$

converge en tout point de convergence de (1) ch. II, autre qu'un α_n.

Bien entendu, on a supposé qu'aucun des β_i n'est nul. Mais si certains d'entre eux sont nuls, il suffit de négliger un certain nombre de termes de notre série et d'effectuer la transformation qui précède sur la série

$$\sum_{n=q}^{\infty} a_n \frac{(z-\alpha_q)(z-\alpha_{q+1})\cdots(z-\alpha_n)}{(z-\beta_q)(z-\beta_{q+1})\cdots(z-\beta_n)},$$

q étant choisi de façon qu'aucun des $\beta_n (n \geq q)$ ne soit nul. On peut encore remarquer qu'on ne change pas la nature de la série $\Sigma a_n(z)$ en modifiant un nombre fini des termes des 2 bases, et modifier (7) en conséquence.

Réciproquement, supposons que (7) converge en un point $z \neq 0$. Posons

$$b_n = \frac{(-1)^n a_n z^n}{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n},$$

$$c_n = \frac{\left(1-\frac{\alpha_1}{z}\right)\left(1-\frac{\alpha_2}{z}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha_n}{z}\right)}{\left(1-\frac{z}{\beta_1}\right)\left(1-\frac{z}{\beta_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{\beta_n}\right)},$$

et écrivons la formule sommatoire d'Abel analogue à (1)

$$(8) \qquad \sum_{s=n}^{m} a_s(z) = \sum_{s=n}^{m} c_s b_s = c_n \sum_{\nu=n}^{m} b_\nu + \sum_{s=n+1}^{m} (c_s - c_{s-1}) \sum_{\nu=s}^{m} b_\nu .$$

Par hypothèse, à tout nombre $\varepsilon > 0$ correspond un entier n_1 tel que $m > n > n_1$ entraînent

$$\left| \sum_{\nu=n}^{m} b_\nu \right| < \varepsilon,$$

et, par conséquent,

$$(9) \qquad \left| \sum_{s=n}^{m} a_s(z) \right| < \varepsilon \left(|c_n| + \sum_{s=n+1}^{m} |c_s - c_{s-1}| \right).$$

En outre, on a

$$c_s - c_{s-1} = c_{s-1} \left(\frac{1-\frac{\alpha_s}{z}}{1-\frac{z}{\beta_s}} - 1 \right) = - c_{s-1} \frac{\frac{\alpha_s}{z} - \frac{z}{\beta_s}}{1-\frac{z}{\beta_s}},$$

donc

$$\frac{c_s}{c_{s-1}} = 1 - \frac{\frac{\alpha_s}{z} - \frac{z}{\beta_s}}{1 - \frac{z}{\beta_s}} = e^{-\left(\frac{\alpha_s}{z} - \frac{z}{\beta_s}\right)(1+\varepsilon_s)},$$

où ε_s tend vers o avec $\frac{1}{s}\cdot$ On en conclut aisément qu'à tout nombre $\varepsilon' > 0$ correspond un entier n_0 tel que, pour $s \geq n_0$, on ait

$$\left|\frac{c_s}{c_{n_0}}\right| < 1 + \varepsilon',$$

$$|c_s - c_{s-1}| < (1 + \varepsilon')|c_{n_0}|\left|\frac{\alpha_s}{z} - \frac{z}{\beta_s}\right|,$$

et, par conséquent, si n est supérieur à n_1 et n_0,

$$\left|\sum_{s=n}^{m} a_s(z)\right| < \varepsilon(1 + \varepsilon')|c_{n_0}|\left[1 + \sum_{s=n+1}^{m}\left|\frac{\alpha_s}{z} - \frac{z}{\beta_s}\right|\right].$$

On démontre ainsi que la série (1) ch. II converge en tout point z, autre que zéro, où (7) converge. On peut donc énoncer le

Théorème. *La série $\Sigma a_n(z)$ de genre* (E) *admet le même cercle de convergence que la série entière* (7). *En outre, les deux séries convergent aux mêmes points de ce cercle, exception faite des α_i et des β_i qui pourraient se trouver sur ce cercle.*

En particulier, on conclut de ce théorème que le rayon R du cercle de convergence est donné par

$$\lambda = \frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}\right|}. \tag{10}$$

Par exemple, ce que nous savons du développement de zéro $\psi_1(z)$ nous apprend que la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\alpha_{n+1} - \beta_n)}{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}\frac{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)\cdots(\alpha_1 - \beta_{n-1})}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\cdots(\alpha_1 - \alpha_{n+1})}z^n$$

converge dans le cercle $|z| < |\alpha_1|$ et diverge en tous les points situés sur ce cercle, sauf peut-être certains α_i, lorsqu'on suppose que les séries $\Sigma\alpha_n$ et $\Sigma\frac{1}{\beta_n}$ convergent absolument.[1]

9. *Série de genre* (N). La série (1) ch. II est supposée convergente pour une valeur de z autre qu'un α_n. Posons

$$d_n = \frac{\left(1-\frac{z-\beta}{v}\right)\left(1-\frac{z-\beta}{2v}\right)\cdots\left(1-\frac{z-\beta}{nv}\right)}{\left(1-\frac{z-\alpha}{u}\right)\left(1-\frac{z-\alpha}{2u}\right)\cdots\left(1-\frac{z-\alpha}{nu}\right)},$$

et écrivons la formule sommatoire d'Abel

$$\sum_{s=n}^{m} a_s\left(\frac{u}{v}\right)^s = \sum_{s=n}^{m} d_s a_s(z) = d_n\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu(z) + \sum_{s=n+1}^{m}(d_s-d_{s-1})\sum_{\nu=s}^{m} a_\nu(z). \tag{11}$$

L'hypothèse faite se traduit, comme au paragraphe précédent, par l'inégalité (2), de sorte que, pour $m > n > n_1$, (11) donne

$$\left|\sum_{s=n}^{m} a_s\left(\frac{u}{v}\right)^s\right| < \varepsilon\left(|d_n| + \sum_{s=n+1}^{m}|d_s-d_{s-1}|\right). \tag{12}$$

Formons d'autre part

$$d_s - d_{s-1} = d_{s-1}\left(\frac{1-\frac{z-\beta}{sv}}{1-\frac{z-\alpha}{su}} - 1\right) = d_{s-1}\,\frac{\frac{z-\alpha}{u}-\frac{z-\beta}{v}}{s}\,\frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{su}}, \tag{13}$$

ou, en posant

$$\omega = \frac{\frac{\alpha}{u}-\frac{\beta}{v}}{\frac{1}{u}-\frac{1}{v}}, \tag{14}$$

$$\frac{d_s}{d_{s-1}} = 1 + \frac{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)(z-\omega)}{s}\left(1+\frac{p_s}{s}\right),$$

p_s restant borné quand s croît infiniment. Par conséquent, on peut encore écrire

[1] On vérifie d'ailleurs aisément que cette série entière diverge en tous les points de $|z| = |\alpha_1|$.

(15) $$\frac{d_s}{d_{s-1}} = e^{\frac{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)(z-\omega)}{s}\left(1+\frac{p'_s}{s}\right)},$$

p'_s ayant la même propriété que p_s. On en conclut que, si $s \geqq n_0$,

$$\frac{d_s}{d_{n_0}} = e^{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)(z-\omega)\left(\sum\limits_{v=n_0+1}^{s}\frac{1}{v}+\sum\limits_{v=n_0+1}^{s}\frac{p'_v}{v^2}\right)},$$

c'est à dire

(16) $$d_s = d_{n_0}[1+\varepsilon(n_0, s)]e^{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)(z-\omega)L\frac{s}{n_0}}$$

$$= d_{n_0}[1+\varepsilon(n_0, s)]\left(\frac{s}{n_0}\right)^{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)(z-\omega)},$$

où $\varepsilon(n_0, s)$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n_0}$; autrement dit, quel que soit $\varepsilon' > 0$, on aura $|\varepsilon(n_0, s)| < \varepsilon'$ pourvu que n_0 soit assez grand. On peut même supposer que (13) donne alors, pour $s < n_0$,

(17) $$|d_s - d_{s-1}| < \frac{(1+\varepsilon')|d_{n_0}|}{n_0^{\varrho(z-\omega)}}\left|\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)(z-\omega)\right| s^{\varrho(z-\omega)-1}.$$

Enfin, si $m > n > n_0$ et n_1, n_0 étant en outre assez grand, on voit que l'on peut écrire

(18) $$\left|\sum_{s=n}^{m} a_s\left(\frac{u}{v}\right)^s\right| < \frac{\varepsilon(1+\varepsilon')|d_{n_0}|}{n_0^{\varrho(z-\omega)}}\left[n^{\varrho(z-\omega)} + \left|\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)(z-\omega)\right|\sum_{s=n}^{m} s^{\varrho(z-\omega)-1}\right].$$

Tout d'abord, plaçons-nous dans le cas où $\varrho(z-\omega) < 0$. Il vient alors

$$\sum_{s=n}^{m} s^{\varrho(z-\omega)-1} = \frac{1+\varepsilon'(n, m)}{\varrho(z-\omega)}\left(m^{\varrho(z-\omega)} - n^{\varrho(z-\omega)}\right),$$

où $0 < \varepsilon'(m, n) < \varepsilon'$ pourvu que n et $\frac{m}{n}$ soient assez grands. En faisant croître m infiniment dans l'inégalité (18), on en déduit que

(19) $$\left|\sum_{s=n}^{\infty} a_s\left(\frac{u}{v}\right)^s\right| < K\varepsilon\, n^{\varrho(z-\omega)} \qquad n > n_0,$$

où l'on peut supposer que K ne dépend que de n_0 et ε de n. Ceci exprime que

$$(20) \qquad \lim_{n\to\infty} n^{-\varrho(z-\omega)} \sum_{s=n}^{\infty} a_s \left(\frac{u}{v}\right)^s = 0,$$

et, par conséquent, que

$$(21) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{L\left|\sum_{s=n}^{\infty} a_s\left(\frac{u}{v}\right)^s\right|}{Ln} \leq \varrho(z-\omega).$$

Supposons maintenant $\varrho(z-\omega) > 0$. Il vient

$$\sum_{s=n}^{m} s^{\varrho(z-\omega)-1} < \frac{(m+1)^{\varrho(z-\omega)} - (n-1)^{\varrho(z-\omega)}}{\varrho(z-\omega)},$$

donc

$$(22) \qquad m^{-\varrho(z-\omega)} \left|\sum_{s=n}^{m} a_s\left(\frac{u}{v}\right)^s\right| < K\varepsilon \qquad n > n_0,$$

où l'on peut supposer que K ne dépend que de n_0 et ε de n. Quand m croît infiniment, la limite supérieure du premier membre ne dépend pas de n, alors que ε est infiniment petit avec $\frac{1}{n}\cdot$ On en conclut évidemment que

$$(23) \qquad \lim_{m\to\infty} m^{-\varrho(z-\omega)} \sum_{s=n}^{m} a_s\left(\frac{u}{v}\right)^s = 0,$$

ou encore que

$$(24) \qquad \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{L\left|\sum_{s=n}^{m} a_s\left(\frac{u}{v}\right)^s\right|}{Lm} \leq \varrho(z-\omega).$$

Enfin, si $\varrho(z-\omega) = 0$, la somme au second membre de (18) s'écrit

$$\sum_{s=n}^{m} s^{\varrho(z-\omega)-1} = \sum_{s=n}^{m} \frac{1}{s} < L\frac{m}{n-1};$$

par conséquent,

$$(25) \qquad \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{s=n}^{m} a_s\left(\frac{u}{v}\right)^s}{Lm} = 0,$$

ou encore

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{L\left|\sum_{s=n}^{m} a_s\left(\frac{u}{v}\right)^s\right|}{Lm} \leq 0. \tag{26}$$

En résumé, si nous posons

$$k = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{L\left|\sum_{s=n}^{\infty} a_s\left(\frac{u}{v}\right)^s\right|}{Ln},$$

$$\varkappa = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{L\left|\sum_{s=0}^{m} a_s\left(\frac{u}{v}\right)^s\right|}{Lm},$$

nous pouvons énoncer des conclusions rappelant des propriétés classiques des séries de Newton, incluses dans le

Théorème. *Si la série* $\Sigma a_n(z)$ *de genre* (N) *converge en un point* z *autre qu'un* α_n, *on a* $k \leq \varrho(z-\omega)$ *si* $\varrho(z-\omega) < 0$, *et* $\varkappa \leq \varrho(z-\omega)$ *si* $\varrho(z-\omega) \geq 0$.

Remarquons que le point $z = \omega$ est tel que[1]

$$a_n(\omega) = a_n\left(\frac{u}{v}\right)^n, \tag{27}$$

de sorte que lorsque $\varrho(z-\omega)$ est négatif, les calculs que nous venons de faire se déduisent de ceux du paragraphe 4 en substituant z et ω à z_0 et z.

10. Pour établir une réciproque de ce théorème, posons

$$c_n = \frac{1}{d_n} = \frac{\left(1-\frac{z-\alpha}{u}\right)\left(1-\frac{z-\alpha}{2u}\right)\cdots\left(1-\frac{z-\alpha}{nu}\right)}{\left(1-\frac{z-\beta}{v}\right)\left(1-\frac{z-\beta}{2v}\right)\cdots\left(1-\frac{z-\beta}{nv}\right)},$$

et formons l'identité

[1] Il résulte de (27) que ω ne peut être un α_n ou un β_n sans que l'on ait $\alpha_n = \beta_n$; mais alors on peut retrancher ce point commun aux deux bases sans changer la forme de la série, et supposer que ω n'appartient à aucune des bases. C'est ce que nous admettons. Remarquons en passant que si u et v ne sont pas dans un rapport rationnel réel, les 2 bases ne peuvent avoir plus d'un point commun, que l'on pourrait d'ailleurs supprimer sans modifier la forme de la série, à l'exclusion d'un nombre fini de ses termes.

$$(28)\qquad \sum_{s=n}^{m} a_s(z) = \sum_{s=n}^{m} c_s a_s \left(\frac{u}{v}\right)^s = \sum_{s=n}^{m-1} (c_s - c_{s+1}) \sum_{\nu=0}^{s} a_\nu \left(\frac{u}{v}\right)^\nu + $$
$$+ c_m \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu \left(\frac{u}{v}\right)^\nu - c_n \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \left(\frac{u}{v}\right)^\nu .$$

c_n a bien la même signification qu'au paragraphe 4 avec le changement de z_0 en ω.

D'autre part, $\varkappa$ étant supposé fini, on peut associer à tout nombre positif ε un nombre entier m_0 tel que $m > m_0$ entraîne

$$\left|\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu \left(\frac{u}{v}\right)^\nu\right| \leq m^{\varkappa+\varepsilon} \text{ et } (m+1)^{\varkappa+\varepsilon}.$$

Par conséquent, compte tenu de (20) et (21) ch. I, où l'on suppose $n_0 > m_0$, (28) donne ici, pour $n > n_0$

$$(29)\qquad \left|\sum_{s=n}^{m} a_s(z)\right| < (1+\varepsilon') \, |c_{n_0}| \, n_0^{\varrho(z-\omega)} \Bigg[n^{-\varrho(z-\omega)+\varkappa+\varepsilon} + $$
$$+ \left|\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)(z-\omega)\right| \sum_{s=n}^{m-1} s^{-\varrho(z-\omega)-1+\varkappa+\varepsilon} + m^{-\varrho(z-\omega)+\varkappa+\varepsilon} \Bigg],$$

où ε et ε' tendent vers o quand n_0 croît infiniment. Il est clair que le second membre de cette inégalité est infiniment petit avec $\frac{1}{n}$ dès que $\varrho(z-\omega) - \varkappa - \varepsilon$ est positif, et, en particulier, dès que $\varrho(z-\omega) > \varkappa + 2\varepsilon$. Pour de telles valeurs de z la série $\Sigma a_n(z)$ est donc convergente, de sorte que son demi-plan de convergence $\varrho(z) > \lambda$ est tel que l'on ait

$$(30)\qquad \lambda \leq \varrho(\omega) + \varkappa.$$

Lorsque $\varkappa = -\infty$, le même raisonnement est valable, à condition de remplacer, dans ces calculs, $\varkappa + \varepsilon$ par un nombre négatif arbitraire. Par conséquent la série converge quel que soit z, c'est à dire dans tout le plan, et, λ étant infiniment grand négatif, la relation (30) subsiste.

Lorsqu'on admet que la limite k est finie, on est conduit à utiliser l'inégalité

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \left(\frac{u}{v}\right)^\nu\right| \leq n^{k+\varepsilon} \qquad\qquad n > n_0.$$

Au lieu de (28), formons alors l'identité

$$\sum_{s=n}^{m} a_s(z) = c_n \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \left(\frac{u}{v}\right)^\nu + \sum_{s=n}^{m-1} (c_{s+1} - c_s) \sum_{\nu=s+1}^{\infty} a_\nu \left(\frac{u}{v}\right)^\nu - c_m \sum_{\nu=m+1}^{\infty} a_\nu \left(\frac{u}{v}\right)^\nu.$$

Il en résulte que, si $n > n_0$, n_0 étant suffisamment grand, l'inégalité (29) est encore utilisable avec la substitution de k à $\varkappa$. On conclut comme précédemment que la frontière de convergence est telle que l'on ait $\lambda \leq \varrho(\omega) + k$. Cette relation est encore vraie si k est infiniment grand négatif. Nous avons ainsi démontré le théorème réciproque du précédent, sous la forme:

Théorème. *La frontière de convergence de la série $\Sigma a_n(z)$ de genre* (N) *est telle que l'on ait simultanément $\lambda \leq \varrho(\omega) + k$ et $\lambda \leq \varrho(\omega) + \varkappa$.*

Enfin la combinaison de ce théorème et de la proposition directe nous conduit au

Théorème. *Si k a un sens, $\lambda = \varrho(\omega) + k$. Sinon, $\lambda = \varrho(\omega) + \varkappa$.*

Il revient au même de dire que $\lambda = \varrho(\omega) + k$ ou $\lambda = \varrho(\omega) + \varkappa$ suivant que la série converge, ou non, au point $z = \omega$. Pour la démonstration, remarquons que k n'existe que si $\Sigma a_n(\omega)$ converge, de sorte que k est nécessairement non positif. Si k est négatif, on peut trouver des points z infiniment voisins de la frontière du domaine de convergence $\mathfrak{D}$ pour lesquels $\varrho(z) \geq \varrho(\omega) + k$, donc $\lambda \geq \varrho(\omega) + k$, et, par conséquent, $\lambda = \varrho(\omega) + k$. Le même raisonnement montre que si $\lambda < \varrho(\omega)$, on a $\lambda = \varrho(\omega) + k$; donc si $k = 0$, on a nécessairement $\lambda = \varrho(\omega)$. Si k n'a pas de sens, $\lambda \geqq \varrho(\omega)$ et par conséquent $\lambda = \varrho(\omega) + \varkappa$.

Remarquons que pour $u = 1$, $v = \infty$, ce théorème s'applique à la série de Newton de coefficients $b_n = \lim\limits_{v \to \infty} \frac{a_n}{v^n}$, et, pour $v = 1$, $u = \infty$, à la série de facultés de coefficients $b_n = \lim\limits_{u \to \infty} a_n u^n$.

