LE PROBLÈME DE LA DÉFORMATION DES SURFACES.

Par

R. GOSSE

à GRENOBLE.

Introduction.

1. Ce mémoire a pour objet de déterminer toutes les surfaces dont on peut obtenir explicitement l'équation quand on se donne leur seul élément linéaire. Darboux[1] a montré que le problème revient à chercher les solutions explicites d'une équation de Monge-Ampère que Mr Gau[2] a ramenée à la forme linéaire. D'après un beau théorème de Mr Goursat[3], pour qu'il existe de pareilles solutions dépendant d'une fonction arbitraire, il faut et suffit que l'équation admette au moins une involution. Le problème revient donc à la recherche des involutions d'une certaine équation linéaire.

Dans la première partie de ce travail, j'établirai que l'existence d'une involution, pour l'équation linéaire du second ordre la plus générale, n'est possible que sous une certaine condition Γ, nécessaire mais non suffisante. Dans les parties suivantes, je démontrerai que, dans le cas particulier de l'équation de la déformation, la mise en œuvre de la condition Γ suffit à déterminer toutes les surfaces pour lesquelles le problème posé est susceptible d'une solution. La méthode suivie permet de retrouver, de mettre au point et de compléter tous les résultats[4] obtenus jusqu'à ce jour.[5]

---

[1] DARBOUX, *Théorie générales des surfaces*, T. III passim et T. IV, p. 322.

[2] GAU, *Sur l'intégration de l'équation de la déformation des surfaces par la méthode de Darboux* (Ann. de l'Ecole Normale Sup. (3) XLII, Mars 1925).

[3] GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du 2e ordre* (T. II, Ch. VIII).

[4] Voir DARBOUX, *loc. cit.*, T. IV, p. 327 et GAU (mémoire cité).

[5] J'ai résumé les résultats dans plusieurs Notes aux C. R. de l'Académie des Sciences (28 Xbre 25 et 31 Janv. 27).

PREMIÈRE PARTIE.

2. Je garderai, dans l'étude de l'équation,

$$r+as+bt+c=0$$

les notations habituelles.[1] Ici, les nombres C_1, C_2, J_1, J_2 sont nuls. Par analogie, je poserai

$$c_1=\frac{\frac{\partial m_1}{\partial q}-m_1\frac{\partial m_1}{\partial p}}{m_2-m_1} \qquad c_2=\frac{\frac{\partial m_2}{\partial q}-m_2\frac{\partial m_2}{\partial p}}{m_2-m_1}$$

$$j_1=\frac{\frac{\partial m_1}{\partial q}-m_2\frac{\partial m_1}{\partial p}}{m_2-m_1} \qquad j_2=\frac{\frac{\partial m_2}{\partial q}-m_1\frac{\partial m_2}{\partial p}}{m_2-m_1}$$

on a évidemment

$$c_1=j_1+\frac{\partial m_1}{\partial p} \qquad c_2=j_2-\frac{\partial m_2}{\partial p}.$$

Je poserai

$$F_1(u)=\frac{\partial u}{\partial q}-m_1\frac{\partial u}{\partial p} \qquad G_1(u)=\left(\frac{du}{dx}\right)+m_2\left(\frac{du}{dy}\right)-c\frac{\partial u}{\partial p}.$$

Si u est une fonction où toutes les dérivées d'ordre supérieur au premier sont considérées comme des constantes, on a, sur une caractéristique II,

$$\frac{\delta u}{\delta x}=G_1(u)+(s+m_2t)\,F_1(u)$$

Un calcul facile donne d'ailleurs

$$A=-\left(\frac{dm_2}{dy}\right)-(s+tm_1)\frac{\partial m_2}{\partial p}-j_2t(m_2-m_1)$$

$$B=\left(\frac{dm_2}{dy}\right)-\frac{G_1(m_1)+m_2\frac{\partial c}{\partial p}-\frac{\partial c}{\partial q}}{m_2-m_1}+(s+tm_2)\left(j_2-\frac{\partial m_1}{\partial p}\right).$$

[1] Voir Gosse, *Journal de Math. pures et appliquées*, IV, 1925. Cependant, d'accord avec Mr Gau, j'appellerai *fonction canonique* ce qu'il appelait *fonction principale* et que je dénommais *facteur canonique.*

Je continuerai à poser

$$\theta_n = p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n} \qquad \theta = s + m_1 t.$$

Il nous arrivera souvent de rencontrer des identités de la forme

$$G_2(u) = Ut + V$$

u, U, V étant des fonctions de x, y, z, p, q, θ. On voit aisément qu'elles reviennent au système

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} F_1(u) - \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\left[\theta\left(j_2 + \dfrac{\partial m_1}{\partial p}\right) + H_1\right] = \dfrac{U}{m_2 - m_1} \\[2ex] G_1(u) + \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\left[c_2\theta^2 - \theta H_2 - \left(\dfrac{dc}{dy}\right)\right] = V - \dfrac{\theta U}{m_2 - m_1} \end{cases}$$

les quantités H_1 et H_2 étant définies par les égalités

$$H_1 = \left(\frac{dm_1}{dy}\right) - \frac{G_1(m_1) + m_1 \dfrac{\partial c}{\partial p} - \dfrac{\partial c}{\partial q}}{m_2 - m_1} \qquad H_2 = \left(\frac{dm_2}{dy}\right) + \frac{G_1(m_1) + m_2 \dfrac{\partial c}{\partial p} - \dfrac{\partial c}{\partial q}}{m_2 - m_1}.$$

3. Pour faire immédiatement une application de ces notations, cherchons *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une involution du second ordre.*

Une fonction u du second ordre est un invariant, pour le système II de caractéristiques, si elle vérifie la condition

$$\frac{\delta u}{\delta x} = G_2(u) + (p_{12} + m_2 p_{03}) F_2(u) = 0$$

u est donc une fonction de x, y, z, p, q, θ qui vérifie l'identité

$$G_2(u) = 0.$$

Il y aura donc une involution pour le système II de caractéristiques à la condition nécessaire et suffisante qu'il existe une fonction

$$u = \theta + \varphi(x, y, z, p, q)$$

qui vérifie le système (S) quand on y remplace U et V par zéro et θ par $-\varphi$. Il faut par suite et il suffit qu'il existe une solution pour le système

$$F_1(\varphi)+\varphi\left(j_2+\frac{\partial m_1}{\partial p}\right)=H_1$$

$$G_1(\varphi)+c_2\varphi^2+\varphi H_2=\left(\frac{dc}{dy}\right).$$

Un calcul facile montre qu'on peut mettre ces deux équations sous la forme condensée suivante:

$$\frac{\delta}{\delta x}(s+m_1t+\varphi)=(2A+B)(s+m_1t+\varphi)-c_2(s+m_1t+\varphi)^2.$$

En raisonnant comme l'a fait Mr Gau[1] dans sa Thèse, on en conclut que, pour les équations où c_2 n'est pas nul, si l'on connaît 3 involutions du second ordre, on peut former un invariant du 2e ordre, fonction homographique de $s+m_1t$; réciproquement, s'il n'existe qu'un invariant du second ordre, il est fonction homographique de $s+m_1t$.

4. Je reprendrai aussi les notations:

$$\mu_{\alpha,\beta}=A\alpha+B\beta \qquad \lambda_{n,1}=\mu_{n,1}+M_{n-1}$$

α et β étant des constantes et n un entier positif. Si on pose, avec Mr Gau

$$\frac{d^nf}{dy^n}=ap_{1,n+1}+bp_{0,n+2}+M_np_{1,n}+N_np_{0,n+1}+I_np_{0,n}+H_np_{1,n-1}+K_n$$

comme on en a le droit quand n dépasse 5, K_n étant une fonction d'ordre au plus égal à $n-1$, on a

$$M_n=n\frac{da}{dy}+\frac{\partial f}{\partial p} \qquad N_n=n\frac{db}{dy}+\frac{\partial f}{\partial q}$$

$$H_n=\frac{n(n-1)}{2}\frac{d^2a}{dy^2}+n\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial p} \qquad I_n=\frac{n(n-1)}{2}\frac{d^2b}{dy^2}+n\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Une vérification directe montre que ces formules restent valables quand n vaut 4 ou 5.

---

[1] Gau, *Thèses*, (Gauthier-Villars, 1911), p. 12.

On en conclut

$$\mu_{n,1} = \theta\left(j_2 - \frac{\partial m_1}{\partial p} - n\frac{\partial m_2}{\partial p}\right) - (m_2 - m_1)t\left[(n-1)j_2 + \frac{\partial m_1}{\partial p}\right] - (n-2)\left(\frac{dm_2}{dy}\right) - H_2$$

$$\lambda_{n,1} = \theta\left(j_2 + (n-1)\frac{\partial m_1}{\partial p}\right) + t(n-1)(m_2 - m_1)c_1 + (n-2)\left(\frac{dm_1}{dy}\right) + H_1.$$

Je rappelle enfin la notation

$$\sigma_{n,1} = \frac{\dfrac{\delta \lambda_{n,1}}{\delta x} - \mu_{n,1}\lambda_{n,1} + m_2 H_{n-1} - I_{n-1}}{m_2 - m_1}$$

pour remarquer seulement que $\sigma_{n,1}$ est du 3^{e} ordre pour les équations linéaires.

5. La théorie des *fonctions canoniques* s'étend naturellement au cas des équations linéaires. Nous dirons encore que l'équation proposée admet une fonction canonique, d'indices α et β et d'ordre n, s'il existe une fonction u d'ordre n telle que, le long d'une caractéristique II, par ex., l'on ait:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = u(A\alpha + B\beta) = u\mu_{\alpha,\beta}.$$

En particulier, s'il existe une involution d'ordre $n > 2$, on aura

$$\frac{\delta \psi}{\delta x} = \psi(An + B) = \psi\mu_{n,1}$$

ψ est une fonction canonique linéaire d'ordre n, d'indices n et 1. On voit, comme dans le cas général, qu'il revient au même d'affirmer l'existence d'une involution ou celle d'une solution pour le système (Σ)

$$F_{n-1}(\varphi) = \lambda_{n,1} \qquad G_{n-1}(\varphi) = J_{n-1} + \varphi\mu_{n,1}.$$

Théorème I. *S'il existe une fonction canonique u d'ordre $h > 2$, sans qu'il y ait ni involution d'ordre h, ni invariant d'ordre inférieur à h, il existe une autre fonction canonique μ, d'indices h et 1 et d'ordre inférieur à h, telle que*

$$u = e^{\mu(\theta_h + \lambda)}$$

λ étant une fonction d'ordre inférieur à h.

La relation

$$\frac{\delta u}{\delta x} + u\mu_{\alpha,\beta} = 0 \tag{1}$$

donne, en effet, si u est d'ordre $h > 2$,

$$F_h(u)=0 \qquad G_h(u)+u\mu_{\alpha,\beta}=0. \tag{2}$$

On en conclut que u est une fonction v d'ordre h qui ne contient les dérivées d'ordre h que par le groupement θ_h et qui vérifie le système

$$\begin{gathered} F_{h-1}(v)=\lambda_{h,1}\frac{\partial v}{\partial \theta_h} \\ G_{h-1}(v)+\frac{\partial v}{\partial \theta_h}(\theta_h\mu_{h,1}-J_{h-1})+v\mu_{\alpha,\beta}=0, \end{gathered} \tag{3}$$

les trois groupes de relations (1), (2), (3) étant d'ailleurs exactement équivalents.

Si le système (3) admettait deux solutions, leur quotient serait, d'après (1), un invariant d'ordre $\leq h$, ce qui est contraire aux hypothèses. S'il n'en admet qu'une, elle vérifie évidemment une équation de la forme

$$\frac{\partial v}{\partial \theta_h}(P\theta_h+Q)=vR$$

comme le montre la formation du système complet que fournit (3). Il n'y a donc pour v que deux formes possibles

$$v=u=K(\theta_h+\lambda)^{\mu} \tag{1°}$$

et la relation (1) montre alors que $\theta_h+\lambda=0$ est en involution avec la proposée, ce qui est contraire à l'hypothèse.

$$v=u=e^{\mu(\theta_h+\lambda)} \qquad \mu \neq 0. \tag{2°}$$

En portant cette valeur de v dans le système (3) et égalant à zéro les coefficients de θ_h, on obtient

$$F_{h-1}(\mu)=0 \qquad G_{h-1}(\mu)+\mu\mu_{h,1}=0$$

c.-à-d.

$$\frac{\delta \mu}{\delta x} + \mu\mu_{h,1} = 0$$

et le théorème est démontré.

Théorème II. *Si une équation linéaire admet une fonction canonique d'ordre inférieur à 2 et de premier indice non nul, l'expression c_2 est nulle; si la fonction est d'ordre 2 et qu'il n'existe aucun invariant d'ordre ≤ 2, ou bien c_2 est nul, ou bien il y a une ou deux involutions d'ordre 2.*

Si u est d'ordre inférieur à 2, la condition

$$\frac{\delta u}{\delta x} + u\mu_{\alpha,\beta} = 0$$

donne, en annulant les coefficients des dérivées du 2e ordre,

$$F_1(\mathfrak{L}u) + \beta\left(j_2 - \frac{\partial m_1}{\partial p}\right) - \alpha\frac{\partial m_2}{\partial p} = 0$$

$$F_1(\mathfrak{L}u) + \beta\left(j_2 - \frac{\partial m_1}{\partial p}\right) - \alpha j_2 = 0$$

d'où

$$\alpha c_2 = 0. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Si u est du second ordre, on voit comme plus haut qu'il ne dépend des dérivées du second ordre que par le groupement θ et qu'il vérifie le système

$$(4) \qquad \begin{cases} F_1(u) - \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\left[\theta\left(j_2 + \dfrac{\partial m_1}{\partial p}\right) + H_1\right] + u\left[\beta\left(j_2 - \dfrac{\partial m_1}{\partial p}\right) - \alpha j_2\right] = 0 \\ G_1(u) + \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\left[c_2\theta^2 - \theta H_2 - \left(\dfrac{dc}{dy}\right)\right] + u(\alpha\theta c_2 + \mu'_{\alpha,\beta}) = 0 \end{cases}$$

$\mu'_{\alpha,\beta}$ désignant ce qui reste de $\mu_{\alpha,\beta}$ quand on y a supprimé les termes de l'ordre le plus élevé.

Si le système (4) admettait deux solutions, leur quotient serait un invariant d'ordre ≤ 2, ce qui est contraire à l'hypothèse. S'il n'en admet qu'une, le même raisonnement que plus haut montre qu'elle est solution de l'équation

$$\frac{\partial\mathfrak{L}u}{\partial\theta} = \frac{P(\theta)}{l\theta^2 + l_1\theta + l_2}$$

$P(\theta)$ étant un polynôme en θ dont les coefficients, ainsi que l, l_1, l_2 sont au plus du premier ordre. Si on désigne par $Q(\theta)$ un polynôme analogue à $P(\theta)$, on en conclut que u ne peut avoir que l'une des formes

$$u = h(\theta+\lambda_1)^{K_1}(\theta+\lambda_2)^{K_2}e^{Q(\theta)}$$

$$u = h(\theta+\lambda_1)^{K_1}e^{\frac{K_2}{\theta+\lambda_2}+Q(\theta)}$$

$$u = h(\theta+\lambda_1)e^{Q(\theta)}$$

$$\mathfrak{L}u = Q(\theta).$$

Pour les 3 premières formes, il est clair qu'il y a une ou deux involutions d'ordre 2. Si $\mathfrak{L}u$ est un polynôme de degré n, en annulant le terme de degré $n+1$ dans la seconde équation du système 4, on voit que c_2 doit être nul, ce qui démontre le théorème.

Il est important de remarquer que le théorème ne cesse pas d'être exact, s'il existe une ou plusieurs involutions d'ordre ≤ 1, à condition qu'il n'existe aucun invariant de ces ordres.

Théorème III. *S'il existe une fonction u d'ordre au plus égal à 2 vérifiant la relation*

$$\frac{\delta u}{\delta x} + u\mu_{2,1} + Kc_2 = 0$$

K étant une constante non nulle, et s'il n'existe aucun invariant d'ordre ≤ 2, ou bien il y a une ou deux involutions d'ordre 2, ou bien $c_2=0$.

On peut prendre $K=1$ et on a alors

$$P(u) \equiv F_1(u) - \frac{\partial u}{\partial \theta}\left[\theta\left(j_2 + \frac{\partial m_1}{\partial p}\right) + H_1\right] = u\left(j_2 + \frac{\partial m_1}{\partial p}\right)$$

$$X(u) \equiv G_1(u) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\left[c_2\theta^2 - \theta H_2 - \left(\frac{dc}{dy}\right)\right] = -u(2\theta c_2 - H_2) - c_2$$

en vertu de l'identité

$$\mu'_{2,1} = -\left(\frac{dm_2}{dy}\right) - \frac{G_1(m_1) + m_2\frac{\partial c}{\partial p} - \frac{\partial c}{\partial q}}{m_2 - m_1} = -H_2.$$

Si u est d'ordre inférieur à 2, $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ est nul; il en est de même de uc_2; si u est nul, la condition donnée montre qu'il en est de même de c_2; donc c_2 est toujours nul dans ce cas.

Si $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ n'est pas nul, en désignant par des accents les dérivées par rapport à θ, on a

$$P(u')=2u'\left(j_2+\frac{\partial m_1}{\partial p}\right) \qquad X(u')=-2u'(2\theta c_2-H_2)-2c_2u.$$

On en tire

$$P(u'-u^2)=2\left(j_2+\frac{\partial m_1}{\partial p}\right)(u'-u^2)$$

$$X(u'-u^2)=-2(2\theta c_2-H_2)(u'-u^2).$$

Si $u'-u^2$ n'est pas nul, ces relations expriment que

$$\frac{\delta(u'-u^2)}{\delta x}+2(u'-u^2)\mu_{2,1}=0$$

et nos conclusions résultent alors du théorème II.

Si $u'-u^2$ est nul, c'est que

$$u=-\frac{1}{\theta+\lambda}$$

et

$$\frac{\delta(\theta+\lambda)}{\delta x}=(\theta+\lambda)(2A+B)-c_2(\theta+\lambda)^2$$

ce qui exprime que l'équation admet une involution du second ordre. C. q. f. d.

Il est clair d'ailleurs que, si c_2 n'est pas nul, la relation étudiée entraîne obligatoirement l'existence d'une involution du second ordre.

7. Nous sommes maintenant en mesure d'obtenir une importante condition nécessaire pour qu'il existe une involution d'ordre $n>4$.

Supposons qu'il existe une solution pour le système

$$(5) \qquad F_{n-1}(\varphi)=\lambda_{n,1} \qquad G_{n-1}(\varphi)=J_{n-1}+\varphi\mu_{n,1}+\psi(x, y, z, \ldots p_{0,n-2}, \theta_{n-1})$$

qui exprime que, sur une caractéristique II

$$\frac{\delta(\theta_n+\varphi)}{\delta x}=(\theta_n+\varphi)\mu_{n,1}+\psi$$

φ étant une fonction d'ordre $n-1$ au plus.

