ÜBER DAS ASYMPTOTISCHE VERHALTEN DER LÖSUNGEN NICHTHOMOGENER LINEARER DIFFERENZENGLEICHUNGEN.

Von

HANS SPÄTH

in TÜBINGEN.

Inhalt.

Einleitung.

Bei der Untersuchung einer linearen Differenzengleichung

$$(a) \qquad \sum_{i=0}^{n} p_i(s)\, u(s+i) = \varphi(s),$$

wo die Variable s die Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ durchläuft und die Koeffizienten $p_i(s)$ entweder konstant sind oder für $s \to \infty$ endlichen Grenzwerten $\lim\limits_{s\to\infty} p_i(s) = p_i (i=0, 1, \ldots, n)$ zustreben, ist die Abhängigkeit des asymptotischen Verhaltens der Lösungen $u(s)$ von der rechtsstehenden Funktion $\varphi(s)$ von Interesse. Sie ist für einen Teil der Lösungen besonders stark und kann oft zur Auszeichnung einzelner Lösungen vor den anderen benützt werden. Z.B. kann man aus einem allgemeinen Satze von Perron[1] über Summengleichungen entnehmen: aus $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|\varphi(s)|} \leqq 1$ folgt die Existenz von Lösungen $u(s)$ mit $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|u(s)|} \leqq 1$, wenn noch $p_n(s) = 1$, $p_0(s) \neq 0$ vorausgesetzt wird, und zwar von genau einer solchen Lösung, wenn alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$(b) \qquad \sum_{i=0}^{n} p_i \alpha^i = 0$$

ausserhalb des Einheitskreises liegen. Es ist zu erwarten, dass man die Abhängigkeit schärfer beschreiben kann, sobald man $\varphi(s)$ schärferen Bedingungen unterwirft.

Vor kurzem hat nun Herr Walther[2] den Fall behandelt, dass in (a) die Funktion $\varphi(s)$ für $s \to \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert strebt, und folgendes Ergebnis erhalten: Es existieren dann »im allgemeinen» Lösungen von (a), die für $s \to \infty$ ebenfalls gegen endliche Grenzwerte streben, und zwar trifft das sicher zu 1.) im Falle konstanter Koeffizienten $p_i(s) = p_i$, wenn für alle Wurzeln α_ν von (b) $|\alpha_\nu| \neq 1$ gilt (Herr Walther nimmt s beliebig reell an), 2.) im Falle »asymptotisch konstanter» Koeffizienten $(p_i(s) \to p_i)$, wenn $p_n(s) = 1$, $p_0(s) \neq 0$ und $|\alpha_\nu| \neq 1$ für alle Wurzeln

---

[1] O. Perron, Über Summengleichungen und Poincarésche Differenzengleichungen, Math. Ann. 84 (1921), S. 1—15.

[2] A. Walther, Über nichthomogene lineare Differenzengleichungen, Göttinger Nachrichten (math.-phys. Klasse) 1926, S. 103—118.

α_ν von (b) gilt sowie alle α_ν einfach und dem absoluten Betrage nach verschieden sind. (Unter den gemachten Voraussetzungen sind übrigens diese Lösungen identisch mit den nach dem erwähnten Satz von Perron sich ergebenden Lösungen $u(s)$ mit $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|u(s)|} \leqq 1$.)

Angeregt durch Herrn Walther habe ich mich mit derselben Frage beschäftigt, namentlich mit den von ihm nichtbehandelten Ausnahmefällen hinsichtlich der Lage der Wurzeln α_ν. Ich werde im folgenden zunächst die Waltherschen Ergebnisse auf etwas anderem Wege herleiten. Darüber hinaus werde ich für die Gleichungen mit konstanten Koeffizienten auch den Fall erledigen, dass die Wurzeln zum Teil auf dem Einheitskreise liegen; dabei ergeben sich interessante Zusammenhänge mit der Summierbarkeit von Reihen im Cesàroschen bzw. Hölderschen Sinne. Bei Gleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten werden auch mehrfache Wurzeln α_ν und Wurzeln mit gleichem Absolutbetrage zugelassen, und bei »guter» Konvergenz der Koeffizienten $p_i(s)$ gegen ihre Grenzwerte p_i auch Wurzeln mit dem Absolutbetrage 1. Im Anschluss daran wende ich mich der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Lösungen etwas allgemeinerer linearer Differenzengleichungen zu und mache dann Anwendungen auf die homogene Gleichung. Ich werde hier eine Reihe von Sätzen von Perron, Kreuser und Ford teils kürzer beweisen, teils verschärfen. Die Ergebnisse werden zum Teil auch auf den Fall ausgedehnt, dass die Variable s in (a) nicht auf die Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ beschränkt, sondern beliebig reell oder komplex ist.

I. Lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten.

§ 1. Der Hauptsatz.

Es sei für die lineare Differenzengleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{n} p_i u(s+i) = \varphi(s) \qquad (p_n = 1;\ s = 0, 1, 2, \ldots)$$

die Beziehung

$$(2) \qquad \lim_{s\to\infty} \varphi(s) = b \quad (b \text{ endlich})$$

erfüllt. Gesucht seien diejenigen etwaigen Lösungen $u(s)$, die für $s \to \infty$ endlichen Grenzwerten zustreben.

Man erkennt ohne weiteres: wenn es überhaupt derartige Lösungen gibt, haben sie alle denselben Grenzwert

$$\lim_{s \to \infty} u(s) = \frac{b}{\sum_{i=0}^{n} p_i}, \tag{3}$$

wofern dieser Ausdruck einen Sinn hat, d. h.

$$\sum_{i=0}^{n} p_i \neq 0$$

ist. Wir setzen im weiteren, indem wir den etwas abweichendes Verhalten zeigenden Ausnahmefall $\sum_{i=0}^{n} p_i = 0$ beiseite lassen, voraus, dass diese Bedingung erfüllt ist, oder m. a. W., dass keine der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ der charakteristischen Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} p_i \alpha^i = 0 \tag{4}$$

gleich 1 ist.

Zunächst behandeln wir die Differenzengleichung erster Ordnung

$$u(s+1) - \alpha u(s) = \varphi(s) \qquad (\lim_{s \to \infty} \varphi(s) = b;\ \alpha \neq 1). \tag{5}$$

Die Substitution $u(s) = v(s) + \frac{b}{1-\alpha}$ führt (5) über in eine Gleichung von demselben Typus

$$v(s+1) - \alpha v(s) = \varphi(s) - b = \psi(s) \quad (\lim_{s \to \infty} \psi(s) = 0;\ \alpha \neq 1). \tag{6}$$

Es genügt die Gleichung (6) zu betrachten, deren rechte Seite gegen Null strebt und deren etwaige Lösungen mit endlichem Grenzwert deshalb ebenfalls alle gegen Null konvergieren müssen.

Für die Lösungen von (6) erhält man sofort

$$\begin{aligned} v(s) &= \psi(s-1) + \alpha\psi(s-2) + \cdots + \alpha^{s-1}\psi(0) + \alpha^s v(0) \\ &= \alpha^s \left(v(0) + \frac{\psi(0)}{\alpha} + \frac{\psi(1)}{\alpha^2} + \cdots + \frac{\psi(s-1)}{\alpha^s} \right), \end{aligned} \tag{7}$$

und man hat jetzt die drei Fälle $|\alpha| \lesseqgtr 1$ zu unterscheiden.

Fall a): $|\alpha| < 1$.

$\psi(s)$ strebt für $s \to \infty$ gegen Null, und daher ist $|\psi(s)| < \varepsilon$ bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ für hinreichend grosses $s > s_0(\varepsilon)$, also für eine beliebige Lösung $v(s)$ von (6)

$$|v(s)| = |\alpha|^s \left| v(0) + \sum_{\sigma=0}^{s-1} \frac{\psi(\sigma)}{\alpha^{\sigma+1}} \right|$$

$$\leqq |\alpha|^s \left| v(0) + \sum_{\sigma=0}^{s_0} \frac{\psi(\sigma)}{\alpha^{\sigma+1}} \right| + \sum_{\sigma=s_0+1}^{s-1} |\alpha^{s-\sigma-1} \psi(\sigma)|$$

$$< |\alpha|^s K + \frac{\varepsilon}{1 - |\alpha|}$$

mit für alle s konstantem (von $v(0)$ abhängigem) K. Wegen $\lim\limits_{s \to \infty} \alpha^s = 0$ ist weiter für $s > s_1(\varepsilon) \geqq s_0(\varepsilon)$

$$|v(s)| < \frac{2\varepsilon}{1 - |\alpha|}.$$

Wenn $|\alpha| < 1$ ist, streben alle Lösungen von (6) gegen Null. (Für $\alpha = 0$ fallen alle Lösungen von $v(1)$ an zusammen zu $v(s+1) = \psi(s)$ und unterscheiden sich nur in $v(0)$.)

Fall b): $|\alpha| > 1$.

Wegen $|\alpha^s| \to \infty$ für $s \to \infty$ entnimmt man aus (7), dass $v(s)$ für $s \to \infty$ nur dann gegen Null streben kann, wenn

$$\lim_{s \to \infty} \left(v(0) + \sum_{\sigma=0}^{s-1} \frac{\psi(\sigma)}{\alpha^{\sigma+1}} \right) = v(0) + \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{\psi(\sigma)}{\alpha^{\sigma+1}} = 0$$

ist; die Konvergenz der Reihe steht im Falle $|\alpha| > 1$ fest. Trifft das zu, so ist

$$v(s) = \alpha^s \left(v(0) + \sum_{\sigma=0}^{s-1} \frac{\psi(\sigma)}{\alpha^{\sigma+1}} \right) = -\sum_{\sigma=s}^{\infty} \frac{\psi(\sigma)}{\alpha^{\sigma+1-s}}, \tag{8}$$

also für $s > s_0(\varepsilon)$

$$|v(s)| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| - 1}.$$

Wenn $|\alpha| > 1$ ist, strebt genau die Lösung

$$v(s) = -\frac{1}{\alpha}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\frac{\psi(s+\sigma)}{\alpha^{\sigma}}$$

gegen Null.

Fall c): $|\alpha| = 1, \alpha \neq 1$.

Wenn $v(s)$ für $s \to \infty$ gegen Null streben soll, muss wieder

$$\lim_{s \to \infty}\left(v(0) + \frac{1}{\alpha}\sum_{\sigma=0}^{s-1}\frac{\psi(\sigma)}{\alpha^{\sigma}}\right) = 0$$

sein. *Eine nullstrebige Lösung von* (6) *kann daher bei* $|\alpha| = 1, \alpha \neq 1$ *nur dann existieren, wenn* $\sum_{\sigma=0}^{\infty}\frac{\psi(\sigma)}{\alpha^{\sigma}}$ *konvergiert. Ist dies der Fall, dann hat* (6) *wieder die einzige nullstrebige Lösung*

(9)
$$v(s) = -\frac{1}{\alpha}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\frac{\psi(s+\sigma)}{\alpha^{\sigma}}\text{ [1]}.$$

Für die Gleichung (5) besagen die Ergebnisse:

Ist $|\alpha| < 1$, *so streben alle Lösungen von* (5) *für* $s \to \infty$ *gegen* $\frac{b}{1-\alpha}$. *Ist* $|\alpha| > 1$, *so zeigt mit* $\psi(s) = \varphi(s) - b$ *genau die Lösung*

(8a)
$$u(s) = \frac{b}{1-\alpha} - \frac{1}{\alpha}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\frac{\psi(s+\sigma)}{\alpha^{\sigma}} = -\frac{1}{\alpha}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\frac{\varphi(s+\sigma)}{\alpha^{\sigma}}$$

dieses Verhalten, und ist $|\alpha| = 1, \alpha \neq 1$, *genau die Lösung*

(9a)
$$u(s) = \frac{b}{1-\alpha} - \frac{1}{\alpha}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\frac{\psi(s+\sigma)}{\alpha^{\sigma}},$$

wofern hier die Reihe $\sum_{\sigma=0}^{\infty}\frac{\psi(\sigma)}{\alpha^{\sigma}}$ *konvergiert.*

Die allgemeine Gleichung (1) führen wir vorteilhaft durch die Substitution

---

[1] Bis zu einem gewissen Grade liesse sich hier auch noch der Fall $\alpha = 1$ einordnen, indem dann für die Existenz von Lösungen mit endlichem Grenzwert die Konvergenz der Reihe $\sum_{\sigma=0}^{\infty}\psi(\sigma)$, die in der Nörlundschen Summationstheorie eine Rolle spielt, notwendig und hinreichend ist. In diesem Falle konvergieren aber alle Lösungen gegen jeweils von $v(0)$ abhängige Grenzwerte. Ausserdem kann man im Fall $\alpha = 1$ nicht von (6) auf (5) zurückschliessen; (5) hat für $\lim_{s \to \infty}\varphi(s) = b \neq 0$ keine Lösung mit endlichem Grenzwert.

$u(s)=v(s)+\frac{b}{\sum_{i=0}^{n} p_i}$ über in

$$\sum_{i=0}^{n} p_i \; v(s+i)=\varphi(s)-b=\psi(s) \text{ mit } \lim_{s\to\infty} \psi(s)=0, \tag{10}$$

und die Frage nach den Lösungen von (1) mit endlichem Grenzwert ist wieder gleichbedeutend mit der Frage nach den nullstrebigen Lösungen von (10).

Die Gleichung (10) ist äquivalent einem System von n linearen Gleichungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} v_1(s+1)-\alpha_1 v_1(s) &= v_2(s) \\ v_2(s+1)-\alpha_2 v_2(s) &= v_3(s) \\ \cdots\cdots\cdots & \\ v_{n-1}(s+1)-\alpha_{n-1} v_{n-1}(s) &= v_n(s) \\ v_n(s+1)-\alpha_n v_n(s) &= \psi(s), \end{aligned} \tag{11}$$

wobei $v(s)=v_1(s)$ gesetzt ist und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (4) in irgend einer Reihenfolge bedeuten. Das ergibt sich sehr einfach aus der symbolischen Form von (10)

$$\sum_{i=0}^{n} p_i \; E^i \, v(s) = \left(\sum_{i=0}^{n} p_i \; E^i\right) v(s)=\psi(s) \quad \text{mit} \quad E^i \, v(s)=v(s+i)$$

durch Zerfällen des Operationssymbols

$$\sum_{i=0}^{n} p_i \, E^i = E^n + p_{n-1} E^{n-1} + \cdots + p_1 E + p_0$$

in das symbolische Produkt

$$(E-\alpha_1)(E-\alpha_2)\cdots(E-\alpha_n).$$

Zu jeder Lösung $v(s)$ von (10) gehört eine durch (11) eindeutig[1] bestimmte Kette von Funktionen

$$v_1(s)=v(s), \; v_2(s), \ldots, v_{n-1}(s), v_n(s),$$

---

[1] Die Kette hängt natürlich von dem speziell gewählten System (11) ab.

die, wenn $v(s)$ nullstrebig ist, alle auch nullstrebig sind. Man erhält daher umgekehrt alle nullstrebigen Lösungen $v(s)$ von (10) mittels eines Systems (11) genau über die Ketten, deren einzelne Funktionen $v_n(s), v_{n-1}(s), \ldots, v_1(s)$ nacheinander alle nullstrebig bestimmt sind.