11. Etant donné qu'une série de genre (E) converge aux mêmes points que la série entière (7), étant exceptés au besoin certains α_i et β_i, on peut dire que deux séries de genre (E)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_n)} \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} a_n' \frac{(z-\alpha_1')(z-\alpha_2')\cdots(z-\alpha_n')}{(z-\beta_1')(z-\beta_2')\cdots(z-\beta_n')},$$

pour lesquelles on a

$$\frac{a_n}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} = \frac{a_n'}{\beta_1'\beta_2'\ldots\beta_n'},$$

admettent le même cercle de convergence et convergent aux mêmes points »non spéciaux» de ce cercle.[1]

En ce qui concerne les séries de genre (N), les résultats obtenus au paragraphe précédent nous suggèrent le

Théorème. *Deux séries $\Sigma a_n(z)$ et $\Sigma a_n'(z)$ de genre* (N) *pour lesquelles* $\frac{\mathrm{I}}{u} - \frac{\mathrm{I}}{v}$, $\frac{\alpha}{u} - \frac{\beta}{v}$ *et les* $a_n\left(\frac{u}{v}\right)^n$ *sont identiques admettent le même demi-plan de convergence, et convergent aux mêmes points non spéciaux de la droite de convergence.*

Désignons par u', v', α', β', et a_n' les éléments constituant la deuxième série, et posons

$$c_n = \frac{\left(\mathrm{I}-\frac{z-\alpha'}{u'}\right)\left(\mathrm{I}-\frac{z-\alpha'}{2u'}\right)\cdots\left(\mathrm{I}-\frac{z-\alpha'}{nu'}\right)}{\left(\mathrm{I}-\frac{z-\beta'}{v'}\right)\left(\mathrm{I}-\frac{z-\beta'}{2v'}\right)\cdots\left(\mathrm{I}-\frac{z-\beta'}{nv'}\right)} \frac{\left(\mathrm{I}-\frac{z-\beta}{v}\right)\left(\mathrm{I}-\frac{z-\beta}{2v}\right)\cdots\left(\mathrm{I}-\frac{z-\beta}{nv}\right)}{\left(\mathrm{I}-\frac{z-\alpha}{u}\right)\left(\mathrm{I}-\frac{z-\alpha}{2u}\right)\cdots\left(\mathrm{I}-\frac{z-\alpha}{nu}\right)}.$$

Grâce aux égalités

$$(31) \qquad \frac{\mathrm{I}}{u'} - \frac{\mathrm{I}}{v'} = \frac{\mathrm{I}}{u} - \frac{\mathrm{I}}{v}, \quad \frac{\alpha'}{u'} - \frac{\beta'}{v'} = \frac{\alpha}{u} - \frac{\beta}{v}, \quad a_n'\left(\frac{u'}{v'}\right)^n = a_n\left(\frac{u}{v}\right)^n,$$

on peut écrire la formule sommatoire d'Abel

$$(32) \qquad \sum_{s=n}^{m} a_s'(z) = \sum_{s=n}^{m} a_s(z)\,c_s = c_n \sum_{\nu=n}^{m} a_\nu(z) + \sum_{s=n+1}^{m}(c_s - c_{s-1}) \sum_{\nu=s}^{m} a_\nu(z).$$

z étant un point non spécial où $\Sigma a_n(z)$ converge, on peut associer à tout nombre $\varepsilon > 0$ un entier n_0 tel que $m \geq n > n_0$ entraîne

---

[1] Les »points spéciaux» sont les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots$ des 2 bases.

$$\left|\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu(z)\right| < \varepsilon,$$

grâce à quoi (32) donne

$$\left|\sum_{s=n}^{m} a'_s(z)\right| < \varepsilon\left[|c_n| + \sum_{s=n+1}^{m} |c_s - c_{s-1}|\right]. \tag{33}$$

D'autre part, en utilisant un genre de raisonnement maintes fois employé dans les pages précédentes, on voit que

$$c_s - c_{s-1} = \frac{c_{s-1}}{s}\left\{\frac{z-\beta'}{v'} - \frac{z-\alpha'}{u'} - \frac{z-\beta}{v} + \frac{z-\alpha}{u} + \frac{p_s}{s}\right\},$$

où p_s reste borné quand s croît infiniment, et par suite, compte tenu de (31),

$$\frac{c_s}{c_{s-1}} = 1 + \frac{p_s}{s^2} = e^{\frac{p'_s}{s^2}} \qquad p'_s = O(1);$$

il vient donc, si $s \geq n_0$,

$$c_s = c_{n_0} e^{\sum\limits_{\nu=n_0+1}^{s} \frac{p'_\nu}{\nu^2}} = [1 + \varepsilon(n_0, s)]\, c_{n_0},$$

où $|\varepsilon(n_0, s)| < \varepsilon'$ pourvu que n_0 soit assez grand. On en déduit encore

$$|c_s - c_{s-1}| < \frac{(1+\varepsilon')\,|c_{n_0}|\,|p_s|}{s^2}$$

et, par conséquent,

$$\left|\sum_{s=n}^{m} a'_s(z)\right| < K\varepsilon\,|c_{n_0}|\left[1 + \sum_{s=n}^{m} \frac{1}{s^2}\right]$$

K étant fixe. La série $\Sigma a'_n(z)$ converge donc en ce point z. Par symétrie, le théorème est bien démontré.

Par exemple les deux séries de Newton et de facultés

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n \frac{(z-1)(z-2)\cdots(z-n)}{n!} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)},$$

qui correspondent aux deux cas limites

$$u = 1, \quad v = \infty, \qquad \alpha = 0, \lim_{n \to \infty} a_n \left(\frac{u}{v}\right)^n = b_n,$$

$$u' = \infty, \; v' = -1, \quad \beta' = 0, \lim_{n \to \infty} a'_n \left(\frac{u'}{v'}\right)^n = b_n,$$

satisfont aux conditions (31); le théorème se réduit alors au théorème connu de Landau.

Dans le cas général, on peut toujours amener l'origine du plan de la variable complexe z au point ω. On peut alors associer à la série $\Sigma\, a_n(z)$ la série particulièrement simple

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n \frac{(z-\omega)(z-2\omega)\cdots(z-n\omega)}{(z+\omega)(z+2\omega)\cdots(z+n\omega)}, \tag{34}$$

où

$$\frac{2}{w} = \frac{1}{u} - \frac{1}{v}, \qquad b_n = a_n \left(\frac{u}{v}\right)^n, \tag{35}$$

qui converge dans le même demi-plan, ainsi qu'aux mêmes points non spéciaux de sa frontière. Cette série de forme particulière peut être considérée comme jouant, pour les séries de genre (N), le rôle des séries entières pour les séries de genre (E).

Chapitre IV.

Transformations linéaires.

12. *Séries de genre* (E). Les séries des deux genres étudiées ici peuvent être transformées linéairement comme les séries de Newton et de facultés. Observons cependant que la question de remplacer une telle série par une série analogue, convergeant absolument et simplement dans le même domaine, ne se pose que pour les séries de genre (N).

Considérons une série de genre (E)

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_n)} \tag{1}$$

de rayon de convergence fini R. La fonction $F(z)$, que sa somme définit dans son cercle de convergence, est holomorphe ou méromorphe dans ce cercle, régulière au centre si aucun des β_n n'est nul. Plaçons-nous, d'une manière générale, en un point z_0 non spécial intérieur à ce cercle, où

$$F(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z_0 - \alpha_1)(z_0 - \alpha_2) \cdots (z_0 - \alpha_n)}{(z_0 - \beta_1)(z_0 - \beta_2) \cdots (z_0 - \beta_n)}.$$

Posons $c_n = \dfrac{a_n(z)}{a_n(z_0)}$ et utilisons la formule sommatoire

$$(2) \qquad \sum_{s=0}^{m} a_s(z) = \sum_{s=0}^{m} c_s a_s(z_0) = c_0 F(z_0) + \sum_{s=1}^{m} (c_s - c_{s-1}) \sum_{\nu=s}^{\infty} a_\nu(z_0) - c_m \sum_{\nu=m+1}^{\infty} a_\nu(z_0).$$

La détermination de R à l'aide de la formule (10) ch. III permet de faire correspondre à tout nombre positif ε un nombre M tel qu'on ait, pour toutes les valeurs de n,

$$(3) \qquad \left| \frac{a_n}{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n} \right| < \frac{M}{(R - \varepsilon)^n},$$

si l'on suppose qu'aucun des β_i n'est nul, ou en modifiant certains des β_i dans le cas contraire. D'ailleurs il résulte de la convergence absolue de $\Sigma \dfrac{1}{\beta_n}$ que le rapport $\dfrac{(\beta_1 - z_0)(\beta_2 - z_0) \cdots (\beta_n - z_0)}{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n}$ a une limite finie non nulle quand n augmente indéfiniment, et, par conséquent, que (3) peut être remplacé par l'inégalité analogue

$$(4) \qquad \left| \frac{a_n}{(z_0 - \beta_1)(z_0 - \beta_2) \cdots (z_0 - \beta_n)} \right| < \frac{M}{(R - \varepsilon)^n};$$

celle-ci est d'ailleurs valable sans la restriction faite pour (3), d'après le façon même dont on a choisi z_0. On peut également supposer que M ne dépend que de ε et non de z_0, dans toute région située à distance non nulle des β_i. Ceci posé, il vient

$$\left| \sum_{\nu=s}^{\infty} a_\nu(z_0) \right| < M \sum_{\nu=s}^{\infty} \frac{|z_0 - \alpha_1| |z_0 - \alpha_2| \cdots |z_0 - \alpha_\nu|}{(R - \varepsilon)^\nu} =$$

$$= \frac{M |z_0 - \alpha_1| |z_0 - \alpha_2| \cdots |z_0 - \alpha_s|}{(R - \varepsilon)^s} \left(1 + \frac{|z_0 - \alpha_{s+1}|}{R - \varepsilon} + \frac{|z_0 - \alpha_{s+1}| |z_0 - \alpha_{s+2}|}{(R - \varepsilon)^2} + \cdots \right);$$

dès que s est suffisamment grand, $|z_0 - \alpha_{s+i}|$ devenant au plus égal à un nombre fixe R', lui-même inférieur à R, on en déduit l'existence d'une constante M', indépendante de s et même de z_0 dans tout cercle $|z| < R'' < R' < R$ (les voisinages des β_i étant toujours exclus), et telle que l'on ait

$$\left|\sum_{\nu=s}^{\infty} a_\nu(z_0)\right| < M' \frac{|z_0 - \alpha_1||z_0 - \alpha_2| \cdots |z_0 - \alpha_s|}{(R-\varepsilon)^s}. \tag{5}$$

Lorsque z_0 est différent de zéro, cette inégalité jointe à la formule (27) ch. I montre que le dernier terme au second membre de (2) est au plus de l'ordre de

$$\frac{|z_0 - \alpha_1||z_0 - \alpha_2| \cdots |z_0 - \alpha_{m+1}|}{|z_0|^{m+1}} \left|\frac{z}{R-\varepsilon}\right|^m,$$

et tend donc vers zéro quand m croît indéfiniment pourvu que $|z| < R - \varepsilon$, puisque la convergence absolue de $\Sigma \alpha_n$ entraîne la convergence du produit infini $\prod \left(1 - \frac{\alpha_n}{z_0}\right)$.

Lorsque z_0 est nul, reprenons les calculs du paragraphe 5, sous la forme

$$\frac{c_s}{c_{s-1}} = \frac{-z}{\alpha_s} \frac{1 - \frac{\alpha_s}{z}}{1 - \frac{z}{\beta_s}},$$

d'où résulte

$$-\frac{\alpha_s c_s}{z c_{s-1}} = 1 + \frac{\frac{z}{\beta_s} - \frac{\alpha_s}{z}}{1 - \frac{z}{\beta_s}} = 1 + \left(\frac{z}{\beta_s} - \frac{\alpha_s}{z}\right)\left(1 + \frac{p_s}{\beta_s}\right),$$

où $p_s = O(1)$, ou encore

$$\frac{-\alpha_s c_s}{z c_{s-1}} = e^{\left(\frac{z}{\beta_s} - \frac{\alpha_s}{z}\right)\left(1 + \frac{p'_s}{\beta_s}\right)} \qquad p'_s = O(1),$$

et, par conséquent, si $s > n_0$,

$$c_s = \frac{c_{n_0}[1 + \varepsilon(n_0, s)]}{\alpha_{n_0+1}\alpha_{n_0+2} \cdots \alpha_s} (-z)^{s-n_0} e^{\sum_{\nu=n_0+1}^{s} \left(\frac{z}{\beta_\nu} - \frac{\alpha_\nu}{z}\right)},$$

où $\varepsilon(n_0, s)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n_0}\cdot$ On en conclut que le dernier terme au second membre de (2) est au plus de l'ordre de

$$\frac{|\alpha_{m+1}||z|^m}{(R-\varepsilon)^{m+1}},$$

et tend donc vers zéro, lorsque m croît infiniment, dans le cercle

$$|z| < R_1 = \frac{R}{\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|\alpha_m|}},$$

dont le rayon est au moins égal à R en vertu de la convergence de $\Sigma|\alpha_m|$.

Dans tous les cas, la formule sommatoire (2) fournit donc, lorsque m augmente infiniment, une série convergeant dans le cercle de convergence de (1). Il ne reste plus qu'à écrire la différence $c_s - c_{s-1}$ sous la forme

$$c_s - c_{s-1} = \frac{z-z_0}{z-\beta_1}\frac{(z_0-\beta_1)(z_0-\beta_2)\cdots(z_0-\beta_{s-1})(\alpha_s-\beta_s)}{(z_0-\alpha_1)(z_0-\alpha_2)\cdots(z_0-\alpha_{s-1})(z_0-\alpha_s)}\frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{s-1})}{(z-\beta_2)(z-\beta_3)\cdots(z-\beta_s)}$$

pour obtenir le développement

$$F(z) = F(z_0) + \frac{z-z_0}{z-\beta_1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)}(z_0)\frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)}{(z-\beta_2)(z-\beta_3)\cdots(z-\beta_{n+1})}, \tag{6}$$

où

$$A_n^{(1)}(z_0) = \frac{\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}}{z_0-\beta_{n+1}}\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu \frac{(z_0-\alpha_{n+2})(z_0-\alpha_{n+3})(z_0-\alpha_\nu)}{(z_0-\beta_{n+2})(z_0-\beta_{n+3})(z_0-\beta_\nu)}. \tag{7}$$

La série au second membre de (6) est encore de genre (E), ses 2 bases se déduisant de celles de la série primitive, soit en ajoutant z_0 à la suite $[\alpha]$, si l'on considère l'ensemble du second membre, soit en retranchant β_1 de la suite $[\beta]$ si l'on considère seulement la somme au second membre.

Cette opération peut être réitérée, soit en conservant le même point z_0, soit en le modifiant d'une opération à l'autre. Par exemple, au bout de p itérations effectuées successivement en $z_0, z_1, \ldots z_{p-1}$, on aura un développement de la forme

$$(8) \qquad F(z) = F(z_0) + \frac{z - z_0}{z - \beta_1} F_1(z_0, z_1) + \frac{(z - z_0)(z - z_1)}{(z - \beta_1)(z - \beta_2)} F_2(z_0, z_1, z_2) + \cdots +$$

$$+ \frac{(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{p-1})}{(z - \beta_1)(z - \beta_2) \cdots (z - \beta_p)} F_p(z_0, z_1, \ldots z_{p-1}, z),$$

avec

$$F_p(z_0, z_1, \ldots z_{p-1}, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(p)}(z_0, z_1, \ldots z_{p-1}) \frac{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)}{(z - \beta_{p+1})(z - \beta_{p+2}) \cdots (z - \beta_{p+n})},$$

et

$$A_n^{(p)}(z_0, z_1, \ldots z_{p-1}) = \frac{\alpha_{n+1} - \beta_{n+p}}{z_{p-1} - \beta_{n+p}} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_\nu^{(p-1)}(z_0, z_1, \ldots z_{p-2}) \cdot$$

$$\cdot \frac{(z_{p-1} - \alpha_{n+2})(z_{p-1} - \alpha_{n+3}) \cdots (z_{p-1} - \alpha_\nu)}{(z_{p-1} - \beta_{n+p+1})(z_{p-1} - \beta_{n+p+2}) \cdots (z_{p-1} - \beta_{\nu+p-1})}.$$

Lorsque $z_0 = 0$, (6) prend la forme

$$(6') \qquad F(z) = F(0) + \frac{z}{z - \beta_1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)}(0) \frac{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)}{(z - \beta_2)(z - \beta_3) \cdots (z - \beta_{n+1})},$$

où

$$(7') \qquad A_n^{(1)}(0) = \frac{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu \frac{\alpha_{n+2}\,\alpha_{n+3} \cdots \alpha_\nu}{\beta_{n+2}\,\beta_{n+3} \cdots \beta_\nu}.$$

Nous verrons au chapitre suivant que toute fonction analytique, uniforme et non essentiellement singulière à l'origine, est représentable par un développement (1) dont le rayon de convergence est égal à la borne inférieure des distances à l'origine des pôles étrangers à la base $[\beta]$ et des points singuliers essentiels. Il en résulte immédiatement que la transformation linéaire (6′) ne peut fournir un développement de $F(z)$ hors du cercle de convergence de (1). Par contre, si z_0 est différent de zéro, et si le point $R \dfrac{z_0}{|z_0|}$ n'est pas un point singulier essentiel ou un pôle de $F(z)$ étranger à la base $[\beta]$, le cercle de convergence de (6) coupe celui de (1), de sorte que (6) peut réaliser un prolongement analytique de (1) hors de son cercle.

13. *Séries de genre* (N). Reprenons la formule sommatoire (28) ch. III sous la forme

$$(9) \qquad \sum_{s=0}^{m} a_s(z) = \sum_{s=0}^{m-1} (c_s - c_{s+1}) \sum_{\nu=0}^{s} a_\nu(\omega) + c_m \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu(\omega).$$

En tout point z du demi-plan de convergence, on a $\varrho(z) \geq \lambda$. Aux points de convergence où $\varrho(z) > \varrho(\omega)$, il résulte de (23) ch. III et de (20) ch. I, où z_0 est remplacé par ω, que le dernier terme au second membre de (9) est infiniment petit, quand m augmente infiniment; par conséquent, on peut écrire

$$F(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (c_s - c_{s+1}) \sum_{\nu=0}^{s} a_\nu(\omega),$$

avec

$$c_s - c_{s+1} = v \frac{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right)(z-\omega)}{(z-\beta_{s+1})} c_s = \frac{\left(1 - \frac{v}{u}\right)(z-\omega)}{(z-\beta_{s+1})} \left(\frac{v}{u}\right)^s \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_s)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_s)}.$$

Il vient donc

$$F(z) = \frac{\left(1 - \frac{v}{u}\right)(z-\omega)}{z-\beta_1} \sum_{s=0}^{\infty} a_s^{(1)} \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_s)}{(z-\beta_2)(z-\beta_3)\cdots(z-\beta_{s+1})}, \tag{10}$$

où

$$a_s^{(1)} = \sum_{\nu=0}^{s} a_\nu \left(\frac{v}{u}\right)^{s-\nu}. \tag{11}$$

Le second membre de (10) est une série de genre (N), dont la première base est $\omega, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ et la deuxième base celle de (1). Et ce développement est valable dans le demi-plan $\varrho(z) > \lambda'$, λ' désignant le plus grand des deux nombres λ et $\varrho(\omega)$. Par contre, ce développement est absolument convergent dans ce demi-plan, et nous allons voir en même temps qu'il diverge hors de ce demi-plan, de sorte que la transformation (10) permet de substituer à une série de genre (N) une série de même genre, mais dont les deux domaines de convergence absolue et simple coïncident, autrement dit de supprimer la bande de semi-convergence, lorsqu'elle existe.