La première équation de (5) donne

$$\varphi = p_{0,n-1}\lambda_{n,1} + u(x, y, z, \ldots p_{0,n-2}, \theta_{n-1})$$

et u est une solution du système

$$(6)\qquad \begin{cases} F_{n-2}(u) = \dfrac{\partial u}{\partial \theta_{n-1}}\lambda_{n-1,1} - \sigma_{n,1} + H_{n-1} \\[2ex] G_{n-2}(u) + \dfrac{\partial u}{\partial \theta_{n-1}}(\theta_{n-1}\mu_{n-1,1} - J_{n-2}) = u\mu_{n,1} + \theta_{n-1}\sigma_{n,1} + K_{n-1} + \psi. \end{cases}$$

Si n est supérieur à 4, la fonction σ étant d'ordre au plus égal à 3, on a, en dérivant par rapport à θ_{n-1} et désignant les dérivations par des accents

$$(7)\qquad \begin{cases} F_{n-2}(u') = \dfrac{\partial u'}{\partial \theta_{n-1}}\lambda_{n-1,1} \\[2ex] G_{n-2}(u') + \dfrac{\partial u'}{\partial \theta_{n-1}}(\theta_{n-1}\mu_{n-1,1} - J_{n-2}) = Au' + \sigma_{n,1} + \psi' \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} F_{n-2}(u'') = \dfrac{\partial u''}{\partial \theta_{n-1}}\lambda_{n-1,1} \\[2ex] G_{n-2}(u'') + \dfrac{\partial u''}{\partial \theta_{n-1}}(\theta_{n-1}\mu_{n-1,1} - J_{n-2}) + u''\mu_{n-2,1} = \psi''. \end{cases}$$

Dans le cas où il existe une involution d'ordre n, le système (5), où ψ est nul, a une solution. Les systèmes (7) et (8) s'écrivent alors

$$(9)\qquad \frac{\delta u'}{\delta x} = Au' + \sigma_{n,1}$$

$$(10)\qquad \frac{\delta u''}{\delta x} + u''\mu_{n-2,1} = 0.$$

Nous allons discuter ces conditions en supposant 1°) qu'il n'y a aucune involution d'ordre compris entre n et 2 (extrémités exclues: il y a une involution d'ordre n et il peut y avoir une involution d'ordre 2), 2°) qu'il n'y a aucun *invariant* d'ordre inférieur à 2 (il peut y avoir des involutions de ces ordres).

Soit n' l'ordre effectif de u'. On a $n' \leq n-1$. Si n' est ≤ 4, il existe une fonction H, d'ordre ≤ 4, vérifiant la relation

$$(\Gamma) \qquad \frac{\delta H}{\delta x} = AH + \sigma_{n,1} \qquad (n > 4).$$

Nous allons démontrer que, sous nos hypothèses, il en est toujours ainsi.

Si n' est >4, le calcul du théorème I, appliqué à la relation (9) donne, si on pose

$$u' = v(x, y, z, \ldots \theta_{n'}),$$

$$F_{n'-1}(v) = \frac{\partial v}{\partial \theta_{n'}} \lambda_{n',1} \qquad G_{n'-1}(v) + \frac{\partial v}{\partial \theta_{n'}} (\theta_{n'} \mu_{n',1} - J_{n'-1}) = Av + \sigma_{n,1}.$$

Comme $\sigma_{n,1}$ est d'ordre au plus égal à 3, on en déduit,

$$(11) \qquad \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta_{n'}}\right) + \frac{\partial v}{\partial \theta_{n'}} \mu_{n'-1,1} = 0$$

qui se réduit à (10) si $n' = n - 1$.

Si $\frac{\partial v}{\partial \theta_{n'}}$ est d'ordre n', le théorème I, qui est applicable sous nos hypothèses, plus larges que celles qu'il exige, montre que

$$\frac{\partial v}{\partial \theta_{n'}} = e^{\mathfrak{w}(\theta_{n'} + \lambda)}.$$

$\mathfrak{w}$ étant une fonction canonique d'ordre inférieur à n', vérifiant la relation

$$\frac{\delta \mathfrak{w}}{\delta x} + \mathfrak{w} \mu_{n',1} = 0.$$

On en déduit que

$$u' = v = \frac{\partial v}{\partial \theta_{n'}} \frac{1}{\mathfrak{w}} + v_1$$

v_1 étant au plus d'ordre $n' - 1$.

En portant cette valeur dans (9) et eu égard à la relation que vérifie $\mathfrak{w}$, on trouve

$$\frac{\delta v_1}{\delta x} = A v_1 + \sigma_{n,1}.$$

Il existe donc, dans ce cas, une fonction v_1, d'ordre inférieur à n', qui vérifie la relation (9).

Si $\frac{\partial v}{\partial \theta_{n'}}$ est d'ordre inférieur à n', en designant par $\mathfrak{w}$ sa valeur, on a

$$v = \mathfrak{w}(\theta_{n'} + \varphi)$$

$$\frac{\delta \mathfrak{w}}{\delta x} + \mathfrak{w}\mu_{n'-1,1} = 0$$

d'où, en portant dans (9),

$$\frac{\delta(\theta_{n'} + \varphi)}{\delta x} = (\theta_{n'} + \varphi)\mu_{n',1} + \frac{\sigma_{n,1}}{\mathfrak{w}}. \tag{12}$$

La fonction canonique $\mathfrak{w}$ est d'ordre $p < n'$. Si $p = n' - 1$, comme $n' - 1$ est > 3, le théorème I montre qu'il y a une fonction canonique $\mathfrak{w}_1$ d'ordre $< n' - 1$, telle que

$$\frac{\delta \mathfrak{w}_1}{\delta x} + \mathfrak{w}_1\mu_{n'-1,1} = 0.$$

$\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}_1}$ serait alors un invariant d'ordre $n' - 1 > 3$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $\mathfrak{w}$ est d'ordre inférieur à $n' - 1$ et on peut appliquer à la relation (12) le calcul général fait au début du paragraphe sur la relation (5), puisque n' est supérieur à 4. On a ici

$$\psi = \frac{\sigma_{n,1}}{\mathfrak{w}} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \theta'_{n-1}} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2_{n'-1}} = 0$$

il existe donc une fonction u'_1, d'ordre $k < n'$, qui vérifie la relation

$$\frac{\delta u'_1}{\delta x} = A u'_1 + \sigma_{n',1}. \qquad (n' > 4) \tag{13}$$

Si $k \leq 4$, (13) se confond avec (Γ); si $k > 4$, on peut recommencer sur (13) les raisonnements faits sur (9); ils nous amèneront toujours soit à la relation (Γ), soit à des relations de la forme (9), où u' sera remplacé par des fonctions v_1, u'_1, d'ordres décroissants. Il arrivera un moment où l'ordre d'une de ces fonctions sera ≤ 4 et on retombera alors sur (Γ). C. q. f. d.

8. Nous avons supposé $n > 4$. Si $n = 4$, il y a une solution pour le système

$$F_3(\varphi) = \lambda_{4,1} \qquad G_3(\varphi) = \varphi\mu_{4,1} + J_3$$

où

$$J_3 = 3p_{03}^2(m_2-m_1)^2 c_1 + 3\theta_3 p_{03}(m_2-m_1)\left(j_1+j_2+2\frac{\partial m_1}{\partial p}\right) + 3\theta_3^2\frac{\partial a}{\partial p}$$
$$+ L_1(\theta_3 - m_1 p_{03}) + L_2 p_{03} + L_3,$$

L_1, L_2, L_3 étant des fonctions du second ordre faciles à calculer. Un calcul analogue à celui du cas général donne

$$\varphi = p_{0,3}\lambda_{4,1} + u(x, y, z, p, q, s, t, \theta_3)$$

$$F_2(u) = \frac{\partial u}{\partial\theta_3}\lambda_{3,1} + 3\theta_3\left(j_2 + \frac{\partial m_1}{\partial p}\right) + l_1$$

$$G_2(u) + \frac{\partial u}{\partial\theta_3}(\theta_3\mu_{3,1} - J_2) = u\mu_{4,1} - 3c_2\theta_3^2 + \theta_3\left(\frac{G_2(\lambda_{4,1}) - \mu_{4,1}\lambda_{4,1} - L_2 + L_1 m_1}{m_2 - m_1}\right) + l_2$$

l_1 et l_2 étant d'ordre ≤ 2.

Il semble ici que la condition (Γ) soit en défaut, $\sigma_{n,1}$ n'ayant été défini que pour $n > 4$. Mais il est clair que $\sigma_{n,1}$ est une fonction de n qui a une valeur déterminée pour $n = 4$. Si on désigne cette valeur par le symbole $\sigma_{4,1}$, on voit, tous calculs faits, qu'en dérivant le système précédent par rapport à θ_3, on obtient la condition

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta_3}\right) = A\frac{\partial u}{\partial\theta_3} + \sigma_{4,1}$$

$\frac{\partial u}{\partial\theta_3}$ étant d'ordre ≤ 3.

On aboutit ainsi à l'importante conclusion suivante:

Pour une équation linéaire qui n'admet ni invariant d'ordre inférieur à 2, ni involution d'ordre compris entre n et 2 (extrémités exclues), l'existence d'une involution d'ordre n supérieur ou égal à 4, entraîne celle d'une fonction H, d'ordre inférieur ou égal à 4, vérifiant la condition

$$(\Gamma) \qquad \frac{\delta H}{\delta x} = AH + \sigma_{m,1} \qquad (m \text{ entier } \geq 4).$$

Remarque. Les mêmes raisonnements conduisent[1], pour l'équation

$$(\mathrm{E}) \qquad r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0$$

au théorème suivant:

[1] *Voir* Gosse, *loc. cit.*, fin.

Si l'équation (E) n'admet ni invariants d'ordre inférieur à 3, ni involutions d'ordre compris entre n et 3 (extrémités exclues), l'existence d'une involution d'ordre n supérieur ou égal à 4, entraîne celle d'une fonction H, d'ordre inférieur ou égal à 5, vérifiant la condition

$$\frac{\delta H}{\delta x} = AH + \sigma_{m,1}. \qquad (m \text{ entier } \geq 5)$$

9. Nous allons montrer que la condition (Γ) entraîne, pour les équations linéaires qui n'admettent aucun invariant d'ordre ≤ 2, soit l'existence d'une involution d'ordre *deux*, soit la condition $c_2 = 0$.

Supposons d'abord que H soit d'ordre au plus égal à 3. En posant

$$M = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

on trouve facilement, en généralisant une notation déjà employée (n° 6)

$$\sigma_{m,1} = \sigma'_{m,1} + \theta_3\left[M\frac{\partial m_2}{\partial p} - (m-1)\left(c_2 - \frac{\partial m_1}{\partial p}\right)\right] + (m_2 - m_1)p_{03}\left[Mj_2 + (m-1)\frac{\partial m_1}{\partial p}\right]$$

$\sigma'_{m,1}$ étant d'ordre < 3; et on a le système

$$F_2(H) = \frac{\partial H}{\partial \theta_3}\lambda_{3,1} + Mj_2 + (m-1)\frac{\partial m_1}{\partial p}$$

$$G_2(H) + \frac{\partial H}{\partial \theta_3}(\theta_3\mu_{3,1} - J_2) = AH + \sigma'_{m,1} - \frac{m(m-1)}{2}c_2\theta_3$$

qui donne, en dérivant par rapport à θ_3,

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial H}{\partial \theta_3}\right) + \frac{\partial H}{\partial \theta_3}\mu_{2,1} + \frac{m(m-1)}{2}c_2 = 0.$$

Si $\dfrac{\partial H}{\partial \theta_3}$ est d'ordre 3, $\dfrac{\partial^2 H}{\partial \theta_3^2}$ est une fonction canonique d'ordre ≤ 3 et d'indices 5 et 2; le théorème I nous assure alors de l'existence d'une fonction canonique d'ordre ≤ 2 et nos conclusions résultent du théorème II; si $\dfrac{\partial H}{\partial \theta_3}$ est d'ordre ≤ 2, elles résultent du théorème III.

Si H est d'ordre 4, l'involution dont l'existence entraîne la condition (Γ) est d'ordre $n > 4$ (n° 8). La relation

$$\frac{\delta H}{\delta x} = AH + \sigma_{m,1}$$

donne alors

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial H}{\partial \theta_4}\right) + \frac{\partial H}{\partial \theta_4}\mu_{3,1} = 0 \qquad \frac{\partial H}{\partial \theta_4} \neq 0;$$

le théorème I nous montre que, si $\frac{\partial H}{\partial \theta_4}$ est d'ordre 4 ou 3, comme il n'y a aucune involution de ces ordres, il y a un facteur canonique d'ordre ≤ 2. Il y a donc toujours un facteur canonique d'ordre ≤ 2 et nos conclusions résultent du théorème II.

10. La condition (Γ) peut se simplifier dans un cas fréquent dans la pratique. On a en effet, en tenant compte des valeurs de H_n et de I_n (n° 4),

$$\sigma_{n,1} = \frac{\delta}{\delta x}\left[\frac{\lambda_{n,1} - (n-1)\frac{dm_1}{dy}}{m_2 - m_1}\right] - A\left[\frac{\lambda_{n,1} - (n-1)\frac{dm_1}{dy}}{m_2 - m_1}\right] - \frac{d}{dy}[AN - (n-1)(A+B)] - \sigma - \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{m_2 - m_1}$$

en posant

$$N = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$\sigma = \frac{1}{(m_2 - m_1)^3}\left(\frac{dm_1}{dx} + m_2\frac{dm_1}{dy} + m_1\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q}\right)\left(\frac{dm_2}{dx} + m_1\frac{dm_2}{dy} + m_2\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q}\right).$$

La condition (Γ) s'écrit alors, en modifiant H d'une expression d'ordre ≤ 3,

$$\frac{\delta H_1}{\delta x} = AH_1 - \frac{d}{dy}[AN - (n-1)(A+B)] - \sigma - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{1}{m_2 - m_1}.$$

Supposons maintenant qu'il existe une seule fonction canonique u d'ordre ≤ 2 telle que

$$\frac{\delta \mathfrak{L} u}{\delta x} = \alpha A + B\beta. \qquad \beta \neq 0$$

On peut, en dérivant par rapport à y, tirer $\frac{dB}{dy}$ de la relation

$$\frac{\delta}{\delta x}\frac{d}{dy}\mathfrak{L}u = A\frac{d}{dy}\mathfrak{L}u - \frac{d}{dy}(A\alpha + B\beta)$$

et écrire finalement (Γ) sous la forme

$$\frac{\delta H}{\delta x} = AH + K\frac{dA}{dy} - \sigma - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{1}{m_2 - m_1}$$

K étant une constante facile à calculer.

S'il existe 2 fonctions canoniques d'ordre ≤ 2, il en existe une infinité et il en est une dont les indices sont $n-1-N$ et $n-1$. La relation (Γ) peut alors s'écrire, par un calcul analogue à celui que nous venons de faire,

$$\frac{\delta H}{\delta x} = AH - \sigma - \frac{1}{m_2 - m_1}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Dans les deux cas, H reste une fonction d'ordre au plus égal à 4. Si cet ordre est effectivement égal à 4, il résulte du n° précédent qu'il existe certainement une fonction canonique d'ordre ≤ 2 et d'indices entiers.

11. L'ensemble des résultats que nous venons d'obtenir nous amène à la méthode suivante pour l'étude d'une équation linéaire.

Il faudra d'abord faire une étude directe de l'équation pour savoir quand elle peut admettre un invariant d'ordre ≤ 2. Cette circonstance exclue, nous distinguerons 2 cas.

Premier cas: $c_2 \neq 0$. Il ne peut y avoir d'involution d'ordre > 3 que s'il y en a une d'ordre 2. Il suffira donc d'étudier directement la possibilité d'existence d'une involution d'ordre ≤ 3. On n'aura à étudier Γ que lorsque l'équation admet une involution d'ordre 2. Le problème de Darboux ne se pose donc que pour $n = 0, 1, 2, 3$ et les systèmes à discuter dans ce cas sont relativement simples. Pour n quelconque, on n'a à étudier l'équation que dans le cas où il existe une involution d'ordre 2 et il faut, avant d'étudier le système général, tenir compte des conditions que suppose réalisées cette involution et de celles qu'y ajoute la discussion du système simple issu de la condition (Γ). Le problème ainsi posé devient manifestement abordable.

Second cas: $c_2 = 0$. Les involutions d'ordre ≤ 3 devront être étudiées directement comme dans le premier cas. Mais, ici, la condition (Γ), qui doit être vérifiée quand il existe une involution d'ordre $n > 3$, n'entraîne plus l'existence d'une involution d'ordre 2. Les conditions qu'une pareille involution imposerait sont remplacées par la seule équation $c_2 = 0$. Il faut donc étudier le système issu de la condition (Γ) sous la seule hypothèse que c_2 est nul.

La méthode conduira à distinguer ainsi des équations à forme de plus en plus conditionnée; au point de vue théorique, il peut toujours arriver qu'elle soit impuissante à décider si, pour les formes canoniques auxquelles elle ramène, il existe ou non une involution d'ordre quelconque; quand il en sera ainsi, l'analyse qui nous a fourni la condition (Γ) permet d'en trouver d'autres d'ordre supérieur. Je ne les donne pas ici, parce qu'elles me semblent d'un emploi malaisé dans le cas général. Mais les suites de raisonnements et de calculs que j'ai exposés paraissent suffire à donner des résultats définitifs dès qu'on leur soumet une équation, non pas donnée à priori, mais dont la solution intéresse les sciences d'application. Ainsi, elles nous ont permis de résoudre entièrement le problème de l'intégration de l'équation des surfaces W, des équations linéaires où manque le terme en s, de celles où manque le terme en t et auxquelles se ramènent toutes les équations de Monge-Ampère qui admettent une intégrale intermédiaire d'ordre ≤ 1. La suite de ce Mémoire va montrer que notre méthode permet de mener à bonne fin, d'une façon naturelle et complète, la discussion de l'équation de la déformation, que tant de beaux travaux n'avaient pas réussi à terminer.

SECONDE PARTIE.

Étude de l'équation de la déformation des surfaces.

12. **Notations.** La détermination des surfaces qui admettent l'élément linéaire

$$ds^2 = dX^2 + \Gamma^2(X, Y)\, dY^2$$

dépend de l'intégration de l'équation

$$\text{(E)} \quad RT - S^2 + R\left(P\Gamma\Gamma' - \frac{Q}{\Gamma}\frac{\partial \Gamma}{\partial Y}\right) + 2SQ\frac{\Gamma'}{\Gamma} + \Gamma\Gamma''(1 - P^2) - \frac{Q^2}{\Gamma^2}(\Gamma\Gamma'' + \Gamma'^2) = 0$$

où

$$\Gamma' = \frac{\partial \Gamma}{\partial X} \qquad \Gamma'' = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial X^2}.$$

M[r] Gau (Mémoire cité, p. 115) a montré que la transformation d'Ampère permet de l'écrire

$$(\mathrm{E}') \qquad r + as + bt + c = 0$$

$$a = -2p\frac{\Gamma'}{\Gamma} \qquad b = \Gamma\Gamma''(y^2 - 1) + \frac{p^2}{\Gamma^2}(\Gamma\Gamma'' + \Gamma'^2) \qquad c = -\frac{p}{\Gamma}\frac{\partial \Gamma}{\partial x} - y\Gamma\Gamma'$$

Γ étant une fonction de x et de q dont Γ' et Γ'' sont les dérivées première et seconde par rapport à q.

On a ici, en posant

$$e^2 = \Gamma\Gamma''\left(1 - y^2 - \frac{p^2}{\Gamma^2}\right),$$

$$m_1 = -p\frac{\Gamma'}{\Gamma} + e \qquad m_2 = -p\frac{\Gamma'}{\Gamma} - e \qquad m_2 - m_1 = -2e$$

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial q} L\Gamma^3\Gamma''.$$

On peut supposer Γ'' différent de zéro, en laissant de côté le cas connu où l'élément donné serait celui d'une surface développable.