Wenn keine der Wurzeln α_ν von (4) auf dem Einheitskreise liegt, gibt es nach dem oben Bewiesenen immer solche Ketten (wenn $|\alpha_\nu| > 1$ für alle α_ν gilt, genau eine), also auch immer nullstrebige Lösungen von (10). Wenn aber die α_ν teilweise auf dem Einheitskreise liegen, ist das nur der Fall, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind. Diese können dadurch gewonnen werden, dass man nacheinander Systeme (11) betrachtet, in denen jeweils eine der Wurzeln α_ν mit $|\alpha_\nu| = 1$ am Schluss steht (das bisher Gesagte gilt ja für jedes System (11) bei beliebiger Reihenfolge der α_ν).

Es sei also in (11)

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} = \cdots = \alpha_{n-r+1} = \alpha$$

eine r-fache Wurzel von (4) mit $|\alpha| = 1$. Man kann dann nacheinander $v_n(s)$, $v_{n-1}(s), \ldots, v_{n-r+1}(s)$ als nullstrebige Funktionen und zwar

$$v_n(s) = -\frac{1}{\alpha}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\frac{\psi(s+\sigma)}{\alpha^\sigma},\; v_{n-1}(s) = -\frac{1}{\alpha}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\frac{v_n(s+\sigma)}{\alpha^\sigma}, \ldots, v_{n-r+1}(s) = -\frac{1}{\alpha}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\frac{v_{n-r+2}(s+\sigma)}{\alpha^\sigma}$$

genau dann bestimmen, wenn die hier auftretenden Summen nacheinander alle konvergieren. Damit ist gleichbedeutend, dass die iterierten Reihen

$$(12)\qquad \sum_{\sigma=0}^{\infty}\psi(\sigma)\beta^\sigma,\; \sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{\sigma_1=\sigma}^{\infty}\psi(\sigma_1)\beta^{\sigma_1}, \ldots, \sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{\sigma_1=\sigma}^{\infty}\cdots\sum_{\sigma_{r-1}=\sigma_{r-2}}^{\infty}\psi(\sigma_{r-1})\beta^{\sigma_{r-1}}$$

alle konvergieren, wobei $\frac{1}{\alpha} = \beta$ gesetzt ist.

Die Konvergenz der Reihen (12), und zwar in bezug auf jede Wurzel α_ν, die auf dem Einheitskreise liegt, ist also eine notwendige Bedingung dafür, dass (10) nullstrebige Lösungen haben kann.

Die Bedingung ist aber auch hinreichend; denn, wenn die Funktion $\psi(s)$ in bezug auf alle Wurzeln α_ν mit $|\alpha_\nu| = 1$ die Konvergenzbedingungen (12) erfüllt, so lässt sich die letzte der Gleichungen eines Systems (11) immer durch eine nullstrebige Funktion $v_n(s)$ befriedigen. Von dieser kann man, wie wir hier nicht ausführen wollen, dann zeigen, dass auch sie in bezug auf alle übrig gebliebenen Wurzeln die Bedingungen (12) befriedigt. So fortfahrend kann man die Existenz einer Kette nullstrebiger Funktionen $v_n(s), v_{n-1}(s), \ldots, v(s) = v_1(s)$ und damit einer nullstrebigen Lösung von (10) beweisen. Einfacher kommt man mittels symbolischer Methoden zum Ziel. Es sei

$$(z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \cdots + p_0)^{-1} = \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{\lambda=1}^{r_k} A_{\varkappa\lambda} (z - \alpha_\varkappa)^{-\lambda}$$

in Partialbrüche zerlegt, wobei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ die verschiedenen r_1-, r_2-, ..., r_k-fachen Wurzeln von (4) sein mögen. Dann lässt sich die allgemeine Lösung von (10) symbolisch in der Form

$$\begin{aligned}(13)\quad v(s) &= (E^n + p_{n-1} E^{n-1} + \cdots + p_1 E + p_0)^{-1} \psi(s)\\ &= A_{11} (E - \alpha_1)^{-1} \psi(s) + A_{12} (E - \alpha_1)^{-2} \psi(s) + \cdots + A_{1r_1} (E - \alpha_1)^{-r_1} \psi(s) + \cdots\\ &\qquad + A_{kr_k} (E - \alpha_k)^{-r_k} \psi(s)\end{aligned}$$

schreiben. Der Sinn dieser Gleichung ist: Man erhält alle Lösungen von (10) (vielleicht sogar mehrfach), wenn man

$$(E - \alpha_1)^{-1} \psi(s), (E - \alpha_1)^{-2} \psi(s), \ldots, (E - \alpha_1)^{-r_1} \psi(s), \ldots, (E - \alpha_k)^{-r_k} \psi(s)$$

die Lösungen der entsprechenden Differenzengleichungen

$$(14)\quad (E - \alpha_1) v(s) = \psi(s), (E - \alpha_1)^2 v(s) = \psi(s), \ldots, (E - \alpha_1)^{r_1} v(s) = \psi(s), \ldots, (E - \alpha_k)^{r_k} v(s) = \psi(s)$$

durchlaufen lässt. Man zeigt nämlich zunächst leicht durch Rechnung, dass jede Funktion von der Form (13) der Gleichung (10) genügt. Ist umgekehrt $v(s)$ irgend eine Lösung von (10), so sind die eindeutig bestimmten Funktionen

$$v_{\varkappa\lambda}(s) = \left(\sum_{i=0}^{n} p_i E^i\right) (E - \alpha_\varkappa)^{-\lambda}\ v(s) = (E - \alpha_1)^{r_1} \cdots (E - \alpha_\varkappa)^{r_\varkappa - \lambda} \cdots (E - \alpha_k)^{r_k}$$

$$(\varkappa = 1, 2, \ldots, k;\ \lambda = 1, 2, \ldots, r_\varkappa)$$

Lösungen der Gleichungen (14), und es ist

$$\sum_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa\lambda} v_{\varkappa\lambda}(s) = \left(\sum_{i=0}^{n} p_i E^i\right) \left(\sum_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa\lambda} (E - \alpha_\varkappa)^{-\lambda}\right) v(s) = \left(\sum_{i=0}^{n} p_i E^i\right) \left(\sum_{i=0}^{n} p_i E^i\right)^{-1} v(s) = v(s).$$

Man erhält also auch alle Lösungen von (10) in der Form (13). Entsprechendes gilt natürlich auch für (1).

Die Gleichungen (14) kann man aber, sobald $\psi(s)$ in bezug auf alle auf dem Einheitskreise liegenden Wurzeln $\alpha_\varkappa$ den Bedingungen (12) genügt, alle durch nullstrebige Funktionen befriedigen. Indem man auf der rechten Seite von (13) für alle Glieder solche nullstrebige Lösungen dieser Gleichungen (14) wählt, erhält man auch eine nullstrebige Lösung von (10).

Wir nehmen jetzt an, (10) habe nullstrebige Lösungen. Wir können sie dann alle mittels eines speziellen Systems (11), es heisse $(\overline{11})$, gewinnen, in dem alle Wurzeln α_ν mit $|\alpha_\nu|<1$, deren Anzahl $d(\leqq n)$ sei, obenan stehen, so dass also

$$|\alpha_1|<1, |\alpha_2|<1, \ldots, |\alpha_d|<1, |\alpha_{d+1}|\geqq 1, \ldots, |\alpha_n|\geqq 1$$

ist. In diesem System $(\overline{11})$ stimmen alle Ketten $\{v_\nu(s)\}$, die zu nullstrebigen Lösungen von (10) Anlass geben, von $v_n(s)$ an bis zu $v_{d+1}(s)$ überein; von $v_d(s)$ einschliesslich bis zu $v_1(s)=v(s)$ werden sie aber beliebig fortgesetzt. Das bedeutet, dass zu genau d beliebig vorgegebenen Anfangswerten $v(0)$, $v(1), \ldots, v(d-1)$ eine eindeutig bestimmte nullstrebige Lösung existiert.

Die Gesamtheit aller nullstrebigen Lösungen $v(s)$ von (10) lässt sich auch in der Form

$$v(s)=v^*(s)+w(s) \tag{15}$$

schreiben, wo $v^*(s)$ irgend eine partikuläre nullstrebige Lösung von (10) und $w(s)$ eine beliebige nullstrebige Lösung der homogenen Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} p_i\, w(s+i)=0 \tag{16}$$

ist. Wie man aus dem der Gleichung (16) entsprechenden System $(\overline{11})$ mit $\psi(s)=0$, $v_n(s)=v_{n-1}(s)=\cdots=v_{d+1}(s)=0$ erkennt, sind das gerade die Lösungen der homogenen Gleichung

$$(E-\alpha_1)(E-\alpha_2)\ldots(E-\alpha_d)\, w(s)=0. \tag{17}$$

(Ist keine der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$ gleich Null und sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(m\leqq d)$ die verschiedenen r_1-, r_2-, $\ldots$, r_m-fachen unter ihnen, so bilden bekanntlich die Funktionen

$$\alpha_1^s, s\,\alpha_1^s, \ldots, s^{r_1-1}\,\alpha_1^s, \ldots, s^{r_m-1}\,\alpha_m^s$$

ein Fundamentalsystem von (17).)

Durch Übertragung dieser Ergebnisse auf (1) erhalten wir zusammenfassend:

Satz 1. *Die Differenzengleichung*

$$\sum_{i=0}^{n} p_i\, u(s+i) = \varphi(s) \qquad (s=0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

mit $p_n = 1, \sum_{i=0}^{n} p_i \neq 0$ *hat unter der Voraussetzung*

$$\lim_{s\to\infty} \varphi(s) = b \quad (b \text{ endlich}) \tag{2}$$

dann und nur dann Lösungen $u(s)$ *mit*

$$\lim_{s\to\infty} u(s) = \frac{b}{\sum_{i=0}^{n} p_i}, \tag{3}$$

wenn für jede auf dem Einheitskreise liegende r-fache Wurzel α *der charakteristischen Gleichung*

$$\sum_{i=0}^{n} p_i\, \alpha^i = 0 \tag{4}$$

die Reihen

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \psi(\sigma)\,\beta^{\sigma}, \sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{\sigma_1=\sigma}^{\infty} \psi(\sigma_1)\beta^{\sigma_1}, \ldots, \sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{\sigma_1=\sigma}^{\infty}\cdots\sum_{\sigma_{r-1}=\sigma_{r-2}}^{\infty} \psi(\sigma_{r-1})\,\beta^{\sigma_{r-1}} \tag{12}$$

mit $\psi(\sigma) = \varphi(\sigma) - b, \beta = \frac{1}{\alpha}$ *alle konvergieren. Und zwar gibt es dann, wenn d die Anzahl der innerhalb des Einheitskreises liegenden Wurzeln von* (4) *ist, zu d beliebig vorgegebenen Anfangswerten*

$$u(0), u(1), \ldots, u(d-1)$$

genau eine derartige Lösung.

Insbesondere zeigen, wenn für alle Wurzeln α_ν *von* (4) $|\alpha_\nu| < 1$ *gilt, alle Lösungen, wenn durchweg* $|\alpha_\nu| > 1$ *ist, genau eine Lösung das Verhalten* (3).

Die Ergebnisse gelten übrigens zum Teil auch noch, wie man leicht erkennt, für den Fall, dass 1 eine (mehrfache) Wurzel der charakteristischen Gleichung ist. Es kommt dann nur $b=0$ in Frage. Die Bedingungen für die Existenz von Lösungen mit endlichem Grenzwert sind genau dieselben, wie für andere Wurzeln auf dem Einheitskreise, und es gibt dann wieder zu d beliebig vorgegebenen Anfangswerten $u(0), u(1), \ldots, u(d-1)$ genau eine nullstrebige Lösung von (1). Anders als im Falle $\sum_{i=0}^{n} p_i \neq 0$ gibt es aber ausser diesen Lösungen noch weitere Lösungen $u(s)$ mit endlichem Grenzwert, und zwar zu $d+1$ beliebigen Werten $u(0), u(1), \ldots, u(d)$ genau eine. Der Grenzwert $\lim_{s\to\infty} u(s)$ hängt dann von $u(d)$ ab.

§ 2. Zusammenhang mit der Summierbarkeit von Reihen im Cesàroschen bzw. Hölderschen Sinne; Beispiele.

Die Konvergenzbedingungen (12) lassen sich vorteilhaft umformen. Wir ersetzen s durch n — eine Verwechslung ist in diesem Paragraphen nicht zu befürchten — und schreiben abkürzend

$$\psi(n)\beta^n = a_n, \quad \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu = t_n \qquad \left(|\beta| = \left|\frac{1}{\alpha}\right| = 1;\ \lim_{n\to\infty} \psi(n) = 0\right)$$

sowie $r+1$ statt r. Die Summen (12) lauten dann einfacher

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\nu_1=\nu}^{\infty} a_{\nu_1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} t_\nu, \ldots, \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\nu_1=\nu}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_r=\nu_{r-1}}^{\infty} a_{\nu_r} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\nu_1=\nu}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{r-1}=\nu_{r-2}}^{\infty} t_{\nu_{r-1}}, \tag{18}$$

und ihre Konvergenz ist notwendig und hinreichend, damit die Differenzengleichung

$$(E-\alpha)^{r+1} v(n) = \psi(n)$$

eine nullstrebige Lösung hat.

Es gilt nun

Satz II. *Die r-mal iterierte Reihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_r=\nu_{r-1}}^{\infty} a_{\nu_r} \tag{19}$$

konvergiert genau dann, wenn die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+r}{r} a_\nu \tag{20}$$

C_r- bzw. H_r-summierbar ist (d. h. durch Cesàrosche bzw. Höldersche Mittel r-ter Ordnung).