Supposons d'abord $\varrho(\omega) < \lambda$, de sorte que $\lambda' = \lambda$. On a vu que $\lambda = \varrho(\omega) + \varkappa$ et, par définition, on pourra écrire

$$\left| \sum_{\nu=0}^{s} a_\nu(\omega) \right| < s^{\varkappa+\varepsilon},$$

quelque petit que soit ε, pourvu que s surpasse une valeur convenable s_0 dépendant de ε. Compte tenu de (21) ch. I où z_0 est remplacé par ω, il vient enfin

$$(12)\qquad \left|(c_s - c_{s+1})\sum_{\nu=0}^{s} a_\nu(\omega)\right| = O(1)\,|z-\omega|\, s^{\varkappa-\varrho(z-\omega)-1+\varepsilon},$$

ce qui exprime que la série (10) converge absolument lorsque $\varkappa - \varrho(z-\omega) < 0$, c'est à dire à l'intérieur du demi-plan $\varrho(z) > \lambda$. D'autre part, il existe une infinité de valeurs de m pour lesquelles on a

$$\left|\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu(\omega)\right| > m^{\varkappa-\varepsilon},$$

tandis que $|c_m|$ est dans un rapport supérieur à une constante positive avec $m^{-\varrho(z-\omega)}$, comme le montre (20) ch. I. Par conséquent le dernier terme au second membre de (9) satisfait, pour ces valeurs de m, à une inégalité de la forme

$$\left|c_m \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu(\omega)\right| > C m^{\varkappa-\varrho(z-\omega)-\varepsilon} = C m^{\lambda-\varrho(z)-\varepsilon},$$

C étant une constante positive, et augmente donc infiniment avec elles lorsque $\varrho(z) < \lambda$.

Lorsque $\varrho(\omega) = \lambda$, la démonstration que nous venons de faire convient encore, en y faisant $\varkappa = 0$ et les conclusions sont les mêmes. Remarquons cependant que sur la frontière $\varrho(z) = \lambda$, le dernier terme au second membre de (9) tend vers zéro aux points où (1) converge, lorsque $\varrho(\omega) < \lambda$, de sorte que (10) converge et représente encore $F(z)$ en ces points; tandis qu'on ne peut rien affirmer de semblable lorsque $\varrho(\omega) = \lambda$, c'est à dire lorsque (23) ch. III est remplacé par (25) ch. III.

Examinons maintenant le cas où $\varrho(\omega) > \lambda$. λ' est alors égal à $\varrho(\omega)$ et $\sum_{\nu=0}^{s} a_\nu(\omega)$ est borné quand s croît infiniment. L'identité (21) ch. I nous apprend toujours que la série (10) converge absolument à l'intérieur du demi-plan $\varrho(z) > \lambda'$. Dans la bande $\lambda < \varrho(z) < \varrho(\omega)$, la nature de cette série dépend de la valeur de $F(\omega)$.

Si $F(\omega) \neq 0$, $\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu(\omega)$ ne tendant pas vers zéro, et $|c_m|\, m^{\varrho(z-\omega)}$ restant supérieur à une constante positive, le dernier terme au second membre de (9) croît infiniment avec m, en valeur absolue, lorsque $\varrho(z) < \varrho(\omega)$. Dans la bande envisagée, (1) converge, donc (10) diverge, et tend même vers l'infini. Sur la droite $\varrho(z-\omega)=0$, il résulte de (19) ch. I que

$$c_m \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu(\omega) \sim [1+\varepsilon(n_0, m)]\, c_{n_0} F(\omega) \left(\frac{m}{n_0}\right)^{\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{u}\right)(z-\omega)},$$

et, par conséquent, que ce terme n'a pas de limite, quand m croît infiniment, sauf pour $z=\omega$. En ce dernier point, on a d'ailleurs $c_m = 1$, de sorte que ce terme tend vers $F(\omega)$; (10) converge en ce point, mais vers zéro et non vers $F(\omega)$.

Lorsque $F(\omega)=0$, il vient

$$\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu(\omega) = -\sum_{\nu=m+1}^{\infty} a_\nu(\omega),$$

donc (20) ch. I et (20) ch. III nous permettent d'écrire

$$\left| c_m \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu(\omega) \right| = o(1) \qquad \lambda < \varrho(\omega) < \varrho(z),$$

ce qui exprime que (10) converge et représente $F(z)$ non seulement dans le demi-plan $\varrho(z-\omega)>0$, mais dans tout le demi-plan de convergence de (1). D'une manière précise, (20) ch. III est valable aux points de convergence de la frontière $\varrho(z)=\lambda$, de sorte que l'égalité (10) est encore vraie en ces points. A l'intérieur de ce demi-plan, la convergence est d'ailleurs absolue, en vertu de l'inégalité (12), où $\varkappa+\varrho(\omega)=k+\varrho(\omega)=\lambda$.

Les résultats obtenus dans cette discussion peuvent être rassemblés dans l'énoncé suivant:

Théorème I. *La fonction analytique $F(z)$ représentée par une série* (1) *de genre* (N) *dans le demi-plan $\varrho(z)>\lambda$ est représentable par une série analogue* (10), *transformée linéaire de* (1).

Lorsque $\varrho(\omega)\leq\lambda$, (10) *converge absolument dans ce demi-plan, et diverge à l'extérieur. Sur la frontière, elle converge et représente $F(z)$ aux mêmes points que* (1), *sauf peut-être si $\varrho(\omega)=\lambda$.*

Lorsque $\varrho(\omega)>\lambda$, (10) *converge absolument dans le demi-plan $\varrho(z)>\varrho(\omega)$. En outre, si $F(\omega)=0$, elle converge absolument dans tout le demi-plan de convergence de* (1), *converge et représente $F(z)$ aux mêmes points que* (1) *sur la frontière; tandis que si $F(\omega)\neq 0$, elle diverge pour $\varrho(z)\leq\varrho(\omega)$, sauf au point ω où sa somme est nulle, donc différente de $F(\omega)$.*

Remarquons que lorsque $\varrho(\omega) > \lambda$ avec $F(\omega) = 0$, le dernier terme au second membre de (9) n'a pas de limite à l'extérieur du demi-plan de convergence de (1), et l'on ne peut affirmer que (10) diverge en même temps que (1).

14. Lorsque $\varrho(\omega) > \lambda$, la transformation linéaire obtenue au paragraphe précédent n'étant généralement pas valable dans tout le domaine de convergence de (1), il est intéressant de considérer, comme on fait pour les séries de Newton, une autre transformation linéaire, qui se rattache à la formule sommatoire d'Abel écrite sous la forme

$$(13) \qquad \sum_{s=0}^{m} a_s(z) = c_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\omega) + \sum_{s=0}^{m-1} (c_{s+1} - c_s) \sum_{\nu=s+1}^{\infty} a_\nu(\omega) - c_m \sum_{\nu=m+1}^{\infty} a_\nu(\omega).$$

Dans ces conditions (20) ch. I et (20) ch. III nous montrent que le dernier terme tend vers 0 avec $\frac{1}{m}$ en tous les points de convergence de (1), pour lesquels $\varrho(z) < \varrho(\omega)$. L'inégalité

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} a_\nu(\omega) = O(1)\, m^{k+\varepsilon},$$

où ε est un nombre positif quelconque conduit à la même conclusion lorsque $\varrho(z) > \lambda$. Donc le dernier terme au second membre de (13) tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$ en tous les points du demi-plan $\varrho(z) \geq \lambda$ où (1) converge, c'est à dire que l'on a en ces points

$$F(z) = c_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\omega) + \sum_{s=0}^{\infty} (c_{s+1} - c_s) \sum_{\nu=s+1}^{\infty} a_\nu(\omega),$$

ou encore

$$(14) \qquad F(z) = F(\omega) + \frac{\left(\frac{v}{u} - 1\right)(z-\omega)}{z - \beta_1} \sum_{s=0}^{\infty} \bar{a}_s^{(1)} \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_s)}{(z-\beta_2)(z-\beta_3)\cdots(z-\beta_{s+1})},$$

avec

$$(15) \qquad \bar{a}_s^{(1)} = \sum_{\nu=s+1}^{\infty} a_\nu \left(\frac{u}{v}\right)^{\nu-s}.$$

En outre, l'inégalité

$$(16) \qquad \left| (c_{s+1} - c_s) \sum_{\nu=s+1}^{\infty} a_\nu(\omega) \right| = O(1)\, |z-\omega|\, s^{k-\varrho(z-\omega)-1+\varepsilon}$$

montre que ce nouveau développement converge absolument dans ce demi-plan $\varrho(z) > \lambda$.

Lorsque $\varrho(\omega) = \lambda$, nous ne pouvons rien dire sur la validité de (10) sur la frontière $\varrho(z) = \lambda$. Cependant, lorsque (1) converge en outre au point ω, c_m est borné sur cette droite, donc le dernier terme au second membre de (13) tend vers zéro, quand m croît infiniment, en tous les points du demi-plan $\varrho(z) \geq \lambda$. Par conséquent la série (14) converge et représente $F(z)$ en tous les points de ce demi-plan où (1) converge. D'ailleurs le premier membre de (16) étant infiniment petit par rapport à $c_{s+1} - c_s$, la convergence est encore absolue à l'intérieur de ce demi-plan. Nous avons ainsi démontré le

Théorème II. *Lorsque la série* (1) *de genre* (N) *converge au point* ω, *sa somme* $F(z)$ *est représentable par le développement* (14), *transformé linéaire de* (1), *aux mêmes points que par la série* (1). *Mais ce développement converge absolument dans le demi-plan de convergence de* (1).

15. Il est clair que la série (14) est une série réduite, en même temps que (1). Il en est de même pour (10), lorsque $\varrho(\omega) \leq \lambda$, ou lorsque $\varrho(\omega) > \lambda$, $F(\omega)$ étant nul. Par contre si $F(\omega) \neq 0$, dans le cas où $\varrho(\omega) > \lambda$, on peut affirmer que (10), dont la somme est nulle au point ω, n'est pas une série réduite, puisque (14) admet ω pour premier point de sa première base, a bien la valeur $F(\omega)$ en ce point, et converge d'ailleurs dans un demi-plan plus grand que (10).

Nous allons préciser que ces deux développements (10) et (14) diffèrent par un développement de zéro, nul aux points de la base $[\alpha]$, mais égal à $F(\omega)$ pour $z = \omega$. En effet, cette différence s'écrit évidemment

$$F(\omega)\left[1 + \frac{\left(\frac{v}{u} - 1\right)(z-\omega)}{z-\beta_1} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{v}{u}\right)^s \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_s)}{(z-\beta_2)(z-\beta_3)\cdots(z-\beta_{s+1})}\right];$$

et le crochet n'est rien autre que le développement de zéro $\psi_1(z)$ dont les deux bases sont $\omega, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ et $[\beta]$, puisqu'il vient alors

$$\psi_1(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}) \frac{(\omega-\beta_1)(\omega-\beta_2)\cdots(\omega-\beta_n)}{(\omega-\alpha_1)(\omega-\alpha_2)\cdots(\omega-\alpha_{n+1})} \frac{(z-\omega)(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_{n+1})},$$

avec

$$\frac{\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}}{\omega - \alpha_{n+1}} = \frac{v}{u} - 1,$$

et

$$\frac{(\omega-\beta_1)(\omega-\beta_2)\cdots(\omega-\beta_n)}{(\omega-\alpha_1)(\omega-\alpha_2)\cdots(\omega-\alpha_n)}=\left(\frac{v}{u}\right)^n.$$

En outre, on sait que $\psi_1(z)$ est nul dans le demi-plan $\varrho(z)>\varrho(\omega)$, et divergent et borné sur la droite $\varrho(z)=\varrho(\omega)$, sauf au point ω où il prend la valeur 1.

16. *Itération.* Supposons que nous ayons effectué sur une série (1) de genre (N) la première transformation linéaire. Pour la série (10) ainsi obtenue, l'homologue de ω est le point

$$\omega_1=\frac{\frac{\alpha}{u}-\frac{\beta_1}{v}}{\frac{1}{u}-\frac{1}{v}}=\omega-\frac{1}{\frac{1}{u}-\frac{1}{v}},\tag{17}$$

de sorte que

$$\varrho(\omega_1)=\varrho(\omega)-1.$$

Par conséquent ω_1 est extérieur au demi-plan $\varrho(z)>\lambda'$ où le développement (10) est valable, et on peut effectuer sur (10) la même transformation que sur (1), sans réduire le domaine de validité. Il vient ainsi

$$F(z)=\frac{\left(1-\frac{v}{u}\right)^2(z-\omega)(z-\omega_1)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)}\sum_{s=0}^{\infty}a_s^{(2)}\frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_s)}{(z-\beta_3)(z-\beta_4)\cdots(z-\beta_{s+2})},$$

avec

$$a_s^{(2)}=\sum_{\nu=0}^{s}a_\nu^{(1)}\left(\frac{v}{u}\right)^{s-\nu},$$

et ce nouveau développement converge encore absolument pour $\varrho(z)>\lambda'$.

On peut réitérer, et, d'une manière générale, on aura

$$F(z)=\frac{\left(1-\frac{v}{u}\right)^r(z-\omega)(z-\omega_1)\cdots(z-\omega_{r-1})}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_r)}\sum_{s=0}^{\infty}a_s^{(r)}\frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_s)}{(z-\beta_{r+1})(z-\beta_{r+2})\cdots(z-\beta_{r+s})},\tag{18}$$

où r prend les valeurs 1, 2, ... et où

$$a_s^{(r)}=\sum_{\nu=0}^{s}a_\nu^{(r-1)}\left(\frac{v}{u}\right)^{s-\nu},\tag{19}$$

(20) $$\omega_s = \omega_{s-1} - \frac{1}{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}} = \omega - \frac{s}{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}.$$

Toutes ces séries convergent absolument pour $\varrho(z) > \lambda'$, et, lorsque $\lambda > \varrho(\omega)$, elles convergent et représentent $F(z)$ aux mêmes points que (1) sur la droite $\varrho(z) = \lambda$.

La formation des $a_n^{(r)}$ à partir des coefficients $a_n^{(r-1)}$ s'écrit encore, avec la notation du produit homogène de deux suites,

$$[a_n^{(r)}] = [a_n^{(r-1)}] \cdot \left[\left(\frac{v}{u}\right)^n\right],$$

et, par conséquent,

$$[a_n^{(r)}] = [a_n] \cdot \left[\left(\frac{v}{u}\right)^n\right]^r = [a_n] \cdot \left[\binom{-r}{n}\left(\frac{-v}{u}\right)^n\right]$$

ou encore

(21) $$a_s^{(r)} = \sum_{\nu=0}^{s} \binom{r+\nu-1}{\nu} a_{s-\nu} \left(\frac{v}{u}\right)^\nu.$$

La deuxième transformation linéaire peut également être itérée, mais non indéfiniment en général. Il est tout d'abord nécessaire, pour effectuer une première réitération, que l'on ait $\varrho(\omega_1) = \varrho(\omega) - 1 > \lambda$, c'est à dire $\varrho(\omega) > \lambda + 1$, ou tout au moins que $\varrho(\omega_1) = \lambda$, (14) convergeant[1] en ω_1. Il résulte du théorème II qu'il suffit que (1) converge au point ω_1. Il vient alors

$$\sum_{s=0}^{\infty} \bar{a}_s^{(1)} \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_s)}{(z-\beta_2)(z-\beta_3)\cdots(z-\beta_{s+1})} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{a}_\nu^{(1)} \left(\frac{u}{v}\right)^\nu +$$
$$+ \frac{\left(\frac{v}{u} - 1\right)(z-\omega_1)}{z-\beta_2} \sum_{s=0}^{\infty} \bar{a}_s^{(2)} \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_s)}{(z-\beta_3)(z-\beta_4)\cdots(z-\beta_{s+2})},$$

avec

(22) $$\bar{a}_s^{(2)} = \sum_{\nu=s+1}^{\infty} \bar{a}_\nu^{(1)} \left(\frac{u}{v}\right)^{\nu-s}.$$

---

[1] Si ω_1, ou d'une manière plus générale, $\omega_p = \omega - \frac{p}{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}$ était un point spécial, les 2 bases de la série (1) auraient un point commun, et l'on pourrait retrancher ces deux points des deux bases sans modifier la forme de la série, tout au moins à l'exclusion d'un nombre fini de termes. Nous pouvons donc supposer qu'aucun des points ω_i qui interviendront ici n'est spécial, puisqu'ils sont en nombre fini.

D'une manière générale, si (1) converge au point ω_{r-1}, on pourra utiliser r fois cette transformation, et aboutir ainsi au développement

$$(23)\quad F(z) = \sum_{i=0}^{r-1}\left(\frac{v}{u}-1\right)^i \frac{(z-\omega)(z-\omega_1)\cdots(z-\omega_{i-1})}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_i)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\bar{a}_\nu^{(i)}\left(\frac{u}{v}\right)^\nu +$$
$$+\left(\frac{v}{u}-1\right)^r \frac{(z-\omega)(z-\omega_1)\cdots(z-\omega_{r-1})}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_r)}\sum_{s=0}^{\infty}\bar{a}_s^{(r)}\frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_s)}{(z-\beta_{r+1})(z-\beta_{r+2})\cdots(z-\beta_{r+s})},$$

où les $\bar{a}_s^{(i)}$ sont donnés par la formule récurrente

$$(24)\qquad \bar{a}_s^{(i)} = \sum_{\nu=s+1}^{\infty}\bar{a}_\nu^{(i-1)}\left(\frac{u}{v}\right)^{\nu-s}\qquad i=1,2,\ldots r,$$

où $\bar{a}_s^{(0)}$ a la signification de a_s, et où $(z-\omega)(z-\omega_1)\cdots(z-\omega_{i-1})$, aussi bien que $(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_i)$, se réduisent à 1 pour $i=0$, suivant une convention fréquemment admise.

Dans le cas où $\varrho(\omega_{r-1})>\lambda$, toutes les itérées, qui convergent absolument dans le demi-plan $\varrho(z)>\lambda$, convergent absolument en un point z_0 tel que $\lambda<\varrho(z_0)<\varrho(\omega_{r-1})$; par conséquent, les séries

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\nu^{r-i-1}\,\bar{a}_\nu^{(i)}(\omega_i) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\nu^{r-i-1}\,\bar{a}_\nu^{(i)}\left(\frac{u}{v}\right)^\nu\qquad i=1,2,\ldots r-1$$

convergent absolument, en vertu de (20) ch. I, puisque $\varrho(\omega_i-z_0)$ est supérieur à $r-i-1$ pour ces valeurs de i. Mais alors on peut écrire

$$\bar{a}_s^{(3)}\left(\frac{u}{v}\right)^s = \sum_{\nu=s+1}^{\infty}\bar{a}_\nu^{(2)}\left(\frac{u}{v}\right)^\nu = \sum_{\nu=s+1}^{\infty}\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}\bar{a}_\mu^{(1)}\left(\frac{u}{v}\right)^\mu,$$

et permuter l'ordre des sommations, ce qui donne

$$\bar{a}_s^{(3)}\left(\frac{u}{v}\right)^s = \sum_{\mu=s+2}^{\infty}(\mu-s-1)\,\bar{a}_\mu^{(1)}\left(\frac{u}{v}\right)^\mu;$$

d'une manière générale, on voit aisément par récurrence, et grâce à la possibilité de permuter l'ordre des sommations, que

$$(25)\qquad \bar{a}_s^{(i)}\left(\frac{u}{v}\right)^s = \sum_{\nu=s+i-1}^{\infty}\binom{\nu-s-1}{i-2}\bar{a}_\nu^{(1)}\left(\frac{u}{v}\right)^\nu\qquad i=2,3,\ldots r.$$

Enfin, lorsque $\varrho(\omega_r) > \lambda$, on peut pousser ce raisonnement jusqu'à la série (1) elle-même, et remplacer (25) par

$$\bar{a}_s^{(i)} \left(\frac{u}{v}\right)^s = \sum_{\nu=s+i}^{\infty} \binom{\nu - s - 1}{i - 1} a_\nu \left(\frac{u}{v}\right)^\nu \qquad i = 1, 2, \ldots r. \tag{26}$$

Chapitre V.