13. — *Involutions d'ordre* ≤ 1. Nous allons d'abord chercher quand il peut exister une fonction $\varphi(x, y, z, p, q)$ telle que la condition

$$\frac{\delta \varphi}{\delta x} = 0$$

soit une conséquence de la relation $\varphi = 0$. En explicitant cette condition, on est conduit au système

$$(\mathrm{s}) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial q} - m_1\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m_2\frac{\partial \varphi}{\partial y} + (p + m_2 q)\frac{\partial \varphi}{\partial z} - c\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0.$$

Si φ ne dépend pas de p et qu'il dépende de q, on peut prendre

$$\varphi = q + \psi(x, y, z)$$

et le système (s) est impossible. Si φ ne dépend ni de p ni de q, la seconde équation de (s) constitue une identité en p qui n'est possible que si

$$\varphi \equiv y \pm 1,$$

la fonction Γ devant vérifier la condition

$$\Gamma\Gamma'' + \Gamma'^2 = 0.$$

On en tire

$$\Gamma^2 = q X_1(x) + X_2(x).$$

L'élément linéaire prend alors une forme remarquable, que nous appellerons la forme de Weingarten.

Nous allons démontrer que, dans tous les cas, *l'équation de la déformation ne peut admettre d'involution d'ordre* ≤ 1 *que si l'élément linéaire donné peut être ramené à la forme de Weingarten:*

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2[\alpha + \varphi(\beta)]d\beta^2. \tag{1}$$

Cherchons d'abord à quelle condition l'élément

$$ds^2 = dq^2 + \Gamma^2(x, q)dx^2 \tag{2}$$

peut être ramené à la forme (1). Il faut et il suffit qu'il existe deux fonctions $\alpha(x, q)$ et $\beta(x, q)$ telles que

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial q}\right)^2 + g^2\left(\frac{\partial \beta}{\partial q}\right)^2 = 1 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial q}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + g^2 \frac{\partial \beta}{\partial q}\frac{\partial \beta}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + g^2\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 = \Gamma^2 \tag{5}$$

en posant

$$g^2 = 2(\alpha + \varphi(\beta)). \tag{6}$$

Cette dernière condition est exactement équivalente à

$$g\left(\frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial q}\right) = \frac{\partial \alpha}{\partial q}\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial q}. \tag{6'}$$

En remarquant que la conservation de la courbure totale donne la relation

$$\frac{\Gamma''}{\Gamma} = -\frac{1}{g^4}$$

et posant

$$\frac{\partial \alpha}{\partial q} = \lambda \frac{\partial \beta}{\partial x} \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{g^2}{\lambda}\frac{\partial \beta}{\partial q} \qquad \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\Gamma}{g}\cos u \qquad \frac{\partial \beta}{\partial q} = \frac{1}{g}\sin u$$

un calcul immédiat montre que (3), (4), (5) et (6) ont une solution en même temps que le système

$$(\Sigma) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \Gamma' - \frac{\Gamma}{g^2}\cos u \qquad \frac{\partial u}{\partial q} = -\frac{\sin u}{g^2}$$

qui s'écrit, en posant

$$Q = \frac{\pi}{2} - i\mathfrak{L}\,\mathrm{tg}\frac{u}{2},$$

$$(\mathrm{S}) \qquad \frac{\partial Q}{\partial q} = \sqrt{\frac{\Gamma''}{\Gamma}} \qquad i\frac{\partial Q}{\partial x} = \Gamma'\sin Q - \sqrt{\Gamma\Gamma''}\cos Q.$$

Nous allons maintenant démontrer que le système

$$(\mathrm{S}') \qquad \frac{\delta \Phi}{\delta x} = 0 \qquad \Phi(x, y, z, p, q) = 0 \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \neq 0\right)$$

n'admet de solution que lorsque (S) en admet une.

Supposons d'abord $\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \neq 0$. On peut résoudre $\Phi = 0$ par rapport à z et (S′) s'écrit

$$z + \varphi(x, y, p, q) = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial q} - m_1\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p + m_2 q + m_2\frac{\partial \varphi}{\partial y} - c\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0.$$

Les deux dernières équations ne dépendent pas de z. Si elles admettent une solution φ, elles admettent toutes les solutions $\varphi + \text{const.}$ Il y a alors pour (S′) une infinité de solutions

$$\Phi(x, y, z + k, p, q) = 0.$$

Nous écrirons cette équation sous la forme

$$p + \omega(x, y, z + k, q) = 0$$

et (S′) deviendra

$$p+\omega=0 \qquad \frac{\partial \omega}{\partial q}=m_1 \qquad \frac{\partial \omega}{\partial x}+m_2\frac{\partial \omega}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial z}(p+m_2 q)-c=0.$$

Soient ω_1 et ω_2 deux valeurs de ω correspondant à 2 valeurs k_1 et k_2 de la constante k; on a

$$\frac{\delta(\omega_1-\omega_2)}{\delta x}=0;$$

comme il ne peut exister de solution de (S′) qui ne dépende pas de p que si (S) à une solution, il ne nous reste à examiner que le cas où $\omega(x,y,z+k_1,q)-\omega(x,y,z+k_2,q)$ se réduit à une constante quels que soient k_1 et k_2, c. à d. le cas où

$$\omega=Kz+\omega_1(x,y,q).$$

On doit alors avoir

$$\frac{\partial \omega_1(x,y,q)}{\partial q}=m_1(x,y,-\omega_1-Kz,q)$$

ce qui est impossible, $\dfrac{\partial m_1}{\partial p}$ n'étant jamais nul.

Nous pouvons donc nous borner à étudier le système (S′) dans le cas où

$$\Phi\equiv p+\psi(x,y,q).$$

(S′) s'écrit alors

$$p+\psi(x,y,q)=0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial q}=\psi\frac{\Gamma'}{\Gamma}+\sqrt{\Gamma\Gamma''\left(1-y^2-\frac{\psi^2}{\Gamma^2}\right)}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\left(p\frac{\Gamma'}{\Gamma}-\sqrt{\Gamma\Gamma''\left(1-y^2-\frac{\psi^2}{\Gamma^2}\right)}\right)-\frac{\psi}{\Gamma}\frac{\partial \Gamma}{\partial x}+y\Gamma\Gamma'=0.$$

Si on pose alors

$$\psi=\Gamma\sqrt{1-y^2}\sin\omega,$$

$\cos\omega$ se met en facteur dans les deux équations; on en conclut que (E′) admet toujours l'intégrale intermédiaire que Darboux[1] appelle $\Delta z=1$ et qui s'écrit ici

$$p^2+\Gamma^2(y^2-1)=0.$$

[1] Darboux, *Théorie générale des surfaces*, T. III, p. 255.

Il reste le système

$$(\mathrm{S}_1)\begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial q}=\sqrt{\dfrac{\Gamma''}{\Gamma}} \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial x}+\dfrac{\partial\omega}{\partial y}(\Gamma'\sin\omega-\sqrt{\Gamma''}\cos\omega)\sqrt{1-y^2}+\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}(\Gamma'\cos\omega+\sqrt{\Gamma\Gamma''}\sin\omega)=0. \end{cases}$$

Nous poserons

$$y=\cos t \qquad \sqrt{\frac{\Gamma''}{\Gamma}}=\frac{\partial Q}{\partial q} \qquad \Gamma'=r\cos\varphi \qquad \sqrt{\Gamma\Gamma''}=r\sin\varphi \qquad (r\neq 0)$$

Q, r et φ étant des fonctions de x et q seulement, dont la première n'est définie qu'à une fonction additive de x près. On a alors

$$\omega=Q(q,x)+l(x,t)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial l}{\partial x}=\frac{r\sin(Q-\varphi)}{\sin t}\frac{\partial}{\partial t}(\sin l\sin t)-\frac{r\cos(Q-\varphi)}{\sin t}\frac{\partial}{\partial t}(\cos l\sin t). \tag{7}$$

En posant, pour un moment,

$$A=\frac{1}{\sin t}\frac{\partial}{\partial t}(\sin l\sin t) \qquad B=\frac{1}{\sin t}\frac{\partial}{\partial t}(\cos l\sin t)$$

on en tire

$$\frac{\partial^2 l}{\partial x\partial t}=\frac{\partial A}{\partial t}r\sin(Q-\varphi)-\frac{\partial B}{\partial t}r\cos(Q-\varphi). \tag{8}$$

1°) $\dfrac{\partial^2 l}{\partial x\partial t}\neq 0$. En divisant par cette expression et dérivant par rapport à t, on obtient une relation qui, si elle ne se réduit pas une identité, donnera $Q-\varphi$ en fonction de x et t. Cette expression ne dépend alors que de x et on peut prendre Q égal à φ. On trouve sans peine, dans ce cas, que les surfaces étudiées sont caractérisées par l'élément linéaire

$$ds^2=du^2+\sin^2\varphi\,dv^2$$

où φ est défini par la relation

$$\varphi+\sin\varphi\cos\varphi=u+Kv \qquad (K \text{ constante quelconque}).$$

Il est facile de vérifier que le système (Σ) du n° 13 admet pour ces surfaces la solution

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = \pm\, e^{\pm i\omega}.$$

Si la relation (8), divisée par $\frac{\partial^2 l}{\partial x \partial t}$ et dérivée par rapport à t se réduit à une identité, c'est que l'on a

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \xi_1(x)\frac{\partial^2 l}{\partial x\partial t} \qquad \frac{\partial B}{\partial t} = \xi_2(x)\frac{\partial^2 l}{\partial x\partial t}.$$

ξ_1 et ξ_2 ne pouvant être nuls en même temps. Si $\xi_1^2 + \xi_2^2$ est nul, les relations précédentes donnent

$$il = \mathfrak{L}\, X(x) + \mathfrak{L} \operatorname{tg}\frac{t}{2}$$

ce qui est contraire à l'hypothèse $\frac{\partial^2 l}{\partial x\partial t} \neq 0$. On peut donc poser

$$\xi_1 = X\cos\xi \qquad \xi_2 = X\sin\xi$$

et, en modifiant convenablement Q, la relation

$$\frac{1}{r} = \xi_1 \sin(Q-\varphi) - \xi_2\cos(Q-\varphi)$$

montre qu'on peut prendre, sans diminuer la généralité,

$$\xi_1 = 0 \qquad \xi_2 = X(x).$$

On a alors

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sin l \sin t) = X\frac{\partial l}{\partial x} + X_1(x)$$

$$\cos l \sin t = -\, X_2(x)\cos t + X_3(x).$$

Un calcul élémentaire montre que ces deux relations sont incompatibles sous nos hypothèses.

2°) $\frac{\partial^2 l}{\partial x\partial t} = 0$. En modifiant convenablement Q, on peut supposer l indépendant de x et on a

$$\frac{\partial A}{\partial t}\sin(Q-\varphi)=\frac{\partial B}{\partial t}\cos(Q-\varphi).$$

Si cette relation n'est pas une identité, on en conclut comme plus haut que

$$Q-\varphi=\text{constante}$$

et, en modifiant Q d'une constante, on retombe sur le cas déjà traité où Q est égal à φ.

Il ne reste donc qu'à étudier le cas où

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{\partial B}{\partial t}=0$$

c. à. d. où

$$\sin l\sin t=\alpha\cos t+\alpha_1 \qquad \cos l\sin t=\beta\cos t+\beta_1$$

où α, α_1, β, β_1 sont des constantes. Il se ramène à celui où

$$\cos l=\frac{1}{\sin t} \qquad \sin l=i\operatorname{cotg} t$$

et le système (S_1) se réduit alors au système (S) c. q. f. d.

L'élément de Weingarten nous est donc fourni de la façon la plus naturelle: c'est celui auquel on peut ramener tous les éléments qui fournissent une équation de la déformation admettant une involution d'ordre ≤ 1.

15. Lorsque

$$\Gamma^2=2(q+\lambda(x))$$

les équations (E) et (E′) s'écrivent

$$\text{(E)} \qquad RT-S^2+R\left(P\Gamma\Gamma'-\frac{Q}{\Gamma}\frac{\partial\Gamma}{\partial Y}\right)+2SQ\frac{\Gamma'}{\Gamma}+\frac{P^2-1}{\Gamma^2}=0$$

$$\text{(E}'\text{)} \qquad r'-\frac{p'(2s'+\lambda(x'))}{2(q'+\lambda(x'))}+\frac{(1-y'^2)t'}{2(q'+\lambda(x'))}-y'=0.$$

Il est manifeste que (E) admet les involutions $P=\pm 1$. En revenant aux notations classiques de Darboux, on aura

$$z = -u + f(v)$$

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 - dz^2 = du^2 + 2(u + \lambda(v))dv^2 - (du - f' dv)^2$$

et, en posant

$$f(v) = \int \frac{V(v)}{V'(v)} dv$$

on obtient les formules

$$x = uV + \frac{1}{2}\int \left(2\lambda V' + \frac{V^2+1}{V'}\right) dv$$

$$iy = uV + \frac{1}{2}\int \left(2\lambda V' + \frac{V^2-1}{V'}\right) dv$$

$$z = -uV - \frac{1}{2}\int \left(2\lambda V' + \frac{V^2+V+1}{V'}\right) dv$$

où V est une fonction arbitraire de v. Ce sont les formules obtenues par Darboux (T. IV, p. 333) par une tout autre voie.

On pourrait étudier (E') par les méthodes de la 1ère partie. Il est plus rapide de raisonner ainsi:

Nous savons que (E') admet l'intégrale intermédiaire

$$\varrho^2 \equiv p'^2 + 2(q' + \lambda(x'))(y'^2 - 1) = 0.$$

Si on remplace dans (E') les dérivées s et t en fonction de ϱ et de ses dérivées, on est immédiatement amené à donner à cette équation la forme remarquable

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{p'}{\varrho(y'^2-1)}\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\varrho}\right) = 0 \tag{9}$$

qui exprime que l'expression

$$\frac{dx'}{\varrho} - \frac{p'\,dy'}{\varrho(y'^2-1)} \tag{10}$$

est une différentielle exacte. Ce fait amène à penser à une transformation de Bäcklund, pour laquelle l'existence des deux involutions $y' \pm 1 = 0$ invite à poser

$$\frac{x}{y} = \frac{y'-1}{y'+1}$$

afin d'essayer de transformer les 2 involutions en $x=0$ et $y=0$. La considération de ce quotient amène à introduire le produit

$$xy = v$$

et si on pose

$$z = f(x', y', z', p', q')$$

on trouve de suite que

$$d\Omega v = \frac{1}{px+qy}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}dx' + \frac{\partial f}{\partial p'}dp' + \frac{\partial f}{\partial q'}dq'\right) - \frac{dy'}{px+qy}\left(\frac{px-qy}{y'^2-1} - \frac{\partial f}{\partial z'}\right). \tag{11}$$

Le second membre de (11) prendra la forme (10) si on pose

$$z = x' \qquad \varrho = px + qy \qquad p' = px - qy$$

et la transformation de Bäcklund est définie par les formules

$$x' = z \qquad y' = \frac{y+x}{y-x} \qquad p' = px - qy \qquad (px+qy)^2 = p'^2 + 2(q'+\lambda)(y'^2-1).$$

L'équation (E′) devient alors, après avoir divisé par $px+qy$ qui correspond à l'involution $\varrho=0$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\lambda'(z)}{(x-y)^2}. \tag{E$_1$}$$

16. Cette équation, que nous venons d'obtenir par un procédé naturel et purement algébrique, a fait l'objet de nombreux travaux. Euler l'a intégrée par une intégrale définie quand $\lambda'(z)$ est linéaire en z. Darboux[1] a déterminé tous les cas où elle admet un invariant d'ordre ≤ 2. M^r Goursat[2] l'a intégrée par la méthode de Darboux quand

$$\lambda'(z) = -n(n-1)z$$

n étant un entier positif. Pour en terminer l'étude, nous allons montrer que les cas qui viennent d'être énumérés sont les seuls où une intégration explicite soit possible.

---

[1] Darboux, *Théorie générale des surfaces*, T. IV, p. 330 et sq.

[2] Goursat, American Journal of Mathematics, t. X, p. 187; 1888.

Il suffit, après le travail de Darboux que je viens de rappeler, de chercher quand l'équation (E_1) peut admettre une involution d'ordre $\geqq 3$. J'ai montré, dans ma Thèse[1], qu'il n'en peut être ainsi que s'il existe une fonction $g(x, y, z, p, r)$ vérifiant la relation

$$\frac{\partial g}{\partial y} + q\frac{\partial g}{\partial z} + f\frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) + X\left(r\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2p\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + p^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) + \xi\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

l'équation étant écrite sous la forme

$$s = f(x, y, z, p, q)$$

et X et ξ étant deux fonctions de x qui ne peuvent s'annuler en même temps.

En dérivant deux fois cette relation par rapport à r, on voit, puisqu'il n'y a pas, par hypothèse, d'invariant du second ordre, que g est de la forme

$$g = X_1(x)r^2 + ra(x, y, z, p) + b(x, y, z, p)$$

et le fait que g ne contient pas q exige que

$$\frac{\partial a}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial a}{\partial y} + f\frac{\partial a}{\partial p} + 2X_1\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) + X\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial b}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial b}{\partial y} + f\frac{\partial b}{\partial p} + a\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) + X\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2p\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + p^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) + \xi\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Si $\frac{\partial a}{\partial p}$ est nul, en dérivant la 1ère équation par rapport à z, on voit que

$$\text{ou bien} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{ou bien} \quad X = X_1 = 0.$$

Si $\frac{\partial a}{\partial p}$ n'est pas nul, on retrouve le même résultat par deux dérivations par rapport à z, en tenant compte de la forme particulière de f.

Si $X = X_1 = 0$, le seul cas nouveau est celui où a est une fonction de x seul et la seconde équation prend la forme de la première. X étant nul, ξ ne peut l'être et E_1 ne peut par suite admettre d'involution d'ordre supérieur à 2 que si

$$\lambda'(z) = \sigma z. \qquad (\sigma \text{ constant})$$

[1] Gosse, *Thèses de doctorat,* Privat (Toulouse) 1921, pp. 32 et 33.

Tout revient donc à chercher dans quel cas l'équation d'Euler est intégrable par la méthode de Darboux.

L'équation

$$s = \frac{\sigma z}{(y-x)^2} \equiv z\,a(x, y)$$

admettra l'involution

$$p_n + \psi(x, y, z, p_1, p_2, \dots p_{n-1}) = 0 \qquad n \geq 3$$

si

$$(12) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} + q\frac{\partial \psi}{\partial z} + f\frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial p_{n-1}}\left(\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\right) + \left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right) = 0.$$

Elle admettra d'ailleurs dans ce cas l'invariant $p_n + \psi$ et on a

$$\frac{\delta}{\delta y}(p_n + \psi) = 0.$$

Si on dérive par rapport à x, on en déduit

$$\frac{\delta}{\delta y}\left(p_{n+1} + \frac{d\psi}{dx}\right) = 0.$$

Il y a donc aussi une involution d'ordre $n+1$, remarque dont nous ferons usage tout à l'heure.