Dem Beweise dieses Satzes seien einige die Summierbarkeit von Reihen betreffende Bemerkungen vorausgeschickt.[1]

Es sei (s_n) eine Folge von Zahlen, und es bedeute

$$S_n^{(0)} = s_n,\ S_n^{(1)} = S_0^{(0)} + S_1^{(0)} + \cdots + S_n^{(0)}, \ldots, S_n^{(r)} = S_0^{(r-1)} + S_1^{(r-1)} + \cdots + S_n^{(r-1)},$$

$$M_n^{(0)} = s_n, M_n^{(1)} = \frac{1}{n+1}(M_0^{(0)} + M_1^{(0)} + \cdots + M_n^{(0)}), \ldots,$$

$$M_n^{(r)} = \frac{1}{n+1}(M_0^{(r-1)} + M_1^{(r-1)} + \cdots + M_n^{(r-1)}).$$

Dann heisst bekanntlich die Folge (s_n) C_r-limitierbar (limitierbar r-ter Ordnung im Cesàroschen Sinne) zum Werte s, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(r)}}{\binom{n+r}{r}} = s \quad (s \text{ endlich})$$

existiert. Sie heisst H_r-limitierbar (limitierbar r-ter Ordnung im Hölderschen Sinne) zum Werte s, wenn

$$\lim_{n\to\infty} M_n^{(r)} = s \quad (s \text{ endlich})$$

existiert. Man schreibt dafür

$$C_r\text{-}\lim s_n = s, \qquad H_r\text{-}\lim s_n = s.$$

Eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ heisst C_r-(H_r-)summierbar mit der Summe s, wenn die Folge ihrer Partialsummen

[1] In den Bezeichnungen halte ich mich meistens an K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, 2. Aufl., Berlin 1924, Kap. 13.

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$$

C_r-(H_r-)limitierbar zum Werte s ist, und man schreibt entsprechend

$$C_r\text{-}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = s, \qquad H_r\text{-}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = s.$$

Ich zitiere einige bekannte Eigenschaften der beiden Verfahren, die für beide einfach zu beweisen sind.

[1] Ist die Folge (s_n) C_r-(H_r-)limitierbar, so ist sie auch C_{r+1}-(H_{r+1}-) limitierbar zum gleichen Wert.

[2] Man darf bei der Mittelbildung einer Folge endlich viele Glieder weglassen oder hinzunehmen. Anstelle der Hölderschen Mittel $M_n^{(r)}$ kann man auch die Mittel

$$\overline{M}_n^{(0)} = M_n^{(0)} = s_n, \overline{M}_n^{(1)} = \frac{1}{n+1}(\overline{M}_0^{(0)} + \overline{M}_1^{(0)} + \cdots + \overline{M}_n^{(0)}), \ldots,$$

$$\overline{M}_n^{(r)} = \frac{1}{n+r}(\overline{M}_0^{(r-1)} + \overline{M}_1^{(r-1)} + \ldots + \overline{M}_n^{(r-1)})$$

betrachten. Aus $\lim\limits_{n\to\infty} M_n^{(r)} \to s$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{M}_n^{(r)} \to s$ und umgekehrt.

[3][1] Ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ C_r-(H_r-)summierbar, so ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu+1}$ C_{r-1}-(H_{r-1}-)summierbar

und allgemeiner $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\binom{\nu+k}{k}}$ C_{r-k}-(H_{r-k}-)summierbar $(0 \leqq k \leqq r)$.

Wir führen den Beweis für den Satz II zunächst für das C-Verfahren.

---

[1] [3] findet sich (für das Cesàrosche Verfahren) an verschiedenen Stellen in der Literatur: vgl. z. B. H. Bohr, *Über die Summabilität Dirichletscher Reihen*, Gött. Nachr. (math.-phys. Kl.) 1903, S. 247—262. Man käme auch mit folgendem leicht beweisbaren Satze aus:

Ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ C_r-(H_r-)summierbar, so ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\binom{\nu+r}{r}}$ konvergent. [3] könnte man dann im folgenden mit erhalten.

Für $r = 0$ ist der Satz klar. Wir zeigen: Ist er richtig für $r-1$, so gilt er auch für $r (r \geqq 1)$. Die r-fach iterierte Summe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\nu_1=\nu}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_r=\nu_{r-1}}^{\infty} a_{\nu_r} \tag{19}$$

ist zugleich die $(r-1)$-fach iterierte Summe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\nu_1=\nu}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{r-1}=\nu_{r-2}}^{\infty} t_{\nu_{r-1}} \qquad \left(t_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu,\ t_n \to 0\right). \tag{21}$$

der Folge (t_n). Für die Konvergenz der letzten Reihe ist nach Voraussetzung notwendig und hinreichend, dass

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu + r - 1}{r-1} t_\nu \tag{22}$$

C_{r-1}-summierbar ist. Wir brauchen also nur zu zeigen, dass aus der C_{r-1}-Summierbarkeit der Reihe (22) die C_r-Summierbarkeit der Reihe (20) folgt und umgekehrt.[1]

Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+s}{r} a_\nu &= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+r}{r} (t_\nu - t_{\nu+1}) \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+r-1}{r-1} t_\nu - \binom{n+r}{r} t_{n+1}, \end{aligned} \tag{23}$$

oder, wenn $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+r}{r} a_\nu = A_n$ und $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+r-1}{r-1} t_\nu = T_n$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} r A_n &= r T_n - (n+1)(T_{n+1} - T_n), \\ r A_n &= (n+r+1) T_n - (n+1) T_{n+1}. \end{aligned} \tag{24}$$

---

[1] Die Definition $t_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu$ ist berechtigt, auch wenn wir von der Voraussetzung »(20) ist C_r-summierbar» ausgehen, da auch dann wegen [3] $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergiert.

Es sei erstens $\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+r-1}{r-1} t_\nu$ C_{r-1}-summierbar mit der Summe T. Dann findet man aus (24)

$$r\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu = rA_n^{(1)} = (r+1)\,T_n^{(1)} - (n+1)\,T_{n+1} = (n+r+2)\,T_n^{(1)} - (n+1)\,T_{n+1}^{(1)},$$

$$r\,A_n^{(2)} = (r+2)\,T_n^{(2)} - (n+1)\,T_{n+1}^{(1)} = (n+r+3)\,T_n^{(2)} - (n+1)\,T_{n+1}^{(2)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

(25) $$r\,A_n^{(r)} = 2\,r\,T_n^{(r)} - (n+1)\,T_{n+1}^{(r-1)},$$

(26) $$\frac{A_n^{(r)}}{\binom{n+r}{r}} = 2\,\frac{T_n^{(r)}}{\binom{n+r}{r}} - \frac{T_{n+1}^{(r-1)}}{\binom{n+r}{r-1}} \to T,$$

$$C_r\text{-}\lim\ A_n = T.$$

Es ist also auch $\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+r}{r} a_\nu$ C_r-summierbar mit der Summe T.

Umgekehrt sei $\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+r}{r} a_\nu$ C_r-summierbar mit der Summe A. Schreibt man (25) in der Form

(27) $$r\,A_n^{(r)} = (n+2\,r+1)\,T_n^{(r)} - (n+1)\,T_{n+1}^{(r)}$$

und setzt

$$T_n^{(r)} = (n+1)(n+2)\cdots(n+2\,r)\,T'_n,$$

so erhält man

(28) $$T'_n - T'_{n+1} = \frac{r\,A_n^{(r)}}{(n+1)(n+2)\cdots(n+2\,r+1)}.$$

Wegen $t_n = o(1)$ ist für $r \geqq 1$

$$T_n = \sum_{\nu=0}^{n} o(\nu^{r-1}) = o(n^r),\ T_n^{(r)} = o(n^{2r}),\ T'_n = o(1).$$

Daher ergibt sich aus (28)

$$T'_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{r A_\nu^{(r)}}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+2r+1)}$$

und wegen $\dfrac{A_n^{(r)}}{\binom{n+r}{r}} = A + o(1)$ weiter

$$T'_n = \frac{1}{r!\,n^r} A + o(n^{-r}).$$

Also ist auch

$$\frac{T_n^{(r)}}{\binom{n+r}{r}} = r!\,(n+r+1)(n+r+2)\cdots(n+2r)\,T'_n = A + o(1).$$

Die Folge (T_n) ist somit C_r-limitierbar zum Werte A. Aus (26) folgt aber dann, dass sie schon C_{r-1}-limitierbar ist.

Analog beweist man Satz II für das Höldersche Verfahren. Ausgehend von (24) erhält man unter Benutzung der Mittel $\overline{M}_n^{(k)}$

$$r A_n = (n+r+1)\,T_n - (n+1)\,T_{n+1},$$

$$r \overline{M}_n^{(1)}(A_n) = (r+1)\overline{M}_n^{(1)}(T_n) - T_{n+1} = (n+r+2)\,\overline{M}_n^{(1)}(T_n) - (n+2)\,\overline{M}_{n+1}^{(1)}(T_{n+1}),$$

. . . .

$$(25') \qquad r \overline{M}_n^{(r)}(A_n) = (r+1)\,\overline{M}_n^{(r)}(T_n) - \overline{M}_{n+1}^{(r-1)}(T_{n+1}) + o(1),$$

$$(27') \qquad r \overline{M}_n^{(r)}(A_n) = (n+2r+1)\,\overline{M}_n^{(r)}(T_n) - (n+r+1)\,\overline{M}_{n+1}^{(r)}(T_{n+1}) + o(1)\,[1],$$

woraus ganz ähnlich wie beim C-Verfahren Satz II leicht gefolgert werden kann.

Der Satz kann auch als Bedingung für die C_r-(H_r-) Summierbarkeit einer Reihe formuliert werden:[2]

---

[1] Das in (25′) bzw. (27′) für $r > 1$ auftretende, von $M_0^{(1)}(T_0), M_0^{(2)}(T_0), \ldots, M_0^{(r-1)}(T_0)$ herrührende Zusatzglied $o(1)$ ist, da es für $n \to \infty$ gegen 0 strebt, unwesentlich.

[2] Ähnliche Bedingungen finden sich auch, wie ich nachträglich bemerkte, in K. KNOPP, *Zur Theorie der C- und H-Summierbarkeit*, Math. Ztschr. 19 (1924) S. 99—113; G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, *Solution of the Cesàro summability problem*, Math. Ztschr. 19 (1924), S. 65—98, insbes. S. 67—77. In der letzten Arbeit findet sich auch eine entsprechende Wendung zum Äquivalenzsatze hin. Ferner entnehme ich einer freundlichen Mitteilung von A. F. ANDERSEN (Kopenhagen), dass weitere ähnliche Untersuchungen von ihm und G. H. HARDY im Druck sind (Proc. London Math. Soc.).

Satz II*. *Die Reihe* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ *ist genau dann* C_r-(H_r-)*summierbar, wenn die r-fach iterierte Reihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\nu_1=\nu}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_r=\nu_{r-1}}^{\infty} a_{\nu_r} = A \qquad \left(a_n = \frac{b_n}{\binom{n+r}{r}} \right)$$

konvergiert. Es ist dann

$$C_r\text{-}\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu = H_r\text{-}\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu = A. \tag{29}$$

Hierin ist der Knopp-Schneesche Äquivalenzsatz enthalten.

Anstelle von $\binom{n+r}{r}$ kann, wie leicht zu sehen ist, auch $\binom{n+k}{r}$ mit beliebigem ganzem k treten, sogar jede rationale Funktion $R(n)$, für die $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{R(n)}{n^r} = h$ ($h \neq 0$ endlich) gilt, wobei vielleicht endlich viele Glieder der Reihe wegfallen bzw. wegzulassen sind. (29) besteht aber dann nicht mehr.

Über Satz II* hinaus gilt allgemeiner[1]:

Die beiden Summen

$$C_r\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r-\varrho}{r-\varrho} a_n \quad \text{und} \quad C_\varrho\text{-}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(C_\varrho\text{-}\sum_{\nu_1=\nu}^{\infty}\left(\cdots \left(C_\varrho\text{-}\sum_{\nu_{r-\varrho}=\nu_{r-\varrho-1}}^{\infty} a_{\nu_{r-\varrho}} \right) \cdots \right)\right) \quad (r \geqq \varrho \geqq 0) \tag{30}$$

existieren immer gleichzeitig und haben denselben Wert.

Der Beweis ergibt sich bei festem $\varrho \geqq 0$ durch Induktion von $r-1 \geqq \varrho$ auf r mit einigen Abänderungen, auf die ich hier nicht eingehen will, ähnlich wie bei Satz II.

Indem man hier $r \geqq 0$ festhält und ϱ zwischen r und 0 variieren lässt, erhält man

Satz II.** *Die Existenz einer der Summen*

$$C_\varrho\text{-}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(C_\varrho\text{-}\sum_{\nu_1=\nu}^{\infty}\left(\cdots \left(C_\varrho\text{-}\sum_{\nu_{r-\varrho}=\nu_{r-\varrho-1}}^{\infty} a^{(\varrho)}_{\nu_{r-\varrho}} \right) \cdots \right)\right) \tag{31}$$

---

[1] Zu dieser Verallgemeinerung wurde ich durch Vergleich meines Satzes II* mit den Ergebnissen der Herren G. H. Hardy und J. E. Littlewood (vgl. S. 149, Fussnote 2) veranlasst.

mit festem $r \geqq 0$, $r \geqq \varrho \geqq 0$, $a_n^{(\varrho)} = \dfrac{b_n}{\binom{n+r-\varrho}{r-\varrho}}$ *zieht die aller* r *übrigen nach sich, und alle diese Summen haben denselben Wert.*

In diesem Satz ist Satz II*, der von $\varrho = 0$ auf $\varrho = r$ und umgekehrt schliesst, als Spezialfall enthalten. Der Schluss von $\varrho = r$ auf $\varrho = r - 1$ bzw. von $\varrho = r - 1$ auf $\varrho = r$ ergibt die in der obigen Fussnote 1 (S. 149) erwähnte Bedingung von Hardy und Littlewood.