Fonctions développables en série de genre (E) ou (N).

17. *Développements de genre* (E). Nous savons que la somme d'une série de genre (E), dont le cercle de convergence est le cercle $|z| < R$, est uniforme et régulière dans toute portion de ce cercle excluant des voisinages des points β_s que ce cercle peut contenir à son intérieur. Si β_i est un point d'ordre p de la base $[\beta]$, c'est à dire si cette base contient p termes égaux à β_i, et p seulement, le produit de la série par $(z - \beta_i)^p$ converge uniformément au voisinage de β_i. Par conséquent la somme $F(z)$ d'une telle série est méromorphe dans le cercle de convergence, et n'y admet point d'autre pôle que des points appartenant à la deuxième base, l'ordre de multiplicité d'un tel pôle étant au plus égal au nombre des termes de cette base égaux à ce pôle.[1]

Réciproquement, nous allons voir que *toute fonction analytique $F(z)$ méromorphe à l'intérieur d'un cercle $|z| < R$, et continue sur la circonférence, est la somme, dans ce cercle, d'une série d'interpolation de genre* (E), *dont la deuxième base est assujettie à contenir les pôles de $F(z)$ intérieurs à ce cercle.*

Admettons d'abord que $F(z)$ soit holomorphe dans ce cercle, et choisissons arbitrairement les deux bases, avec la seule restriction qu'aucun des α_i n'est sur la circonférence. Bien entendu, les deux séries $\Sigma|\alpha_n|$ et $\Sigma\frac{1}{|\beta_n|}$ doivent être convergentes, de sorte que les deux produits infinis

$$A(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\alpha_n}{z}\right) \quad \text{et} \quad B(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\beta_n}\right)$$

sont uniformément convergents dans toute région finie du plan située à distance

[1] Il ne peut y avoir qu'un nombre fini de tels termes, en vertu de la tendance vers l'infini de la suite des β_i.

non nulle des points spéciaux et de l'origine. On en conclut que dans toute portion du cercle $|z| \leq R' < R$ dont on exclut les voisinages de l'origine et des points β_i qu'il contient, le reste $R_n[F]$ de la formule (7) ch. I satisfait, grâce à (9) ch. I, où le contour d'intégration est le cercle $|\zeta| = R$, à l'inégalité

$$(1) \qquad | R_n[F] | = O(1) \left| \frac{A(z)}{B(z)} \right| \left| \frac{z}{R} \right|^{n+1} \overline{\underset{|\zeta|=R}{\text{borne}}} \left| \frac{F(\zeta)\,B(\zeta)}{A(\zeta)} \right|,$$

et tend donc uniformément vers zéro, quand n augmente infiniment. Les coefficients de la série obtenue sont déterminés par (8) ch. I, ou, si possible, par (10) ch. I.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $F(z)$ est effectivement méromorphe à l'intérieur de $|z| \leq R$. Supposons que la base $[\beta]$ comprenne les pôles de $F(z)$ intérieurs à ce cercle, avec leurs ordres de multiplicité. Si $\beta_i = \beta_{i+1} = \cdots = \beta_{i+r-1}$ est un tel pôle, d'ordre r de multiplicité, le résidu de $\frac{F(\zeta)}{\zeta - z}$ en ce point est de la forme $\frac{N_i(z)}{(z-\beta_i)^r}$, où $N_i(z)$ désigne un polynôme de degré $r - 1$ au plus. Lorsque z est distinct des β_s, la formule (7) ch. I est remplacée ici par

$$(2) \quad F(z) = - \sum \frac{N_i(z)}{(z-\beta_i)(z-\beta_{i+1})\cdots(z-\beta_{i+r-1})} + \\ + \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_\nu)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_\nu)} + R_n[F],$$

où l'expression de $R_n[F]$ est toujours fournie par (9) ch. I, et où la première somme au second membre est étendue à tous les pôles de $F(z)$ intérieurs au cercle $|z| < R$. Lorsque z satisfait aux mêmes conditions que tout à l'heure, (1) subsiste, $R_n[F]$ tend donc uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$, et il vient

$$(3) \qquad F(z) = - \sum \frac{N_i(z)}{(z-\beta_i)(z-\beta_{i+1})\cdots(z-\beta_{i+r-1})} + \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(z) \\ = \frac{N(z)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_p)} + \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(z),$$

où $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$ sont les points de la deuxième base[1] intérieurs à $|z| < R$, et

[1] Il n'est point nécessaire de distinguer les points β_i ($i = 1, 2, \ldots p$) qui sont effectivement pôles de $F(z)$ de ceux qui ne le sont pas, et il suffit, pour ceux-ci, de donner à $N_i(z)$ la valeur zéro.

$N(z)$ un polynôme en z de degré inférieur à p. D'autre part, ce numérateur $N(z)$ peut être mis sous la forme

$$N(z) = \sum_{k=0}^{p} C_k (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_k)(z - \beta_{k+1})(z - \beta_{k+2}) \cdots (z - \beta_p), \tag{4}$$

les coefficients étant assujettis à la condition

$$C_0 + C_1 + \cdots + C_p = 0 \tag{5}$$

pour que l'on ait $d^0 N(z) < p$. En effet, les deux polynômes aux deux membres de (4) sont identiques s'ils coïncident aux p points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ supposés distincts; or les équations

$$N(\alpha_i) = \sum_{k=0}^{i-1} C_k (\alpha_i - \alpha_1)(\alpha_i - \alpha_2) \cdots (\alpha_i - \alpha_k)(\alpha_i - \beta_{k+1})(\alpha_i - \beta_{k+2}) \cdots (\alpha_i - \beta_p)$$

relatives aux valeurs $1, 2, \ldots p$ de i définissent $C_0, C_1, \ldots C_{p-1}$ par récurrence, tout au moins si les α_k sont distincts des β_k, ce qu'on suppose tout naturellement. Enfin (5) définit C_p. Grâce à cette transformation de $N(z)$, (3) peut s'écrire

$$F(z) = \sum_{k=0}^{p} C_k \frac{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_k)}{(z - \beta_1)(z - \beta_2) \cdots (z - \beta_k)} + \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(z), \tag{6}$$

où le second membre est bien une série de genre (E). Il est clair, par un passage à la limite, que le développement (4) est encore possible, et, par conséquent, que (6) subsiste, lorsque certains des α_i viennent coïncider. La proposition énoncée est ainsi vérifiée, tout au moins lorsqu'on suppose que les deux bases n'ont pas de point commun. Il résulte de (6) et (8) ch. I que les $p + 1$ premiers coefficients du développement de $F(z)$ sont

$$a_k = C_k + \frac{\gamma_k}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = R} F(\zeta) \frac{(\zeta - \beta_1)(\zeta - \beta_2) \cdots (\zeta - \beta_{k-1})}{(\zeta - \alpha_1)(\zeta - \alpha_2) \cdots (\zeta - \alpha_{k+1})} d\zeta \qquad k = 0, 1, \ldots p.$$

Il est clair que, lorsque tous les α_ν sont intérieurs au cercle $|\zeta| < R$, tous les coefficients a_ν du développement sont encore déterminés par les formules (10) ch. I, puisque celles-ci expriment l'identité en ces points de $F(z)$ et de la somme de la série.

Un cas particulièrement intéressant est celui où $F(z)$ est méromorphe dans tout le plan de façon que la série des inverses de ses pôles, supposés rangés dans l'ordre des modules non décroissants, soit absolument convergente. La base étant choisie, le raisonnement qui précède est valable quel que soit R, et les expressions (10) ch. I des coefficients restent invariables dès que R surpasse les modules de tous les α_ν. Le développement obtenu est donc convergent et représente $F(z)$ dans tout le plan, dès qu'il a été déterminé dans un cercle contenant tous les α_ν. Cette restriction est d'ailleurs une conséquence nécessaire de l'existence de développements de zéro.

18. *Développements de genre* (N). Il est clair que la somme d'une telle série est méromorphe à l'intérieur de son demi-plan de convergence, ses pôles ne pouvant être que des points spéciaux de la deuxième base, avec des ordres de multiplicité au plus égaux à leur ordre dans cette base.

Réciproquement, soit $F(z)$ une fonction holomorphe dans un certain demi-plan P. On verra plus loin comment on peut étendre les résultats que nous allons obtenir aux fonctions méromorphes dans un demi-plan. Choisissons les deux bases $[\alpha]$, $[\beta]$ de façon que la définition de P soit de la forme $\varrho(z) > \lambda$. Remarquons d'ailleurs qu'on ne restreint pas la question en effectuant sur la variable z la transformation $\left[z, \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)(z-\omega)\right]$, ce qui permet de se placer dans le cas, d'écriture plus simple, où

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = 1 \quad \text{et} \quad \omega = 0. \tag{7}$$

Il vient alors $\varrho(z) \equiv \Re(z)$, et l'hypothèse que P contient tous les α_n d'indice suffisamment grand se traduit par $\Re(u) > 0$. Outre (7), nous supposerons donc que l'on a

$$|\arg u| < \frac{\pi}{2}, \quad |\arg v| \leq \pi. \tag{8}$$

Ceci posé, reprenons la formule (7) ch. I relative à un contour C intérieur à P. Pour vérifier que $F(z)$ peut être représenté dans P par une série de genre (N), il suffit que l'expression des coefficients a_ν ne dépende pas de l'indice n de cette formule (7) ch. I, dès que n est assez grand par rapport à ν, et que $R_n[F]$ tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Nous choisirons pour C un contour C_n variable avec n, mais entourant les point α_{p+1}, α_{p+2}, ... α_{n+1}, p étant un indice fixe, de sorte que

$$a_\nu = \frac{\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C_n} F(\zeta)\frac{(\zeta-\beta_1)(\zeta-\beta_2)\cdots(\zeta-\beta_{\nu-1})}{(\zeta-\alpha_1)(\zeta-\alpha_2)\cdots(\zeta-\alpha_{\nu+1})}d\zeta \qquad n \geq \nu$$

ne dépend pas de n dès que n surpasse $\nu - 1$. Dans ces conditions, nous n'avons plus qu'à porter notre attention sur le reste

$$(9)\quad R_n[F] = \frac{\left(\frac{z-\alpha}{u}-1\right)\left(\frac{z-\alpha}{u}-2\right)\cdots\left(\frac{z-\alpha}{u}-n-1\right)}{\left(\frac{z-\beta}{v}-1\right)\left(\frac{z-\beta}{v}-2\right)\cdots\left(\frac{z-\beta}{v}-n\right)}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\frac{\left(\frac{\zeta-\beta}{v}-1\right)\left(\frac{\zeta-\beta}{v}-2\right)\cdots\left(\frac{\zeta-\beta}{v}-n\right)}{\left(\frac{\zeta-\alpha}{u}-1\right)\left(\frac{\zeta-\alpha}{u}-2\right)\cdots\left(\frac{\zeta-\alpha}{u}-n-1\right)}d\zeta =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\beta-z}{v}+1\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-z}{u}+n+2\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-z}{u}+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta-z}{v}+n+1\right)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-\zeta}{u}+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta-\zeta}{v}+n+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta-\zeta}{v}+1\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-\zeta}{u}+n+2\right)}d\zeta.$$

On sait déjà que, lorsque n croît infiniment,

$$(10)\qquad \left|\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-z}{u}+n+2\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta-z}{v}+n+1\right)}\right| \sim n^{\Re\left(\frac{\alpha-z}{u}-\frac{\beta-z}{v}\right)+1} = n^{-\varrho(z-\omega)+1} = n^{-\Re z+1}.$$

Pour étudier l'intégrale, nous ne préciserons la forme de C_n que suivant les nécessités des calculs, de façon à obtenir des conditions aussi larges que possibles. Supposons que l'équation de ce contour soit de la forme

$$(11)\qquad \zeta = h + nf(\theta)e^{i\theta},$$

où h désigne une constante réelle, différente de tout α_i et $f(\theta)$ une fonction réelle et paire de l'angle θ, décroissant d'une valeur positive $f(0)$ à $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ quand θ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Nous admettons en outre que

$$(12)\qquad f(\arg u) > |u|,$$

et que $f(\theta)$ possède une dérivée continue, et essentiellement négative au voisinage de $\theta = \frac{\pi}{2}$, c'est à dire qu'il existe un angle aigu θ_0 tel que l'on ait $f'(\theta) \leq -m$ dans l'angle $\theta_0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, m étant une certaine constante positive. Il résulte de ces hypothèses que l'on peut trouver un angle θ_n infiniment voisin de $\frac{\pi}{2}$ quand n croît infiniment et tel que $nf(\theta_n)$ augmente infiniment avec n, tout en restant infiniment petit par rapport à toute puissance de n; de sorte que la quantité $nf(\theta_n)\cos\theta_n$ tendra vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Par exemple, on peut définir θ_n par l'égalité $f(\theta_n) = \frac{\sqrt{Ln}}{n}$; ceci s'écrit encore $f(\theta_n) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\theta_n - \frac{\pi}{2}\right) f'(\theta'_n) = \frac{\sqrt{Ln}}{n}$, où $\theta_n < \theta'_n < \frac{\pi}{2}$, de sorte que, si n est assez grand pour que θ_n soit supérieur à θ_0, il vient $m\cos\theta_n < \frac{\sqrt{Ln}}{n}$, et par suite $nf(\theta_n)\cos\theta_n < \frac{Ln}{mn}$.

La condition (12) exprime que C_n contient les α_ν d'indices $p+1, p+2, \ldots n+1$, p étant un nombre fixe convenablement grand; en effet, si l'on pose $\alpha_{\nu+1} = h + \varrho_\nu e^{i\theta_\nu}$, θ_ν tend vers $\arg u$ quand ν augmente infiniment, tandis que ϱ_ν est équivalent à $\nu|u|$, donc ϱ_ν est inférieur à $\nu f(\theta_\nu)$ dès que ν est suffisamment grand, soit pour $n \geq p$.

Observons que les contours C_n se déduisent les uns des autres par homothétie de centre $\zeta = h$, et sont tangents en ce point à la droite $\Re(\zeta) = h$. On en conclut que tout point α_ν intérieur à l'un est intérieur à tous ceux d'indice

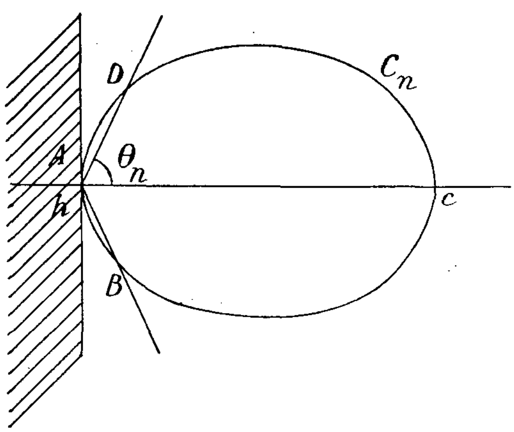

Fig. 1.

supérieur, et que les points α_ν, s'il y en a, qui sont extérieurs à tous les C_n, sont ceux dont l'indice est au plus égal à un certain entier p avec $\Re(\alpha_p) \leq h < \Re(\alpha_{p+1})$. En remarquant que le développement ainsi obtenu fait intervenir un développement de zéro dû à ces points spéciaux extérieurs à C_n, et ne peut donc converger pour $\Re(z) \leq \Re(\alpha_p)$, il est tout indiqué de donner à h la plus petite valeur possible. On choisira la borne inférieure des nombres réels λ tels que $F(z)$ soit holomorphe dans le demi-plan $\Re(z) > \lambda$ et y satisfasse à la condition que nous allons trouver. Si $F(z)$ n'est pas continue au point h, dans le demi-plan $\Re(z) \geq h$, on peut remplacer h par $h + \varepsilon$, ε étant infiniment petit et positif.

h et $f(\theta)$ étant choisis comme il vient d'être dit, nous partagerons[1] le contour C_n en deux arcs BCD et BAD, définis respectivement par les inégalités $-\theta_n \leq \theta \leq \theta_n$ et $\theta_n \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{2}$, et étudierons séparément leurs contributions à l'expression de $R_n[F]$.

19. Le long de BCD, on a

$$\frac{\alpha - \zeta}{u} = \frac{\alpha - h}{u} - \frac{n f(\theta)}{u} e^{i\theta},$$
$$\frac{\beta - \zeta}{v} = \frac{\beta - h}{v} - \frac{n f(\theta)}{v} e^{i\theta};$$

posons

$$(13) \qquad \begin{cases} \theta_1 = \arg \dfrac{-n f(\theta) e^{i\theta}}{u} = \theta - \arg u - \pi \operatorname{sgn}(\theta - \arg u), \\[2ex] \theta_2 = \arg \dfrac{-n f(\theta) e^{i\theta}}{v} = \theta - \arg v - \pi \operatorname{sgn}(\theta - \arg v), \end{cases}$$

de sorte que $|\theta_1|$ et $|\theta_2|$ sont inférieurs à π. Par conséquent, lorsque n croît infiniment, on a

$$(14) \quad \left| \frac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha - \zeta}{u} + 1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\beta - \zeta}{v} + 1\right)} \right| \sim \left| \frac{\left(\dfrac{-n f e^{i\theta}}{u}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{\alpha - h}{u} - \frac{n f e^{i\theta}}{u}} e^{\frac{n f e^{i\theta}}{u}}}{\left(\dfrac{-n f e^{i\theta}}{v}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{\beta - h}{v} - \frac{n f e^{i\theta}}{v}} e^{\frac{n f e^{i\theta}}{v}}} \right| =$$
$$= O(1) (n f)^{-h - n f \cos\theta} e^{n f \cos\theta - n f \left(\frac{\theta_1 \sin\theta_1}{|u|} - \frac{\theta_2 \sin\theta_2}{|v|}\right)}.$$
$$\cdot |u|^{\frac{n f}{|u|} \cos(\theta - \arg u)} |v|^{-\frac{n f}{|v|} \cos(\theta - \arg v)}.$$

[1] Le mode de raisonnement que nous utilisons ci-dessous s'inspire de la démonstration, donnée par N. E. Nörlund, du théorème fondamental de Carlson-Nörlund sur les séries de Newton. Cf. N. E. Nörlund, Leçons sur les séries d'interpolation, p. 131—141.