En désignant les dérivées de a par rapport à x par des accents, on voit immédiatement que

$$\frac{df}{dx} = za' + pa, \dots \frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}} = z\,a^{(n-1)} + C^1_{n-1}\,p_1\,a^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}\,a.$$

Ces expressions ne contenant pas q, (12) montre que ψ ne contient pas z. Si on dérive (12) par rapport à p_{n-1} et qu'on désigne par h la dérivée de ψ par rapport à cette variable, on a

$$\frac{\partial h}{\partial y} + f\frac{\partial h}{\partial p_1} + \left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial h}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial h}{\partial p_{n-1}}\left(\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\right) + a = 0.$$

Cette relation peut s'écrire

$$\frac{\delta}{\delta y}\left(h + \int a\,dy\right) = 0.$$

Si nous supposons qu'il n'y a aucune involution d'ordre inférieur à n, on a nécessairement

$$h+\int a\,dy=\frac{\partial\psi}{\partial p_{n-1}}+\int a\,dy=X(x)$$

ψ est donc linéaire en p_{n-1}. Admettons qu'il le soit aussi en $p_{n-2}, \ldots p_{K+1}$. La condition (12) s'écrit

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}+q\frac{\partial\psi}{\partial z}+\cdots+\frac{\partial\psi}{\partial p_K}\left(\frac{d^{K-1}f}{dx^{K-1}}\right)+u=0$$

u étant, à cause de notre hypothèse et de la forme des dérivées de f par rapport à x, linéaire par rapport à tous les nombres p_i où $i \geq K$. En dérivant par rapport à p_K, la démonstration que je viens d'exposer pour p_n permet de conclure que ψ est aussi linéaire en p_K. Posons alors

$$\psi=v+u_0p_1+u_1p_2+\cdots+u_{n-2}p_{n-1}$$

les expressions v et u_i ne dépendant que de x et y. La relation (12) s'écrit alors

$$\frac{\partial v}{\partial y}+p_1\frac{\partial u_0}{\partial y}+\cdots+p_{n-1}\frac{\partial u_{n-2}}{\partial y}+u_0az+u_1(a'z+ap_1)$$
$$+u_{n-2}(za^{(n-2)}+\cdots+ap_{n-2})+a^{(n-1)}z+C_{n-1}^1p_1a^{(n-2)}+\cdots+ap_{n-1}=0.$$

C'est là une identité qui montre que l'on peut annuler v et que les expressions u_i doivent vérifier les conditions

$$(13)\qquad\left\{\begin{aligned}
&au_0+a'u_1+\cdots+a^{(n-2)}u_{n-2}+a^{(n-1)}=0\\
&\frac{\partial u_0}{\partial y}+au_1+2a'u_2+\cdots(n-2)a^{(n-3)}u_{n-2}+(n-1)a^{(n-2)}=0.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial u_{n-3}}{\partial y}+au_{n-2}+(n-1)a'=0\\
&\frac{\partial u_{n-2}}{\partial y}+a=0.
\end{aligned}\right.$$

On en tire

$$u_{n-2}=-\int\frac{\sigma\,dy}{(y-x)^2}+X_{n-2}=\frac{\sigma}{y-x}+X_{n-2}$$

u_{n-3} sera un polynôme du second degré en $\frac{1}{y-x}$ et u_{n-p}, un polynôme de degré $p-1$ en $\frac{1}{y-x}$, les coefficients étant les fonctions arbitraires de x introduites par l'intégration, à des constantes près. En portant ces valeurs des u_i dans la 1ère équation de (13), on aura un polynôme P en $\frac{1}{y-x}$ dont le degré se réduit à n, après qu'on a divisé par $\frac{\sigma}{(y-x)^2}$ et qui devra être identiquement nul. Le coefficient de son terme de degré le plus élevé ne dépend pas des X_i d'après la loi de formation des u_i. En l'égalant à zéro, on aura une condition nécessaire pour qu'il existe une involution. Si, d'autre part, on prend zéro pour valeur commune des X_i et que le coefficient du terme de d° n de P soit nul, il y a une involution. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation d'Euler admette une involution est donc que σ soit racine de l'équation $H=0$ obtenue en égalant à zéro le coefficient du terme de plus haut degré de P.

Si on calcule ce terme pour $n=3$, on trouve qu'on doit avoir

$$H=\sigma^2+8\sigma+12=0$$

c.-a.-d.

$$\sigma=-2 \qquad \sigma=-6.$$

Pour $n=4$, on a

$$H=\sigma^3+20\sigma^2+108\sigma+144=0$$

qui donne

$$\sigma=-2 \qquad \sigma=-6 \qquad \sigma=-12$$

on reconnait les premiers termes de la suite des nombres de la forme $-n(n-1)$. De plus, on voit apparaître ce fait que les valeurs que doit prendre σ afin qu'il existe une involution d'ordre n comprennent d'abord toutes celles qu'on doit lui assigner pour qu'il existe une involution d'ordre $n-1$. La remarque faite au début de la démonstration montre que ce fait, vérifié pour $n=2$ et 3, est général, puisque l'existence d'une involution d'ordre p entraîne celle d'une involution de chaque ordre supérieur à p.

Il s'ensuit donc que nous pouvons admettre que l'équation $H=0$ admet tous les nombres $-K(K-1)$ comme racines, K étant inférieur à n et que nous aurons démontré que la $n^{\text{ème}}$ racine est $-n(n-1)$ si nous démontrons que le produit des racines de H est

$$(-1)^n 2^2 . 3^2 \dots (n-1)^2 n = (-1)^n n[(n-1)!]^2.$$

Posons pour cela

$$u_K = \frac{v_K}{(y-x)^{n-K-1}}$$

v_{n-2} vaut σ; v_{n-3} est du second degré en σ et le coefficient de σ^2 est $\frac{1}{2}$ et les égalités (13) montrent de proche en proche en remontant que u_0 est un polynôme de degré n en σ où σ^n a pour coefficient $\frac{1}{(n-1)!}$. La première de ces égalités divisée par σ et par $\frac{1}{(y-x)^{n+2}}$ constitue l'équation H. Le terme de plus haut degré y a pour coefficient $\frac{1}{(n-1)!}$ et le terme constant est le numérateur de $a^{(n-1)}$, divisé par σ et $\frac{1}{(y-x)^{n+2}}$, c.-à-d. $n!$ Le produit des racines a bien la valeur voulue. c. q. f. d.

L'équation d'Euler n'est donc intégrable par la méthode de Darboux que dans les cas signalés par M^r Goursat.

17. — *Involutions du second ordre.* — Nous venons d'étudier, sans aucune hypothèse restrictive, tous les cas où il y a une involution d'ordre inférieur à 2; dans l'étude que nous allons maintenant entreprendre des involutions d'ordre 2, nous pouvons par suite supposer qu'il n'existe aucune involution d'ordre inférieur à 2.

Supposons que, dans ces conditons, il existe une expression

$$\psi = s + m_1 t + \varphi(x, y, z, p, q)$$

telle que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \psi(2A + B) - c_2 \psi^2.$$

Posons

$$\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

et supposons d'abord cette quantité non nulle. On a

$$\frac{\delta \varphi'}{\delta x} = \varphi'(2A + B) - 2\varphi' c_2 \psi$$

et il résulte de cette relation que si φ' ou $\frac{1}{\varphi'}$ est susceptible de s'annuler, il existe une involution du premier ordre au plus. Or on a successivement, en désignant par des accents les dérivées par rapport à z,

$$\frac{\delta L\varphi'}{\delta x} = 2A + B - 2\psi c_2$$

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right) = -2\varphi' c_2 \qquad \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)' = -2\varphi'' c_2$$

$$\frac{\delta}{\delta x}\left\{\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2\right\} = 0.$$

Si, dans cette dernière égalité, l'expression entre parenthèses ne se réduit pas à une constante, il y a un invariant du premier ordre. Si elle se réduit à une constante, un calcul élémentaire montre que $\frac{1}{\varphi'}$ peut s'annuler et il y a une involution d'ordre inférieur à 2. Nous pouvons donc nous borner au cas où φ est indépendant de z. En effectuant les calculs indiqués au n° 3, sur l'équation (E'), on trouve que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$s + m_1 t + \varphi(x, y, p, q) = 0$$

soit en involution avec (E') est que φ soit une solution du système

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} F_1(\varphi) \equiv \dfrac{\partial\varphi}{\partial q} - m_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} = \varphi\left(-c_2 + \dfrac{2\Gamma'}{\Gamma}\right) + \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial}{\partial x}\mathfrak{L}\dfrac{\Gamma''}{\Gamma} \\[2ex] G_1(\varphi) \equiv \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + m_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - c\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} = -c_2\varphi^2 + \dfrac{\varphi}{4}\dfrac{\partial}{\partial x}\mathfrak{L}\Gamma^3\Gamma'' - \Gamma\Gamma'. \end{cases}$$

C'est, aux notations près, le système (69) (loc. cit., p. 124) de M^r Gau. Comme celui-ci l'a remarqué, il est clair que, si φ ne contient pas l'une des variables y ou p, elle ne contient pas l'autre. Je vais démontrer[1] que, sous nos hypothèses, φ est certainement indépendant de y et de p, à moins que c_2 ne soit nul.

[1] Les calculs du texte sont plus simples que ceux de M^r Gau et je crois de plus que ces derniers contiennent une faute.

Posons

$$g^4 = \frac{\Gamma}{\Gamma''}, \quad K(x, q) = \int \frac{dq}{g^2}, \quad p = \Gamma \sqrt{1-y^2} \cos(\omega - K),$$

$$y = \cos t, \quad K_1(x, q) = \int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{g}\right)\frac{dq}{\Gamma}.$$

Ce changement de variable transforme (Σ) en

$$(\Sigma_1)\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial q} = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(\alpha \sin \omega - \beta \cos \omega) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \omega}\left[\dfrac{\partial K}{\partial x} + \operatorname{cotg} t(\alpha \cos \omega + \beta \sin \omega)\right] \\ \qquad = L\varphi^2 + 2M\varphi + N \end{cases}$$

où φ représente maintenant une fonction de x, t, q, ω et où

$$\alpha = \Gamma' \cos K + \frac{\Gamma}{g^2}\sin K \qquad \beta = \Gamma' \sin K - \frac{\Gamma}{g^2}\cos K \qquad L = -(\Gamma' g - \Gamma g')$$

$$M = -\left[K_1(\Gamma' g - \Gamma g') + \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{L}g\right]$$

$$N = -\left[K_1^2(\Gamma' g - \Gamma g') + 2K_1\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{L}g + \frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\Gamma'}{g}\right].$$

Nous remarquerons

1°) que, toutes les hypothèses, qui conduisent à prendre pour φ une expression indépendante d'une seule des variables t ou ω, obligent à prendre φ indépendant de ces deux variables — et le théorème est alors démontré,

2°) que, si α et β ne dépendaient ni l'un ni l'autre de q, on aurait

$$\alpha^2 + \beta^2 = \Gamma'^2 + \Gamma\Gamma'' = f(x)$$

d'où l'on conclut sans peine que c_2 est nul et, par suite, que notre théorème est exact.

3°) Si on avait

$$\beta' = i\alpha'$$

un calcul élémentaire d'intégration permet de prendre, en changeant au besoin de variable x et supposant $c_2 \neq 0$,

$$\Gamma = \sqrt{q+X(x)}\,[X_1(x)+\mathfrak{L}(q+X)].$$

Le système (Σ_1) conduit alors à l'identité en q

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\alpha\sin\omega-\beta\cos\omega)+\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}(\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega)=-\varphi^2\sqrt{2i}+\frac{1}{\sqrt{2i}}\left(\frac{2+X_1+\mathfrak{L}q}{q}\right)$$

où

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+X_1+\mathfrak{L}q}{q}\right)\qquad\beta=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1+X_1+\mathfrak{L}q}{q}\right).$$

Cette identité est impossible.

La discussion de (Σ_1), en écartant les 2 dernières hypothèses, devient relativement aisée. On a, en désignant par des accents les dérivées par rapport à q,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\alpha'\sin\omega-\beta'\cos\omega)+\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\left[\frac{\partial K'}{\partial x}+\cot t\,(\alpha'\cos\omega+\beta'\sin\omega)\right]=L'\varphi^2+2M'\varphi+N'.$$

Une nouvelle dérivation donne

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}(\lambda+\mu\cot t)=L_1\varphi^2+2M_1\varphi+N_1$$

où

$$\lambda=\frac{\dfrac{\partial K'}{\partial x}}{\alpha'\sin\omega-\beta'\cos\omega}\qquad\mu=\frac{\alpha'\cos\omega+\beta'\sin\omega}{\alpha'\sin\omega-\beta'\sin\omega}\qquad L_1=\frac{L'}{\alpha'\sin\omega-\beta'\cos\omega}\cdots$$

et on a finalement:

$$(\lambda'+\mu'\cot t)\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}=L'_1\varphi^2+2M'_1\varphi+N'_1. \tag{1}$$

Démontrons d'abord le lemme suivant:

Lemme. La fonction φ ne peut jamais, sous nos hypothèses, vérifier une équation différentielle de la forme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}=\varphi^2\varrho(x)+2\varphi\varrho_1(x)+\varrho_2(x). \tag{2}$$

En effet cette équation ne permet à φ que d'avoir l'une des 4 formes

$$\omega X(x)+\psi(x,t);\qquad \xi(x)+\psi(x,t)e^{X\omega};\qquad \xi-\frac{X(x)}{\omega-\psi(x,t)};\quad X_1(x)+\frac{X_2(x}{1-\psi(x,t)e^{\omega X}}.$$

La substitution de ces quatre formes dans la seconde équation de (Σ_1) conduit à un système incompatible, quand c_2 n'est pas nul.

Nous n'avons plus alors qu'à distinguer 2 cas:

1°) $\mu'=0$. α' et β' ne pouvant être nuls simultanément, on peut prendre

$$\beta'=\alpha' X \qquad \lambda' \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = L_1' \varphi^2 + 2 M_1' \varphi + N_1'.$$

Si λ' n'est pas nul, divisons par λ' et dérivons par rapport à q. L'équation obtenue doit se réduire à une identité en φ, sans quoi elle donnerait φ en fonction de ω seul. Donc

$$L_1'=\lambda' \varrho(x, \omega) \qquad M_1'=\lambda' \varrho_1(x, \omega) \qquad N_1'=\lambda' \varrho_2(x, \omega)$$

d'où

$$L' = \frac{\partial K'}{\partial x} \varrho(x, \omega) + \sigma(x, \omega)(\alpha' \sin \omega - \beta' \sin \omega)$$

$$0 = \frac{\partial K'}{\partial x} \frac{\partial \varrho}{\partial \omega} + \alpha' \frac{\partial}{\partial \omega} \sigma(\sin \omega - X \cos \omega).$$

Si $\frac{\partial \varrho}{\partial \omega}$ n'était pas nul, on en tirerait

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \alpha X_1(x) + X_2(x).$$

K n'étant défini qu' à une fonction de x près, on peut prendre

$$\frac{\partial K}{\partial x} = X_1 \left(\Gamma' \cos K + \frac{\Gamma}{g_2} \sin K \right) \cdot$$

En posant

$$K = Q + \frac{\pi}{2}$$

et faisant un changement de variable x, on retombe sur le système du n° 13, qui ne peut avoir de solutions ici, puisqu'il n'y a pas d'involution d'ordre ≤ 1. Donc $\frac{\partial \varrho}{\partial \omega}$ est nul; on démontrerait de même que ϱ_1 et ϱ_2 ne dépendent pas de ω; on a par a suite

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \varphi^2 \varrho(x) + 2\,\varphi \varrho_1(x) + \varrho_2(x)$$

ce qui est impossible d'après le Lemme.

Si λ' est nul, c'est que

$$\alpha' \frac{\partial K''}{\partial x} - \alpha'' \frac{\partial K'}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial K}{\partial x} = X\alpha + X_1$$

et on retombe sur un cas déjà étudié.

2°) $\mu' \neq 0$. On ne peut alors avoir aucune relation de la forme

$$A\alpha + B\beta + C = 0.$$

A, B, C ne dépendant pas de q, sans que ces 3 coefficients s'annulent. La relation (1) donne

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}\left(\frac{\lambda'}{\mu'}\right)' = \varphi^2 \left(\frac{L_1'}{\mu'}\right)' + 2\,\varphi \left(\frac{M_1'}{\mu'}\right)' + \left(\frac{N_1'}{\mu'}\right)'.$$

Si $\dfrac{\lambda'}{\mu'}$ n'est pas nul, c'est que l'on a

$$\text{(4)} \qquad L = \frac{\partial K}{\partial x} \varrho(x, \omega) + \alpha u(x, \omega) + \beta v(x, \omega) + w(x, \omega)$$

et 2 égalités analogues pour M et N.

Si ϱ, ϱ_1 et ϱ_2 ne dépendent pas de ω, l'égalité (3) prend la forme (2) et conduit par suite à une impossibilité.

Si $\dfrac{\partial \varrho}{\partial \omega}$ n'est pas nul, (4) donne

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \omega}\frac{\partial K}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \omega} + \beta \frac{\partial v}{\partial \omega} + \frac{\partial w}{\partial \omega} = 0$$

et une nouvelle dérivation par rapport à ω, après division par $\dfrac{\partial \varrho}{\partial \omega}$, montre que

$$u = \varrho X_1(x) + \xi_1(x) \qquad v = \varrho X_2(x) + \xi_2(x) \qquad w = \varrho X_3(x) + \xi_3(x).$$

On a donc

$$L = \varrho(x, \omega)\left[\frac{\partial K}{\partial x} + \alpha X_1 + \beta X_2 + X_3\right] + \alpha \xi_1 + \beta \xi_2 + \xi_3$$

ce qui exige que

$$\frac{\partial K}{\partial x} + \alpha X_1 + \beta X_2 + X_3 = 0$$

et cette condition exprime que $\left(\frac{\lambda'}{\mu'}\right)'$ est nul.

Il ne nous reste à voir que cette dernière hypothèse. Elle se traduit par l'égalité

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \alpha X_1(x) + \beta X_2(x) + X_3(x)$$

et comme la relation (3) doit alors se réduire à une identité, on doit avoir, les ξ_i, η_i, ζ_i désignant des fonctions de x seul,

$$L = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2 + \xi_3 \qquad M = \alpha\eta_1 + \beta\eta_2 + \eta_3 \qquad N = \alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2 + \gamma\zeta_3.$$

En portant dans (Σ_1) et modifiant K de façon que X_3 s'annule, on obtient une relation linéaire en α, β, γ qui donne, tous calculs faits,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}(X_1 + \operatorname{cotg} t \cos \omega) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \sin \omega = u\varphi^2 + 2u_1\varphi + u_2 \equiv U(\varphi)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}(X_2 + \operatorname{cotg} t \sin \omega) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cos \omega = v\varphi^2 + 2v_1\varphi + v_2 \equiv V(\varphi)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = w\varphi^2 + 2w_1\varphi + w_2 \equiv W(\varphi)$$

les fonctions u_i, v_i, w_i ne contenant que x. D'où on tire

$$X_1' \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \frac{dU}{dx} + \frac{dU}{d\varphi} W - U \frac{dW}{d\varphi}$$

$$X_2' \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \frac{dV}{dx} + \frac{dV}{d\varphi} W - V \frac{dW}{d\varphi}.$$

Ce sont des relations de la forme (2); il faut donc, en particulier, que X_1 et X_2 soient des constantes. En modifiant K d'une constante, on a donc

$$\frac{\partial K}{\partial x} = X_1 \alpha$$

et nous avons vu qu'il y a alors une involution du premier ordre. Notre théorème général est complètement démontré.

18. Il ne nous reste donc plus qu'à chercher dans quelles circonstances le système

$$(\Sigma_2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial q} = u\left(-c_2 + 2\dfrac{\Gamma'}{\Gamma}\right) + \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial}{\partial x}\mathfrak{L}\dfrac{\Gamma''}{\Gamma} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x} = -c_2 u^2 + \dfrac{u}{4}\dfrac{\partial}{\partial x}\mathfrak{L}\,\Gamma^3\Gamma'' - \Gamma\Gamma' \end{cases}$$

peut admettre des solutions. C'est le système (79) (p. 126) que M^r Gau a discuté dans le mémoire, couronné par l'Académie des Sciences, auquel j'ai si souvent renvoyé le lecteur. Aux pages 130 et 131, M^r Gau a fait faire un pas décisif au problème de la déformation en montrant qu'on retombe sur (Σ_2) quand on écrit que l'élément linéaire donné peut se ramener à la forme

$$(5) \qquad ds^2 = dU^2 + (\alpha U^2 + 2\beta U + \gamma)\, dV^2$$

α, β, γ étant des fonctions de V qu'on peut toujours supposer liées par la relation

$$\alpha\gamma - \beta^2 = 1.$$

Mais l'ensemble de son raisonnement laisse échapper 2 cas:

1°) celui où, à côté d'une involution du second ordre qui permettra de trouver une transformation qui ramène l'élément linéaire donné à la forme (5), il existe aussi une involution d'ordre inférieur qui conduit à la même forme où α est nul. Ce cas se présente effectivement pour les paraboloïdes de Weingarten et met en défaut toutes les conclusions de M^r Gau. L'équation de la déformation correspondante admet alors en effet un invariant d'ordre 1 et un invariant d'ordre 2. Il en résulte l'existence d'une infinité d'involutions du second ordre, qui, selon le raisonnement de M^r Gau, entraînerait l'existence d'une infinité de transformations ramenant l'élément donné à la forme (5) et conduirait à ranger les paraboloïdes de Weingarten parmi les surfaces développables. On évite cette contradiction en remarquant que le raisonnement de M^r Gau n'est valable que s'il n'y a pas d'involution d'ordre ≤ 1.