Als einfaches Beispiel sei die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+r-1}{r-1}$, $r \geqq 1$, betrachtet. Aus Satz II** folgt ohne weiteres

$$(32) \qquad C_r\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+r-1}{r-1} = C_1\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} \left(C_1\text{-}\sum_{n_1=n}^{\infty} \left(\cdots \left(C_1\text{-}\sum_{n_{r-1}=n_{r-2}}^{\infty} (-1)^{n_{r-1}} \right) \cdots \right) \right) = \frac{1}{2^r}.$$

Auf Grund des Satzes II können wir jetzt Satz I auch etwa so formulieren:

Satz I*. *Die Differenzengleichung* (1) *hat unter den Voraussetzungen von Satz I genau dann Lösungen mit dem Verhalten* (3), *wenn für jede r-fache Wurzel* α *der charakteristischen Gleichung* (4) *mit* $|\alpha| = 1$ *die Reihe* $\sum_{s=0}^{\infty} \binom{s+r-1}{r-1} \psi(s) \beta^s$ C_{r-1}- $(H_{r-1}$-) *summierbar ist, wobei* $\psi(s) = \varphi(s) - b$ *und* $\beta = \frac{1}{\alpha}$ *gesetzt ist.*

Die bisherigen Ergebnisse gewinnen an Anschaulichkeit, wenn wir sie in Zusammenhang mit gewissen Potenzreihenentwicklungen bringen.

Setzt man abkürzend — wir verwenden wieder die alten Bezeichnungen —

$$u(s) = u_s, \quad \varphi(s) = \varphi_s,$$

so geht die Differenzengleichung (1) über in

$$(1') \qquad \sum_{i=0}^{n} p_i u_{s+i} = \varphi_s;$$

sie kann bekanntlich in dieser Form als Rekursionsformel für die Koeffizienten einer Potenzreihe[1]

[1] Die Potenzreihen haben zunächst nur formale Bedeutung; sie konvergieren aber unter den obigen Bedingungen sicher in einem genügend kleinen Kreise um den Nullpunkt.

$$U(z) = \frac{Q(z) + z^n \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s z^s}{P(z)} = \sum_{s=0}^{\infty} u_s z^s \tag{33}$$

aufgefasst werden, wobei $Q(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} q_\nu z^\nu$ ein beliebiges Polynom $(n-1)$-ten Grades und

$$P(z) = \sum_{i=0}^{n} p_i z^{n-i} = (1 - \alpha_1 z)(1 - \alpha_2 z) \cdots (1 - \alpha_n z)$$

ist; $P(z)$ hat also die Kehrwerte der Wurzeln α_ν von (4) zu Nullstellen. Die Koeffizientenfolge (u_s) einer jeden derartigen Potenzreihe $U(z)$ ist eine Lösung von (1) mit

$$u(0) = u_0 = q_0, \quad u(1) = q_1 - p_{n-1} u_0 = q_1 - p_{n-1} q_0, \ldots, u(n-1) = q_{n-1} - \sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu u_{\nu-1},$$

und nach diesen Gleichungen kann man $Q(z)$ immer so wählen, dass die Anfangswerte $u(0)$, $u(1), \ldots, u(n-1)$ beliebig vorgegebene Werte annehmen. Es lassen sich also auch umgekehrt alle Lösungen von (1) als Koeffizientenfolgen derartiger Potenzreihen $U(z)$ gewinnen.

Insbesondere erhält man alle Lösungen der homogenen Gleichung (16) als Koeffizientenfolgen (w_s) von Potenzreihenentwicklungen

$$W(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} = \sum_{s=0}^{\infty} w_s z^s. \tag{34}$$

Durch Partialbruchzerlegung findet man daraus unter der Voraussetzung $p_0 \neq 0$ z. B. leicht, dass

$$\alpha_1^s, s\,\alpha_1^s, \ldots, s^{r_1-1} \alpha_1^s, \alpha_2^s, \ldots, s^{r_2-1} \alpha_2^s, \ldots, s^{r_k-1} \alpha_k^s \tag{35}$$

ein Fundamentalsystem dieser Gleichung ist, wobei unter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ die verschiedenen r_1-, r_2-, $\ldots, r_k$-fachen Wurzeln von (4) zu verstehen sind.

Auch die Bestimmung der Lösungen von (1) mit endlichem Grenzwert kann mittels der Potenzreihen $U(z)$ geschehen und zwar auf einem den obigen Ausführungen ganz parallel laufenden Wege. Der Reduktion auf (10) entspricht die Zerlegung

$$U(z) = V(z) + \frac{b}{P(1)} \cdot \frac{1}{1-z}$$

mit

$$V(z) = \frac{E(z) + z^n \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s z^s}{P(z)} = \sum_{s=0}^{\infty} v_s z^s \quad \left(\psi_s = \varphi_s - b;\ E(z) = Q(z) + \frac{b}{P(1)} \frac{P(1) - P(z)}{1-z} = \sum_{\nu=0}^{n-1} e_\nu z^\nu\right).$$

Mit der Zerfällung von (10) in (11) ist gleichbedeutend die schrittweise Entwicklung von $V(z)$ über

$$V^{(n)}(z) = \frac{E(z) + z^n \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s z^s}{1 - \alpha_n z} = \sum_{s=0}^{\infty} v_s^{(n)} z^s,\ V^{(n-1)}(z) = \frac{V^{(n)}(z)}{1 - \alpha_{n-1} z}, \ldots, V^{(1)}(z) = V(z) = \frac{V^{(2)}(z)}{1 - \alpha_1 z}.$$

Die symbolische Partialbruchzerlegung (13) hat hier gewisse Partialbruchzerlegungen als Gegenstück. Führt man die angedeuteten Schritte im einzelnen durch, so erhält man Satz I etwa in folgender Form:

Satz I.** *Damit unter den Funktionen*

$$U(z) = \frac{Q(z) + z^n \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s z^s}{P(z)} = \frac{b}{P(1)} \cdot \frac{1}{1-z} + \frac{E(z) + z^n \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s z^s}{P(z)} = \sum_{s=0}^{\infty} u_s z^s$$

mit $\varphi_s \to b$, $\psi_s = \varphi_s - b$, $P(z) = \sum_{i=0}^{n} p_i z^{n-i}$, $p_n = 1$, $P(1) \neq 0$, $Q(z)$ *und* $E(z)$ *gleich Polynomen* $(n-1)$*-ten Grades solche vorkommen, deren Koeffizientenfolge* (u_s) *für* $s \to \infty$ *gegen* $\frac{b}{P(1)}$ *strebt, ist notwendig und hinreichend, dass in jeder auf dem Einheitskreise gelegenen* r*-fachen Nullstelle* $\beta = \frac{1}{\alpha}$ *des Nenners* $P(z)$ *die* $(r-1)$*-mal abgeleitete Reihe*

$$(36) \qquad \left(z^n \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s z^s\right)^{(r-1)} = (r-1)! \sum_{s=0}^{\infty} \binom{n+s}{r-1} \psi_s z^{s+n-r+1}$$

oder irgend eine Reihe $\left(z^k \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s z^s\right)^{(r-1)}$ *mit ganzem* k, *z. B.*

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} \psi_s z^s\right)^{(r-1)} = (r-1)! \sum_{s=r-1}^{\infty} \binom{s}{r-1} \psi_s z^{s+1-r}$$

C_{r-1}- (H_{r-1}-) *summierbar ist. (Speziell genügt also Konvergenz.) Sind diese Bedingungen erfüllt, dann streben die Koeffizientenfolgen* (u_s) *genau derjenigen Funktionen* $U(z)$ *gegen* $\frac{b}{P(1)}$, *deren zugehöriges Anfangspolynom* $Q(z)$ *folgenden Bedingungen genügt:*

1. *In jeder* r*-fachen Nullstelle* β *von* $P(z)$, *die im Einheitskreise liegt, ist, wenn noch* $z^n \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s z^s = \Phi(z)$ *gesetzt wird,*

$$Q(\beta) + \Phi(\beta) = 0,\ Q'(\beta) + \Phi'(\beta) = 0, \ldots, Q^{(r-1)}(\beta) + \Phi^{(r-1)}(\beta) = 0.$$

(*Dadurch werden die Pole weggeschaft.*)

2. *In jeder* r*-fachen Nullstelle* β *auf dem Einheitskreis ist*

$$Q(\beta) + \lim_{z \to \beta} \Phi(z) = 0,\ Q'(\beta) + \lim_{z \to \beta} \Phi'(z) = 0, \ldots, Q^{(r-1)}(\beta) + \lim_{z \to \beta} \Phi^{(r-1)}(z) = 0.$$

Die Grenzwerte sind für radiale Annäherung $z \to \beta$ *aus dem Innern des Einheitskreises zu bilden; ihre Existenz folgt aus der* C_{r-1}*-Summierbarkeit der Reihe* (36) *für* $z = \beta$ (*Summierbarkeit im Abelschen Sinne*).

Im Anschluss hieran sollen noch einige Beispiele gegeben werden:

1. Die Differenzengleichung

$$u(s+1) + u(s) = \frac{(-1)^{s+1}}{s+1} \qquad (\alpha = -1;\ \varphi(s) \to 0)$$

hat keine nullstrebige Lösung, da $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s+1}$ nicht konvergiert.

2. Von den beiden Gleichungen

$$(E+1)\,u(s) = u(s+1) + u(s) = \frac{(-1)^s}{(s+1)(s+2)},$$

$$(E+1)^2 u(s) = u(s+2) + 2\,u(s+1) + u(s) = \frac{(-1)^s}{(s+1)(s+2)}$$

hat die erste genau die *eine* nullstrebige Lösung

$$u(s) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-1)^{\sigma} \varphi(s+\sigma) = \frac{(-1)^s}{s+1};$$

die zweite dagegen hat keine derartige Lösung, da die Reihe $\left(z^2 \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s z^s\right)' = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s+1} z^{s+1}$ für $z = -1$ nicht C_1-summierbar ist.

3. Die Differenzengleichung

$$(E+1)^r u(s) = u(s+r) + \binom{r}{1} u(s+r-1) + \cdots + u(s) = \frac{1}{s+1} \qquad (\alpha = -1; \varphi(s) \to 0)$$

hat für jedes ganzzahlige $r > 0$ genau eine nullstrebige Lösung; denn die $(r-1)$-mal abgeleitete Reihe

$$\left(z^{r-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s+1} z^s\right)^{(r-1)} = (r-1)! \sum_{s=0}^{\infty} \binom{s+r-1}{r-1} \frac{1}{s+1} z^s$$

ist nach (32) und [3] C_{r-1}-summierbar für $z = -1$, und daraus folgt, dass die Reihe $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s+1}$ beliebig oft iteriert werden kann. Für die Gleichung

$$(E+1)^2 u(s) = \frac{1}{s+2}$$

(dass $\frac{1}{s+2}$ an die Stelle von $\frac{1}{s+1}$ tritt, ist unwesentlich) erhält man z. B. diese Lösung als Koeffizientenfolge der Potenzreihenentwicklung von

$$U(z) = \frac{Q(z) + z^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{s+2}}{(1+z)^2} = \frac{q_0 + q_1 z - (\log(1-z) + z)}{(1+z)^2},$$

wo $Q(z) = q_0 + q_1 z$ so gewählt ist, dass

$$Q(-1) + \lim_{z \to -1} \Phi(z) = q_0 - q_1 - \log 2 + 1 = 0,$$

$$Q'(-1) + \lim_{z \to -1} \Phi'(z) = q_1 + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

wird. Daraus findet man

$$q_1 = \frac{1}{2},\ q_0 = \log 2 - \frac{1}{2},$$

$$Q(z) = \log 2 - \frac{1}{2} + \frac{z}{2}\cdot$$

§ 3. Ausdehnung der Ergebnisse auf beliebig reelle oder komplexe Veränderliche.

Satz I gestattet Erweiterungen auf Fälle, in denen s nicht auf ganzzahlige Werte beschränkt ist.

1. Es sei s beliebig reell. Zur Unterscheidung schreiben wir x für s, also für (1)

$$(1^*)\qquad \sum_{i=0}^{n} p_i\, u(x+i) = \varphi(x) \qquad (p_n = 1),$$

wobei $\varphi(x)$ etwa für $x \geqq 0$ definiert sein möge.

Die Differenzengleichung (1*) verknüpft die Funktionswerte auf jeder Restklasse (x_0+s) mod 1, d. h. in den Punkten $x_0, x_0+1, \ldots, x_0+s, \ldots (0 \leqq x_0 < 1)$; andere Vorschriften enthält sie nicht. Man bekommt daher alle »Lösungen» $u(x)$ von (1*), indem man (1) auf jeder Restklasse (x_0+s) löst, je eine beliebige Lösung $u(x_0+s)$ herausgreift und diese für die verschiedenen x_0 ausgewählten Lösungen zu einer für $x \geqq 0$ überall definierten Funktion $u(x)$ zusammenfasst; das ist gleichbedeutend mit beliebiger Vorgabe der Funktionswerte im Intervall $0 \leqq x < n$. Von den so erhaltenen Lösungen sagt Satz I auf allen den Restklassen (x_0+s) etwas aus, auf denen $\varphi(x_0+s)$ für $s \to \infty$ gegen endliche Grenzwerte $b(x_0)$ strebt.

Wir betrachten hier nur den Fall, dass $\varphi(x)$ auf *allen* Restklassen derartiges Verhalten zeigt. Dann gibt es nach Satz I, wofern keine Wurzel der charakteristischen Gleichung (4) auf dem Einheitskreise liegt, immer auch Lösungen $u(x)$ von (1*), die auf jeder Restklasse (x_0+s) für $s \to \infty$ gegen $\dfrac{b(x_0)}{\sum\limits_{i=0}^{n} p_i}$ streben.

Es ergibt sich sogar weiter aus (6), (7) und (8), dass, wenn $\varphi(x)$ auf *allen Restklassen gleichmässig* gegen den jeweiligen Grenzwert konvergiert, also »asymptotisch periodisch mit der Periode 1» ist[1], auch asymptotisch periodische Lösungen $u(x)$ von (1*) existieren.

[1] Dass das auch bei stetigem $\varphi(x)$ nicht immer der Fall ist, zeigt z. B. $\varphi(x) = (\sin^2 \pi x)^x$.

Liegen aber die Wurzeln α_ν von (4) zum Teil auf dem Einheitskreise, so sind auf jeder Restklasse (x_0+s) noch die Bedingungen (12) zu berücksichtigen. Z. B. hat die Differenzengleichung

$$u(x+1)+u(x)=\frac{(\sin^2\pi x)^x \sin\pi x}{x+1} \qquad (x\geqq 0)$$

auf allen Restklassen $x\equiv x_0\not\equiv\frac{1}{2} \pmod 1$ genau eine nullstrebige Lösung, aber keine auf der Restklasse $x\equiv\frac{1}{2} \pmod 1$; es gibt keine auf allen Restklassen nullstrebige Lösung $u(x)$.