On voit de même que

$$(15)\quad \left|\frac{\Gamma\left(\frac{\beta-\zeta}{v}+n+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-\zeta}{u}+n+2\right)}\right| = \left|\frac{\left[n\left(1-\frac{fe^{i\theta}}{v}\right)\right]^{\frac{1}{2}+\frac{\beta-h}{v}+n\left(1-\frac{fe^{i\theta}}{v}\right)} e^{-n\left(1-\frac{fe^{i\theta}}{v}\right)}}{\left[n\left(1-\frac{fe^{i\theta}}{u}\right)\right]^{\frac{3}{2}+\frac{\alpha-h}{u}+n\left(1-\frac{fe^{i\theta}}{u}\right)} e^{-n\left(1-\frac{fe^{i\theta}}{u}\right)}}\right| =$$

$$= O(1)\, n^{h-1+nf\cos\theta}\, e^{-nf\cos\theta+n\Re\left\{\left(1-\frac{fe^{i\theta}}{v}\right)\log\left(1-\frac{fe^{i\theta}}{v}\right)-\left(1-\frac{fe^{i\theta}}{u}\right)\log\left(1-\frac{fe^{i\theta}}{u}\right)\right\}},$$

où l'on prend les déterminations

$$(16)\qquad \left|\arg\left(1-\frac{fe^{i\theta}}{u}\right)\right|<\pi,\quad \left|\arg\left(1-\frac{fe^{i\theta}}{v}\right)\right|<\pi.$$

En combinant (10), (14) et (15), il vient, le long de BCD,

$$(17)\quad \left|\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-z}{u}+n+2\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-\zeta}{u}+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta-\zeta}{v}+n+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta-z}{v}+n+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta-\zeta}{v}+1\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-\zeta}{u}+n+2\right)}\right| =$$

$$= O(1)\, n^{-\Re(z)} f(\theta)^{-h} e^{-nf(\theta)\psi(\theta)},$$

où $\psi(\theta)$ est la fonction de θ, u et v

$$(18)\quad \psi(\theta)=\psi(\theta;\ u,v)=\cos\theta\, Lf(\theta)+\frac{\cos\theta_1\, L|u|+\theta_1\sin\theta_1}{|u|}-\frac{\cos\theta_2\, L|v|+\theta_2\sin\theta_2}{|v|}+$$

$$+\frac{1}{f(\theta)}\Re\left\{\left(1-\frac{fe^{i\theta}}{u}\right)\log\left(1-\frac{fe^{i\theta}}{u}\right)-\left(1-\frac{fe^{i\theta}}{v}\right)\log\left(1-\frac{fe^{i\theta}}{v}\right)\right\}.$$

Supposons alors que $F(z)$ satisfasse, dans le demi-plan d'holomorphie $\Re(z)>h$, à l'inégalité

$$(19)\qquad |F(h+re^{i\theta})|<(1+r)^{k+\varepsilon(r)}\, e^{r\psi(\theta)},$$

k étant une constante, et $\varepsilon(r)$ désignant une fonction de r qui tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$. Il s'ensuit que, le long de BCD,

$$(20)\qquad |F(\zeta)|<C(nf)^{k+\varepsilon(r)}\, e^{nf(\theta)\psi(\theta)},$$

C désignant une certaine constante positive, mais qui ne sera pas nécessairement la même dans les formules à venir.

Enfin, le long de ce même arc, $|\zeta - h + z|$ et $|\zeta - h|$ sont équivalents, et

$$\left|\frac{d\,\zeta}{\zeta - h}\right| = \sqrt{1 + \frac{f'(\theta)^2}{f(\theta)^2}}\,|d\theta| < \left(1 - \frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\right)|d\theta| \qquad 0 < \theta < \theta_n.$$

Par conséquent la contribution $R'_n[F]$ de l'arc BCD dans l'expression (9) de $R_n[F]$ est telle que l'on ait

$$(21) \qquad |R'_n[F]| < C\,n^{k+\varepsilon'(n)-\Re(z)} \int_0^{\theta_n} f(\theta)^{k-h+\varepsilon'(n)} \left(1 - \frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\right) d\theta,$$

où $\varepsilon'(n)$ désigne la borne supérieure de $\varepsilon(nf(\theta))$ pour $0 \leq \theta \leq \theta n$, qui tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$. La fonction $f(\theta)^{k-h+\varepsilon'(n)}$ étant monotone, la deuxième formule de la moyenne donne, dans l'intervalle $(0, \theta_0)$

$$\int_0^{\theta_0} f(\theta)^{k-h+\varepsilon'(n)}\,d\theta < \theta_0\left[f(0)^{k-h+\varepsilon'(n)} + f(\theta_0)^{k-h+\varepsilon'(n)}\right];$$

d'autre part, dans l'intervalle (θ_0, θ_n), on peut écrire, grâce à la définition de θ_0,

$$\int_{\theta_0}^{\theta_n} f(\theta)^{k-h+\varepsilon'(n)}\,d\theta < -\frac{1}{m}\int_{\theta_0}^{\theta_n} f(\theta)^{k-h+\varepsilon'(n)} f'(\theta)\,d\theta =$$
$$= \frac{f(\theta_0)^{k-h+1+\varepsilon'(n)} - f(\theta_n)^{k-h+1+\varepsilon'(n)}}{m},$$

tout au moins pourvu que $k - h + 1$ diffère de zéro; si $k - h + 1 = 0$, on a

$$\int_{\theta_0}^{\theta_n} f(\theta)^{k-h+\varepsilon'(n)}\,d\theta < \frac{-1}{m}\int_{\theta_0}^{\theta_n} f(\theta)^{\varepsilon'(n)} \frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\,d\theta < \frac{f(\theta_0)^{\varepsilon'(n)}}{m} L\frac{f(\theta_0)}{f(\theta_n)}.$$

En tout cas, on peut écrire

$$\int_0^{\theta_n} f(\theta)^{k-h+\varepsilon'(n)}\,d\theta < \begin{cases} C + C' f(\theta_n)^{k-h+1+\varepsilon'(n)} & \text{si } k-h+1 \neq 0, \\ C + C'\,|L f(\theta_n)| & \text{si } k-h+1 = 0, \end{cases}$$

C et C' désignant deux constantes positives. Enfin, on a évidemment

$$\left| - \int_0^{\theta_n} f(\theta)^{k-h-1+\varepsilon'(n)} f'(\theta)\, d\theta \right| < \begin{cases} C + C' f(\theta_n)^{k-h+\varepsilon'(n)} & \text{si } k-h \neq 0, \\ C + C' \left| Lf(\theta_n) \right| & \text{si } k-h = 0. \end{cases}$$

En résumé, si on se rappelle que $nf(\theta_n)$ est infiniment petit par rapport à toute puissance de n, on obtient pour $R'_n[F]$ une limitation de la forme

$$(22) \qquad \left| R'_n[F] \right| < C n^{k+\varepsilon'(n)-\Re(z)} + C' n^{h+\varepsilon''-\Re(z)},$$

où ε'' est un nombre positif infiniment petit avec $\frac{1}{n}$. Par conséquent, $R'_n[F]$ tend vers zéro quand n augmente infiniment, dans le demi-plan

$$(23) \qquad \Re(z) > h \text{ et } k.$$

Il tend même uniformément vers zéro dans toute région finie, complètement intérieure à ce demi-plan et située à distance non nulle de tous les β_i.

20. Pour évaluer la contribution $R''_n[F]$ de l'arc DAB, nous poserons, le long de cet arc,

$$nf(\theta)\, e^{i\theta} = \xi + i\eta.$$

On sait que $\xi_n = nf(\theta_n) \cos\theta_n$ est infiniment petit avec $\frac{1}{n}$, et l'on a

$$\xi = nf(\theta) \cos\theta < \xi_n,$$

$$|\eta| = nf(\theta) \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{n^2 f(\theta)^2}} \sim nf(\theta) < nf(\theta_n).$$

Pour déterminer une valeur majorante de

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-\zeta}{u} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta-\zeta}{v} + 1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-h-\zeta}{u} + 1 - i\frac{\eta}{u}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta-h-\zeta}{v} + 1 - i\frac{\eta}{v}\right)},$$

observons que le second membre est borné avec η, puisque ζ reste à distance non nulle de tout α_i, et que, lorsque $|\eta|$ est infiniment grand,

$$(24)\quad \left|\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-\zeta}{u}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta-\zeta}{v}+1\right)}\right| = O(1)\left|\frac{\left[\left|\frac{\eta}{u}\right| e^{i\arg\frac{-i\eta}{u}}\right]^{\frac{\alpha-\zeta}{u}+\frac{1}{2}} e^{\frac{i\eta}{u}}}{\left[\left|\frac{\eta}{v}\right| e^{i\arg\frac{-i\eta}{v}}\right]^{\frac{\beta-\zeta}{v}+\frac{1}{2}} e^{\frac{i\eta}{v}}}\right| =$$

$$= O(1)\,|\eta|^{-h-\xi}\,|u|^{-\Im\left(\frac{\eta}{u}\right)}\,|v|^{\Im\left(\frac{\eta}{v}\right)}\, e^{\Re\left(\frac{\eta}{u}\right)\arg\frac{-i\eta}{u}-\Re\left(\frac{\eta}{v}\right)\arg\frac{-i\eta}{v}},$$

où $i\Im(z)$ désigne la partie imaginaire de z et où l'on choisit les déterminations $\arg\frac{-i\eta}{u}$ et $\arg\frac{-i\eta}{v}$ qui sont comprises entre $-\pi$ et $+\pi$. Il n'y a évidemment rien à changer dans les évaluations représentées par (10) et (15), puisque n est infiniment grand par rapport à η; et celles-ci l'emportent par cela même sur la valeur majorante du premier membre de (24). On peut donc écrire

$$(25)\quad \left|\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-z}{u}+n+2\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-\zeta}{u}+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta-\zeta}{v}+n+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta-z}{v}+n+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta-\zeta}{v}+1\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-\zeta}{u}+n+2\right)}\right| =$$

$$= O(1)\, n^{h+\xi+\varepsilon''-\Re(z)}\, e^{-nf(\theta)\psi_1(\theta)},$$

où ε'' désigne une constante positive infiniment petite avec $\frac{1}{n}$, et où

$$\psi_1(\theta) = \frac{1}{f(\theta)}\Re\left\{\left(1-\frac{fe^{i\theta}}{u}\right)\log\left(1-\frac{fe^{i\theta}}{u}\right)-\left(1-\frac{fe^{i\theta}}{v}\right)\log\left(1-\frac{fe^{i\theta}}{v}\right)\right\}.$$

D'autre part, il résulte de (19) que, le long de DAB, on peut écrire

$$(26)\quad |F(\zeta)| < C(1+|\eta|)^{k+\varepsilon(n)}\, e^{nf(\theta)\psi(\theta)} < C n^{\varepsilon'''}\, e^{nf(\theta)\psi(\theta)},$$

ε''' tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$; donc, grâce à la valeur bornée[1] de $\left|\frac{d\zeta}{n\,d\theta}\right|$, on a

$$|R_n''[F]| < C n^{h+\varepsilon_1-\Re(z)}\, e^{nf(\theta)[\psi(\theta)-\psi_1(\theta)]}\, n\left(\frac{\pi}{2}-\theta_n\right),$$

où $\varepsilon_1 = \xi+\varepsilon''+\varepsilon'''$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}\cdot$ Or $nf(\theta)[\psi(\theta)-\psi_1(\theta)]$ est la somme

[1] On a en effet $\left|\frac{d\zeta}{n\,d\theta}\right| = \sqrt{f^2+f'^2}$ et $f'(\theta)$ est bornée au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ en vertu de sa continuité. D'autre part $\frac{1}{|\zeta-z|}$ est borné sur l'arc BAD.

de $nf(\theta)\cos\theta\, Lf(\theta)$ et d'une forme linéaire en ξ et η, à coefficients bornés; ce premier terme n'est pas positif, donc

$$e^{nf(\theta)[\psi(\theta)-\psi_1(\theta)]} < C\, e^{C'|\eta|} < n^{\varepsilon_2},$$

ε_2 étant infiniment petit avec $\frac{1}{n}\cdot$ Il vient ainsi, en se rappelant que $n\left(\frac{\pi}{2}-\theta_n\right)$ est infiniment petit par rapport à toute puissance de n, puisque $n\cos\theta_n < \frac{\sqrt{Ln}}{m}$,

$$|R''_n[F]| < C\, n^{h+\varepsilon_1+\varepsilon_2-\Re(z)}\, n\left(\frac{\pi}{2}-\theta_n\right) < C\, n^{h+\varepsilon_3-\Re(z)},$$

qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ pourvu que $\Re(z)$ soit supérieur à h. Nous avons ainsi démontré le

Théorème I. *Une fonction analytique $F(z)$, holomorphe dans le demi-plan $\Re(z) \geq h$, qui satisfait dans ce demi-plan à l'inégalité*

$$|F(h + r\,e^{i\theta})| < C(1 + r)^{k+\varepsilon(r)}\, e^{r\,\psi(\theta)} \qquad |\theta| \leq \frac{\pi}{2},$$

où k est une constante et $\varepsilon(r)$ une fonction de r infiniment petite avec $\frac{1}{r}$, admet un développement de genre (N) *dont l'abscisse de convergence ne surpasse pas le plus grand des deux nombres h, k. Il s'agit ici d'un développement particulier, dont les paramètres sont tels que*

$$\omega = 0, \quad \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = 1 \quad et \quad \Re(u) > 0.$$

21. Faisons abstraction du changement de variable que nous avons effectué sur la variable z. Remarquons en même temps que dans les raisonnements que nous venons de faire on aurait pu remplacer h par un nombre complexe l, la conclusion $\lambda \geq h$ devenant alors $\lambda \geq \Re(l)$. Dans ces conditions, l'expression

$$z' = l + r\,e^{i\theta}$$

de la nouvelle variable z' devient, pour l'ancienne variable,

$$z = \omega + \frac{l + r\,e^{i\theta}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}},$$

et les périodes u', v' relatives à z' ont les valeurs $u\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)=1-\frac{u}{v}$ et $v\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)=\frac{v}{u}-1$. La fonction caractéristique $\psi(\theta)$, dans l'expression (18) de laquelle u et v désignent maintenant u' et v', s'exprime donc, en fonction de u et v, par $\psi\left(\theta;\ 1-\frac{u}{v}, \frac{v}{u}-1\right)\cdot$ Par conséquent, en posant $h=\omega+\frac{l}{\frac{1}{u}-\frac{1}{v}}$, h désignant maintenant un certain nombre complexe, on peut donner au théorème I la forme générale

Théorème II. *Si une fonction analytique $F(z)$, holomorphe dans le demi-plan $\varrho(z)\geq\varrho(h)$ y satisfait à l'inégalité*

$$\left|F\left(h+\frac{r\,e^{i\theta}}{\frac{1}{u}-\frac{1}{v}}\right)\right|<C(1+r)^{k+\varepsilon(r)}\,e^{r\psi\left(\theta;\,1-\frac{u}{v},\,\frac{v}{u}-1\right)}\qquad|\theta|\leq\frac{\pi}{2},\tag{27}$$

où $\psi(\theta;\ u, v)$ est défini par (18), *et où k désigne une constante et $\varepsilon(r)$ une fonction de r infiniment petite avec $\frac{1}{r}$, elle admet un développement de genre* (N), *de bases $[\alpha+nu]$, $[\beta+nv]$, dont la limite de convergence λ n'est pas supérieure au plus grand des deux nombres $\varrho(h)$, $\varrho(\omega)+k$.*

Remarquons que le demi-plan d'holomorphie et l'inégalité (27) ne font intervenir que les deux périodes u et v. Celles-ci étant fixées, on peut toujours choisir α et β arbitrairement. Mais il y a intérêt à les choisir de façon que $\varrho(\omega)+k$ soit au plus égal à $\varrho(h)$, c'est à dire de façon que

$$\Re\left(\frac{\alpha}{u}-\frac{\beta}{v}\right)\leq\varrho(h)-k.$$

Dans ces conditions, on a $\lambda\leq\varrho(h)$, et le demi-plan de convergence est le plus grand possible si $F(z)$ admet une singularité essentielle ou critique sur $\varrho(z)=\varrho(h)$, puisqu'on a alors nécessairement $\lambda=\varrho(h)$.

22. La fonction caractéristique $\psi(\theta;\ u, v)$ dépend du choix de $f(\theta)$, et il est intéressant de rechercher les fonctions $f(\theta)$ qui, tout en satisfaisant aux hypothèses faites au paragraphe 18, rendent $\psi(\theta)$ aussi grand que possible. Observons immédiatement que, si $f(\theta)$ satisfait aux conditions imposées, il en est de même pour son produit par une constante positive quelconque σ. $f(\theta)$ étant fixé,

faisons varier le facteur σ. $\psi(\theta)$ devient une fonction de σ, toutes choses égales d'ailleurs. Son expression (18), où $f(\theta)$ est remplacé par $\sigma f(\theta)$, fait tout de suite apparaître que $\psi(\theta)$ tend vers $-\infty$ quand σ tend vers zéro, θ conservant une valeur fixe distincte de $\pm\frac{\pi}{2}\cdot$ Par contre, lorsque σ croît infiniment, il vient

$$\begin{aligned}
\psi_1(\theta) &= \frac{1}{\sigma f}\,\Re\left\{\left(1-\frac{\sigma f e^{i\theta}}{u}\right)\left(\log\frac{-\sigma f e^{i\theta}}{u}+\varepsilon\right)-\left(1-\frac{\sigma f e^{i\theta}}{v}\right)\left(\log\frac{-\sigma f e^{i\theta}}{v}+\varepsilon'\right)\right\}\\
&= \Re\left\{\frac{-e^{i\theta}}{u}\left(L\frac{\sigma f}{|u|}+i\theta_1\right)+\frac{e^{i\theta}}{v}\left(L\frac{\sigma f}{|v|}+i\theta_2\right)+\varepsilon\right\}\\
&= -\cos\theta\, L\sigma f+\Re\left\{\frac{e^{i\theta_1}}{|u|}\left(L\frac{1}{|u|}+i\theta_1\right)-\frac{e^{i\theta_2}}{|v|}\left(L\frac{1}{|v|}+i\theta_2\right)\right\}+\varepsilon,
\end{aligned}$$

où ε, ε' désignent des quantités infiniment petites avec $\frac{1}{\sigma}$, et où l'on tient compte de la première condition (7); mais alors, on voit que $\psi(\theta)=\varepsilon$ et tend vers zéro avec $\frac{1}{\sigma}\cdot$

Ces remarques étant faites, formons la dérivée

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi(\theta)}{\partial\sigma} &= \frac{\cos\theta}{\sigma}-\\
&-\frac{1}{\sigma^2 f}\,\Re\left\{\left(1-\frac{\sigma f e^{i\theta}}{u}\right)\log\left(1-\frac{\sigma f e^{i\theta}}{u}\right)-\left(1-\frac{\sigma f e^{i\theta}}{v}\right)\log\left(1-\frac{\sigma f e^{i\theta}}{v}\right)\right\}\\
&-\frac{1}{\sigma f}\,\Re\left\{f e^{i\theta}+\frac{f e^{i\theta}}{u}\log\left(1-\frac{\sigma f e^{i\theta}}{u}\right)-\frac{f e^{i\theta}}{v}\log\left(1-\frac{\sigma f e^{i\theta}}{v}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\sigma^2 f}\,\Re\left\{\log\frac{1-\dfrac{\sigma f e^{i\theta}}{v}}{1-\dfrac{\sigma f e^{i\theta}}{u}}\right\}.
\end{aligned}$$

Elle ne s'annule que lorsque

$$\left|1-\frac{\sigma f e^{i\theta}}{u}\right|=\left|1-\frac{\sigma f e^{i\theta}}{v}\right|. \tag{28}$$