2°) De plus, au cours du calcul, M^r Gau remplace une fonction Φ, susceptible de prendre toute valeur, par cotg V_1. C'est s'interdire de donner à Φ les valeurs $\pm i$, sous peine de voir les formules de la Trigonométrie prendre des formes inaccoutumées. Il faut donc étudier directement le système (Σ_2) dans ce cas; et il se trouve qu'effectivement, il existe des surfaces pour lesquelles l'équation de la déformation admet l'involution

$$s+m_1 t+\varepsilon i \Gamma=0. \qquad \varepsilon=\pm 1$$

Il est facile de les caractériser. En effet, d'après les notations mêmes de M[r] Gau, la seule solution possible de (Σ_2) est $\pm i\Gamma$ et elle existe si

$$\Gamma\frac{\partial}{\partial q}\mathfrak{L}\frac{\Gamma''}{\Gamma}\pm i\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{L}\frac{\Gamma''}{\Gamma}=0. \tag{6}$$

Prenons par exemple le signe $+$. Dans le cas général, il n'y a qu'une involution du second ordre pour chaque système

$$s+m_1 t+i\Gamma=0 \qquad s+m_2 t+i\Gamma=0.$$

Il n'en est plus ainsi lorsque

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{L}\frac{\Gamma''}{\Gamma}=0 \qquad \frac{\partial}{\partial q}\mathfrak{L}\frac{\Gamma''}{\Gamma}=0.$$

Dans ce cas, les surfaces étudiés sont les surfaces à courbure constante. Il y a deux involutions pour chaque système

$$\psi_1\equiv s+m_1 t+i\Gamma=0 \qquad \psi_2=s+m_2 t+i\Gamma=0$$

$$\omega_1\equiv s+m_1 t-i\Gamma=0 \qquad \omega_2=s+m_2 t-i\Gamma=0.$$

Pour ces surfaces, il résulte d'un théorème de Sophus Lie[1] que l'équation de la déformation n'admet jamais d'invariants d'ordre ≥ 2. Nous avons vu qu'il n'y avait pas d'involution d'ordre < 2. S'il y en avait une d'ordre $n \geq 3$, on aurait à la fois

$$\frac{\delta\psi}{\delta x}=\psi(An+B)$$

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{1}{\psi_1}-\frac{1}{\omega_1}\right)=-(2A+B)\left(\frac{1}{\psi_1}-\frac{1}{\omega_1}\right)$$

$$\frac{\delta}{\delta x}\Gamma^2 e^2=\Gamma^2 e^2 B$$

[1] Voir GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations du 2e ordre*, II, p. 185.

et il y aurait un invariant d'ordre n, ce qui est impossible. Si on détermine, par la méthode de Darboux, les solutions communes aux involutions du 2e ordre et à l'équation donnée, on retrouve les surfaces de Serret: ces surfaces à génératrices isotropes et à courbure constante constituent donc la solution explicite la plus générale du problème de la déformation des surfaces à courbure constante.

19. Il nous reste à étudier le cas général où

$$\Gamma \frac{\partial}{\partial q} \mathfrak{L} \frac{\Gamma''}{\Gamma} + i \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{L} \frac{\Gamma''}{\Gamma} = 0.$$

Ce sont les surfaces pour lesquelles la courbure totale reste constante le long d'une famille de lignes de longueur nulle. Elles n'ont, à ma connaissance, jamais été signalées et il est remarquable que le problème de la déformation soit, pour elles, susceptible d'une solution explicite partielle. Pour les étudier, prenons leur élément linéaire sous la forme

$$ds^2 = 2 F(u, v)\, du\, dv$$

on doit avoir

$$\frac{1}{F} \frac{\partial^2 \mathfrak{L} F}{\partial u \partial v} = f'(u).$$

Posons

$$u_1 = f(u)$$

on est ramené à l'équation classique

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z$$

qui montre qu'on peut poser

$$ds^2 = \frac{U'^2(u')\, du'\, dv'}{(u'-v')^2}$$

qu'un changement de variables simple ramène à la forme

$$ds^2 = v^2 du^2 + 2 \varphi(u)\, du\, dv.$$

L'équation de la déformation correspondante[1] est

$$\varphi^2(rt-s^2) + 2 sqv\varphi + t(v-\varphi')(p\varphi - qv^2) + \varphi^2 - 2 \varphi pq = 0$$

et cette équation admet une seule involution du 1er ordre[2]:

[1] Darboux, *Théorie générale des surfaces*, III, p. 154.

[2] *Ibid.*, p. 255.

$$(v^2-p^2)q^2+(\varphi-pq)^2=0$$

et une seule involution du second ordre correspondant à $s+m_1t+i\Gamma=0$. Il est facile de vérifier que cette involution est ici

$$t=0.$$

Posons en effet

$$z=vU_1(u)+U_2(u)$$

on trouve que l'équation est vérifiée sous la seule condition

$$\varphi(1-U_1'^2)=2\,U_1\,U_2'.$$

On a donc

$$z=vU_1+\int\varphi(u)\frac{1-U_1'^2}{2\,U_1}\,du.$$

Pour avoir les surfaces correspondantes, il suffit d'adjoindre à cette égalité, les relations

$$x=U_1v\operatorname{sh}f-\int f'\varphi\left(U_1'\operatorname{ch}f+\operatorname{sh}f\frac{1+U_1'^2}{2}\right)du$$

$$iy=U_1v\operatorname{ch}f-\int f'\varphi\left(U_1'\operatorname{sh}f+\operatorname{ch}f\frac{1+U_1'^2}{2}\right)du$$

où

$$\frac{1}{f'(u)}=U_1(u).$$

Il est aisé de voir que l'on peut écrire

$$x=iz\cos u+F(u)\qquad y=iz\sin u+G(u).$$

Ces surfaces sont donc les surfaces isotropes les plus générales, si on considère f et φ comme des fonctions quelconques.

Appliquons à l'équation de leur déformation la transformation d'Ampère. On est ramené à l'équation

$$r+\frac{2sqy}{\varphi(x)}-t\left(1+\frac{2py}{\varphi}\right)+\frac{q-\varphi'}{\varphi^2}(py+yq^2)=0. \tag{6}$$

Elle n'admet plus d'involution du second ordre et elle admet l'involution du 1^er^ ordre

$$\varrho^2\equiv q^2y^2+2py\varphi+\varphi^2=0;$$

en procédant comme au n° 15, on peut écrire l'équation (6) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi}{\varrho y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\varrho}\right)=0$$

qui conduit à la transformation de Bäcklund

$$z'=\mathfrak{L}y \qquad x'=x \qquad p'=\frac{q}{\varphi(x)} \qquad q'=-\frac{\varrho}{\varphi}.$$

L'équation transformée est

$$e^{z'}\left(r'+\frac{p'^2}{2}+p\frac{\varphi'}{\varphi}\right)=e^{-z'}\left(t'-\frac{q'^2-1}{2}\right).$$

En prenant comme inconnue $e^{-\frac{z'}{2}}$, on a finalement à étudier l'équation

$$r-z^4t-\frac{2p^2}{z}+2pX(x)+\frac{z^5}{4}=0. \qquad \left(X(x)=\frac{\varphi'}{2\varphi}\right)$$

Nous allons appliquer à cet exemple la méthode exposée dans la première partie de ce travail. On a ici

$$m_1=-m_2=z^2 \qquad c_2=0 \qquad A=2qz \qquad B=\frac{3(p-qz^2)}{z}-X.$$

1°) On aura une *fonction canonique d'ordre* ≤ 2 s'il existe une solution pour le système (n° 6)

$$F_1(u)-\frac{\partial u}{\partial\theta}H_1=0 \qquad G_1(u)-\frac{\partial u}{\partial\theta}\left(\theta H_2+q\frac{\partial c}{\partial z}\right)+u\left[2\alpha qz+\frac{3\beta(p-qz^2)}{z}-\beta X\right]=0$$

où α et β sont les indices de la fonction et où

$$H_1=X-\frac{p-qz^2}{z} \qquad H_2=X-\frac{3p}{z}-qz \qquad \frac{\partial c}{\partial z}=\frac{2p^2}{z^2}+\frac{5}{4}z^4.$$

La première équation montre que u est une fonction v de x, y, z et des nouvelles variables

$$\omega=p+qz^2 \qquad \sigma=\theta+qX-\frac{pq}{z}.$$

En remplaçant u par $v(x, y, z, \omega, \sigma)$ dans la seconde équation, on est conduit à une identité en q qui fournit le système

$$X\frac{\partial v}{\partial\sigma}-2z^2\frac{\partial v}{\partial\omega}=0$$

$$-2z^2\frac{\partial v}{\partial z}+2z\frac{\partial v}{\partial\omega}+\frac{\partial v}{\partial\sigma}\left(X'+X^2-z^4-\frac{2X\omega}{z}-2\sigma z\right)+2vz(\alpha-3\beta)=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-z^2\frac{\partial v}{\partial y}+\omega\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial\omega}\left(\frac{z^5}{4}+2\omega X-\frac{2\omega^2}{z}\right)$$

$$+\sigma\frac{\partial v}{\partial\sigma}\left(\frac{3\omega}{z}-X\right)+v\left(\frac{3\beta\omega}{z}-\beta X\right)=0.$$

Ce système ne peut avoir de solution si α n'est pas nul. Si α est nul, il admet la seule solution

$$u=\frac{\varphi^{\frac{\beta}{2}}}{z^{3\beta}}.$$

2°) Supposons maintenant qu'il existe une fonction canonique d'ordre $h>2$. S'il n'y a pas d'involution d'ordre $\leq h$ et >2, il y a une fonction canonique d'indices entiers non nuls et d'ordre ≤ 2 (Th. I) et nous venons de voir que c'est impossible. Il suffit donc, puisque nous savons qu'il n'y a pas d'involutions d'ordre 1 et 2, de démontrer qu'il n'y a aucune involution d'ordre ≥ 3, pour démontrer qu'il n'y a aucune fonction canonique d'aucun ordre.

3°) *Involutions d'ordre* 3. — Il faut étudier le système

$$F_2(u)=\lambda_{3,1}\qquad G_2(u)=u\mu_{3,1}+J_2.$$

La 1ère équation donne

$$u=t\left(3qz-\frac{p}{z}+X\right)+v(x,y,z,p,q,\theta).$$

En portant cette valeur de u dans la seconde équation, un calcul analogue à celui de n° 3 donne

$$F_1(v)+\frac{\partial v}{\partial\theta}\left(\frac{p-qz}{z}-X\right)=\frac{4\theta z+z^4-X'-X^2-4pq+\frac{2pX}{z}}{-2z^2}$$

$$G_1(v)+\frac{\partial v}{\partial\theta}\left[\theta\left(qz+\frac{3p}{z}-X\right)-q\left(\frac{2p^2}{z^2}+\frac{5}{4}z^4\right)\right]$$

$$= v\left(3\,qz + \frac{3\,p}{z} - X\right) - \frac{2\,\theta^2}{z} + \frac{\theta}{2\,z^2}\left(z^4 - X' - X^2 - 20\,pq + \frac{2\,pX}{z}\right) - \frac{4\,p^2q^2}{z^3} + 5\,z^3q^2.$$

En désignant par des accents les dérivées par rapport à θ, on voit que

$$\frac{\delta v'''}{\delta x} + v'''(3\,A + 2\,B) = 0$$

v''' doit être nul (1°) et v'' doit vérifier le système

$$F_1(v'') = 0 \qquad G_1(v'') = v''\left(X - \frac{2\,p}{z} + qz\right) - \frac{4}{z}$$

qui n'a jamais de solution.

4°) Involutions d'ordre > 3. Une pareille involution ne peut exister que si la condition (Γ) est satisfaite. Ici, il n'y a qu'une seule fonction canonique possible, d'ordre ≤ 3; c'est $\frac{\varphi}{z^6}$. La condition (Γ) s'écrit alors (n° 10)

$$\frac{\delta H}{\delta x} = AH + N'\frac{d^2 m_2}{dy^2} - \sigma - \frac{1}{m_2 - m_1}\frac{\partial f}{\partial z} \qquad \left(N' = \frac{(n-1)(n-4)}{2}\right)$$

d'où, tous calculs faits,

$$\frac{\delta H}{\delta x} = AH - N'(2\,tz + 2\,q^2) + \frac{5}{8}z^2 + \frac{p^2}{z^4} + \frac{(zX-p)^2}{2\,z^4} - \frac{q^2}{2} - 2\,tz.$$

H ne peut être du 4^e ordre, puisque cette hypothèse exige l'existence, ici impossible, d'une fonction canonique d'ordre ≤ 3 dont aucun indice n'est nul (n° 9). On tire de l'égalité précédente, en supposant H d'ordre au plus égal à 3,

$$F_2(H) = \frac{\partial H}{\partial \theta_3}\lambda_{3,1}$$

$$G_2(H) + \frac{\partial H}{\partial \theta_3}(\theta_3\mu_{3,1} - J_2) = 2\,Hqz - 2\,tz(N'+1) - q^2\left(2\,N' + \frac{1}{2}\right)$$
$$+ \frac{5}{8}z^2 + \frac{p^2}{z^4} + \frac{(zX-p)}{2\,z^4}.$$

On en déduit que

$$\frac{\delta}{\delta x}\frac{\partial H}{\partial \theta_3} + \frac{\partial H}{\partial \theta_3}\mu_{3,1} = 0$$

ce qui exige que H soit au plus du 2e ordre. Un calcul fait maintes fois montre alors que H est une fonction de θ telle que

$$F_1(H)+\frac{\partial H}{\partial \theta}\left(\frac{p-qz}{z}-X\right)=\frac{N'+1}{z^2}$$

$$G_1(H)+\frac{\partial H}{\partial \theta}\left[\theta\left(qz+\frac{3p}{z}-X\right)-q\left(\frac{2p^2}{z^2}+\frac{5}{4}z^4\right)\right]$$
$$=2Hqz-q^2\left(2N'+\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{8}z^2+\frac{p^2}{z^4}+\frac{(zX-p)^2}{2z^4}-\frac{\theta(N'+1)}{z^2}.$$

En dérivant par rapport à θ, on est de suite amené à un système qui n'a jamais de solutions.

L'équation étudiée n'admet donc jamais que la fonction canonique $\frac{\varphi}{z^6}$ et elle n'a aucune involution proprement dite.

19. — *Conclusions de l'étude des involutions d'ordre* ≤ 2. Mise à part l'involution singulière signalée par Darboux, l'équation de la déformation ne peut en admettre d'autre d'ordre ≤ 2 que dans les 3 cas suivants:

1°) on peut ramener l'élément linéaire à la forme

$$ds^2=du^2+2(u+f(v))\,dv^2$$

et ce cas a été complètement élucidé.

2°) on peut ramener l'élément à la forme

$$ds^2=\frac{U(u)\,du^2}{(u-v)^2}$$

et nous venons de faire l'étude complète de cette 2e hypothèse.

3°) s'il existe une transformation qui ramène l'élément à la forme

$$ds^2=du^2+[u^2a(v)+2ub(v)+c(v)]\,dv^2 \qquad a\neq 0$$

qui est caractéristique des surfaces gauches. Dans ce cas, c_2 est d'ailleurs nul et un calcul élémentaire montre que, réciproquement, si c_2 est nul, on est dans le premier ou le troisième cas.

Nous allons maintenant montrer que, si c_2 n'est pas nul, il ne saurait exister d'involution du 3e ordre: il résultera alors de notre théorie générale qu'il n'en est de possible d'aucun ordre. Nous reprendrons ensuite l'étude du 3° cas et nous aurons ainsi épuisé la discussion.

20. — *Involutions du* 3° *ordre quand* c_2 *n'est pas nul.* Nous pouvons supposer qu'il n'existe aucune fonction canonique d'ordre ≤ 2 et de premier indice non nul. Supposons alors qu'il existe une fonction

$$\psi = p_{12} + m_1 p_{03} + u(x, y, z, p, q, s, t)$$

telle que

$$\frac{\delta \psi}{\delta x} = \psi(3A + B).$$

Si u dépendait de z, $\frac{\partial u}{\partial z}$ serait une fonction canonique d'ordre ≤ 2 et de premier indice 3; donc u est indépendant de z. S'il existait deux involutions du 3° ordre, l'expression $u_1 - u_2$ serait une fonction canonique d'ordre ≤ 2 et d'indices 3 et 1.