Von besonderem Interesse ist die Frage, ob es unter den derart durch ihr asymptotisches Verhalten ausgezeichneten Lösungen solche gibt, die besonderes analytisches Verhalten zeigen, vorausgesetzt, dass sich $\varphi(x)$ entsprechend verhält.

Es seien hier nur Andeutungen gemacht, zunächst für die Differenzengleichung erster Ordnung

$$(5^*) \qquad u(x+1)-\alpha\, u(x)=\varphi(x)$$

mit stetigem (differenzierbarem) $\varphi(x)$.

Bei $|\alpha|<1$ erhält man nach (7) bei willkürlicher stetiger Vorgabe von $u(x_0)$ für $0\leqq x_0<1$ Lösungen $u(x)$ von (5*), die in allen Punkten $x\not\equiv 0 \pmod 1$ stetig sind, $\varphi(x)$ stetig vorausgesetzt. Sie sind sogar überall stetig, wenn man bei der Vorgabe noch die Bedingung

$$\lim_{x_0\to 1-0} u(x_0)=u(1)=\varphi(0)+\alpha\, u(0)$$

erfüllt. Ebenso konstruiert man bei differenzierbarem $\varphi(x)$ differenzierbare Lösungen von (5*).

Ist $|\alpha|<1$, so ist nach (8)

$$(8^*) \qquad u(x)=-\frac{1}{\alpha}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\frac{\varphi(x+\sigma)}{\alpha^\sigma}$$

die einzige Lösung von (5*), die auf allen Restklassen (x_0+s) gegen $\frac{b(x_0)}{1-\alpha}$ strebt. Sie ist bei stetigem $\varphi(x)$ sicher auch eine stetige Funktion, sobald die Reihe in (8*) in der Umgebung eines jeden x gleichmässig konvergiert, also z. B., wenn

$\varphi(x)$ für $x \geqq 0$ beschränkt ist. Ist dagegen $\varphi(x)$ nicht beschränkt, so kann $u(x)$ unstetig sein, wie das Beispiel

$$u(x+1) - e\,u(x) = \varphi(x)$$

mit

$$\varphi(x) = \varphi(x_0 + s) = x_0(1 - x_0)\,e^{-s^2 x_0^2 + 2s} \qquad (x \equiv x_0 \,(\mathrm{mod}\ 1), 0 \leqq x_0 < 1)$$

zeigt. Hier ist $\varphi(x)$ stetig und auf allen Restklassen $(x_0 + s)$ nullstrebig. Die Lösung

$$u(x) = u(x_0 + s) = -e^s \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{\varphi(x_0 + s + \sigma)}{e^{s+\sigma+1}} = -x_0(1 - x_0)\,e^{s-1} \sum_{\sigma=0}^{\infty} e^{-(s+\sigma)^2 x_0^2 + s + \sigma}$$

ist aber für $x = 0, 1, 2, \ldots$ nach rechts unstetig.

Ebenso findet man aus (8*), dass, wenn $\varphi(x)$ differenzierbar ist, auch $u(x)$ sicher dann differenzierbar ist, wenn etwa $\sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{\varphi'(x+\sigma)}{\alpha^\sigma}$ in der Umgebung eines jeden x gleichmässig konvergiert. Dass nicht ohne weiteres aus der Differenzierbarkeit von $\varphi(x)$ die von $u(x)$ folgt, ersieht man leicht aus dem Beispiel

$$u(x+1) - 2\,u(x) = 2 \cdot 2^{-x} \cos(\pi a^x),$$

$$u(x) = -2^{-x} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi a^\sigma a^x)}{4^\sigma}.$$

Hier ist $u(x)$ für genügend grosses ungerades a nirgends differenzierbar (Weierstrass' Beispiel einer stetigen, nirgends differenzierbaren Funktion).

Der Fall $|\alpha| = 1$ lässt sich ähnlich behandeln, wobei nach (9) noch das Verhalten der Grenzfunktion $b(x_0)$ $(0 \leqq x_0 < 1)$ zu beachten ist.

Die allgemeine Gleichung kann man wieder in ein System von Gleichungen erster Ordnung spalten (ohne vorher auf (10) zu reduzieren, was ja nur zur bequemeren Gewinnung der Bedingungen (12) geschah). Es ergibt sich so unter anderem:

Gilt für alle Wurzeln von (4) $|\alpha_\nu| \neq 1$ *und strebt die für* $x \geqq 0$ *stetige und beschränkte Funktion* $\varphi(x)$ *auf allen Restklassen* $(x_0 + s)$ *für* $s \to \infty$ *gegen endliche Grenzwerte* $b(x_0)$, *so gibt es auch stetige Lösungen* $u(x)$ *von* (1*) *mit dem Verhalten*

$$\lim_{s \to \infty} u(x_0 + s) = \frac{b(x_0)}{\sum\limits_{i=0}^{n} p_i}.$$

2. Weiter sei in der Differenzengleichung (1*) x beliebig komplex, und $\varphi(x)$ möge etwa in einem nach rechts offenen Halbstreifen parallel der reellen Achse definiert sein. Man kann dann die eben für reelles x angestellten Betrachtungen zum grossen Teil übertragen.[1]

Man erhält so den

Satz III. *Liegen alle Wurzeln von* (4) *ausserhalb des Einheitskreises und strebt $\varphi(x)$ auf jeder Restklasse $(x_0 + s)$ eines nach rechts offenen Halbstreifens für $s \to \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert $b(x_0)$, so gibt es genau eine Lösung $u(x)$ von* (1*) *mit entsprechendem asymptotischen Verhalten. Ist $\varphi(x)$ im ganzen Halbstreifen regulär und beschränkt, so ist auch $u(x)$ regulär und beschränkt.*

Der Satz gestattet Ergänzungen für Wurzeln auf dem Einheitskreise.

Wir wollen einige Anwendungen von ihm machen:

a.) Zeigt $\varphi(x)$ in einem nach rechts offenen Halbstreifen das asymptotische Verhalten $\overline{\lim\limits_{s \to \infty}} \sqrt[s]{|\varphi(x+s)|} = l(x) < q$, wobei $q\,(\neq 0)$ das Minimum der Beträge der — irgendwie gelegenen — Wurzeln von (4) ist, so gilt auch für genau eine Lösung $u(x)$ von (1*) $\overline{\lim\limits_{s \to \infty}} \sqrt[s]{|u(x+s)|} \leqq l(x) < q$, und $u(x)$ ist sicher regulär, wenn 1.) $\varphi(x)$ regulär ist, 2.) $l(x) \leqq l < q$ für alle x gilt und 3.) $\left|\dfrac{\varphi(x)}{l_1^{\,x}}\right|$ für irgend ein l_1 zwischen l und q im ganzen Halbstreifen beschränkt bleibt.[2]

Die Substitution $u(x) = c^x v(x)$ führt nämlich (1*) über in die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} p_i c^{-n+i} v(x+i) = \varphi(x) c^{-(x+n)}, \tag{39}$$

[1] Die Konstruktion regulärer Lösungen von (5) bei regulärem $\varphi(x)$ und $|\alpha| < 1$ durch geeignete Vorgabe der Werte etwa für $0 \leqq \Re(x) < 1$ — entsprechend der obigen Konstruktion stetiger Lösungen — stösst auf Schwierigkeiten und ist mir bis jetzt nur unter der Zusatzvoraussetzung gelungen, dass $\varphi(x)$ nach links in den ganzen Streifen fortsetzbar ist und der Bedingung $\overline{\lim\limits_{s \to \infty}} \sqrt[s]{|\varphi(x-s)|} < \frac{1}{\alpha}$ genügt, was ungefähr dem in N. E. Nörlund, *Differenzenrechnung*, Berlin 1924, S. 402 behandelten Falle entspricht.

[2] Vgl. N. E. Nörlund, *Differenzenrechnung*, S. 401—402.

deren charakteristische Gleichung die Wurzeln $\frac{\alpha_\nu}{c}$ hat. Für $l(x_0) < c < q$ liegen diese Wurzeln alle ausserhalb des Einheitskreises und $\varphi(x)\, c^{-(x+n)}$ strebt auf der Restklasse (x_0+s) gegen Null, so dass (39) auf (x_0+s) genau eine nullstrebige Lösung $v(x_0+s)$ und (1*) bzw. (1) also genau eine Lösung $u(x_0+s)$ mit $\overline{\lim_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|u(x_0+s)|} \leqq c$ hat. Da c beliebig nahe an $l(x_0)$ liegen darf, gibt es daher auf (x_0+s) genau eine Lösung $u(x_0+s)$ mit $\overline{\lim_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|u(x_0+s)|} \leqq l(x_0)$ (genauer natürlich $= l(x_0)$).

Indem man diesen Schluss auf alle Restklassen (x_0+s) anwendet und die so erhaltenen Funktionen $u(x_0+s)$ zu einer Lösung $u(x)$ von (1*) zusammenschliesst, erhält man den ersten Teil der obigen Behauptung.

Sind weiter bei regulärem $\varphi(x)$ noch die Bedingungen 2.) und 3.) erfüllt, so ergibt sich die Regularität von $u(x)$, indem man c der Bedingung $l_1 \leqq c < q$ entsprechend wählt und den Satz III anwendet.

b.) Wir betrachten die Differenzengleichung

$$u(x+1) - x\,u(x) = \varphi(x), \tag{40}$$

wo $\varphi(x)$ in einem Halbstreifen $\Re x \geqq 1, \tau_1 \leqq \Im x \leqq \tau_2$ der Bedingung

$$|\varphi(x)| < C\left|\frac{\Gamma(x)}{x}\right|$$

mit konstantem C genügt.[1]

Setzt man $u(x) = v(x)\,\Gamma(x)$, so geht (40) über in

$$v(x+1) - v(x) = \frac{\varphi(x)}{x\,\Gamma(x)}.$$

Diese Gleichung hat die einzige nullstrebige Lösung

$$v(x) = -\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\varphi(x+s)}{\Gamma(x+s+1)} = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

(dass der Fall $\alpha = 1$ vorliegt, ist hier unwesentlich) und ist im ganzen Halbstreifen regulär, wenn $\varphi(x)$ regulär ist. (40) hat also genau eine Lösung mit der Wachstumsbeschränkung

---

[1] Vgl. N. E. Nörlund, *Differenzenrechnung*, S. 409.

$$|u(x)| < C_1 \left| \frac{\Gamma(x)}{x} \right|,$$

nämlich

$$u(x) = -\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\varphi(x+s)\,\Gamma(x)}{\Gamma(x+s+1)} = -\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\varphi(x+s)}{x(x+1)\cdots(x+s)};$$

bei regulärem $\varphi(x)$ ist sie regulär.

Ist $\varphi(x)$ darüber hinaus eine ganze transzendente Funktion, so kann man diese Lösung $u(x)$ zunächst zu einer meromorphen Funktion ergänzen mit Polen erster Ordnung in $x = 0, -1, -2, \ldots$. Aus ihr gewinnen wir dann weiter leicht auch eine ganze transzendente Lösung von (40) durch den Ansatz $u_1(x) = u(x) - c\,\Gamma(x)$. Alle Funktionen $u_1(x)$ sind Lösungen von (40). Wählt man c so, dass der Pol von $u_1(x)$ im Nullpunkt verschwindet, so wird $u_1(x)$ überall regulär.

3. Die Betrachtungen lassen sich auch auf den Fall ausdehnen, dass die Koeffizienten p_i von (1*) zwar auf jeder Restklasse eines Halbstreifens konstant sind, aber auf verschiedenen Restklassen (x_0+s) verschiedene Werte $p_i(x_0)$ haben. Besonders einfach liegen die Dinge, wenn die Koeffizienten $p_i(x)$ in einem derartigen Halbstreifen reguläre periodische Funktionen mit der Periode 1 sind und die Wurzeln $\alpha_\nu(x_0)$ immer ausserhalb des Einheitskreises liegen. Strebt dann $\varphi(x)$ auf jeder Restklasse (x_0+s) gegen einen endlichen Wert $b(x_0)$, dann gibt es genau eine Lösung $u(x)$ von (1*), die auf (x_0+s) gegen $\dfrac{b(x_0)}{\sum_{i=0}^{n} p_i(x_0)}$ konvergiert, und $u(x)$ ist sicher regulär, wenn $\varphi(x)$ regulär und beschränkt ist.

§ 4. **Einige Hilfssätze.**

Zu späterer Anwendung seien noch einige weitere Ergänzungen des Satzes I angefügt.

Wir betrachten zugleich mit der Differenzengleichung

$$(5) \qquad u(s+1) - \alpha\, u(s) = \varphi(s)$$

die Gleichung

$$(5') \qquad t(s+1) - |\alpha|\, t(s) = \mu(s) \qquad (\mu(s) \geqq |\varphi(s)|).$$

Entsprechend (7) ergibt sich für die Lösungen von (5) und (5')

$$u(s) = \varphi(s-1) + \alpha\,\varphi(s-2) + \cdots + \alpha^{s-1}\,\varphi(0) + \alpha^s u(0),$$

$$t(s) = \mu(s-1) + |\alpha|\,\mu(s-2) + \cdots + |\alpha|^{s-1}\,\mu(0) + |\alpha|^s t(0).$$

Zu jeder Lösung $u(s)$ von (5) gibt es Lösungen $t(s)$ von (5') mit

$$|u(s)| \leqq |t(s)| = t(s);$$

man braucht dazu nur $t(0) \geqq |u(0)|$ zu wählen. Insbesondere besteht diese Beziehung also zwischen den Lösungen $u(s)$ und $t(s)$ mit den Anfangswerten $u(0) = t(0) = 0$.

Hat (5') eine Lösung von der Form

$$t(s) = -\frac{1}{|\alpha|}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\frac{\mu(s+\sigma)}{|\alpha|^\sigma},$$

so hat (5) eine entsprechende Lösung

$$u(s) = -\frac{1}{\alpha}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\frac{\varphi(s+\sigma)}{\alpha^\sigma},$$

und für diese beiden Lösungen gilt gleichfalls

$$|u(s)| \leqq |t(s)| = -t(s).$$

Die Lösungen der Gleichung

$$(E-\alpha_1)(E-\alpha_2)\cdots(E-\alpha_n)\,u(s) = \varphi(s) \tag{1}$$

kann man abschätzen, indem man sie etwa mit den Lösungen von

$$(E-|\alpha_1|)(E-|\alpha_2|)\cdots(E-|\alpha_n|)\,t(s) = \mu(s) \qquad (\mu(s) \geqq |\varphi(s)|) \tag{1'}$$

vergleicht.