Or on a

$$\left|1 - \frac{\sigma f e^{i\theta}}{u}\right|^2 = \left|1 - \frac{\sigma f}{|u|} e^{i(\theta - \arg u)}\right|^2 = 1 - \frac{2\sigma f}{|u|}\cos(\theta - \arg u) + \frac{\sigma^2 f^2}{|u|^2}$$

$$= 1 - 2\sigma f\left[\Re\left(\frac{1}{u}\right)\cos\theta - \Im\left(\frac{1}{u}\right)\sin\theta\right] + \frac{\sigma^2 f^2}{|u|^2},$$

et, par conséquent, compte tenu de $\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = 1$, (28) se réduit à la forme remarquablement simple

$$\sigma f\left[2\cos\theta - \sigma f\left(\frac{1}{|u|^2} - \frac{1}{|v|^2}\right)\right] = 0. \tag{29}$$

Cette équation en σ n'admet une racine positive indépendante de θ que si $f(\theta) = \cos\theta$ et $\frac{1}{|u|^2} > \frac{1}{|v|^2}$. En vertu de (7), cette dernière condition s'écrit

$$\Re\left(\frac{1}{u}\right) > \frac{1}{2}. \tag{30}$$

En résumé, $\frac{1}{u} - \frac{1}{v}$ étant égal à 1, si $\Re\left(\frac{1}{u}\right) \leq \frac{1}{2}$, on est conduit à adopter pour σ une valeur aussi grande que possible, tandis que si $\Re\left(\frac{1}{u}\right) > \frac{1}{2}$, la fonction $f(\theta)$ la plus avantageuse est

$$f(\theta) = \frac{2\cos\theta}{\frac{1}{|u|^2} - \frac{1}{|v|^2}} = \frac{2\cos\theta}{\Re\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)}. \tag{31}$$

En nous plaçant dans ce dernier cas, proposons-nous d'expliciter la fonction $\psi(\theta)$ correspondante. Nous utiliserons la représentation cartésienne de $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$

$$\frac{1}{u} = \frac{s + 1 + it}{2}, \quad \frac{1}{v} = \frac{s - 1 + it}{2}; \tag{32}$$

(30) suppose que s est positif et l'on a $f(\theta) = \frac{2\cos\theta}{s}$. Compte tenu de l'équation (28), où $\sigma = 1$, on peut poser

$$\left\{\begin{aligned} & 1 - \frac{f e^{i\theta}}{u} = \varrho\, e^{i\varphi_1} \qquad |\varphi_1| < \pi, \\ & 1 - \frac{f e^{i\theta}}{v} = \varrho\, e^{i\varphi_2} \qquad |\varphi_2| < \pi, \end{aligned}\right. \tag{33}$$

où un calcul simple montre que la valeur commune ϱ de (28) est

(34) $$\varrho = \frac{1}{s}\sqrt{\cos^2\theta + (t\cos\theta + s\sin\theta)^2}.$$

On voit ensuite aisément que

(35) $$\psi_1(\theta) = \frac{1}{f}\Re\left\{\left(1 - \frac{f e^{i\theta}}{u}\right)(L\varrho + i\varphi_1) - \left(1 - \frac{f e^{i\theta}}{v}\right)(L\varrho + i\varphi_2)\right\}$$
$$= -\cos\theta\, L\varrho + \frac{\varphi_1}{|u|}\sin(\theta - \arg u) - \frac{\varphi_2}{|v|}\sin(\theta - \arg v),$$

et, par conséquent, en posant

(36) $$\theta_1' = \theta_1 - \varphi_1, \quad \theta_2' = \theta_2 - \varphi_2,$$

et, en désignant par $\varphi(\theta)$ la fonction $\psi(\theta)$ qui correspond à (31),

(37) $$\varphi(\theta) = \cos\theta\, L\frac{2\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + (t\cos\theta + s\sin\theta)^2}} -$$
$$- \frac{L|u|\cos(\theta - \arg u) + \theta_1'\sin(\theta - \arg u)}{|u|} +$$
$$+ \frac{L|v|\cos(\theta - \arg v) + \theta_2'\sin(\theta - \arg v)}{|v|}.$$

On sait que $\varphi(\theta)$ est essentiellement positif pour $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, comme l'a montré la variation de la fonction générale $\psi(\theta)$ en fonction de σ. Il est intéressant de vérifier qu'il en est de même aux extrémités de l'intervalle en question. Par exemple, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, il vient $\theta_1 = -\frac{\pi}{2} - \arg u$, $\varphi_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \arg v - \pi \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - \arg v\right)$, $\varphi_2 = 0$, donc $\theta_1' = \theta_1 = -\frac{\pi}{2} + \arg\frac{1}{u}$, $\theta_2' = \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \arg\frac{1}{v} - \pi\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} + \arg\frac{1}{v}\right)$ et enfin

(38) $$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{t}{2}L\left|\frac{u}{v}\right| - \frac{s+1}{2}\theta_1' + \frac{s-1}{2}\theta_2' =$$
$$= \frac{t}{4}L\frac{(s-1)^2 + t^2}{(s+1)^2 + t^2} - \frac{s+1}{2}\theta_1' + \frac{s-1}{2}\theta_2'.$$

Quand t croît infiniment, on observe que θ_1' et θ_2' tendent vers zéro, et qu'il en est de même pour $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Or on voit tout de suite que

$$\frac{\partial \theta_1'}{\partial t} = \frac{s+1}{(s+1)^2+t^2}, \quad \frac{\partial \theta_2'}{\partial t} = \frac{s-1}{(s-1)^2+t^2},$$

et, par conséquent, que

$$\frac{\partial \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\partial t} = \frac{1}{4} L \frac{(s-1)^2+t^2}{(s+1)^2+t^2}$$

est essentiellement négatif. Donc $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est essentiellement positif. En outre, lorsque t tend vers $-\infty$, θ_1' tend vers $-\pi$, θ_2' tend vers π sgn $(1-s)$ et, par conséquent, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ tend vers le plus petit des deux nombres π, $s\pi$. En résumé $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ décroît du plus petit des 2 nombres π, $s\pi$ vers zéro quand t croît de $-\infty$ à $+\infty$, et l'on voit même qu'il est égal, pour $t=0$, à la moitié de sa limite supérieure[1].

En posant $\varphi(\theta) = \varphi(\theta; s, t)$, afin de mettre en évidence les deux paramètres dont dépend cette fonction, observons que, si l'on change simplement les signes de θ et de t, les arguments de u et v sont simplement changés de signe, ainsi que $\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2$. Par conséquent

$$\varphi(\theta; s, t) \equiv \varphi(-\theta; s, -t). \tag{39}$$

En particulier, on en conclut que $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}; s, t\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}; s, -t\right)$ croît de zéro jusqu'au plus petit des deux nombres π, $s\pi$ lorsque t croît de $-\infty$ à $+\infty$. Ces deux sens contraires de variation de $\varphi\left(\frac{\pi}{2}; s, t\right)$ et de $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}; s, t\right)$ excluent la possibilité de choisir s et t de façon que la fonction correspondante $\varphi(\theta; s, t)$ soit plus avantageuse que toutes les autres pour toutes les valeurs de θ de l'intervalle

[1] L'intervention de la valeur critique $s=1$ a une signification profonde; cette valeur sépare en effet les cas où le plan de convergence contient une infinité de points βi de ceux où il n'en contient qu'un nombre fini. Le cas limite, où v est infini, correspond aux séries de Newton.

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. D'une manière plus précise, il est intéressant de remarquer que

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}; s, t\right) + \varphi\left(-\frac{\pi}{2}; s, t\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}; s, t\right) + \varphi\left(\frac{\pi}{2}; s, -t\right) =$$

$$= -\frac{s+1}{2}\left[\theta_1'\left(\frac{\pi}{2}; s, t\right) + \theta_1'\left(\frac{\pi}{2}; s, -t\right)\right] + \frac{s-1}{2}\left[\theta_2'\left(\frac{\pi}{2}; s, t\right) + \theta_2'\left(\frac{\pi}{2}; s, -t\right)\right],$$

avec

$$\theta_1'\left(\frac{\pi}{2}; s, t\right) + \theta_1'\left(\frac{\pi}{2}; s, -t\right) = -\pi + \arg\frac{s+1+it}{2} + \arg\frac{s+1-it}{2} = -\pi,$$

$$\begin{aligned}\theta_2'\left(\frac{\pi}{2}; s, t\right) + \theta_2'\left(\frac{\pi}{2}; s, -t\right) &= \pi + \arg\frac{s-1+it}{2} + \arg\frac{s-1-it}{2} - \\ &- \pi\,\mathrm{sgn}\left(\frac{\pi}{2} + \arg\frac{s-1+it}{2}\right) - \\ &- \pi\,\mathrm{sgn}\left(\frac{\pi}{2} + \arg\frac{s-1-it}{2}\right) = \\ &= -\pi\,\mathrm{sgn}\left(\frac{\pi}{2} + \arg\frac{s-1-it}{2}\right) = \begin{cases} -\pi & s > 1, \\ \pi & s < 1, \end{cases}\end{aligned}$$

donc

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}, s, t\right) + \varphi\left(-\frac{\pi}{2}; s, t\right) = \begin{cases} \pi & s \geq 1, \\ s\pi & 0 < s \leq 1. \end{cases} \tag{40}$$

23. Une étude plus approfondie de la fonction caractéristique $\varphi(\theta; s, t)$ semble très compliquée dans toute sa généralité; aussi nous bornerons-nous, dans ce paragraphe, à la discussion du cas où les deux périodes u et v sont réelles. Supposons donc $t = 0$, $s > 0$, $\frac{1}{u} = \frac{s+1}{2}$, $\frac{1}{v} = \frac{s-1}{2}$. Il vient alors

$$\theta_1 = \theta - \pi\,\mathrm{sgn}\,\theta, \quad \theta_2 = \begin{cases} \theta & s < 1, \\ \theta - \pi\,\mathrm{sgn}\,\theta & s > 1, \end{cases}$$

$$\varrho\, e^{i\varphi_1} = 1 - \frac{s+1}{s}\cos\theta\, e^{i\theta}, \quad \varrho\, e^{i\varphi_2} = 1 - \frac{s-1}{s}\cos\theta\, e^{i\theta},$$

donc

$$\begin{cases} \varrho\cos\theta_1' = \dfrac{\cos\theta}{s}, \\ \varrho\sin\theta_1' = -\sin\theta, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varrho\cos\theta_2' = -\dfrac{\cos\theta}{s}\,\mathrm{sgn}\, v, \\ \varrho\sin\theta_2' = -\sin\theta\,\mathrm{sgn}\, v. \end{cases} \tag{41}$$

En se rappelant que $|\varphi_1|$ et $|\varphi_2|$ sont inférieurs à π, on en conclut que l'on a toujours $|\theta_1'| < \frac{\pi}{2}$, c'est à dire

$$\theta_1' = - \operatorname{Arc\,tg}\,(s \operatorname{tg} \theta), \tag{42}$$

tandis que

$$\theta_2' = \begin{cases} -\theta_1' & s < 1, \\ -\theta_1' - \pi \operatorname{sgn} \theta & s > 1. \end{cases} \tag{43}$$

L'expression (37) de $\varphi(\theta)$ se réduit alors

$$\varphi(\theta; s, 0) = \cos\theta\, L \frac{2\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + s^2 \sin^2\theta}} + \left(\frac{s+1}{2} L \frac{s+1}{2} - \frac{s-1}{2} L \left|\frac{s-1}{2}\right|\right) \cos\theta - \left(\frac{s+1}{2}\theta_1' - \frac{s-1}{2}\theta_2'\right)\sin\theta, \tag{44}$$

et prend alors, suivant le cas, l'une ou l'autre des deux formes

$$\varphi(\theta; s, 0) = \cos\theta\, L \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + s^2\sin^2\theta}} + q\cos\theta + s \sin\theta \operatorname{Arc\,tg}\,(s \operatorname{tg}\theta) \qquad 0 < s < 1, \tag{45}$$

$$\varphi(\theta; s, 0) = \cos\theta\, L \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + s^2\sin^2\theta}} + q\cos\theta + s \sin\theta \operatorname{Arc\,tg}\,(s \operatorname{tg}\theta) - \frac{s-1}{2}\pi|\sin\theta| \qquad s > 1, \tag{46}$$

avec

$$q = q(s) = L\,2 + \frac{s+1}{2} L \frac{s+1}{2} - \frac{s-1}{2} L \left|\frac{s-1}{2}\right| = \frac{1}{2}\{(s+1) L (s+1) - (s-1) L |s-1|\}.$$

Ces deux fonctions sont paires, et il suffit de les étudier dans l'intervalle $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Commençons par l'examen de (45).

1°. La dérivée de cette fonction est

$$\frac{d\varphi(\theta; s, 0)}{d\theta} = -\sin\theta\, L \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + s^2\sin^2\theta}} - q\sin\theta + s\cos\theta \operatorname{Arc\,tg}\,(s \operatorname{tg}\theta),$$

et par conséquent du signe de

$$\sigma = \operatorname{tg}\theta\, L\sqrt{s^2\operatorname{tg}^2\theta + 1} + s \operatorname{Arc\,tg}(s\operatorname{tg}\theta) - q\operatorname{tg}\theta \tag{47}$$

dans l'intervalle considéré. Formons encore

$$\frac{d\sigma}{d\operatorname{tg}\theta} = L\sqrt{s^2\operatorname{tg}^2\theta + 1} + s^2\frac{\operatorname{tg}^2\theta + 1}{s^2\operatorname{tg}^2\theta + 1} - q,$$

$$\frac{d^2\sigma}{d(\operatorname{tg}\theta)^2} = \frac{s^2(s^2\operatorname{tg}^2\theta + 3 - 2s^2)\operatorname{tg}\theta}{(s^2\operatorname{tg}^2\theta + 1)^2}.$$

Cette dernière dérivée est essentiellement positive puisque s^2 est inférieur à 1, donc $\frac{d\sigma}{d\operatorname{tg}\theta}$ croît de $Q(s) = s^2 - q(s)$ à $+\infty$ quand θ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, et nous sommes conduits à étudier le signe de

$$Q(s) = s^2 - \frac{1}{2}\{(s+1)L(s+1) - (s-1)L|s-1|\}.$$

On a

$$\frac{dQ}{ds} = 2s - \frac{1}{2}L\left|\frac{s+1}{s-1}\right|,$$

$$\frac{d^2Q}{ds^2} = \frac{2s^2-1}{s^2-1},$$

ce qui permet de former le tableau des variations suivant:

(48)

s	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	s_1	1	s_2	$+\infty$
$\frac{dQ}{ds}$	$0 \nearrow$	$\sqrt{2} - L(\sqrt{2}+1) \searrow$	$0 \searrow$	$-\infty \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$
$Q(s)$	$0 \nearrow$		$\nearrow Q(s_1) \searrow$	$1 - L2 > 0 \searrow$	$Q(s_2) \nearrow$	$+\infty$

$Q(s)$ étant essentiellement positif, dans l'intervalle qui nous intéresse, σ croît de 0 à $+\infty$, et, par conséquent, $\varphi(\theta; s, 0)$ croît de $q(s)$ à $\frac{s\pi}{2}$, sa dérivée étant nulle pour $\theta = 0$ et infinie pour $\theta = \frac{\pi}{2}$. Sans reproduire les calculs élémentaires, mais fastidieux, par lesquels on peut montrer l'absence d'inflexion, on peut représenter les variations de la fonction (45) par une courbe ayant l'allure de la figure 2.

Observons encore que le minimum $q(s)$ croît de o à $L2$ quand s croît de o à 1.

2°. s étant supérieur à 1 et θ positif, la dérivée de (45) s'écrit

$$\frac{d\varphi(\theta; s, 0)}{d\theta} = -\sin\theta\, L \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + s^2\sin^2\theta}} - \\ - q\sin\theta + s\cos\theta \operatorname{Arc\,tg}(s \operatorname{tg}\theta) - \frac{s-1}{2}\pi\cos\theta,$$

et est du signe de $\sigma - \frac{s-1}{2}\pi$, σ ayant la même signification qu'en (47). Mais $\frac{d^2\sigma}{d(\operatorname{tg}\theta)^2}$ n'est plus essentiellement positif lorsque s est supérieur à $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

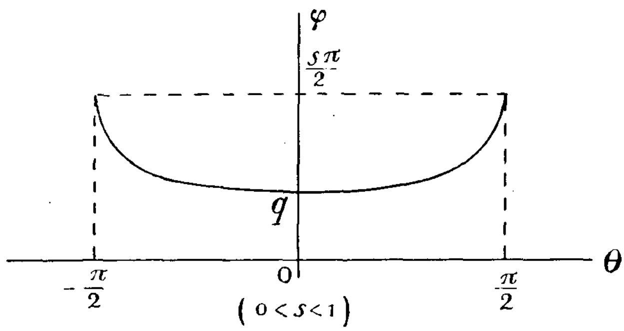

Fig. 2.

Lorsque l'on a $1 < s \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\frac{d\sigma}{d(\operatorname{tg}\theta)}$ croît encore, comme précédemment, de $Q(s)$ à $+\infty$ quand θ croît de o à $\frac{\pi}{2}$, mais il faut un calcul supplémentaire pour vérifier que $Q(s)$ est positif. Il serait fastidieux de reproduire ce calcul élémentaire. Signalons seulement que la racine s_2 de $\frac{dQ}{ds}$ mise en évidence sur le tableau (48) est comprise entre $\frac{64}{62}$ et $\frac{63}{61}$, cette dérivée restant inférieure à $\frac{1}{100}$ dans cet intervalle; $Q\left(\frac{63}{61}\right)$ étant supérieur à 0,25, $Q(s_2)$ est positif.

Pour $s > \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\frac{d\sigma}{d(\operatorname{tg}\theta)}$ passe par un minimum, pour $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{2s^2-3}}{s}$, égal à

$$\tau(s) = L\sqrt{2s^2 - 2} - q(s) + \frac{3}{2}.$$

Or, pour $s > 1$,

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{s}{s^2 - 1} - \frac{1}{2} L \frac{s+1}{s-1}$$

admet une dérivée essentiellement négative, et tend vers zéro quand s croît infiniment; $\frac{d\tau}{ds}$ est donc positif et τ croissant. L'observation que $\tau(1) = \frac{3}{2} - L2$ est évidemment positif montre enfin que $\frac{d\sigma}{d\,\mathrm{tg}\,\theta}$ est positif, aussi bien dans l'intervalle de variation $s > \sqrt{\frac{3}{2}}$ que dans le précédent.

En résumé, les variations de la fonction (46) résultent du tableau ci-dessous:

θ	0		θ_0		$\frac{\pi}{2}$
$\sigma - \frac{s-1}{2}\pi$	$-\frac{s-1}{2}\pi$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\frac{d\varphi}{d\theta}$	$-\frac{s-1}{2}\pi$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$\varphi(\theta)$	q	$\searrow$	$\varphi(\theta_0) > 0$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$,

et peuvent être représentées par une courbe ayant l'allure[1] de la figure 3.

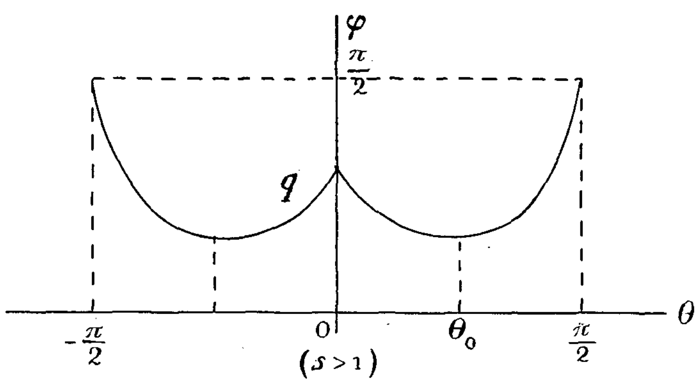

Fig. 3.