Nous pouvons donc borner notre étude au cas où il existe une solution et une seule, indépendante de z, pour le système

$$F_2(u) = \lambda_{3,1} \qquad G_2(u) = u\mu_{3,1} + J_2$$

qui s'écrit

$$F_2(u) = 2tc_2(m_2 - m_1) + \theta\left(j_2 + \frac{\partial m_1}{\partial p}\right) + \frac{\partial m_1}{\partial y} + H_1$$

$$G_2(u) = u\left[\theta\left(c_2 - \frac{\partial m_1}{\partial p} - 2\frac{\partial m_2}{\partial p}\right) - t(m_2 - m_1)\left(2j_2 + \frac{\partial m_1}{\partial p}\right) - \frac{\partial m_2}{\partial y} - H_2\right] + J_2.$$

On a donc

$$u = (m_2 - m_1)t^2 c_2 + \theta t\left(j_2 + \frac{\partial m_1}{\partial p}\right) + t\left(\frac{\partial m_1}{\partial y} + H_1\right) + v(x, y, p, q, \theta).$$

En portant cette valeur de u dans la seconde équation, les termes en t^3 et t^2 disparaissent; en égalant à zéro le coefficient de t et le terme constant, on trouve le système

$$F_1(v) - \frac{\partial v}{\partial \theta}\left[\theta\left(j_2 + \frac{\partial m_1}{\partial p}\right) + H_1\right] = -v\left(2j_2 + \frac{\partial m_1}{\partial p}\right) + \theta^2\varrho + \theta\varrho_1 + \varrho_2$$

$$G_1(v) + \frac{\partial v}{\partial \theta}\left(c_2\theta^2 - \theta H_2 - \frac{\partial c}{\partial y}\right) = v\left(3c_2\theta - \frac{\partial m_2}{\partial y} - H_2\right) - \theta^3\varrho - \theta^2\varrho_1 - \theta\varrho_2$$

ou

$$2\,e\varrho = F_1(c_2) - c_2^2 + 2\,c_2 \frac{\Gamma'}{\Gamma} \equiv -r(x,q)$$

$$2\,e\varrho_1 = -2\,\frac{\partial^2 \mathfrak{L} g}{\partial x\,\partial q} + 2\,c_2 \frac{\partial \mathfrak{L} g}{\partial x} = -r_1(x,q)$$

$$2\,e\varrho_2 = \Gamma\Gamma'' + c_2\,\Gamma\Gamma' - \Gamma'^2 - \frac{\partial^2 \mathfrak{L} g}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{L} g \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{L} \frac{\Gamma}{g} = -r_2(x,q).$$

Posons

$$k(x,q) = \int \frac{dq}{g^2} \qquad p = \Gamma\sqrt{1-y^2}\,\sin(\omega - k) \qquad y = \cos t \qquad \psi = \frac{u}{2e}$$

$$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\left(\Gamma' \sin(\omega-k) + \frac{\Gamma}{g^2}\cos(\omega-k)\right) + \\ + \frac{\partial f}{\partial \omega}\left[\frac{\partial k}{\partial x} + \operatorname{cotg} t\left(\Gamma' \cos(\omega-k) - \frac{\Gamma}{g^2}\sin(\omega-k)\right)\right].$$

Nous sommes ramenés à chercher s'il existe une solution pour le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial q} + \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\left(\theta \dfrac{\partial}{\partial q} \mathfrak{L}\Gamma g + \dfrac{\partial \mathfrak{L} g}{\partial x}\right) = 2\,u\dfrac{\Gamma'}{\Gamma} - \theta^2 r - \theta r_1 - r_2 \\ X(u) + \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\left(c_2\theta^2 + \theta\dfrac{\partial}{\partial x}\mathfrak{L}\dfrac{\Gamma}{g} + \Gamma\Gamma'\right) = u\left(3\,c_2\theta + \dfrac{\partial}{\partial x}\mathfrak{L}\dfrac{\Gamma^2}{g^3}\right) + \theta^3 r + \theta^2 r_1 + \theta r_2. \end{cases}$$

Cette solution ne peut être qu'une fraction rationnelle en θ; si celle-ci contenait un dénominateur, il y aurait au moins une involution du 2^e ordre; u est donc un polynôme en θ et la 2^e équation du système montre que ce polynôme est de degré 3. Les coefficients de ce polynôme seront des fonctions rationnelles de $\sin(\omega-k)$ et $\cos(\omega-k)$: ils ne peuvent donc dépendre de ω que par le groupement $\omega - k$. Si on pose

$$u = \lambda\theta^3 + \mu\theta^2 + \sigma\theta + \tau$$

on aura

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q} + \lambda \frac{\partial}{\partial q}\Gamma g^3 = 0 \tag{1}$$

$$X(\lambda) + \lambda \frac{\partial \mathfrak{L}\Gamma}{\partial x} = \mu c_2 + r \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial q} + 3\,\lambda\frac{\partial \mathfrak{L} g}{\partial x} + 2\,\mu\frac{\partial}{\partial q}\mathfrak{L} g + r = 0 \tag{3}$$

$$X(\mu)+\mu\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{L}g=2\,\sigma c_2+r_1 \tag{4}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial q}+\sigma\frac{\partial}{\partial q}\mathfrak{L}\frac{g}{\Gamma}+2\,\mu\frac{\partial\mathfrak{L}g}{\partial x}+r_1=0 \tag{5}$$

$$X(\sigma)-\sigma\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{L}\frac{\Gamma}{g^2}+2\,\mu\,\Gamma\Gamma'=3\,c_2\tau+r_2 \tag{6}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial q}-2\,\tau\frac{\Gamma'}{\Gamma}+\sigma\frac{\partial\mathfrak{L}g}{\partial x}+r_2=0 \tag{7}$$

$$X(\tau)+\sigma\Gamma\Gamma'=\tau\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{L}\frac{\Gamma^2}{g^3} \tag{8}$$

(1) donne

$$\lambda=\frac{\lambda_1(x,t,\omega)}{\Gamma g^3}$$

λ_1 ne peut contenir ω que par l'intermédiaire de $\omega-k$; ne contenant pas q, il ne peut contenir ω; (2) donne alors

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}\left(\Gamma'\cos(\omega-k)-\frac{\Gamma}{g^2}\sin(\omega-k)\right)=c_2\frac{\partial\mu}{\partial\omega}$$

et (3)

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial q\,\partial\omega}+2\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial q}\mathfrak{L}g=0\,.$$

Ces conditions exigent que

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}=\frac{\partial\mu}{\partial\omega}=0.$$

(2) montre alors que μ ne dépend pas non plus de t; (4) et (6) montrent que σ et τ sont aussi seulement fonction de x et q. En d'autre termes

$$X(f)\equiv\frac{\partial f}{\partial x}.$$

On a alors

$$\lambda=\frac{X(x)}{\Gamma g^3}$$

et un changement de variable x permet, si λ n'est pas nul, de prendre $X=1$. (2) et (3) donnent, dans ce cas, par addition

$$\frac{\partial}{\partial q}\frac{\mu g^3}{\Gamma}=0$$

d'où

$$\mu=\frac{\Gamma X_1(x)}{g^3}$$

et on a une première condition

$$\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{g^3}=\frac{\Gamma X_1}{g^3}c_2+r.$$

(4) donne σ en fonction de μ et (5) donne une 2e condition; (6) donne τ et (7) et (8) donnent 2 autres conditions. Un calcul long et compliqué de discussions m'a amené à la conclusion que le système des 8 équations posées plus haut n'est jamais compatible. Ce résultat est hors de doute dans tous les cas particuliers que soulève la discussion. Je ne le donne que sous réserves dans le cas le plus général: le temps m'a manqué pour refaire et essayer de simplifier le calcul.

TROISIEME PARTIE.

Surfaces applicables sur une surface gauche à génératrices non isotropes.

21. — *Notations.* Il ne nous reste plus qu'à étudier les éléments linéaires de la forme

$$ds^2=dq^2+(aq^2+2bq+c)\,dx^2 \qquad a\neq 0$$

a, b, c étant 3 fonctions de x seul vérifiant la relation

$$ac-b^2=1.$$

Les équations (E) et (E′) s'écrivent dans ce cas

$$\text{(E)}\qquad RT-S^2+R\left(P\Gamma\Gamma'-\frac{Q}{\Gamma}\frac{\partial\Gamma}{\partial Y}\right)+2SQ\frac{\Gamma'}{\Gamma}+\frac{1-P^2}{\Gamma^2}-\frac{aQ^2}{\Gamma^2}=0$$

$$\text{(E}'\text{)}\qquad r-2ps\frac{\Gamma'}{\Gamma}+\frac{t}{\Gamma^2}(ap^2+y^2-1)-\frac{p}{\Gamma}\frac{\partial\Gamma}{\partial x}-y\,\Gamma\Gamma'=0.$$

Nous poserons

$$aq+b=\operatorname{tg}\tau \qquad \lambda=\frac{a'}{a} \qquad \mu=\frac{ab'-ba'}{a} \qquad R^2=a(1-y^2)-m_1^2.$$

Il en résulte les identités

$$a\Gamma^2 = 1 + \operatorname{tg}^2\tau \qquad p = \frac{R - m_1 \operatorname{tg}\tau}{a} \qquad m_2 = \frac{m_1(\operatorname{tg}^2\tau - 1) - 2R\operatorname{tg}\tau}{1 + \operatorname{tg}^2\tau}$$

$$e = \frac{m_1 + R\operatorname{tg}\tau}{1 + \operatorname{tg}^2\tau} \qquad \frac{\partial\tau}{\partial x} = \frac{\lambda\operatorname{tg}\tau + \mu}{1 + \operatorname{tg}^2\tau} \qquad \Gamma\frac{\partial\Gamma}{\partial x} = \frac{\lambda(\operatorname{tg}^2\tau - 1) + 2\mu\operatorname{tg}\tau}{2a}$$

$$G_1(e) = -e\left(\frac{\partial\Omega\Gamma}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y}\right) \qquad G_1(m_1) = \frac{(1 - \operatorname{tg}^2\tau)\left(ay - \frac{m_1\lambda}{2}\right) - R(\lambda\operatorname{tg}\tau + \mu) + m_1\lambda}{1 + \operatorname{tg}^2\tau}.$$

22. — *Fonctions canoniques d'ordre* ≤ 2. Nous pourrions nous borner à étudier le cas où il n'y a pas d'involution du 1er ordre. Il y a pourtant intérêt à discuter le système S_1 du n° 13 dans le cas qui nous occupe. Il vient

$$\frac{\partial\omega}{\partial q} = \frac{1}{\Gamma^2} \qquad \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial t}\cos(\omega + \tau) + \operatorname{cotg} t \sin(\omega + \tau) = 0.$$

On a immédiatement

$$\omega = \tau + l(x, t)$$

et une identité en τ qui donne le système

$$\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\mu}{2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sin t\cos l) + \frac{\lambda}{2\sqrt{a}}\sin t = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\sin t\sin l) + \frac{\mu}{2\sqrt{a}}\cos t = 0$$

qui n'est compatible que si

$$a'^2 = -4a^3 - 4K^2a^2 \qquad \left(\frac{b}{a}\right)' = -\frac{2K}{a}.$$

Si on fait alors le changement de coordonnées qui ramène l'élément linéaire donné à la forme de Weingarten, on retombe sur l'un ou l'autre des paraboloïdes découverts par ce savant, suivant que K est nul ou non. Ce fait s'explique d'ailleurs d'une façon immédiate par la Géométrie.

Cherchons maintenant les fonctions canoniques d'ordre ≤ 1. Soit v le logarithme d'une pareille fonction

$$\frac{\delta v}{\delta x} = A\alpha + B\beta.$$

On a

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0$$

$\frac{\partial v}{\partial z}$ ne peut se réduire qu'à une constante, si nous supposons, comme c'est notre droit, qu'il n'y a pas d'invariant du 1^er^ ordre. Un calcul déjà fait montre alors que

$$v=2\beta\mathfrak{L}\Gamma+(2\beta-\alpha)\mathfrak{L}(m_1-m_2)+Kz+\mathfrak{w}(x,y,m_1)$$

la fonction $\mathfrak{w}$ vérifiant la condition

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}+m_2\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial m_1}G_1(m_1)+K(p+m_2 q)+\frac{\alpha}{\Gamma}\frac{\partial \Gamma}{\partial x}=0.$$

Si nous y remplaçons, au moyen des formules du n° 21, p, q, m_2, $G_1(m_1)$ par leur valeur en fonction de tg τ, on obtient, par rapport à cette variable, une identité qui fournit le système:

$$-\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}-m_1\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y}+\frac{K}{a}(R+m_1 b)+\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial m_1}\left(ay-\frac{m_1\lambda}{2}\right)=\frac{\alpha\lambda}{2}$$

$$-2R\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y}+\frac{K}{a}(Rb-m_1)-R\lambda\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial m_1}+\alpha\mu=0$$

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial m_1}\left(\frac{m_1\lambda-R\mu}{2}\right)=0$$

et la discussion montre que ce système

1°) a toujours une solution quand α est nul; on a

$$\frac{\delta}{\delta x}\Gamma^2 e^2=B\Gamma^2 e^2,$$

2°) admet une solution unique

$$u=\frac{(\Gamma e)^{2\beta}}{e^{\alpha}}$$

quels que soient α et β, si a, b, c sont des constantes,

3°) admet une infinité de solutions lorsque

$$a'^2=-4a^3-4K^2a^2 \qquad \left(\frac{b}{a}\right)'=-\frac{2K}{a}$$

il y a alors un invariant du premier ordre et nous venons de voir ce qui se passe dans ce cas.

Pour étudier les involutions d'ordre 2, remarquons que le système (Σ_2) du n° 18 qui les détermine ne contient plus de terme en u^2 quand c_2 est nul: il admet la solution $\frac{1}{u}=0$, qui signifie ici que les équations

$$E=0 \qquad R=0$$

sont en involution.

Quand a est nul, la détermination des intégrales communes à ces deux équations n'offre aucune difficulté: on retrouve, comme M[r] Gambier me l'a fait remarquer, les surfaces que j'ai signalées à propos des involutions $P=\pm 1$.

Quand a n'est pas nul, si on pose

$$z=u\,Y_1(v)+Y_2(v)$$

on voit que cette expression est solution de (E) sous la seule condition

$$(a\,Y'_2-b\,Y'_1)^2=a(1-Y_1^2)-Y'^2_1.$$

En posant

$$Y_1=\sin\varphi \qquad \omega'(v)\cos\varphi=\sqrt{a-\varphi'^2}$$

où φ est une fonction arbitraire de v, la méthode de Darboux amène immédiatement aux surfaces

$$(\Sigma)\begin{cases} x=\left(u+\dfrac{b}{a}\right)\cos\omega\cos\varphi-\displaystyle\int\frac{\cos\omega\cos\varphi\sin\varphi}{a}\,d\omega+\int\frac{\sin\omega}{a}\,d\varphi-\int\cos\omega\cos\varphi\,d\left(\frac{b}{a}\right)\\ y=\left(u+\dfrac{b}{a}\right)\sin\omega\cos\varphi-\displaystyle\int\frac{\sin\omega\cos\varphi\sin\varphi}{a}\,d\omega-\int\frac{\cos\omega}{a}\,d\varphi-\int\sin\omega\cos\varphi\,d\left(\frac{b}{a}\right)\\ z=\left(u+\dfrac{b}{a}\right)\sin\varphi+\displaystyle\int\frac{\cos^2\varphi}{a}\,d\omega-\int\sin\varphi\,d\left(\frac{b}{a}\right)\cdot\end{cases}$$

Il est très remarquable que ces formules ne puissent représenter que des surfaces réglées. Outre qu'elles résolvent complètement un problème déjà traité par Darboux, *elles fournissent*, comme nous le verrons plus tard, *la solution explicite la plus générale du problème de la déformation des surfaces gauches quelconques.*

23. — Est ce que le système (Σ_2) peut admette d'autres solutions? Si on y remplace u par $\Gamma^2 v(x,y,z,m_1)$, ce système devient

$$\frac{\partial v}{\partial q} = -\frac{1}{\Gamma^3}\frac{\partial \Gamma}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + m_2 \frac{\partial v}{\partial y} + (p + m_2 q)\frac{\partial v}{\partial z} + G_1(m_1)\frac{\partial v}{\partial m_1} + \frac{\Gamma'}{\Gamma} + \frac{2v}{\Gamma}\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = 0.$$

D'ailleurs la relation

$$\frac{\delta}{\delta x}(s + m_1 t + u) = (s + m_1 t + u)(2A + B)$$

donne ici

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial u}{\partial z}(2A + B).$$

Si $\frac{\partial u}{\partial z}$ n'est pas nul, l'existence de la fonction canonique d'ordre ≤ 1 $\frac{\partial u}{\partial z}$ implique, puisqu'il n'y a pas d'invariants d'ordre ≤ 1, que a, b, c ne dépendent pas de x. S'il n'en est pas ainsi, u et par suite v ne dépendent pas de z.

En introduisant la variable τ (n° 21), on a

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\lambda(1 - \mathrm{tg}^2\tau) - 2\mu\,\mathrm{tg}\,\tau}{2(1 + \mathrm{tg}^2\tau)}$$

d'où

$$v = \frac{\lambda}{4}\sin 2\tau + \frac{\mu}{4}\cos 2\tau + \frac{h(x, y, z, m_1)}{4}.$$

La seconde équation du système (Σ_2) devient, quand on y remplace v par cette valeur, une identité en τ d'où on tire les conditions

$$\frac{\partial h}{\partial x} + m_1\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{a}\frac{\partial h}{\partial z}(R + bm_1) + \frac{\partial h}{\partial m_1}\left(\frac{m_1\lambda}{2} - ay\right) = \mu' + \lambda(\mu - h)$$

$$-2R\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{2}{a}\frac{\partial h}{\partial z}(Rb - m_1) - R\lambda\frac{\partial h}{\partial m_1} + 2\lambda' + 4a - 2\mu(\mu - h) = 0$$

$$2\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial m_1}(m_1\lambda - R\mu) = 0.$$

Si a, b, c ne dépendent pas de x, λ et μ sont nuls et la discussion du système ainsi simplifié conduit à une impossibilité.

Si λ et μ ne sont pas nuls simultanément, h ne contient pas z. En posant

$$2\sigma = \lambda^2 + \mu^2 + 4a$$

les opérations de Jacobi amènent à la relation

$$\sigma R \frac{\partial h}{\partial m_1} = 3\sigma'.$$

Si σ n'est pas nul, on en tire l'identité

$$-\frac{m_1}{R^3}\frac{\sigma'}{\sigma} = -\frac{\sigma'}{(\lambda+m_1\mu)^2}\left(\frac{3a(2+\mu y)}{\sigma} - 2\right)$$

qui exige que σ' soit nul. On a donc toujours

$$(1) \quad \lambda^2+\mu^2+4a=K \qquad (K \text{ constant})$$

et on voit alors que, quel que soit K, h doit se réduire à une constante. Il reste alors les conditions

$$(2) \quad \mu'+\lambda(\mu-h)=0 \qquad (3) \quad 2\lambda'+4a-2\mu(\mu-h)=0.$$

Si λ est nul, μ est une constante (d'après (2)) qui ne peut s'annuler (d'après (3)); a est constant; b est proportionnel à x; on trouve l'élément linéaire des quadriques de révolution.

Si λ n'est pas nul, on a

$$\frac{\mu'}{\mu-h}=\lambda=\frac{a'}{a} \qquad \mu=h+\frac{h_1}{a}$$

et les équations (1), (2), (3) se réduisent aux relations

$$(\mathrm{R}) \qquad \begin{cases} a'^2=-4a^3+Ka^2-(ah+h_1)^2 \\ \left(\dfrac{b}{a}\right)'=\dfrac{h}{a}+\dfrac{h_1}{a^2} \end{cases}$$

qui jointes à

$$ac-b^2=1$$

déterminent a, b, c, (à condition qu'on n'y prenne pas a' et b' nuls simultanément) de façon que l'équation (E) admette deux involutions du second ordre.

24. — D'après le résultat fondamental de M[r] Gau, les surfaces qui admettent un élément linéaire tel que l'équation (E) ait deux involutions du second ordre, sont applicables de deux façons sur une surface gauche. Elles sont par suite

applicables sur une quadrique, d'après le théorème d'Ossian Bonnet. Classer les solutions du système (R) revient donc à classer les éléments linéaires des quadriques, rapportées à leurs génératrices rectilignes et aux trajectoires orthogonales de celles-ci.

Remarquons d'abord que le système (R) détermine a, b et c d'une façon unique en fonction de x, puisque les constantes qui interviennent sont additives pour x et q et peuvent par suite être négligées. Supposons alors que, partant de l'élément

$$ds^2 = du^2 + (au^2 + 2bu + c)\,dv^2$$

on fasse le changement de coordonnées T dont l'existence est impliquée par celle de l'involution du second ordre et qui amène l'élément linéaire à la forme

$$ds^2 = dU^2 + (AU^2 + 2BU + C)\,dV^2$$

A, B, C étant des fonctions de V. Deux cas peuvent se présenter:

1°) L'expression A ainsi calculée est nulle. Il faut qu'il existe alors une involution du 1^er^ ordre et la quadrique est un des 2 paraboloïdes de Weingarten.

2°) Si A n'est pas nul, les nombres A, B, C devront vérifier les conditions (R), car l'équation transformée de (E′) admet une involution du second ordre. Par suite, ces nombres ne sont autres que a, b, c où on a remplacé v par V. On retrouve ainsi le fait bien connu de l'autométrie des quadriques: les paraboloïdes isotropes exceptés, elles sont applicables sur elles-mêmes de manière que les génératrices d'un système viennent coïncider avec les génératrices de l'autre.