Es sei z. B. für alle s

$$|\varphi(s)| \leqq C \qquad (C \text{ konstant}). \tag{41}$$

Man kann dann in (5') $\mu(s) = C$ wählen und findet unter Ausschluss des Falles $|\alpha| = 1$:

Ist $|\alpha| < 1$, so gilt für alle Lösungen von (5)

$$|u(s)| \leqq C(1+|\alpha|+|\alpha|^2+\cdots+|\alpha|^{s-1})+|\alpha|^s|u(0)|<\frac{C}{1-|\alpha|}+|\alpha|^s|u(0)|,$$

insbesondere für die Lösung mit $u(0)=0$

$$|u(s)| \leqq \frac{C}{1-|\alpha|}.$$

Ist $|\alpha|>1$, so hat (5) die beschränkte Lösung $u(s)=-\frac{1}{\alpha}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\frac{\varphi(s+\sigma)}{\alpha^\sigma}$ mit

$$|u(s)| \leqq \frac{C}{|\alpha|}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\frac{1}{|\alpha|^\sigma}=\frac{C}{|\alpha|-1}.$$

Wie auf S. 137 erkennt man, dass dies die einzige beschränkte Lösung ist.

Die Gleichung (1) zerfällen wir in ein System

$$u_1(s+1)-\alpha_1 u_1(s)=u_2(s),\, u_2(s+1)-\alpha_2 u_2(s)=u_3(s),\ldots, u_n(s+1)-\alpha_n u_n(s)=\varphi(s),$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d\, (d \leqq n)$ innerhalb und $\alpha_{d+1}, \alpha_{d+2}, \ldots, \alpha_n$ ausserhalb des Einheitskreises liegen mögen. Auf dieses System wenden wir die eben erhaltenen Ergebnisse an, wobei wir noch berücksichtigen, dass den Werten $u_d(0)=u_{d-1}(0)=\cdots=u_1(0)=0$ die Anfangswerte $u(0)=u(1)=\cdots=u(d-1)=0$ entsprechen. So ergibt sich

Hilfssatz 1. *Es seien $d\,(\leqq n)$ Wurzeln von (4) innerhalb des Einheitskreises gelegen, die anderen ausserhalb. Weiter sei in* (1)

$$|\varphi(s)| \leqq C \qquad (C \text{ konstant}). \tag{41}$$

Dann gibt es zu d beliebigen Anfangswerten $u(0), u(1), \ldots, u(d-1)$ genau eine[1] *beschränkte Lösung von* (1). *Für die beschränkte Lösung mit den Anfangswerten $u(0)=u(1)=\cdots=u(d-1)=0$ gilt insbesondere*

$$|u(s)| \leqq M_1 C \qquad \left(M_1=\prod_{\nu=1}^{n}\left|\frac{1}{1-|\alpha_\nu|}\right|\right). \tag{42}$$

[1] Wenn $d=0$ ist, gibt es wieder überhaupt nur eine einzige beschränkte Lösung. Entsprechendes gilt im folgenden immer in den Fällen $d=0, d+g=0, d_q=0, d_q^*=0$ (die Bedeutung von g, d_q, d_q^* folgt später).

Genügt $\varphi(s)$ *der engeren Voraussetzung* (2), *dann zeigen die beschränkten Lösungen alle das Verhalten* (3) (*vgl. Satz* I).

Hilfssatz 2. *Es sei* l *die grösste Vielfachheit, die bei den auf dem Einheitskreis liegenden Wurzeln* $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{n-e+1}$ $(0 \leqq e \leqq n)$ *vorkommt. Von den übrigen Wurzeln mögen* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$ $(0 \leqq d \leqq n-e)$ *innerhalb des Einheitskreises liegen, die anderen ausserhalb. Weiter strebe in* (1) $\varphi(s) \to 0$ *für* $s \to \infty$, *und die Gleichung*

$$(E-1)^l\, t(s) = \mu(s) \tag{43}$$

habe für ein positives $\mu(s) \geqq |\varphi(s)|$ *eine nullstrebige Lösung* $\tau(s)$.

Dann hat auch (1) *nullstrebige Lösungen, und zwar zu* d *beliebigen Anfangswerten* $u(0), u(1), \ldots, u(d-1)$ *genau eine. Für die nullstrebige Lösung mit* $u(0) = u(1) = \cdots = u(d-1) = 0$ *gilt:*

$$|u(s)| \leqq M_2\, |\eta(s)|, \tag{44}$$

wobei $\eta(s)$ *die nullstrebige Lösung der Gleichung*

$$(E-|\alpha_1|)(E-|\alpha_2|)\cdots(E-|\alpha_{n-e}|)\, t(s) = \tau(s) \tag{45}$$

mit den Anfangswerten $\eta(0) = \eta(1) = \cdots = \eta(d-1) = 0$ *und* M_2 *eine nur von den Koeffizienten von* (1) *abhängige Konstante ist. Liegt keine Wurzel auf dem Einheitskreis, dann wird* (43) *hinfällig.* (1) *hat dann sicher nullstrebige Lösungen und in* (45) *kann man* $\tau(s)$ *durch irgend ein* $\mu(s) \geqq |\varphi(s)|$ *ersetzen.*

Man sieht zunächst, dass unter der Voraussetzung (43) jede Gleichung

$$(E-\alpha)^r\, u(s) = \varphi(s) \qquad (|\alpha| = 1;\ 1 \leqq r \leqq l)$$

genau die nullstrebige Lösung

$$u(s) = \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^r \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{\sigma_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\sigma_{r-1}=0}^{\infty} \frac{\varphi(s+\sigma+\sigma_1+\cdots+\sigma_{r-1})}{\alpha^{\sigma+\sigma_1+\cdots+\sigma_{r-1}}}$$

hat. Für diese gilt

$$u(s) \leqq \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{\sigma_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\sigma_{l-1}=0}^{\infty} \mu(s+\sigma+\sigma_1+\cdots+\sigma_{l-1}) = |\tau(s)|.$$

Wir zerlegen nun

$$(E-\alpha_1)(E-\alpha_2)\cdots(E-\alpha_n)\,u(s)=\varphi(s) \tag{1}$$

in die beiden Gleichungen

$$(E-\alpha_1)(E-\alpha_2)\cdots(E-\alpha_{n-e})\,u^{(1)}(s)=u^{(2)}(s), \tag{a}$$

$$(E-\alpha_{n-e+1})\cdots(E-\alpha_n)\,u^{(2)}(s)=\varphi(s). \tag{b}$$

Die Gleichung (b) lösen wir mit Hilfe der symbolischen Partialbruchzerlegung (13). Wir erhalten für ihre einzige nullstrebige Lösung

$$|u^{(2)}(s)|\leqq M_2\,|\tau(s)|,$$

wo M_2 etwa gleich der Summe der Beträge der in der Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{(z-\alpha_{n-e+1})\cdots(z-\alpha_n)}$ auftretenden Konstanten ist.

Schliesslich vergleichen wir (a) mit

$$(E-|\alpha_1|)(E-|\alpha_2|)\cdots(E-|\alpha_{n-e}|)\,t(s)=M_2\,|\tau(s)|$$

und erhalten so den oben ausgesprochenen Hilfssatz 2. Die Bedingung, dass (43) eine nullstrebige Lösung hat, ist im Einklang mit Satz I* gleichbedeutend damit, dass

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{\sigma_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{\sigma_{l-1}=0}^{\infty}\mu(\sigma+\sigma_1+\cdots+\sigma_{l-1})=\sum_{s=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l-1}\mu(s) \tag{46}$$

konvergiert (wegen $\mu(s)\geqq 0$ darf man die Glieder umordnen). Anstelle dieser Reihe kann man auch die Reihe $\sum\limits_{s=0}^{\infty}s^{l-1}\mu(s)$ betrachten, und es ist

$$|\tau(s)|=O(\bar{\tau}(s))\ \text{mit}\ \bar{\tau}(s)=\sum_{\sigma=s}^{\infty}\sigma^{l-1}\mu(\sigma).\text{[1]}$$

Bemerkenswert ist der Fall, dass $e\geqq 1$ und $d=0$ ist. $|\tau(s)|$ nimmt dann monoton ab, und es gilt in (44)

$$|\eta(s)|\leqq\prod_{\nu=1}^{n-e}\frac{1}{|\alpha_\nu|-1}\,|\tau(s)|,$$

[1] Abgesehen von dem trivialen Fall, dass $\mu(s)$ für alle s von einer Stelle S an verschwindet.

also für die einzige dann vorhandene nullstrebige Lösung von (1) einfach

$$|u(s)| \leqq M_3 |\tau(s)| = O(\tau(s)). \tag{44a}$$

Hilfssatz 2. lässt sich verallgemeinern zu

Hilfssatz 3. *Unter den auf dem Einheitskreis liegenden e Wurzeln* α_n, $\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{n-e+1}$ *seien* $e' (\leqq e)$ *verschiedene; sie seien kurz mit* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{e'}$ *bezeichnet, und* $r_1, r_2, \ldots, r_{e'}$ *seien ihre Vielfachheiten. Weiter habe für ein* h *mit* $0 \leqq h \leqq l$, $l = \underset{\nu=1,2,\ldots,e'}{\mathrm{Max}}\, r_\nu$, *und ein* $\mu(s) \geqq |\varphi(s)|$ *die Gleichung*

$$(E-1)^{l-h}\, t(s) = \mu(s) \tag{47}$$

eine nullstrebige Lösung $\tau(s)$, *d. h.* $\sum_{s=0}^{\infty} s^{l-h-1} \mu(s)$ *konvergiere*[1], *und es sei*

$$g_\nu = \mathrm{Min}\ (h, r_\nu) \text{ und } g = \sum_{\nu=1}^{e'} g_\nu \,.$$

Dann gibt es zu $d+g$ *beliebigen Werten* $u(0), u(1), \ldots, u(d+g-1)$ *genau eine Lösung* $u(s)$ *von* (1) *mit dem Verhalten*

$$u(s) = o(s^h).$$

Für die durch $u(0) = u(1) = \cdots = u(d+g-1) = 0$ *charakterisierte unter diesen Lösungen gilt*

$$|u(s)| \leqq T(s) = (s+1)^h \gamma(s) \qquad (\gamma(s) = o(1)), \tag{48}$$

wo $T(s)$ *nur von den Koeffizienten von* (1) *und von* $\mu(s)$ *abhängt.*

Zum Beweise betrachten wir zunächst die Gleichung

$$(E-\beta)^r\, u(s) = \psi(s) \qquad (r > 0, |\beta| = 1;\ \psi(s) = o(1)). \tag{49}$$

Für ihre Lösungen ergibt sich durch Vergleich mit

$$(E-1)^r\, t(s) = \Psi(s) \qquad (\Psi(s) = o(1)), \tag{49'}$$

wo $\Psi(s)$ irgend eine positive Funktion mit $\Psi(s) \geqq |\psi(s)|$ ist,

$$u(s) = o(s^r).$$

Für die Lösung mit $u(0) = u(1) = \cdots = u(r-1) = 0$ gilt:

[1] Für $h = l$ soll (47) nur bedeuten, das $\lim_{s\to\infty} \mu(s) = 0$ ist.

(50) $$|u(s)| \leqq |t_r(s)|,$$

wo $t_r(s)$ die Lösung von (49′) mit $t_r(0) = \cdots = t_r(r-1) = 0$ ist.

Für die Lösungen der Gleichung

$$(E-\beta_1)^{g_1}(E-\beta_2)^{g_2}\cdots(E-\beta_{e'})^{g_{e'}}\,u(s) = \psi(s) \qquad (g_1+g_2+\cdots+g_{e'}=g)$$

folgt daraus auf Grund der Darstellung

(51) $$u(s) = A_1(E-\beta_1)^{-1}\psi(s) + A_2(E-\beta_1)^{-2}\psi(s) + \cdots + A_g(E-\beta_{e'})^{-r_{e'}}\psi(s)$$

$$u(s) = o\left(\operatorname*{Max}_{\nu=1,2,\ldots,e'} s^{g_\nu}\right) = o(s^h).$$

Insbesondere gilt für die Lösung $u^*(s)$, die man erhält, wenn man in (51) die Funktionen $(E-\beta_1)^{-1}\psi(s), \ldots$ mit möglichst viel verschwindenden Anfangswerten wählt, wegen (50)

(52) $$|u^*(s)| \leqq C\,T'(s) \qquad (T'(s) = o(s^h)).$$

Dabei ist etwa $C = \sum_{\nu=0}^{g} |A_\nu|$ und $T'(s) = |t_1(s)| + |t_2(s)| + \cdots + |t_h(s)|$.

Die Gleichung (1) schreiben wir in der Form

$$(E-\beta_1)^{g_1}\cdots(E-\beta_{e'})^{g_{e'}}(E-\alpha_1)\cdots(E-\alpha_{n-e})(E-\beta_1)^{r_1-g_1}\cdots(E-\beta_{e'})^{r_{e'}-g_{e'}}\,u(s) = \varphi(s)$$

und spalten sie in die beiden Gleichungen

(a) $$(E-\beta_1)^{g_1}\cdots(E-\beta_{e'})^{g_{e'}}\,u^{(1)}(s) = u^{(2)}(s),$$

(b) $$(E-\alpha_1)\cdots(E-\alpha_{n-e})(E-\beta_1)^{r_1-g_1}\cdots(E-\beta_{e'})^{r_{e'}-g_{e'}}\,u^{(2)}(s) = \varphi(s).$$

Hier wählen wir für $u^{(2)}(s)$ die — nach Hilfssatz 2 vorhandene — einzige nullstrebige Lösung von (*b*) mit $u^{(2)}(0) = u^{(2)}(1) = \cdots = u^{(2)}(d-1) = 0$. Sie genügt einer Beziehung

$$|u^{(2)}(s)| \leqq \Psi(s),$$

wo $\Psi(s) = o(1)$ nur von den α_ν und von $\mu(s)$ abhängt. Wir können daher weiter eine Lösung $u^{(1)}(s) = u^*(s)$ von (a) der Bedingung

(52) $$|u^*(s)| \leqq C\,T'(s)$$

entsprechend bestimmen.