[1] Pour ces courbes, je ne suis pas sûr qu'il n'existe point d'inflexion; mais il est vrai que ce fait n'offre que peu d'intérêt.

Remarquons que les deux familles de courbes obtenues dans cette discussion se raccordent à la même courbe limite, relative à $s = 1$; celle-ci a d'ailleurs l'allure des courbes de la première famille.

La déformation de la courbe représentative en fonction de s se déduit aisément des valeurs de

$$\frac{\partial \varphi(\theta; s, 0)}{\partial s} = \frac{\cos\theta}{2} L\left|\frac{s+1}{s-1}\right| + \sin\theta \operatorname{Arc\,tg}(s \operatorname{tg}\theta) - \begin{cases} 0 & s < 1 \\ \frac{\pi}{2}\sin\theta & s > 1, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(\theta; s, 0)}{\partial s^2} = \frac{-\cos\theta}{(s^2-1)(\cos^2\theta + s^2\sin^2\theta)};$$

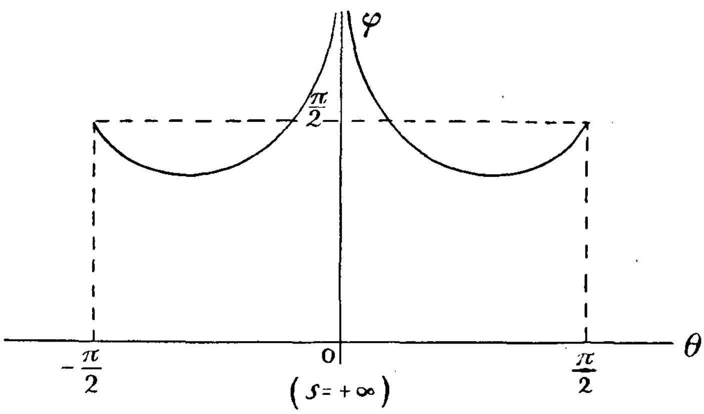

Fig. 4.

par conséquent $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ croît de 0 à $+\infty$ quand s croît de 0 à 1, puis décroît de $+\infty$ à 0 quand s croît de 1 à $+\infty$ $\left(\text{on suppose toujours } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$, et $\varphi(\theta; s, 0)$ est ainsi une fonction essentiellement croissante de s. En résumé, la courbe représentative de $\varphi(\theta)$ se déforme par dilatation constante des ordonnées quand s croît de 0 à $+\infty$. Quand s tend vers l'infini, elle tend vers la courbe limite

$$\varphi = \cos\theta\, L\,|\cot\theta| + \frac{\pi}{2}|\sin\theta|$$

dont l'allure est représentée sur la figure 4.

24. Il est intéressant de raccorder ces résultats généraux au théorème de Nörlund[1] relatif aux fonctions développables en séries de Newton. Celles-ci, correspondant à la valeur limite $v = \infty$, s'obtiennent en faisant tendre s vers 1, t étant toujours nul. α est également nul. La fonction caractéristique est alors justement

$$\varphi(\theta; 1, 0) = \cos\theta\, L(2\cos\theta) + \theta\sin\theta.$$

Par contre, il faut observer que le théorème I ne s'applique plus tel quel, puisque les calculs de la démonstration supposaient $\frac{1}{v} \neq 0$. Effectivement, le dénominateur au premier membre de (14) devient maintenant $\Gamma(1) = 1$, alors qu'il avait été remplacé par une quantité devenant ici de l'ordre de $\sqrt{nf(\theta)}$. Comme on le voit aisement, c'est la seule modification nécessaire, de sorte qu'il suffit de multiplier le second membre de (17) par $\sqrt{nf(\theta)}$, ce qui revient à remplacer k par $k + \frac{1}{2}$ au second membre de (21). C'est justement avec cette modification que le théorème général I devient, pour les séries de Newton, l'énoncé du théorème de Carlson—Nörlund.

25. Supposons maintenant que l'on ait $0 < \Re\left(\frac{1}{u}\right) \leq \frac{1}{2}\cdot$ L'équation (29) n'ayant pas de racine, nous avons vu au paragraphe 22 que la fonction $\psi(\theta; u, v)$ relative à $\sigma f(\theta)$ est alors une fonction essentiellement croissante de la variable positive σ, et tend vers zéro par valeurs négatives quand σ croît indéfiniment; elle tend même uniformément vers cette limite dans tout intervalle intérieur à l'intervalle $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\cdot$

D'autre part, les hypothèses générales faites sur la fonction $f(\theta)$ entraînent

$$\psi\left(\pm\frac{\pi}{2}; u, v\right) = \frac{\cos\theta_1 L|u| + \theta_1 \sin\theta_1}{|u|} - \frac{\cos\theta_2 L|v| + \theta_2\sin\theta_2}{|v|}.$$

Cette valeur est indépendante de $f(\theta)$, de sorte que les courbes représentant les fonctions caractéristiques relatives aux différentes fonctions $\sigma f(\theta)$ ont les mêmes extrémités; mais alors que l'étude faite au paragraphe 22 montrait que, lorsque s est positif, ces cotes sont également positives, elles sont négatives avec s; c'est

[1] Cf »Leçons sur les séries d'interpolation», p. 131.

ainsi que $\dfrac{\partial\varphi\left(\dfrac{\pi}{2};\, s,\, t\right)}{\partial t} = \dfrac{1}{4}\, L\, \dfrac{(s-1)^2+t^2}{(s+1)^2+t^2}$ est maintenant supérieur ou égal à zéro, tandis que l'on a toujours $\lim\limits_{t\to\infty} \psi\left(\dfrac{\pi}{2};\, s,\, t\right) = 0$.

Les développements de genre (N) pour lesquels $\Re\left(\dfrac{1}{u}\right) \leq \dfrac{1}{2}$ ne pourraient donc être envisagés, avec les résultats obtenus jusqu'ici, que pour des fonctions $F(z)$ holomorphes dans un certain demi-plan, et satisfaisant dans ce demi-plan à une inégalité de la forme $|F(z)| < Ce^{-K|z|}$, la constante K étant positive. Or il est aisé de démontrer directement, et nous allons d'ailleurs le retrouver comme une conséquence du théorème II, qu'une telle fonction est nécessairement identiquement nulle, ce qui montre l'insuffisance de notre mode opératoire pour les séries telles que $|u|$ soit supérieur ou égal à $|v|$.

L'hypothèse $\Re\left(\dfrac{1}{u}\right) > 0$ faite au paragraphe 18 sur les séries de genre (N) pour lesquelles $\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v} = 1$ était en effet nécessaire pour que les coefficients a_ν du développement de $F(z)$ dépendissent d'une infinité de valeurs de cette fonction. Le cas limite où $\Re\left(\dfrac{1}{u}\right) = 0$, c'est à dire où $s = -1$, $t = 0$ correspond, pour $\omega = 0$, c'est à dire pour $\beta = 0$, aux séries de facultés $\sum \dfrac{a_n}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$. Mais alors les expressions (8) ch. I des coefficients a_ν deviennent nulles, et (7) se réduit à la formule évidente

$$F(z) = R_n[F] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,\frac{(\zeta+1)(\zeta+2)\cdots(\zeta+n)}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\,d\zeta.$$

Cependant l'évaluation faite aux paragraphes 19 et 20 conserve sa valeur, si ce n'est que le numérateur au premier membre de (14) se réduit à $\Gamma(1) = 1$, alors que la quantité qu'on lui avait substituée était de l'ordre de $\sqrt{nf(\theta)}$. Il suffit donc de diviser l'évaluation faite dans le cas général par $\sqrt{nf(\theta)}$, ce qui revient à remplacer l'exposant k par $k - \dfrac{1}{2}$. L'étude de $\psi(\theta)$ subsiste dans son intégralité, ses valeurs extrêmes devenant égales à $-\dfrac{\pi}{2}$. Le théorème I exprime donc ici que $F(z)$ est identiquement nulle si elle vérifie la condition $|F(z)| < Ce^{-K|z|}$, où $K > \frac{\pi}{2}\cdot$

Enfin si K est une constante positive quelconque, le théorème II conduit à la même conclusion, puisque (27) ch. V est vérifiée dès que $|F(h+z)| < Ce^{\left|\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right||z|\psi(\theta)}$, et par conséquent dès que K surpasse $\left|\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right|\frac{\pi}{2}$, ce qui est toujours possible pourvu que $\left|\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right|$ soit assez petit.

26. Les raisonnements que nous avons faits dans ce chapitre sur les développements de genre (N) et les conclusions qu'ils nous ont permis de tirer ne nécessitent point que les deux bases $[\alpha]$, $[\beta]$ soient des progressions arithmétiques. Supposons, en effet, qu'elles n'aient toutes deux cette qualité qu'à partir d'un certain rang p. En mettant l'expression (9) du reste sous la forme

$$R_{p+n}[F] = \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_p)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_p)} \frac{\left(\frac{z-\alpha_p}{u}-1\right)\left(\frac{z-\alpha_p}{u}-2\right)\cdots\left(\frac{z-\alpha_p}{u}-n-1\right)}{\left(\frac{z-\beta_p}{v}-1\right)\left(\frac{z-\beta_p}{v}-2\right)\cdots\left(\frac{z-\beta_p}{v}-n\right)}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{p+n}} \frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\frac{(\zeta-\beta_1)(\zeta-\beta_2)\cdots(\zeta-\beta_p)}{(\zeta-\alpha_1)(\zeta-\alpha_2)\cdots(\zeta-\alpha_p)} \frac{\left(\frac{\zeta-\beta_p}{v}-1\right)\left(\frac{\zeta-\beta_p}{v}-2\right)\cdots\left(\frac{\zeta-\beta_p}{v}-n\right)}{\left(\frac{\zeta-\alpha_p}{u}-1\right)\left(\frac{\zeta-\alpha_p}{u}-2\right)\cdots\left(\frac{\zeta-\alpha_p}{u}-n-1\right)}\,d\zeta,$$

la quantité sous le signe d'intégration diffère de celle de (9) par la substitution de α_p et β_p à α, β, et par la multiplication par le rapport $\frac{(\zeta-\beta_1)(\zeta-\beta_2)\cdots(\zeta-\beta_p)}{(\zeta-\alpha_1)(\zeta-\alpha_2)\cdots(\zeta-\alpha_p)}$; celui-ci reste borné quand n croît infiniment du moment qu'aucun des $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ ne se trouve sur $\varrho(z) = \varrho(h)$. Le théorème II subsiste donc puisqu'on peut toujours modifier infiniment peu cette frontière pour qu'elle ne contienne aucun des $\alpha_i (i = 1, 2, \ldots)$.

Grâce à cette remarque, on peut raisonner sur une fonction $F(z)$ méromorphe dans le demi-plan fermé $\varrho(z-h) > 0$, pourvu que ses pôles, en nombre nécessairement fini, appartiennent à la base $[\beta]$, autant de fois que l'exigent les ordres de multiplicité, la progression arithmétique commençant après un certain rang. Les théorèmes I et II s'appliquent donc aux fonctions méromorphes qui satisfont aux inégalités hors des voisinages de leurs pôles.

Enfin, par analogie avec la remarque faite au paragraphe 25, le facteur $\left|\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right|$ peut toujours être choisi assez grand pour que $\left|\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right|\psi(\theta)$ surpasse une constante positive arbitraire K, lorsque $\Re\left(\frac{v}{v-u}\right)>\frac{1}{2}\cdot$

Nous avons donc démontré que *toute fonction analytique $F(z)$, méromorphe dans un demi-plan fermé, et y vérifiant, hors des voisinages de ses pôles, une inégalité de la forme*

$$|F(z)|<Ce^{K|z|}\qquad C, K>0,$$

admet un développement de genre (N), *pourvu que la base* $[\beta]$ *contienne les pôles situés dans ce demi-plan, et que* $\Re\left(\frac{v}{v-u}\right)$ *surpasse* $\frac{1}{2}$, $\left|\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right|$ *étant en outre assez grand pour que K ne surpasse pas* $\left|\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right|\ \psi\left(\theta;\,1-\frac{u}{v},\,\frac{v}{u}-1\right)\cdot$

Chapitre VI.

Fonctions développables en série

$$\sum a_n\frac{(z-\alpha-u)(z-\alpha-2u)\cdots(z-\alpha-nu)}{(z-\beta+u)(z-\beta+2u)\cdots(z-\beta+nu)}\cdot$$

27. Le mode opératoire que nous venons d'utiliser dans ces derniers paragraphes ne s'est montré adapté au problème que nous voulions résoudre que lorsqu'il s'agissait de séries (N) pour lesquelles $\Re\left(\frac{v}{v-u}\right)>\frac{1}{2}$. Pour la catégorie de celles où $\Re\left(\frac{v}{v-u}\right)\leq\frac{1}{2}$, nous étions arrivés à la conclusion que la fonction caractéristique $\psi(\theta)$ déterminée par le contour d'intégration $\zeta=h+\sigma n f(\theta)e^{i\theta}$ était d'autant moins désavantageuse que la constante positive σ était plus grande. Il est naturel de supposer que c'est l'insuffisance de l'ordre d'infinitude des dimensions de ce contour C_n qui est la source, pour cette catégorie de séries, de la carence du procédé. C'est cette idée que nous allons utiliser dans ce chapitre, mais en nous bornant au cas limite particulier où $v=-u$. Des difficultés de calcul se présentent en effet dans le cas général, même lorsque $|v|=|u|$, et qui ne semblent guère aisées à résoudre.

Le cas auquel nous nous bornons, et qui forme le titre de ce chapitre, se ramène tout de suite au développement d'écriture plus simple[1]

$$(1) \qquad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-\alpha-1)(z-\alpha-2)\cdots(z-\alpha-n)}{(z+\alpha+1)(z+\alpha+2)\cdots(z+\alpha+n)},$$

grâce au changement de variable $\left(z, \frac{\alpha+\beta}{2}+uz\right)$. L'expression (9) ch. V du reste $R_n[F]$ devient ici

$$(2) \quad R_n[F] = \frac{\Gamma(\alpha+z+1)\,\Gamma(\alpha-z+n+2)}{\Gamma(\alpha-z+1)\,\Gamma(\alpha+z+n+1)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{F(\zeta)}{\zeta-z} \frac{\Gamma(\alpha-\zeta+1)\,\Gamma(\alpha+\zeta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\zeta+1)\,\Gamma(\alpha-\zeta+n+2)} d\zeta,$$

et nous choisissons pour C_n un contour $ABCDA$ ayant la forme du contour de la figure 1, mais où l'arc BCD est, d'une manière précise, l'arc de cercle d'équation[2]

$$\zeta = h + \chi \cos\theta\, e^{i\theta} \qquad |\theta| \leq \theta_n,$$

et où l'arc BAD est remplacé par l'ensemble des deux cordes DA, BA, d'équations

$$\zeta = h + re^{\pm i\theta_n} \qquad 0 \leq r \leq \chi \cos\theta_n;$$

χ désigne une fonction de n infiniment grande par rapport à n et θ_n un angle aigu infiniment voisin de $\frac{\pi}{2}$, mais tel que $\chi \cos\theta_n$ soit infiniment grand par rapport à n. La suite des calculs nous permettra de préciser la définition de ces éléments.

Tout d'abord, le long de l'arc de cercle BCD, $|\zeta|$ étant infiniment grand par rapport à n, on a

$$(3) \qquad \left|\frac{\Gamma(\alpha-\zeta+1)\,\Gamma(\alpha+\zeta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\zeta+1)\,\Gamma(\alpha-\zeta+n+2)}\right| = O(1)\,(\chi\cos\theta)^{-1}\,e^{w},$$

où w désigne la quantité

---

[1] La lettre α n'a pas le même sens dans le titre du chapitre et dans le développement (1); en fonction de α et β elle représente la quantité $\frac{\alpha-\beta}{2}$.

[2] On suppose toujours que $F(z)$ est holomorphe dans le demi-plan $\Re(z) > h$.

$$w = \Re\left\{(\chi \cos\theta\, e^{i\theta} + n)\log\left(1 + \frac{n e^{-i\theta}}{\chi\cos\theta}\right) + (\chi\cos\theta\, e^{i\theta} - n)\log\left(1 - \frac{n e^{-i\theta}}{\chi\cos\theta}\right)\right\}.$$

En développant les logarithmes suivant les puissances entières croissantes de l'infiniment petit $\frac{n}{\chi\cos\theta}$, on obtient le développement limité

$$(4) \qquad w = \sum_{\nu=1}^{p} \frac{1}{\nu(2\nu-1)} \frac{n^{2\nu}\cos(2\nu-1)\theta}{(\chi\cos\theta)^{2\nu-1}} + \delta\frac{n^{2p+2}}{(\chi\cos\theta)^{2p+1}},$$

où δ reste borné quand n croît infiniment. Il résulte de là que si l'on a choisi pour χ et θ_n des quantités telles que

$$(5) \qquad \chi = n^{2+\varrho+\sigma}, \qquad \cos\theta_n = \frac{1}{n^{1+\sigma}},$$

où ϱ, σ sont 2 nombres positifs, l'exposant w de e au second membre de (3) est infiniment petit puisque les termes de la somme au second membre de (4) le sont pour $|\theta| \leq \theta_n$, et que le dernier terme l'est évidemment pourvu que $2p+1$ surpasse $\frac{1}{\varrho}$.

Dans ces conditions, et sachant que l'on a toujours

$$(6) \qquad \left|\frac{\Gamma(\alpha - z + n + 2)}{\Gamma(\alpha + z + n + 1)}\right| \sim n^{1-2\Re(z)},$$

et que, le long de BCD,

$$(7) \qquad \left|\frac{d\zeta}{\zeta - z}\right| = O(1)\left|\frac{d\zeta}{\zeta - h}\right| = O(1)\frac{|d\theta|}{\cos\theta},$$

la contribution de l'arc BCD à l'expression du reste a une valeur absolue

$$|R'_n[F]| < C n^{1-2\Re(z)}\chi^{-1}\int_{-\theta_n}^{\theta_n} |F(\xi)|\frac{d\theta}{\cos^2\theta}.$$

Il résulte de là que si la fonction $F(z)$ satisfait, dans le demi-plan $\Re(z) > h$, à une inégalité de la forme

$$(8) \qquad |F(h + re^{i\theta})| < (1 + r)^{k+\varepsilon(r)},$$

où k est une constante et $\varepsilon(r)$ une quantité infiniment petite avec $\frac{1}{r}$, il vient

$$|R'_n[F]| < C n^{1-2\Re(z)} \chi^{k-1+\varepsilon'(n)} \int_0^{\theta_n} \cos^{k-2+\varepsilon'(n)} \theta \, d\theta,$$

$\varepsilon'(n)$ étant infiniment petit avec $\frac{1}{n}$.