Considérons alors les formules (Σ) du n° 22; elles sont valables quels que soient a, b, c. Si ces fonctions vérifient les relations (R), les formules (Σ) représentent des surfaces dépendant d'une fonction arbitraire et applicables sur des quadriques. Rien ne sera changé dans cette conclusion si on remplace, dans (Σ), u par U et v par V. Les formules représentent donc dans ce cas des surfaces S applicables sur une quadrique Q de manière que les génératrices de S viennent coïncider avec l'un quelconque des systèmes de génératrices de Q. Comme nous démontrerons que l'équation de la déformation de la quadrique générale n'admet aucune involution d'ordre supérieur à 2, *les formules (Σ) constituent la solution explicite la plus générale qu'on puisse obtenir pour le problème de la déformation des quadriques, quand on y remplace a, b, c par une solution quelconque du système (R).*

On peut obtenir sans peine toutes ces solutions. Posons

$$f(a) = -4a^3 + Ka^2 - (ah + h_1)^2.$$

1°) $f(a)$ a ses 3 racines distinctes. — Si on pose

$$a = \wp(\alpha) - \wp(x) \qquad \wp(\alpha) = K - h^2 \qquad (K - h^2 \neq 0)$$

on aura

$$\wp'^2(x) = 4\wp^3(x) - g_2\wp(x) - g_3$$

$$h_1 = i\wp'(\alpha) \qquad h = -\frac{1}{i}\frac{\wp''(\alpha)}{\wp'(\alpha)}$$

on en déduit

$$\left(\frac{b}{a}\right)' = -\frac{1}{i\wp'(\alpha)}(\zeta'(x+\alpha) + \zeta'(x-\alpha) - 2\zeta'(\alpha))$$

et

$$ds^2 = du^2 - dv^2\left[(\wp(v) - \wp(\alpha))\left(u + \frac{\zeta(v+\alpha) + \zeta(v-\alpha) - 2v\zeta'(\alpha)}{i\wp'(\alpha)}\right)^2 + \frac{1}{\wp(v) - \wp(\alpha)}\right].$$

C'est le cas général[1], où l'équation en S de la quadrique a ses 3 racines distinctes. Si $K = h^2$, la quadrique a un cône directeur inscriptible dans un trièdre trirectangle; on n'a qu'à poser

$$a = -\wp(x)$$

et on est amené à la forme

$$ds^2 = du^2 - dv^2\left[\wp(v)\left(u + \sqrt{g_3}\left(\frac{\wp'}{\wp} + 2\zeta\right)\right)^2 + \frac{1}{\wp(v)}\right].$$

2°) $f(a)$ a une racine double et une racine simple non nulles. On peut poser

$$a'^2 = -4(a+\lambda)^2(a+\mu^2) \qquad \lambda = \mu^2 + \omega^2 \qquad \omega \neq 0.$$

On a alors

$$a = -\mu^2 - \sin^2\omega x.$$

Si $\mu^2 + 1$ n'est pas nul,

$$\omega\frac{b}{a} = \frac{\mu(\omega^2+\mu^2)}{\mu^2+1}\frac{\operatorname{tg}\omega x}{1+\mu^2(1+\operatorname{tg}^2\omega x)} - \frac{2\mu^4 + 3\mu^2 + \omega^2}{\mu(\mu^2+1)^{3/2}}\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}\operatorname{tg}\omega x\right).$$

Si $\mu^2 + 1$ est nul,

$$i\omega\frac{b}{a} = \frac{2}{3}(\omega^2 - 1)\operatorname{cotg}^3\omega x + (\omega^2+1)\operatorname{cotg}\omega x.$$

Ces surfaces ne sont applicables sur aucune quadrique réelle. Elles le sont sur la quadrique

---

[1] Voir Darboux, *Théorie générale des surfaces*, IV, p. 335.

$$x^2+y^2+z^2+2y(y+iz)=1.$$

3°) $f(a)$ a une racine triple non nulle. On a alors

$$ds^2=du^2-dv^2\left[(u+v)^2+\frac{u^2}{v^2}\right]$$

et cet élément convient à la quadrique type

$$x^2+y^2+z^2+2x(y+iz)=1.$$

4°) $f(a)$ ne peut avoir une racine simple nulle. S'il y a une racine double nulle, l'autre étant $\neq 0$, on a, en posant

$$K-h^2=4\omega^2 \qquad (\omega\neq 0),$$

$$a'^2=-4a^3+4a^2\omega^2 \qquad \left(\frac{b}{a}\right)'=\frac{h}{a}.$$

D'où

$$a=\frac{\omega^2}{\operatorname{ch}^2\omega x} \qquad \frac{b}{a}=x \text{ ou } \frac{b}{a}=\frac{h}{4\omega^3}(2x\omega+\operatorname{sh}2\omega x)$$

suivant que h est nul ou non. Ces surfaces sont applicables soit sur le paraboloïde ordinaire, soit sur le paraboloïde

$$y(y+iz)+Kx=0.$$

5°) Si $f(a)$ a une racine triple nulle, on obtient la forme

$$ds^2=du^2-dv^2\left(\frac{u^2}{v^2}+v^2\right)$$

qui convient au paraboloïde isotrope

$$x(y+iz)=K(y-iz).$$

25. — *Fonctions canoniques d'ordre* 2. Pour toutes les surfaces que nous étudions dans ce chapitre, il existe pour l'équation (E) une involution d'ordre 2, $R=0$. Nous aurons souvent, pour les étudier, à distinguer 3 cas, dont la classification résulte naturellement de la discussion du n° précédent. Nous avons vu qu'il existait toujours, pour l'équation (E′), une fonction canonique $u=\Gamma^2 e^2$ d'indices 0 et 1.

Cas I. Il n'existe pour (E′) aucune involution d'ordre ≤ 2 et aucun facteur canonique d'ordre ≤ 1 autre que $\Gamma^2 e^2$. C'est le cas général. S'il y avait une fonction canonique d'ordre 2, son logarithme v entraînerait l'existence d'une solution pour le système du n° 6 (Th. II), où l'on fait $c_2 = 0$. Dans cette dernière hypothèse, ce système ne pouvant admettre qu'une solution unique, celle-ci sera certainement solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\sigma}{\theta \sigma_1 + \sigma_2}$$

les expressions σ étant du premier ordre au plus; puisqu'il n'y a pas d'involution d'ordre 2, la seule solution acceptable serait

$$v = h(\theta + h_1) \qquad h \neq 0$$

h et h_1 étant du premier ordre au plus.

En égalant les coefficients des termes en θ, on a

$$F_1(h) + 2h\frac{\Gamma'}{\Gamma} = 0 \qquad G_1(h) = 0$$

d'où, en posant

$$\mathfrak{L}h = H(x, y, z, m_1) - \mathfrak{L}\Gamma^2$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = 0 \qquad \frac{\partial H}{\partial x} + (p + m_1 q)\frac{\partial H}{\partial z} + m_2\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial m_1}G_1(m_1) = \frac{\Gamma}{2}\frac{\partial \Gamma}{\partial x}.$$

H serait alors (n° 22) une fonction canonique d'ordre ≤ 1 et d'indices -2, 0, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il n'y a donc, dans ce premier cas, aucune fonction canonique d'ordre 2.

Cas. II. Il existe, pour (E'), une involution du second ordre

$$\psi = \theta + \varphi(x, q).$$

Outre $\Gamma^2 e^2$, il existe alors la fonction canonique ψ du second ordre:

$$\frac{\delta \psi}{\delta x} = \psi(2A + B).$$

Il y a alors une fonction canonique d'ordre 2 et d'indices α et β,

$$u = \psi^{\frac{\alpha}{2}}(\Gamma e)^{2\beta - \alpha}.$$

Cas. III. Si a, b, c sont constants, la fonction du premier ordre

$$u = \frac{(\Gamma e)^{2\beta}}{e^{\alpha}}$$

est canonique et d'indices α et β. S'il y avait une fonction canonique d'ordre 2, il y aurait un invariant d'ordre 2 et nous avons exclu cette hypothèse en même temps que les paraboloïdes de Weingarten.

26. *Involutions d'ordre* 3. — Le calcul du n° 20, où on fait $c_2 = 0$, montre qu'il faut discuter le système

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} F_1(\mathfrak{v}) + \dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \theta}\left(2\theta\dfrac{\Gamma'}{\Gamma} + \dfrac{\partial \mathfrak{L}\Gamma}{\partial x}\right) = \mathfrak{v}\left(2\dfrac{\Gamma'}{\Gamma} - \dfrac{\partial m_2}{\partial p}\right) + \varrho_1\theta + \varrho_2 \\ G_1(\mathfrak{v}) + \dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \theta}\Gamma\Gamma' = -\mathfrak{v}\dfrac{\partial m_2}{\partial y} - \varrho_1\theta^2 - \varrho_2\theta \end{cases}$$

où

$$\varrho_1 = -\frac{1}{e}\frac{\partial^2}{\partial x \partial q}\mathfrak{L}\Gamma \qquad \varrho_2 = \frac{1}{2e}\left(\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2 - \frac{\partial^2 \mathfrak{L}\Gamma}{\partial x^2}\right).$$

On en tire successivement en désignant par des accents les dérivées de $\mathfrak{v}$ par rapport à θ,

$$(\mathrm{S}') \qquad \begin{cases} F_1(\mathfrak{v}') + \dfrac{\partial \mathfrak{v}'}{\partial \theta}\left(2\theta\dfrac{\Gamma'}{\Gamma} + \dfrac{\partial \mathfrak{L}\Gamma}{\partial x}\right) = -\mathfrak{v}'\dfrac{\partial m_2}{\partial p} + \varrho_1 \\ G_1(\mathfrak{v}') + \dfrac{\partial \mathfrak{v}'}{\partial \theta}\Gamma\Gamma' = -\mathfrak{v}'\dfrac{\partial m_2}{\partial y} - 2\varrho_1\theta - \varrho_2 \end{cases}$$

$$(\mathrm{S})'' \qquad \begin{cases} F_1(\mathfrak{v}'') + \dfrac{\partial \mathfrak{v}''}{\partial \theta}\left(2\theta\dfrac{\Gamma'}{\Gamma} + \dfrac{\partial \mathfrak{L}\Gamma}{\partial x}\right) = -\mathfrak{v}''\left(\dfrac{\partial m_2}{\partial p} + 2\dfrac{\Gamma'}{\Gamma}\right) \\ G_1(\mathfrak{v}'') + \dfrac{\partial \mathfrak{v}''}{\partial \theta}\Gamma\Gamma' = -\mathfrak{v}''\dfrac{\partial m_2}{\partial y} - 2\varrho_1. \end{cases}$$

Une troisième dérivation montre que

$$\frac{\delta \mathfrak{v}'''}{\delta x} + \mathfrak{v}'''(3A + 2B) = 0.$$

Cas. I. Il n'y a aucune fonction canonique d'ordre ≤ 2 et de premier indice non nul; $\mathfrak{v}'''$ est donc nul et $\mathfrak{v}''$ est du 1[er] ordre. (S″) n'est autre que le système du n° 22 où $\alpha = \beta = -1$ et où le 2[e] membre de la 2[e] équation est augmenté de $-2\varrho_1$. Le raisonnement du début du n° 20 est ici valable pour démontrer que $\mathfrak{v}''$ est indépendant de z; il existe donc une fonction $\mathfrak{w}(x, y, m_1)$ qui doit vérifier l'identité en $\operatorname{tg}\tau$:

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} + m_2 \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial m_1} G_1(m_1) = \frac{\lambda(\operatorname{tg}^2\tau - 1) + 2\mu \operatorname{tg}\tau + 4\lambda \operatorname{tg}\tau + 2\mu(1 - \operatorname{tg}^2\tau)}{1 + \operatorname{tg}^2\tau}.$$

Une discussion analogue à celle du n° 22 montre que le système en $\mathfrak{w}$ issu de cette identité ne saurait avoir de solutions lorsque λ et μ ne sont pas nuls simultanément.

Cas II. Si $\mathfrak{v}'''$ est nul, le calcul et les conclusions sont identiques. Mais on peut avoir ici

$$\mathfrak{v}''' = -\frac{2K}{\Gamma e}\psi^{-\frac{3}{2}} \qquad \mathfrak{v}'' = \frac{K}{\Gamma e}\psi^{-\frac{1}{2}} + \mathfrak{w}(x, y, p, q). \quad (K \neq 0)$$

Comme le système (S″) peut s'écrire

$$\frac{\delta \mathfrak{v}''}{\delta x} = -\mathfrak{v}''(A+B) - 2\varrho_1$$

et que

$$\frac{\delta}{\delta x}\frac{\psi^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma e} = -\frac{\psi^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma e}(A+B)$$

la fonction $\mathfrak{w}$ doit vérifier la relation

$$\frac{\delta \mathfrak{w}}{\delta x} = -\mathfrak{w}(A+B) - 2\varrho_1$$

que nous venons de discuter.

Cas III. a, b, c sont des constantes; ϱ_1 est nul; (S′) et (S″) s'écrivent

$$\frac{\delta \mathfrak{v}'}{\delta x} = A\mathfrak{v}' - \varrho_2 \qquad \frac{\delta \mathfrak{v}''}{\delta x} = -\mathfrak{v}''(A+B).$$

Si $\mathfrak{v}''$ n'est pas nul, on peut prendre

$$\mathfrak{v}'' = \frac{1}{K\Gamma^2 e} \qquad \mathfrak{v}' = \frac{\theta + \mathfrak{w}(x, y, z, m_1)}{K\Gamma^2 e}$$

et on a

$$\frac{\delta}{\delta x}(\theta + \mathfrak{w}) = (2A + B)(\theta + \mathfrak{w}) - K\Gamma^2 e\varrho_2.$$

C'est encore le calcul du n° 22 où $\alpha = 2$, $\beta = 1$ et où le second membre de l'équation qui donne $G_1(\mathfrak{w})$ est augmenté de

$$K\Gamma^2 e\varrho_2 = K\Gamma^2 e(\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2)$$

il faut simplement remarquer ici que l'on ne peut pas affirmer que $\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z}$ est nul. En posant $\mathfrak{w} = h\Gamma^2$, on obtient l'identité en $\operatorname{tg}\tau$

$$(1 + \operatorname{tg}^2\tau)\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y}[m_1(1 - \operatorname{tg}^2\tau) + 2R\operatorname{tg}\tau] + \frac{1}{a}\frac{\partial h}{\partial z}[2\operatorname{tg}\tau(Rb - m_1) + (R + bm_1)(1 + \operatorname{tg}^2\tau)]$$
$$+ \frac{\partial h}{\partial m_1}ay(1 - \operatorname{tg}^2\tau) + \frac{a}{2}(1 - \operatorname{tg}^2\tau) = 0.$$

Le système en h issu de cette identité n'a jamais de solutions.

Si $\mathfrak{v}''$ est nul, $\mathfrak{v}'$ est une fonction d'ordre ≤ 1 et comme

$$\frac{\delta e}{\delta x} = Ae$$

on obtient, en posant

$$h = -\frac{e\mathfrak{v}'}{2}$$

la relation

$$\frac{\delta h}{\delta x} = 2e\varrho_2$$

qui est la même que celle que nous venons de discuter.

Il résulte de la discussion des 3 cas que l'équation (E') n'admet jamais d'involution du 3ᵉ ordre sous nos hypothèses.

27. *La condition* (Γ). Il ne nous reste donc plus qu'à chercher si la condition (Γ), nécessaire pour qu'il existe une involution d'ordre ≥ 4, peut être satisfaite pour certaines valeurs de a, b, c. On doit avoir

$$\frac{\delta H}{\delta x} = AH + \sigma_{n,1}$$

H étant d'ordre au plus égal à 4. S'il est d'ordre 4

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial H}{\partial \theta_4}\right) + \frac{\partial H}{\partial \theta_4}\mu_{3,1} = 0. \qquad \frac{\partial H}{\partial \theta_4} \neq 0$$

Dans le cas I, l'existence de la fonction canonique $\frac{\partial H}{\partial \theta_4}$ entraînerait l'existence d'une fonction canonique d'ordre ≤ 2 et d'indices entiers, ce qui est impossible. Dans les cas II et III, si $\frac{\partial H}{\partial \theta_4}$ est d'ordre supérieur à 2, l'égalité précédente entraînerait, soit l'existence d'un invariant d'ordre 3, ce qui est impossible (n° 27), soit celle d'un invariant d'ordre 4 et par suite d'une involution de cet ordre: on pourrait alors trouver un nombre H d'ordre 3 vérifiant (Γ) (n° 8); il s'ensuit que $\frac{\partial H}{\partial \theta_4}$ est d'ordre au plus égal à 2, dans les cas II et III.

Cas I. Il suffit de chercher s'il existe une fonction ω d'ordre ≤ 3 telle que

$$\frac{\delta \omega}{\delta x} = A\omega + N'\frac{d^2 m_2}{dy^2} - \sigma \qquad \left(N' = \frac{(n-1)(n-4)}{2}\right)$$

d'après les résultats du n° 10. Ici

$$\sigma = -t\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} - \frac{\partial e}{\partial p}\right)\left[\frac{\partial \Omega\Gamma}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} + \theta\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} + \frac{\partial e}{\partial p}\right)\right]$$
$$+ \frac{1}{2e}\left[\theta\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} - \frac{\partial e}{\partial p}\right) + \frac{\partial \Omega\Gamma}{\partial x} - \frac{\partial e}{\partial y}\right]\left[\theta\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} + \frac{\partial e}{\partial p}\right) + \frac{\partial \Omega\Gamma}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y}\right]$$

$$\frac{d^2 m_2}{dy^2} = \frac{\partial m_2}{\partial p}[\theta_3 + p_{03}(m_2 - m_1)] + t^2\left[2(m_2 - m_1)\left(\frac{\partial m_2}{\partial p}\right)^2 + (m_2 - m_1)^2\frac{\partial^2 m_2}{\partial p^2}\right]$$
$$+ 2t\theta\left[\left(\frac{\partial m_2}{\partial p}\right)^2 + (m_2 - m_1)\frac{\partial^2 m_2}{\partial p^2}\right] + 2t\left[\frac{\partial m_2}{\partial y}\frac{\partial m_2}{\partial p} + (m_2 - m_1)\frac{\partial^2 m_2}{\partial p\,\partial y}\right]$$
$$+ \theta^2\frac{\partial^2 m_2}{\partial p^2} + 2\theta\frac{\partial^2 m_2}{\partial p\,\partial y} + \frac{\partial^2 m_2}{\partial y^2}.$$

On a donc

$$F_2(\omega) = \frac{\partial \omega}{\partial \theta_3} \lambda_{3,1} - N' \frac{\partial m_2}{\partial p}$$

$$G_2(\omega) + \frac{\partial \omega}{\partial \theta_3}(\theta_3 \mu_{3,1} - J_2) = A\omega - N'\left(\frac{d^2 m_2}{dy^2}\right) - \sigma.$$

On en tire

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta_3}\right) = -\frac{\partial \omega}{\partial \theta_3}(2A + B).$$

Comme d'ailleurs

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right) = A\frac{\partial \omega}{\partial z}$$

ω est une fonction du second ordre qui ne dépend pas de z:

$$\omega = -N' t \frac{\partial m_2}{\partial p} + \varphi(x, y, p, q, \theta).$$

En formant $G_2(\omega)$, on obtient alors une identité de la forme

$$G_2(\varphi) = Ut + V$$

qui conduit au système

$$F_1(\varphi) + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\left(2\theta\frac{\Gamma'}{\Gamma} + \frac{\partial \Omega\Gamma}{\partial x}\right) = -\varphi\frac{\partial m_2}{\partial p} - \theta\left[N'\frac{\partial^2 m_2}{\partial p^2} + \frac{1}{2e}\left(\frac{\Gamma'^2}{\Gamma^2} - \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)^2\right)\right] + \psi$$

$$G_1(\varphi) + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\Gamma\Gamma' = -\varphi\frac{\partial m_2}{\partial y} + \frac{\theta}{2e}\left[N' G_1\left(\frac{\partial m_2}{\partial p}\right) - N'\frac{\partial m_2}{\partial y}\frac{\partial m_2}{\partial p}\right.$$
$$\left. - \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} + \frac{\partial e}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial \Omega\Gamma}{\partial x} - \frac{\partial e}{\partial y}\right)\right] + \psi_1$$

ψ et ψ_1 étant des fonctions d'ordre < 2 qu'il est inutile de calculer. Si on dérive ces relations par rapport à θ, on trouve

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}\right) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}(3A + 2B).$$

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ est une fonction du premier ordre qu'on peut poser égale à

$$-H(x, y, p, q) - \frac{N'\dfrac{\partial m_2}{\partial p}}{m_2 - m_1}$$

et H vérifie le système

$$
(S_1) \quad \begin{cases} F_1(H) + H\left(\dfrac{\partial m_2}{\partial p} + \dfrac{2\Gamma'}{\Gamma}\right) = -\dfrac{K}{2e}\left(\dfrac{\Gamma'^2}{\Gamma^2} - \left(\dfrac{\partial e}{\partial p}\right)^2\right) \\ G_1(H) + H\dfrac{\partial m_2}{\partial y} = -\dfrac{K}{2e}\left(\dfrac{\Gamma'}{\Gamma} + \dfrac{\partial e}{\partial p}\right)\left(\dfrac{\partial \Omega\Gamma}{\partial x} - \dfrac{\partial e}{\partial y}\right) \end{cases}
$$

K étant une constante non nulle parce que N' ne peut être égal à 1. Ce système est un cas particulier du système

$$
(S) \quad \begin{cases} F_1(H) + H\left(\dfrac{\partial m_2}{\partial p} + \dfrac{2\Gamma'}{\Gamma}\right) = -\dfrac{K}{2e}\left(\dfrac{\Gamma'^2}{\Gamma^2} - \left(\dfrac{\partial e}{\partial p}\right)^2\right) \\ G_1(H) + H\dfrac{\partial m_2}{\partial y} = -\dfrac{K}{2e}\left(\dfrac{\Gamma'}{\Gamma} + \dfrac{\partial e}{\partial p}\right)\left(\dfrac{\partial \Omega\Gamma}{\partial x} - \dfrac{\partial e}{\partial y}\right) + \dfrac{K\alpha\Gamma\Gamma'}{e\Gamma^4} + K\alpha_1\varrho_1 + \dfrac{K\alpha_2\varrho_2}{\Gamma^2} \end{cases}
$$

où K est une constante non nulle; $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$, des constants quelconques; ϱ_1 et ϱ_2 sont les fonctions définies au n° 26. Avant de discuter (S), nous allons montrer que c'est encore ce système qu'on obtient dans les cas II et III.