Die allgemeine Lösung $u(s)$ von (1) mit dem Verhalten $u(s)=o(s^h)$ bekommt man, indem man zu $u^*(s)$ die allgemeine Lösung $w(s)$ der homogenen Gleichung (16) mit dem Verhalten $w(s)=o(s^h)$ addiert. Diese hat, wie eine einfache Überlegung zeigt, die Gestalt

$$(53)\quad w(s)=c_1\beta_1^s+c_2 s\beta_1^s+\cdots+c_{g_1}s^{g_1-1}\beta_1^s+c_{g_1+1}\beta_2^s+\cdots+c_g s^{g_{e'}-1}\beta_{e'}^s$$

$$+c_{g+1}\alpha_1^s+c_{g+2}s\alpha_1^s+\cdots+c_{g+\varrho_1}s^{\varrho_1-1}\alpha_1^s+\cdots+c_{g+d}s^{\varrho_{d'}-1}\alpha_{d'}{}^s,$$

wobei $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{d'}$ mit $d'\leqq d$ die verschiedenen ϱ_1-, ϱ_2-, $\ldots,\varrho_{d'}$-fachen Wurzeln *im* Einheitskreis sind, die wir vorläufig als von Null verschieden voraussetzen. Da $\beta_1{}^s, s\beta_1{}^s,\ldots,\alpha_1{}^s,\ldots$ linear unabhängig sind, kann man die $d+g$ Konstanten $c_1,c_2,\ldots,c_{d+g}$ eindeutig so bestimmen, dass $u(s)=u^*(s)+w(s)$ die Anfangswerte $u(0)=u(1)=\cdots=u(d+g-1)=0$ hat. Dabei bleiben wegen

$$|u^*(s)|\leqq \operatorname*{Max}_{0\leqq s\leqq d+g-1} C\,T'(s)=C_1\qquad (s=0,1,\ldots,d+g-1)$$

die Beträge dieser c_ν unter einer Schranke $K C_1$, wo K nur von $\beta_1,\beta_2,\ldots,\alpha_1,\ldots$ abhängt. Es gilt daher für die so bestimmte Lösung $u(s)$

$$|u(s)|\leqq C\,T'(s)+K\,C_1(|\beta_1|^s+s|\beta_1|^s+\cdots)\leqq C\,T'(s)+(d+g)\,K\,C_1(s+1)^h$$

$$=T(s)=(s+1)^h\gamma(s)\qquad\qquad (\gamma(s)=o(1)),$$

und $T(s)$ hängt nur von den Koeffizienten von (1) und von $\mu(s)$ ab. Ist aber etwa $\alpha_1=0$, d. h. in (1) $p_0=p_1=\cdots=p_{\varrho_1-1}=0$, dann reduziert sich (1) im wesentlichen auf eine Differenzengleichung $(n-\varrho_1)$-ter Ordnung für die Funktionswerte $u(\varrho_1), u(\varrho_1+1),\ldots,$ die man wie oben behandeln kann. Ausserdem kann man dann von vornherein $u(0)=u(1)=\cdots=u(\varrho_1-1)=0$ annehmen, was ohne Einfluss auf den weiteren Verlauf von $u(s)$ ist.

Durch Substitutionen von der Form $u(s)=q\,v(s)$ kann man die Ausnahmestellung der auf dem Einheitskreis liegenden α_ν beseitigen. So erhält man z. B. aus Hilfssatz 1. den

Hilfssatz 4. *Es gelte in* (1)

$$(41\text{a})\qquad |\varphi(s)|\leqq C q^s$$

mit konstantem $q\neq\alpha_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots,n)$. d_q *sei die Anzahl der* α_ν *mit* $|\alpha_\nu|<q$. *Dann*

gibt es zu beliebigen Werten $u(0), u(1), \ldots, u(d_q - 1)$ *genau eine Lösung* $u(s)$, *für die* $\left|\frac{u(s)}{q^s}\right|$ *beschränkt bleibt. Für die Lösung mit* $u(0) = \cdots = u(d_q - 1) = 0$ *gilt*

$$(42\text{a}) \qquad |u(s)| \leqq M_q C_q^s \qquad \left(M_q = \prod_{\nu=1}^{n} \left|\frac{1}{q - |\alpha_\nu|}\right|\right).$$

Alle diese Hilfssätze gelten natürlich entsprechend auch, wenn man (1) nur auf einem Bereich $s \geqq s_0 \geqq 0$ »löst» (ohne Rücksicht darauf, ob die so für $s \geqq s_0$ sich ergebenden Lösungen nach links bis $s = 0$ fortsetzbar sind, was bei $p_0 = 0$ nicht immer zutrifft). Zur Charakterisierung der Lösungen dienen dann die Anfangswerte $u(s_0), u(s_0 + 1), \ldots$, d. h. man betrachtet z. B. die beschränkte Lösung mit $u(s_0) = u(s_0 + 1) = \cdots = u(s_0 + d - 1) = 0$ usw. Die Konstanten M_1, M_2, M_q bleiben dieselben. $\eta(s)$ in (44) ist zunächst durch die nullstrebige Lösung $\eta^*(s)$ von (45) mit $\eta^*(s_0) = \cdots = \eta^*(s_0 + d - 1) = 0$ zu ersetzen. Man findet für $s \geqq s_0$ aber leicht $|\eta^*(s)| \leqq |\eta(s)|$, sodass man auch $\eta(s)$ beibehalten kann.[1] Entsprechendes gilt für $T(s) = (s+1)^h \gamma(s)$.

Da $\eta(s)$ und $\gamma(s)$ für $s \to \infty$ gegen Null streben, kann man s_0 bei beliebig kleinem positivem ε so gross wählen, dass $|\eta(s)| < \varepsilon$ bzw. $|\gamma(s)| < \varepsilon$ für $s \geqq s_0$ wird.

Die Ergebnisse dieses Paragraphen gelten auch, wenn eine der Wurzeln α_ν gleich 1 ist.

II. Nichthomogene Poincarésche Differenzengleichungen.

§ 1. Anwendung der Methode der sukzessiven Approximationen.

Wir betrachten jetzt die allgemeine Gleichung

$$(54) \qquad \sum_{i=0}^{n} p_i(s)\, u(s+i) = \varphi(s)$$

mit

$$(55) \qquad p_n(s) = 1, \lim_{s \to \infty} p_i(s) = p_i \qquad (p_i \text{ endlich; } i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

die eine *nichthomogene Poincarésche Differenzengleichung* heissen möge.

[1] Man käme aber auch ohne diese letzte Bemerkung aus.

Unter der weiteren Voraussetzung

$$\lim_{s\to\infty} \varphi(s) = b \qquad (b \text{ endlich}) \tag{56}$$

werde untersucht, ob (54) Lösungen hat, die für $s \to \infty$ endlichen Grenzwerten zustreben.

Für alle etwaigen derartigen Lösungen kommt wieder nur

$$\lim_{s\to\infty} u(s) = \frac{b}{\sum_{i=0}^{n} p_i} \tag{57}$$

in Frage, wobei wir voraussetzen, dass $\sum_{i=0}^{n} p_i \neq 0$, also 1 keine Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$\alpha^n + p_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + p_1 \alpha + p_0 = 0 \tag{58}$$

ist.[1]

Weiter nehmen wir an, dass immer

$$p_0(s) \neq 0 \tag{59}$$

ist (hingegen darf $\lim_{s\to\infty} p_0(s) = p_0 = 0$ sein). Auch diese Voraussetzung ist nicht ganz unwesentlich. Beispielsweise kann es, wenn (59) nicht erfüllt ist, vorkommen, dass an irgend einer Stelle s_0 für $s = s_0, s_0+1, \ldots, s_0+n-1$, d. h. in n aufeinanderfolgenden Gleichungen alle Koeffizienten

$$p_0(s) = p_1(s) = \cdots = p_{n-1}(s) = 0$$

sind. Dann haben alle Lösungen von (54) dieselben Werte

$$u(s_0+n) = \varphi(s_0),\ u(s_0+n+1) = \varphi(s_0+1), \ldots, u(s_0+2n-1) = \varphi(s_0+n-1);$$

sie fallen daher von dieser Stelle an zusammen und brauchen natürlich nicht das Verhalten (57) zu zeigen.

[1] Dass im Falle $\sum_{i=0}^{n} p_i = 0$ etwas abweichende Verhältnisse vorliegen, habe ich an einigen Beispielen in einer kürzlich in den Göttinger Nachrichten erschienenen Note gezeigt (*Bemerkungen über nichthomogene lineare Differenzengleichungen,* Gött. Nachr. (math.- phys. Kl.) 1926, S. 192—199).

Wir formen (54) um in

$$\sum_{i=0}^{n} p_i u(s+i) = \varphi(s) + \sum_{i=0}^{n} \delta_i(s) u(s+i) \tag{60}$$

mit

$$\delta_i(s) = p_i - p_i(s), \quad \delta_n(s) = 0, \quad \lim_{s\to\infty} \delta_i(s) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{61}$$

wofür wir noch abkürzend symbolisch

$$L[u(s)] = \varphi(s) + D_s[u(s)] \tag{60 a}$$

schreiben.

Diese Gleichung suchen wir nun durch sukzessive Approximationen[1] zu lösen. Wir bestimmen nacheinander Funktionen

$$u^{(0)}(s), u^{(1)}(s), \ldots, u^{(k)}(s), \ldots \tag{62}$$

als Lösungen der Gleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$L[u^{(0)}(s)] = \varphi(s),\ L[u^{(1)}(s)] = \varphi(s) + D_s[u^{(0)}(s)], \ldots, L[u^{(k)}(s)] = \varphi(s) + D_s[u^{(k-1)}(s)], \ldots . \tag{63}$$

Damit ist gleichbedeutend die Bestimmung einer Folge von Funktionen

$$v^{(0)}(s) = u^{(0)}(s),\ v^{(1)}(s) = u^{(1)}(s) - u^{(0)}(s), \ldots, v^{(k)}(s) = u^{(k)}(s) - u^{(k-1)}(s), \ldots \tag{64}$$

als Lösungen der Gleichungen

$$L[v^{(0)}(s)] = \varphi(s),\ L[v^{(1)}(s)] = D_s[v^{(0)}(s)], \ldots, L[v^{(k)}(s)] = D_s[v^{(k-1)}(s)], \ldots . \tag{65}$$

Aus jeder Folge (64) ergibt sich rückwärts eine Folge (62) durch

$$u^{(k)}(s) = \sum_{\varkappa=0}^{k} v^{(\varkappa)}(s).$$

Konvergiert eine derartige — noch sehr willkürlich bestimmbare — Folge (62) gegen eine Grenzfunktion,

$$\lim_{k\to\infty} u^{(k)}(s) = u(s),$$

[1] Vgl. O. Perron, *Über Summengleichungen und Poincarésche Differenzengleichungen*, Math. Ann. 84 (1921), S. 1—15.

so ist diese wegen

$$L[u(s)] = L[\lim_{k\to\infty} u^{(k)}(s)] = \varphi(s) + D_s[\lim_{k\to\infty} u^{(k-1)}(s)] = \varphi(s) + D_s[u(s)]$$

eine Lösung von (60) bzw. von (54). Wir suchen auf diesem Wege speziell zu Lösungen mit dem Verhalten (57) zu kommen.

Es sei vorläufig für alle Wurzeln α_ν von (58) $|\alpha_\nu| \neq 1$ vorausgesetzt, und d sei die Anzahl der Wurzeln im Einheitskreise. Man kann dann nach Satz I $v^{(0)}(s)$ als Lösung der mit (1) identischen Gleichung

$$(65^{(0)}) \qquad L[v^{(0)}(s)] = \sum_{i=0}^{n} p_i v^{(0)}(s+i) = \varphi(s)$$

der Bedingung

$$\lim_{s\to\infty} v^{(0)}(s) = \frac{b}{\sum\limits_{i=0}^{n} p_i}$$

entsprechend wählen, wobei man noch die Anfangswerte

$$v^{(0)}(0),\ v^{(0)}(1), \ldots, v^{(0)}(d-1)$$

beliebig vorgeben kann. Wegen (61) strebt dann $D_s[v^{(0)}(s)] \to 0$ für $s \to \infty$, und man kann weiter $v^{(1)}(s)$ als nullstrebige Lösung von $(65^{(1)})$, der zweiten der Gleichungen (65), wählen und nacheinander ebenso $v^{(2)}(s), v^{(3)}(s), \ldots, v^{(k)}(s), \ldots$. Dabei kann jeweils über die Anfangswerte $v^{(k)}(0), v^{(k)}(1), \ldots, v^{(k)}(d-1)$ beliebig verfügt werden. Durch die Vorschrift

$$(66) \qquad v^{(k)}(0) = v^{(k)}(1) = \cdots = v^{(k)}(d-1) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

ordnen wir der Funktion $v^{(0)}(s)$ eindeutig eine Kette von Funktionen $v^{(k)}(s)$ zu. Es zeigt sich, dass die dazugehörigen Funktionen $u^{(k)}(s) = \sum\limits_{\varkappa=0}^{k} v^{(\varkappa)}(s)$ gegen eine Grenzfunktion konvergieren, wofern die $\delta_i(s)$ einer in der Folge sich noch ergebenden Bedingung genügen.

Zunächst ist bei geeignetem C für alle s

$$|v^{(0)}(s)| \leqq C,$$

also

$$|D_s[v^{(0)}(s)]| = |\sum_{i=0}^{n} \delta_i(s)\, v^{(0)}(s+i)| \leqq \delta_s\, C \leqq \delta\, C$$

mit

$$\delta_s = \sum_{i=0}^{n} |\delta_i(s)| \text{ und } \delta = \operatorname*{Max}_{s \geqq 0} \delta_s.$$

Nach Hilfssatz 1 aus I, § 4 gilt daher für die entsprechend (66) zu wählende nullstrebige Lösung $v^{(1)}(s)$ der Gleichung $(65^{(1)})$

$$|v^{(1)}(s)| \leqq M_1\, \delta\, C \qquad \left(M_1 = \prod_{\nu=1}^{n} \left|\frac{1}{1-|\alpha_\nu|}\right|\right).$$

Daraus findet man weiter

$$|D_s[v^{(1)}(s)]| \leqq M_1\, \delta^2\, C,$$

$$|v^{(2)}(s)| \leqq (M_1\, \delta)^2\, C,$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

allgemein

(67) $$|v^{(k)}(s)| \leqq (M_1\, \delta)^k\, C.$$

Wenn nun von Anfang an die $\delta_i(s)$ so klein sind, dass

(68) $$M_1\,\delta < 1, \text{ d.h. } \operatorname*{Max}_{s \geqq 0} \sum_{i=0}^{n} |\delta_i(s)| < \frac{1}{M_1}$$

ist, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} v^{(k)}(s)$ für jedes s absolut, und ihre Summe

(69) $$u(s) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{(k)}(s)$$

ist eine beschränkte Lösung von (54).