La décomposition de l'intervalle d'intégration en les 2 intervalles $(0, \theta_0)$ et (θ_0, θ_n) où θ_0 est un angle fixe donne, comme au paragraphe 19,

$$\int_0^{\theta_n} \cos^{k-2+\varepsilon'(n)} \theta \, d\theta < C + C' \cos^{k-1+\varepsilon'(n)} \theta_n,$$

où l'on convient de remplacer $\cos^{\varepsilon'(n)} \theta_n$ par $|L \cos \theta_n|$ lorsque $k = 1$. En remplaçant χ et $\chi \cos \theta_n$ par leurs valeurs, on a enfin

$$|R'_n[F]| < C n^{(1+\varrho+\sigma)(k-1)+k-2\Re(z)+\varepsilon''(n)} + C' n^{\varrho(k-1)+k-2\Re(z)+\varepsilon'''(n)}, \tag{9}$$

où $\varepsilon''(n)$, $\varepsilon'''(n)$ sont infiniment petits avec $\frac{1}{n}$.

28. Pour évaluer l'intégrale du reste relative aux cordes DA et AB, nous partagerons l'intervalle de variation de r en deux parties, par la valeur $r = n$. Le long des segments de ces cordes où $n \leq r \leq \chi \cos \theta_n = n^{1+\varrho}$, l'égalité (3) est encore valable en y remplaçant θ par θ_n et $\chi \cos \theta$ par r. L'exposant w s'écrit

$$w(r) = \Re \left\{ (r e^{i\theta_n} + n) \log \left(1 + \frac{n e^{-i\theta_n}}{r}\right) + (r e^{i\theta_n} - n) \log \left(1 - \frac{n e^{-i\theta_n}}{r}\right) \right\},$$

et ses dérivées par rapport à r sont

$$\frac{dw}{dr} = \Re \left\{ e^{i\theta_n} \log \left(1 - \frac{n^2 e^{-2i\theta_n}}{r^2}\right) \right\},$$

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{2 n^2}{r^3} \Re \left(\frac{e^{-i\theta_n}}{1 - \frac{n^2 e^{-2i\theta_n}}{r^2}} \right).$$

Cette dernière quantité, du signe de $\left(1 - \frac{n^2}{r^2}\right) \cos \theta_n$, est positive, et $\frac{dw}{dr}$ croît en s'annulant pour $r=\infty$; cette dérivée est donc négative et w décroît de $w(n)$ à zéro quand r croît de n à l'infini. D'autre part, en posant $\theta_n = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, où ε est équivalent à $\frac{1}{n^{1+\sigma}}$, on voit que

$$\frac{w(n)}{2n} = \frac{1}{2}\Re\{(1+ie^{-i\varepsilon})\log(1-ie^{i\varepsilon}) - (1-ie^{-i\varepsilon})\log(1+ie^{i\varepsilon})\}$$

est la partie, impaire par rapport à ε, de la partie réelle de $(1+ie^{-i\varepsilon})\log(1-ie^{i\varepsilon})$. En désignant toujours par δ une quantité bornée quand n croît infiniment, on peut écrire

$$1+ie^{-i\varepsilon} = 1+i+\varepsilon+\delta\varepsilon^2,$$

$$\log(1-ie^{i\varepsilon}) = L\sqrt{2} - \frac{i\pi}{4} + \frac{1+i}{2}\varepsilon + \delta\varepsilon^2,$$

et, par conséquent,

$$w(n) = 2n(\varepsilon L\sqrt{2} + \delta\varepsilon^2) = O(1)\,n^{-\sigma} = o(1).$$

(6) subsistant, tandis que (7) et (8) deviennent respectivement

$$\left|\frac{d\zeta}{\zeta-z}\right| = O(1)\left|\frac{d\zeta}{\zeta-h}\right| = O(1)\frac{dr}{r},$$

$$|F(h+re^{i\theta_n})| < Cr^{k+\varepsilon(n)},$$

la portion $R''_n[F]$ de l'intervalle $n \leq r \leq n^{1+\varrho}$ a une valeur absolue

$$|R''_n[F]| < Cn^{1-2\Re(z)}\int_n^{n^{1+\varrho}} r^{k-2+\varepsilon(n)}\,dr,$$

et, par suite, avec les mêmes notations qu'en (9),

$$(10) \qquad |R''_n[F]| < Cn^{\varrho(k-1)+k-2\Re(z)+\varepsilon''(n)} + C'n^{k-2\Re(z)+\varepsilon'''(n)}.$$

29. Il ne nous reste plus qu'à étudier l'intégrale le long des 2 segments de cordes $\zeta = h + re^{\pm i\theta_n}$ où r croît de 0 à n. En supposant que $\alpha + h$ n'est pas un nombre entier négatif, ce qui est toujours possible en augmentant h d'un infiniment petit, observons que $\frac{\Gamma(\alpha-\zeta+1)}{\Gamma(\alpha+\zeta+1)}$ est borné en même temps que r, et

que, lorsque r est infiniment grand, on a

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha-\zeta+1)}{\Gamma(\alpha+\zeta+1)}\right| = O(1)\, r^{-2h-2r\cos\theta_n}\, e^{2r\left[\cos\theta_n - \left(\frac{\pi}{2}-\theta_n\right)\sin\theta_n\right]};$$

compte tenu de ce que $r\cos\theta_n$ et $r\left(\frac{\pi}{2}-\theta_n\right)$ sont au plus de l'ordre de $\frac{1}{n^\sigma}$ puisque r ne surpasse pas n, on peut écrire, dans tout l'intervalle de variation de r considéré,

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha-\zeta+1)}{\Gamma(\alpha+\zeta+1)}\right| < C(1+r)^{-2h},$$

pourvu que C soit une constante convenable, mais indépendante de n. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Gamma(\alpha+\zeta+n+1)}{\Gamma(\alpha-\zeta+n+2)}\right| &= O(1)\, n^{2h-1+2r\cos\theta_n}\, e^{2r\cos\theta_n + w(r)}\\ &= O(1)\, n^{2h-1}\, e^{w(r)},\end{aligned}$$

où $w(r)$ désigne maintenant l'expression

$$w(r) = \Re\left\{(n+re^{i\theta_n})\log\left(1+\frac{re^{i\theta_n}}{n}\right) - (n-re^{i\theta_n})\log\left(1-\frac{re^{i\theta_n}}{n}\right)\right\}.$$

Formons

$$\frac{dw}{dr} = \Re\left\{e^{i\theta_n}\log\left(1-\frac{r^2e^{2i\theta_n}}{n^2}\right) + 2e^{i\theta_n}\right\},$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} = -\frac{2r}{n^2}\,\frac{\cos 3\theta_n - \frac{r^2}{n^2}\cos\theta_n}{\left|1-\frac{r^2e^{2i\theta_n}}{n^2}\right|^2}.$$

Cos $3\theta_n$ étant négatif pourvu que n soit suffisamment grand, $\frac{d^2w}{dr^2}$ est positif, $\frac{dw}{dr}$ croît et prend la valeur $2\cos\theta_n$ pour $r=0$; cette dérivée est donc positive et $w(r)$ croît de $w(0)=0$ à

$$w(n) = n\,\Re\{(1+e^{i\theta_n})\log(1+e^{i\theta_n}) - (1-e^{i\theta_n})\log(1-e^{i\theta_n})\},$$

qui est borné comme la quantité homonyme du paragraphe précédent.

Sachant que

$$\left|\frac{d\zeta}{\zeta-z}\right| = O(1)\frac{dr}{1+r},$$

et que

$$|F(h + re^{i\theta})| < C(1 + r)^{k+\varepsilon(n)},$$

la contribution $R_n'''[F]$ de ces deux segments de corde est telle que l'on ait

$$|R_n'''[F]| < Cn^{2h-2\Re(z)} \int_0^n (1 + r)^{k-2h-1+\varepsilon(n)} dr,$$

c'est à dire

$$(11) \qquad |R_n'''[F]| < Cn^{2h-2\Re(z)} + C' n^{k-2\Re(z)+\varepsilon'(n)},$$

où $\varepsilon'(n)$ est infiniment petit avec n, mais peut être supérieur à $\varepsilon(n)$ si $k - 2h + \varepsilon(n) = 0$.

En résumé, nous avons démontré que $R_n[F]$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ lorsque $2\Re(z)$ surpasse les 4 nombres $2h$, k, $k + \varrho(k - 1)$ et $k + (1 + \varrho + \sigma)(k - 1)$; ϱ et σ réprésentent 2 nombres positifs arbitraires, de sorte que, si $k < 1$, les 2 dernières limites inférieures sont inférieures à k; il suffit alors que $2\Re(z)$ surpasse $2h$ et k; si $k > 1$, on pourra attribuer, à ces deux paramètres des valeurs infiniment petites, de sorte qu'il suffit que l'on ait $2\Re(z) > 2h$ et $2k - 1$.

Nous avons ainsi démontré le

Théorème III. *Une fonction analytique $F(z)$, holomorphe dans le demi-plan $\Re(z) > h$ et vérifiant, dans ce demi-plan, une inégalité*

$$(12) \qquad |F(h + re^{i\theta})| < (1 + r)^{k+\varepsilon(r)},$$

où $\varepsilon(r)$ désigne une quantité infiniment petite avec $\frac{1}{r}$, admet un développement $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-\alpha-1)(z-\alpha-2)\cdots(z-\alpha-n)}{(z+\alpha+1)(z+\alpha+2)\cdots(z+\alpha+n)}$ dont l'abscisse de convergence n'est pas supérieure à h et au plus grand des 2 nombres $\frac{k}{2}$, $k - \frac{1}{2}$.

En particulier, toute fonction rationnelle admet des développements de cette forme, ainsi que les développements plus généraux considérés dans le titre, et qui sont régis par le

Théorème IV. *Si $F(z)$ est holomorphe dans le demi-plan $\Re\left(\frac{z-h}{u}\right) > 0$ et y vérifie l'inégalité (12), elle admet un développement*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-\alpha-u)(z-\alpha-2u)\cdots(z-\alpha-nu)}{(z-\beta+u)(z-\beta+2u)\cdots(z-\beta+nu)},$$

valable dans le demi-plan $\Re\left(\frac{z}{u}\right) > \Re\left(\frac{h}{u}\right)$ *et le plus grand des 2 nombres* $\Re\left(\frac{\alpha+\beta}{2u}\right)+\frac{k}{2}$, $\Re\left(\frac{\alpha+\beta}{2u}\right)+k-\frac{1}{2}$.

30. Un exemple simple va faire comprendre les conclusions auxquelles nous ont amenés les recherches de ces deux chapitres, et illustrer de manière remarquable les différences que présentent les 3 catégories de développements de genre (N): ceux pour lesquels $\left|\frac{u}{v}\right|$ est inférieur à 1, qui possédent une fonction caractéristique $\varphi(\theta)$ positive, et permettent de développer les fonctions d'ordre fini par rapport à $e^{|z|}$; ceux pour lesquels $\left|\frac{u}{v}\right| = 1$, qui permettent probablement de développer les fonctions d'ordre fini par rapport à z, ce qui est sûrement le cas de ceux pour lesquels $v = -u$; et enfin ceux pour lesquels $\left|\frac{u}{v}\right|$ surpasse l'unité, qui ne s'appliquent généralement pas à ces dernières fonctions.

Désignons par $F(z)$ un polynôme en z de degré k, et cherchons un développement de la forme

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-\alpha-u)(z-\alpha-2u)\cdots(z-\alpha-nu)}{(z-\beta-v)(z-\beta-2v)\cdots(z-\beta-nv)}. \tag{13}$$

Si un pareil développement est possible, dans un certain demi-plan, ses coefficients sont déterminés par la formule (10) ch. I, et la validité se traduit par

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z) = \lim_{n\to\infty}\left[F(z) - \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \frac{(z-\alpha-u)(z-\alpha-2u)\cdots(z-\alpha-\nu u)}{(z-\beta-v)(z-\beta-2v)\cdots(z-\beta-\nu v)}\right] = 0.$$

$R_0(z) = F(z) - a_0$ est un polynôme de degré k, nul pour $z = \alpha + u$; par conséquent on peut poser

$$R_0(z) = (z-\alpha-u)\left[A_1^{(0)} z^{k-1} + A_2^{(0)} z^{k-2} + \cdots + A_k^{(0)}\right],$$

où $A_1^{(0)}$ est égal au coefficient de z^k dans $F(z)$, donc essentiellement différent de zéro. Ensuite $R_1(z) = R_0(z) - a_1 \frac{z-\alpha-u}{z-\beta-v}$ est le quotient par $z-\beta-v$ d'un polynôme de degré $k+1$ admettant $\alpha+u$ et $\alpha+2u$ pour zéros, ce qui permet d'écrire

$$R_1(z)=\frac{(z-\alpha-u)(z-\alpha-2u)}{z-\beta-v}[A_1^{(1)}z^{k-1}+A_2^{(1)}z^{k-2}+\cdots+A_k^{(1)}].$$

On voit aisément par récurrence que, d'une manière générale, $R_n(z)$ est de la forme

$$(14)\quad R_n(z)=\frac{(z-\alpha-u)(z-\alpha-2u)\cdots(z-\alpha-u-nu)}{(z-\beta-v)(z-\beta-2v)\cdots(z-\beta-nv)}[A_1^{(n)}z^{k-1}+A_2^{(n)}z^{k-2}+\cdots+A_k^{(n)}],$$

et qu'en outre, grâce à l'identité

$$R_n(z)=R_{n-1}(z)-a_n\frac{(z-\alpha-u)(z-\alpha-2u)\cdots(z-\alpha-nu)}{(z-\beta-v)(z-\beta-2v)\cdots(z-\beta-nv)},$$

les $A_i^{(n)}$ $(i=1,2,\ldots k)$ satisfont aux relations récurrentes

$$(15)\quad \begin{cases} A_1^{(n)}=A_1^{(n-1)} \\ A_i^{(n)}=A_i^{(n-1)}+(\alpha+u+nu)A_{i-1}^{(n)}-(\beta+nv)A_{i-1}^{(n-1)} \qquad i=2,3,\ldots k. \end{cases}$$

On conclut de là que $A_1^{(n)}=A_1^{(0)}$, puis que $A_2^{(n)}$ est un polynôme du second degré en n, dont le coefficient de n^2 est $A_1^{(0)}\frac{(u-v)^2}{2}$, donc essentiellement non nul pourvu que les 2 périodes soient distinctes; on démontre aisément par récurrence que $A_i^{(n)}$ est un polynôme en n de degré essentiellement égal à $2i-2$. Dans ces conditions, $R_n(z)$ est du même ordre que $a_n(z)n^{2k-1}$, et, par suite, $|R_n(z)|$ est de l'ordre de $\left|\frac{u}{v}\right|^n n^{2k-1-\varrho(z-\omega)}$. En résumé, si $\left|\frac{u}{v}\right|$ est inférieur à 1, le développement (13) est valable dans tout le plan; si $\left|\frac{u}{v}\right|=1$, il est valable dans le demi-plan $\varrho(z-\omega)>2k-1$, mais non sur la frontière puisque $R_n(z)$ oscille sur celle-ci; et enfin, si $\left|\frac{u}{v}\right|$ surpasse 1, ce développement est impossible. Ces conclusions sont bien d'accord avec les énoncés des théorèmes II et III; remarquons en effet que, pour les séries (N) de la première catégorie, la borne inférieure de la fonction caractéristique $\psi(\theta)$ étant positive, une fonction $F(z)$ d'ordre fini par rapport à z vérifie l'inégalité (27) ch. V quelle que soit la valeur qu'on attribue à k, et admet donc un développement de cette nature dans son demi-plan d'holomorphie;

et pour les séries étudiées dans ce chapitre-ci, $\varrho(z-\omega) > 2k-1$ coïncide avec l'inégalité $\Re\left(\frac{z}{u} - \frac{\alpha+\beta}{2u}\right) > k - \frac{1}{2}$ énoncée au théorème IV.

31. Pour développer une fonction rationnelle n'admettant que des pôles simples, il pourra être commode de décomposer cette fonction en éléments simples. Chaque fraction de la forme $\frac{A}{z-a}$ est immédiatement développée suivant l'identité (5) ch. I où ζ et z sont remplacés par z et a, et l'expression (6) ch. I du reste nous apprend d'ailleurs que le développement en série est valable dans le demi-plan d'holomorphie $\varrho(z-a) > 0$, mais oscille sur la frontière. Le problème du calcul effectif des coefficients, ou plutôt la recherche d'une expression commode de ceux-ci, ne se pose plus que pour la partie entière. Il n'est pas sans intérêt de montrer que pour les séries (N) étudiées dans ce chapitre une méthode pratique peut être proposée. Effectuons comme au début de ce chapitre le changement de variable $\left(z, \frac{\alpha+\beta}{2} + uz\right)$, puis décomposons le polynôme à développer en une somme de polynômes de Newton $(z+\alpha)(z+\alpha-1)\cdots(z+\alpha-p+1)$, où α a la même signification que dans le développement (1) cherché. Nous sommes ramenés à déterminer une expression simple des coefficients du développement

$$\binom{z+\alpha}{p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-\alpha-1)(z-\alpha-2)\cdots(z-\alpha-n)}{(z+\alpha+1)(z+\alpha+2)\cdots(z+\alpha+n)}.$$

Ceux-ci sont déterminés par la formule (10) ch. I, qui s'écrit

$$a_n = (2\alpha+2n+1)\sum_{s=1}^{n+1} \frac{(2\alpha+s+1)(2\alpha+s+2)\cdots(2\alpha+s+n-1)}{(s-1)!\,(n+1-s)!}(-1)^{n+1-s}\binom{2\alpha+s}{p}$$

$$= \frac{2\alpha+2n+1}{p!}\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2\alpha+\nu+n)(2\alpha+\nu+n-1)\cdots(2\alpha+\nu-p+2)}{\nu!\,(n-\nu)!}(-1)^{n-\nu}$$

$$= \frac{2\alpha+2n+1}{p}\binom{n+p-1}{p-1}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\binom{2\alpha+n+\nu}{n+p-1}.$$

D'autre part l'identité

$$\binom{\varrho+\nu}{n+p-1} = \sum_{s=0}^{n+p-1}\binom{\varrho}{n+p-1-s}\binom{\nu}{s}$$

permet d'écrire

$$\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\binom{\varrho+\nu}{n+p-1}=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{s=0}^{\nu}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\binom{\nu}{s}\binom{\varrho}{n+p-1-s}$$

$$=\sum_{s=0}^{n}\binom{\varrho}{n+p-1-s}\sum_{\nu=s}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\binom{\nu}{s},$$

où la dernière somme s'écrit encore $\sum_{i=0}^{n-s}\binom{n}{s}(-1)^i\binom{n-s}{i}$, et s'évanouit pour $s\neq n$. On a donc

$$\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\binom{\varrho+\nu}{n+p-1}=\binom{\varrho}{p-1},$$

et, pour $\varrho=2\alpha+n$, on obtient l'expression cherchée

$$a_n=\frac{2\alpha+2n+1}{p}\binom{n+p-1}{p-1}\binom{2\alpha+n}{p-1},$$

et le développement

$$\binom{z+\alpha}{p}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\alpha+2n+1}{p}\binom{n+p-1}{p-1}\cdot$$

$$\cdot\binom{2\alpha+n}{p-1}\frac{(z-\alpha-1)(z-\alpha-2)\cdots(z-\alpha-n)}{(z+\alpha+1)(z+\alpha+2)\cdots(z+\alpha+n)},$$

qui répondent à la question posée. Signalons pour terminer que, lorsque α est nul, un calcul simple donne

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s a_s=\frac{(-1)^n\Gamma(n+p+1)}{p!\,(p-1)!\,\Gamma(n-p+2)},$$

et permet de vérifier que l'expression χ du paragraphe 9 donne bien la frontière de convergence $\Re(2z)=\lambda=2p-1$.