28. *Cas II et III.* — Il y a une fonction canonique d'ordre ≤ 2. La condition (Γ) s'ecrit ici

$$\frac{\delta\omega}{\delta x} = A\omega - \sigma.$$

Si ω est d'ordre 4, on a vu que $\dfrac{\partial\omega}{\partial\theta_4}$ est une fonction $\mathfrak{w}$ du second ordre au plus telle que

$$\frac{\delta\mathfrak{w}}{\delta x} + \mathfrak{w}\mu_{3,1} = 0.$$

On a donc

$$\omega = \mathfrak{w}(\theta_4 + \varphi)$$

et

$$\frac{\delta}{\delta x}(\theta_4 + \varphi) = (\theta_4 + \varphi)\mu_{4,1} - \frac{\sigma}{\mathfrak{w}}.$$

Les calculs du n° 8 montrent alors que

$$\varphi = p_{03}\lambda_{4,1} + u(x, y, z, p, q, s, t, \theta_3)$$

et conduisent, $\frac{\sigma}{w}$ étant du second ordre au plus, à la relation

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta_3}\right) = A\frac{\partial u}{\partial \theta_3} + \sigma_{4,1}$$

u étant du troisième ordre au plus. Il suffit donc d'étudier (Γ) quand ω est du $3^{\text{ème}}$ ordre. Cette condition s'écrit

$$F_2(\omega) = \lambda_{3,1}\frac{\partial \omega}{\partial \theta_3} \qquad G_2(\omega) + \frac{\partial \omega}{\partial \theta_3}(\theta_3\mu_{3,1} - J_2) = A\,\omega - \sigma.$$

Une dérivation par rapport à θ_3 donne

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta_3}\right) = -(2A+B)\frac{\partial \omega}{\partial \theta_3}\cdot$$

1°) $\frac{\partial \omega}{\partial \theta_3}$ est nul — ω est alors une fonction φ de θ, x, y, z, p, q qui vérifie le système

$$F_1(\varphi) + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\left(2\theta\frac{\Gamma'}{\Gamma} + \frac{\partial \Omega\Gamma}{\partial x}\right) = -\varphi\frac{\partial m_2}{\partial p} - \frac{1}{2e}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} - \frac{\partial e}{\partial p}\right)\left[\frac{\partial \Omega\Gamma}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} + \theta\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} + \frac{\partial e}{\partial p}\right)\right]$$

$$G_1(\varphi) + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\Gamma\Gamma' = -\varphi\frac{\partial m_2}{\partial y} - \frac{1}{2e}\left(\frac{\partial \Omega\Gamma}{\partial x} - \frac{\partial e}{\partial y}\right)\left[\frac{\partial \Omega\Gamma}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} + \theta\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} + \frac{\partial e}{\partial p}\right)\right].$$

Deux dérivations par rapport à θ conduisent à la condition

$$\frac{\delta \varphi''}{\delta x} = -(3A + 2B)\varphi''.$$

Dans le cas II, on a donc

$$\varphi'' = -\frac{m}{2\Gamma e}\psi^{-\frac{3}{2}} \qquad \varphi' = \frac{m}{\Gamma e}\psi^{-\frac{1}{2}} + H(x, y, z, p, q)$$

m étant une constante *quelconque*. En portant cette valeur de φ' dans le système précédent dérivé par rapport à θ, on obtient le système (S) où $K = 1$, $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Dans le cas III, on a

$$\varphi'' = \frac{\alpha}{e\Gamma^4} \qquad \varphi' = \frac{\alpha\theta}{e\Gamma^4} + H(x, y, z, p, q)$$

et on retombe sur le système (S) où $K=1$, $\alpha_1=\alpha_2=\lambda=\mu=0$, α étant une constante quelconque.

2°) $\dfrac{\partial\omega}{\partial\theta_3}$ n'est pas nul. On a alors

$$\omega=u(\theta_3+\varphi) \qquad \frac{\delta u}{\delta x}=-(2A+B)u.$$

Dans le cas II

$$u=\frac{1}{K\psi}.$$

Dans le cas III

$$u=\frac{1}{K\Gamma^2}$$

K étant une constante non nulle. Dans les 2 cas, on a

$$\frac{\delta}{\delta x}(\theta_3+\varphi)=(3A+B)(\theta_3+\varphi)-\frac{\sigma}{u}.$$

Le calcul fait pour les involutions d'ordre 3 donne ici

$$F_1(\varphi)+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\left(2\theta\frac{\Gamma'}{\Gamma}+\frac{\partial\mathfrak{L}\Gamma}{\partial x}\right)=-\varphi\left(\frac{\partial m_2}{\partial p}-\frac{2\Gamma'}{\Gamma}\right)+\varrho_1\theta+\varrho_2$$
$$-\frac{1}{2ue}\left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}-\frac{\partial e}{\partial p}\right]\left[\frac{\partial\mathfrak{L}\Gamma}{\partial x}+\frac{\partial e}{\partial y}+\theta\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}+\frac{\partial e}{\partial p}\right)\right]$$

$$G_1(\varphi)+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\Gamma\Gamma'=-\varphi\frac{\partial m_2}{\partial y}-\varrho_1\theta^2-\varrho_2\theta$$
$$-\frac{1}{2ue}\left[\frac{\partial\mathfrak{L}\Gamma}{\partial x}-\frac{\partial e}{\partial y}\right]\left[\frac{\partial\mathfrak{L}\Gamma}{\partial x}+\frac{\partial e}{\partial y}+\theta\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}+\frac{\partial e}{\partial p}\right)\right].$$

Dans le cas II, $\dfrac{1}{u}$ est linéaire en θ; dans le cas III, il en est indépendant. Dans les 2 cas, 3 dérivations par rapport à θ donnent

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial\theta^3}\right)=-\frac{\partial^3\varphi}{\partial\theta^3}(3A+2B).$$

On a alors

$$\varphi''=\frac{m}{\Gamma e}\psi^{-\frac{1}{2}}+H(x,y,z,p,q) \qquad \text{(cas II)}$$

$$\varphi' = \frac{\alpha\theta}{\Gamma^2 e} + \Gamma^2 H. \qquad \text{(cas III)}$$

En remplaçant φ' et φ'' par ces valeurs dans le système précédent dérivé une ou deux fois, on retrouve, dans le cas II, (S) où $\alpha=\alpha_2=0$; dans le cas III, (S) où α_1 est nul ainsi que λ et μ.

29. Nous avons finalement à discuter (S) dans les cas suivants

1°) $\alpha=\alpha_1=\alpha_2=0$; $\frac{\partial H}{\partial z}=0$; a, b, c quelconques $(ac-b^2=1)$.

2°) a, b, c sont liés par les relations (R) du n° 23, et on peut avoir

$$\text{soit } \alpha=\alpha_1=\alpha_2=0, \qquad \text{soit } \alpha=\alpha_2=0$$

α et α_2 sont donc toujours nuls.

En dérivant par rapport à z, on voit que

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right) = -(A+B)\frac{\partial H}{\partial z}.$$

Comme il ne peut exister de fonction canonique d'ordre ≤ 1 qui ait un premier indice non nul, on en conclut que H ne dépend pas de z.

3°) a, b, c sont des constantes et on peut prendre

$$b=0 \qquad a=c=1.$$

L'égalité précédente en $\frac{\partial H}{\partial z}$ donne

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\beta e}{2\Gamma^2 e^2} \qquad H = \frac{\beta z}{2\Gamma^2 e} + H_1(x, y, m_1)$$

et on a alors à discuter (S), avec ces valeurs de a, b, c, dans le cas où

$$\text{soit } \alpha_1=\alpha_2=0 \qquad \text{soit } \alpha=\alpha_1=0.$$

Dans tous les cas, nous pouvons prendre $K=-1$ et poser

$$aq+b=t=\operatorname{tg}\tau \qquad H = \frac{h(x, y, z, m_1, t)}{2e\Gamma^2}.$$

Le système (S) s'écrit alors

$$a\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{t^2}{\Gamma^2}-\frac{p^2}{e^2\Gamma^6}$$

$$G_1(h)-h\frac{\partial \Omega\Gamma}{\partial x}=\left(t-\frac{p}{e\Gamma^2}\right)\left(\frac{\partial \Omega\Gamma}{\partial x}+\frac{y}{e\Gamma^2}\right)-\frac{2\alpha t}{\Gamma}-2\alpha_1 e\varrho_1\Gamma^2-2\alpha_2 e\varrho_2.$$

La première équation s'écrit

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{t^2}{1+t^2}-\frac{(R-m_1t)^2}{e^2(1+t^2)^3}=1-\frac{a(1-y^2)}{(Rt+m_1)^2}$$

d'où

$$h=t+\frac{a(1-y^2)}{R(Rt+m_1)}+g(x,y,z,m_1)$$

qu'on peut écrire

$$h=t+\frac{1-y^2}{Re\Gamma^2}+u(x,y,z,m_1)$$

avec

$$u=\mathfrak{v}(x,y,m_1)+\beta z$$

β étant une constante qui est nulle dans les cas I et II.

On a donc l'identité en t

$$G_1\left(u+t+\frac{1-y^2}{Re\Gamma^2}\right)-\frac{\partial \Omega\Gamma}{\partial x}\left(u+t+\frac{1-y^2}{Re\Gamma^2}\right)+\frac{2\alpha t}{\Gamma^2}+2\alpha_1\Gamma^2 e\varrho_1+2\alpha_2 e\varrho_2$$

$$\equiv\left(t-\frac{p}{e\Gamma^2}\right)\frac{\partial \Omega\Gamma}{\partial x}-\frac{py}{e^2\Gamma^4}+\frac{ty}{e\Gamma^2}$$

où il faut remplacer Γ, p et e par leurs valeurs en fonction de t tirées des formules du n° 21.

On peut ainsi l'écrire

$$G_1(u)+\lambda t+\mu-\frac{\partial \Omega\Gamma}{\partial x}(u+2t)+\frac{2\alpha t a}{1+t^2}+2\alpha_1\varrho_1 e\Gamma^2+2\alpha_2\varrho_2 e$$

$$=-G_1\left(\frac{m_1}{R}\right)+\frac{m_1}{R}\frac{\partial \Omega\Gamma}{\partial x}+\frac{ay(1-t^2)}{R(1+t^2)}-\frac{ay}{R(1+t^2)}.$$

En changeant u en $\mathfrak{w}-\frac{m_1}{R}$, on aboutit à l'identité

$$G_1(\mathfrak{w})-\mathfrak{w}\frac{\partial \Omega\Gamma}{\partial x}+\frac{2\lambda t+\mu(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2a\alpha t}{1+t^2}+2\alpha_1\Gamma^2 e\varrho_1+2\alpha_2 e\varrho_2=-\frac{ayt^2}{R(1+t^2)}.$$

On a d'ailleurs

$$\varrho_1 = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial q}\mathfrak{L}\Gamma = -\frac{a}{(1+t^2)^2}[2\lambda t + \mu(1-t^2)]$$

$$2\varrho_2 = \Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2 - \frac{\partial^2 \mathfrak{L}\Gamma}{\partial x^2} = \frac{1-t^2}{\Gamma^2} - \frac{\partial^2 \mathfrak{L}\Gamma}{\partial x^2}.$$

En remarquant que α_2 est nul toutes les fois que Γ contient x, on aboutit finalement à l'identité générale

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}(1+t^2) + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y}[m_1(t^2-1) - 2Rt] + \frac{\beta}{a}[(R+m_1 b)(1-t^2) + 2t(Rb - m_1)]$$

$$+ \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial m_1}\left[(1-t^2)\left(ay - \frac{m_1\lambda}{2}\right) - R(\lambda t + \mu) + m_1\lambda\right] - \frac{\mathfrak{w}}{2}[\lambda(t^2-1) + 2\mu t] + 2a\alpha t$$

$$+ (1-2\alpha_1)[2\lambda t + \mu(1-t^2)] + a\alpha_2(1-t^2) + \frac{at^2 y}{R} = 0.$$

1^er^ et 2^e^ cas. On a toujours

$$\beta = \alpha = \alpha_2 = 0.$$

Posons

$$\beta_1 = 1 - 2\alpha_1.$$

Nous sommes amenés à discuter le système

$$(1) \qquad \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} + m_1\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial m_1}\left(\frac{m_1\lambda}{2} - ay\right) = \frac{\mathfrak{w}\lambda}{2} + \mu\beta_1 - \frac{ay}{R}$$

$$(2) \qquad 2\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial m_1}(m_1\lambda - R\mu) = -\frac{ay}{R}$$

$$(3) \qquad -2R\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} - R\lambda\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial m_1} = \mu\mathfrak{w} - 2\lambda\beta_1.$$

L'équation (1) peut être remplacée par

$$(1)' \qquad m_1\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial m_1}\left(\frac{R\mu}{2} - ay\right) = \frac{\mathfrak{w}\lambda}{2} + \mu\beta_1 + \frac{ay}{2R}.$$

L'opération de Jacobi faite sur (1)' et (3) donne

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y}(m_1\mu + R\lambda) - \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial m_1}(2\,aR + a\mu y) = \beta_1(\lambda^2+\mu^2) + a + \frac{a\mu y}{2\,R} + \frac{ay}{R^2}\left(ay + \frac{m_1\lambda}{2}\right).$$

Si on élimine $\mathfrak{w}$ entre (1)' et (3), on obtient

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y}(m_1\mu + R\lambda) + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial m_1}\left[\frac{R(\lambda^2+\mu^2)}{2} - a\mu y\right] = \beta_1(\lambda^2+\mu^2) + \frac{a\mu y}{2\,R}$$

d'où

$$R\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial m_1}(\lambda^2+\mu^2+4\,a) = -a - \frac{a^2y^2}{R^2} - \frac{aym_1\lambda}{2\,R^2}.$$

En remarquant que l'expression

$$\sigma = \lambda^2 + \mu^2 + 4\,a$$

ne saurait être nulle sans transformer l'égalité précédente en une identité impossible, on a, en intégrant,

$$\mathfrak{w} = g(x,\, y) - \frac{ay\lambda}{2\,\sigma R} - \frac{ay^2}{(1-y^2)}\frac{m_1}{\sigma R} - \frac{a}{\sigma}\,\text{Arc sin}\,\frac{m_1}{\sqrt{a(1-y^2)}}.$$

En portant cette valeur de $\mathfrak{w}$ dans (1)', on obtient une identité en m_1 qui est impossible.

3^e^ *cas.* On a ici

$$\lambda = \mu = 0 \qquad \alpha_1 = 0 \qquad a = 1 \qquad b = 0.$$

On est donc amené à discuter le système

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} = 0 \qquad m_1\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} - \beta R - y\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial m_1} = \alpha_2 - \frac{y}{R} \qquad R\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} + \beta m_1 = \alpha.$$

On peut intégrer la 3^e^ équation et en portant dans la seconde la valeur ainsi obtenue de $\mathfrak{w}$, on aboutit encore à une impossibilité.

Nous avons ainsi complètement démontré que la condition (Γ) n'est jamais satisfaite lorsque l'élément linéaire donné a la forme

$$ds^2 = du^2 + dv^2(au^2 + 2\,bu + c)$$

et qu'aucun changement de variable ne peut ramener cet élément à une forme analogue où a serait nul. Il est donc impossible dans ce cas qu'il existe une involution d'ordre supérieur ou égal à 4 pour l'équation de la déformation.

Les formules (Σ) du n° 22 fournissent donc bien, comme nous l'avons annoncé, la solution explicite la plus générale de la déformation des surfaces gauches quelconques.

30. — *Conclusion générale.* — L'équation de la déformation n'est complètement intégrable que si l'élément linéaire donné convient

1°) aux développées des surfaces minima,

2°) au paraboloïde de révolution,

3°) aux paraboloïdes de Weingarten,

4°) et, plus généralement, s'il peut se mettre sous la forme

$$ds^2 = du^2 + 2\,dv^2[u + n(1 - n)v^2]$$

où n est un entier positif.

Ces cas exceptés, la solution explicite la plus générale du problème de la déformation ne contient une fonction arbitraire que si l'élément linéaire convient

5°) à certaines surfaces gauches signalées par Darboux et pour lesquelles l'équation de la déformation admet une seule involution du premier ordre,

6°) à des surfaces dont les lignes de longueur nulle sont lignes de courbure constante ou à la surface gauche la plus générale, pour lesquelles l'équation de la déformation admet une seule involution du second ordre,

7°) aux surfaces à courbure constante ou aux surfaces applicables sur des quadriques, pour lesquelles il existe deux involutions du second ordre.

Dans les cas 5, 6, 7 la solution explicite la plus générale ne donne jamais que des surfaces réglées.

Ainsi, dans ce court travail, j'ai, non seulement retrouvé tous les résultats connus, mais encore élucidé ceux qui n'avaient pu l'être. La raison en est que le problème de la déformation, malgré les élégantes études géométriques dont il a été l'objet, dépend en réalité de l'intégration d'une équation du second ordre que M[r] Gau et moi avons seuls étudiée méthodiquement: la question est prise par le fond et les réponses apparaissent et se classent tout naturellement.

J'ai appliqué la même méthode à l'équation du second ordre dont Darboux fait dépendre la détermination des surfaces W: les mêmes raisons assurent le même succès. J'exposerai mes résultats dans un prochain mémoire.