Aus der Beschränktheit folgt aber sofort (57). $u(s)$ ist nämlich auch eine Lösung der Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{i=0}^{n} p_i \bar{u}(s+i) = \varphi(s) + D_s[u(s)] = \bar{\varphi}(s) \qquad (\bar{\varphi}(s) \to b).$$

Die beschränkten Lösungen dieser Gleichung streben aber, da kein α_ν auf dem Einheitskreis liegt, für $s \to \infty$ alle gegen $\frac{b}{\sum_{i=0}^{n} p_i}$, also tut dies auch $u(s)$.

Ferner hat die Funktion $u(s)$ die beliebig vorgegebenen Anfangswerte

$$u(0) = v^{(0)}(0),\, u(1) = v^{(0)}(1), \ldots, u(d-1) = v^{(0)}(d-1). \tag{60}$$

Sie ist auch die einzige Lösung mit diesen Anfangswerten und dem Verhalten (57). Denn ist $u^*(s)$ irgend eine derartige Lösung von (54), so können wir zu ihr eine Folge nullstrebiger Funktionen

$$r^{(0)}(s),\, r^{(1)}(s), \ldots, r^{(k)}(s), \ldots$$

als Lösungen der Gleichungen

$$L[r^{(0)}(s)] = D_s[u^*(s)],\, L[r^{(1)}(s)] = D_s[r^{(0)}(s)], \ldots, L[r^{(k)}(s)] = D_s[r^{(k-1)}(s)], \ldots$$

mit den Anfangswerten

$$r^{(k)}(0) = r^{(k)}(1) = \cdots = r^{(k)}(d-1) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

hinzubestimmen. $u^*(s)$ ist beschränkt; man hat also $|u^*(s)| < C$ für ein geeignetes C und daraus wieder

$$|r^{(0)}(s)| \leqq M_1 \delta C,\quad |r^{(1)}(s)| \leqq (M_1 \delta)^2 C, \ldots, |r^{(k)}(s)| \leqq (M_1 \delta)^{k+1} C, \ldots .$$

Unter der Voraussetzung (68) gilt daher für jedes s

$$\lim_{k \to \infty} r^{(k)}(s) = 0, \text{ also } u^*(s) = u^*(s) - r^{(0)}(s) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(r^{(k)}(s) - r^{(k+1)}(s)\right).$$

Die Funktionen

$$v^{*(0)}(s) = u^*(s) - r^{(0)}(s),\, v^{*(1)}(s) = r^{(0)}(s) - r^{(1)}(s), \ldots, v^{*(k)}(s) = r^{(k)}(s) - r^{(k+1)}(s), \ldots$$

sind aber Lösungen der Gleichungen (65) mit dem Verhalten

$$\lim_{s \to \infty} v^{*(0)}(s) = \frac{b}{\sum_{i=0}^{n} p_i} \text{ und } \lim_{s \to \infty} v^{*(k)}(s) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

und den Anfangswerten

$$v^{*(0)}(0)=u^{*}(0),\ldots,v^{*(0)}(d-1)=u^{*}(d-1);\; v^{*(k)}(0)=\cdots=v^{*(k)}(d-1)=0 \quad (k=1,2,\ldots).$$

Sie müssen daher mit den Funktionen $v^{(0)}(s), v^{(1)}(s),\ldots,v^{(k)}(s)$ identisch sein, und folglich fällt auch $u^{*}(s)$ mit der oben konstruierten Lösung $u(s)$ zusammen.

Wir haben bis jetzt die Existenz von Lösungen mit dem Verhalten (57) nur unter der Voraussetzung (68) nachgewiesen. Trifft (68) nicht zu, so gibt es wegen (61) ein $s_0 \geqq 0$, so dass wenigstens

$$\text{(68 a)} \qquad \operatorname*{Max}_{s\geqq s_0} \delta_s < \frac{1}{M_1}$$

ist. Wir lösen dann (54) — mit demselben Verfahren[1] — zunächst auf dem Bereich $s\geqq s_0$ und erhalten so zu beliebig vorgegebenen Werten

$$u(s_0)=v^{(0)}(s_0), u(s_0+1)=v^{(0)}(s_0+1),\ldots,u(s_0+d-1)=v^{(0)}(s_0+d-1)$$

für $s\geqq s_0$ genau eine Lösung mit dem Verhalten (57). Diese Lösung können wir dann wegen (59) nach links über s_0 hinaus bis $s=0$ eindeutig fortsetzen.[2]

Es gibt also, wenn keine Wurzel α_ν auf dem Einheitskreis liegt, immer Lösungen mit dem Verhalten (57).

Wir lassen jetzt auch Wurzeln auf dem Einheitskreis zu; l sei die grösste bei ihnen vorkommende Vielfachheit. Anstelle von (55) machen wir aber die schärfere Voraussetzung, dass

---

[1] Es sei hier darauf hingewiesen, dass, sobald (68) erfüllt ist, das Approximationsverfahren immer konvergiert, auch wenn die $\delta_i(s)$ nicht gegen Null streben. Man kann daher auf diesem Wege z. B. auch die Lösungen einer Gleichung mit konstanten Koeffizienten $\sum_{i=0}^{n}(p_i+\delta_i)\,u(s+i)=\varphi(s)$ gewinnen, wenn nur die δ_i genügend klein sind. Durch Vergleich der so erhaltenen Ergebnisse mit Satz I ergibt sich nebenbei folgender Satz (vgl. noch II, § 2 und 3):

Wenn zwischen den Gleichungen

$$\text{(a)} \qquad z^n+p_{n-1}z^{n-1}+\cdots+p_0=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)=0 \qquad (|\alpha_\nu|\neq 1)$$

$$\text{(b)} \qquad q_m z^m+q_{m-1}z^{m-1}+\cdots+q_0=0 \qquad (m \lesseqgtr n)$$

die Beziehung $\sum_{i=0}^{\operatorname{Max}(m,n)} |p_i-q_i| < \prod_{\nu=1}^{n} \big|1-|\alpha_\nu|\big|$ besteht, dann haben (a) und (b) gleich viel Wurzeln innerhalb des Einheitskreises. (Dieser Satz ist natürlich auch auf mehr direktem Wege leicht beweisbar.)

[2] Die Voraussetzung (59) hat also im wesentlichen nur den Zweck, die eindeutige Fortsetzung der für $s\geqq s_0$ erhaltenen Lösungen bis zu $s=0$ zu sichern.

$$\sum_{s=0}^{\infty} s^{l-1}(|\delta_0(s)|+|\delta_1(s)|+\cdots+|\delta_n(s)|)=\sum_{s=0}^{\infty} s^{l-1}\delta_s \tag{71}$$

konvergiert.[1]

Es gibt dann zunächst allgemein (auch wenn (56) nicht zutrifft) zu jeder beschränkten Lösung $u(s)$ von (54) genau eine beschränkte Lösung $\bar{u}(s)$ der entsprechenden Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$L[\bar{u}(s)]=\sum_{i=0}^{n} p_i \bar{u}(s+i)=\varphi(s), \tag{1}$$

die das Verhalten

$$\bar{u}(s)=u(s)+o(1) \tag{72}$$

zeigt und die Anfangswerte

$$\bar{u}(0)=u(0), \bar{u}(1)=u(1), \ldots, \bar{u}(d-1)=u(d-1) \tag{73}$$

hat. $u(s)$ genügt ja der Gleichung

$$L[u(s)]=\varphi(s)+D_s[u(s)], \tag{60 a}$$

und weiter ist

$$u(s) \leqq C \text{ und } |D_s[u(s)]| \leqq C\delta_s$$

mit konstantem C. Wegen (71) hat daher nach Hilfssatz 2 von S. 164 die Gleichung

$$L[v(s)]=D_s[u(s)]=\psi(s)$$

genau eine nullstrebige Lösung $v(s)$ mit $v(0)=v(1)=\cdots=v(d-1)=0$, folglich (1) die den Bedingungen (72) und (73) genügende Lösung

$$\bar{u}(s)=u(s)-v(s).$$

Umgekehrt können wir auch zu jeder beschränkten Lösung $\bar{u}(s)$ von (1) durch sukzessive Approximationen über eine Kette (64) mit $v^{(0)}(s)=\bar{u}(s)$ — denn die Gleichungen (1) und ($65^{(0)}$) besagen ja dasselbe — eine Lösung $u(s)$ von (54) mit dem Verhalten

[1] Wenn keine Wurzel α_ν auf dem Einheitskreise liegt, gelten die folgenden Ausführungen schon unter der Voraussetzung (55); dieser Fall wird so erneut erledigt.

$$u(s) = \bar{u}(s) + o(1)$$

konstruieren. Wir beschränken uns dabei auf einen Bereich $s \geqq s_0$, wo s_0 noch genauer festgelegt werden wird.

Es sei also $\bar{u}(s) = v^{(0)}(s)$ gesetzt. Dann gilt mit geeignetem C

$$|v^{(0)}(s)| \leqq C \text{ und } |D_s[v^{(0)}(s)]| \leqq C\delta_s \qquad (s \geqq s_0).$$

Wegen (71) hat daher nach Hilfssatz 2 von S. 164 die Gleichung $(65^{(1)})$ für $s \geqq s_0$ genau eine nullstrebige Lösung $v^{(1)}(s)$ mit $v^{(1)}(s_0) = \cdots = v^{(1)}(s_0 + d - 1) = 0$, und für diese Lösung gilt

$$|v^{(1)}(s)| \leqq C M_2 |\eta(s)| \text{ und } |D_s[v^{(1)}(s)]| \leqq C M_2 \eta \delta_s \qquad (s \geqq s_0; \eta = \operatorname*{Max}_{s \geqq s_0} |\eta(s)|),$$

wobei M_2 und $\eta(s)$ entsprechende Bedeutung haben wie im Hilfssatze 2. Man kann also auch $v^{(2)}(s)$ und weiter dann $v^{(3)}(s), v^{(4)}(s), \ldots$ als nullstrebige Lösungen der Gleichungen (65) unter der Nebenbedingung

$$v^{(k)}(s_0) = v^{(k)}(s_0 + 1) = \cdots = v^{(k)}(s_0 + d - 1) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

bestimmen. Für diese Funktionen gilt

$$|v^{(k)}(s)| \leqq C M_2 (M_2 \eta)^{k-1} |\eta(s)| \qquad (s \geqq s_0). \tag{74}$$

Wir wählen nun s_0 so, dass

$$M_2 \eta < 1$$

wird, was wegen $\eta(s) \to 0$ möglich ist (vgl. S. 169). Dann konvergiert wieder

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{(k)}(s) = u(s) = \bar{u}(s) + \sum_{k=1}^{\infty} v^{(k)}(s)$$

für $s \geqq s_0$. $u(s)$ ist eine Lösung von (54), für die wegen (74)

$$u(s) = \bar{u}(s) + o(1) \tag{75}$$

gilt. Ferner ist

$$u(s_0) = \bar{u}(s_0), u(s_0 + 1) = \bar{u}(s_0 + 1), \ldots, u(s_0 + d - 1) = \bar{u}(s_0 + d - 1). \tag{76}$$

Ähnlich wie auf S. 174—175 zeigt man, dass nur diese eine Lösung den Bedingungen (75) und (76) genügt. Unter der Voraussetzung (59) kann man sie wieder nach links bis $s = 0$ fortsetzen.

Insbesondere können also auch (54) und (1) nur gleichzeitig Lösungen mit dem Verhalten (57) haben.

Es haben sich somit folgende Sätze ergeben:

Satz IV. *Es sei in der Differenzengleichung*

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(s)\, u(s+i) = \varphi(s) \tag{54}$$

mit

$$p_n(s) = 1 \text{ und } \lim_{s\to\infty} p_i(s) = p_i \qquad (p_i \text{ endlich}; i = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \tag{55}$$

$$p_0(s) \neq 0 \tag{59}$$

die weitere Voraussetzung

$$\lim_{s\to\infty} \varphi(s) = b \qquad (b \text{ endlich}) \tag{56}$$

erfüllt. Wenn dann keine Wurzel α_ν *der charakteristischen Gleichung* (58) *auf dem Einheitskreis liegt, dann gibt es immer Lösungen mit dem Verhalten*

$$\lim_{s\to\infty} u(s) = \frac{b}{\sum_{i=0}^{n} p_i}, \tag{57}$$

und zwar, wenn d die Anzahl der Wurzeln im Einheitskreis und s_0 *der Bedingung* (68 *a*) *entsprechend gewählt ist, zu beliebig vorgegebenen Werten*

$$u(s_0), u(s_0+1), \ldots, u(s_0+d-1)$$

genau eine.

Wenn alle Wurzeln α_ν *ausserhalb des Einheitskreises liegen, gibt es eine einzige derartige Lösung.*

Zusatz. *Liegen die Wurzeln* α_ν *zum Teil auf dem Einheitskreis, und ist, unter l die grösste bei derartigen Wurzeln vorkommende Vielfachheit verstanden,*

$$\sum_{s=0}^{\infty} s^{l-1}\, \delta_s \qquad \left(\delta_s = \sum_{i=0}^{n} |p_i - p_i(s)|\right) \tag{71}$$

konvergent, so hat (54) *unter den übrigen Voraussetzungen des Satzes IV genau dann*

Lösungen mit dem Verhalten (57), *wenn die entsprechende Gleichung mit konstanten Koeffizienten*

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{n} p_i \bar{u}(s+i) = \varphi(s)$$

derartige Lösungen hat.

Satz V. *Allgemeiner, d. h. auch wenn* (56) *nicht erfüllt ist, haben unter den Voraussetzungen* (71) *und* (59) *die Gleichungen* (54) *und* (1) *immer gleichzeitig beschränkte Lösungen:*

Zu jeder beschränkten Lösung $u(s)$ *von* (54) *gibt es genau eine Lösung* $\bar{u}(s)$ *von* (1) *mit*

$$(72) \qquad \bar{u}(s) = u(s) + o(1),$$

$$(73) \qquad \bar{u}(0) = u(0), \bar{u}(1) = u(1), \ldots, \bar{u}(d-1) = u(d-1)$$

und umgekehrt bei hinreichend grossem s_0 *zu jeder beschränkten Lösung* $\bar{u}(s)$ *von* (1) *genau eine Lösung von* (54) *mit*

$$(75) \qquad u(s) = \bar{u}(s) + o(1),$$

$$(76) \qquad u(s_0) = \bar{u}(s_0), u(s_0+1) = \bar{u}(s_0+1), \ldots, u(s_0+d-1) = \bar{u}(s_0+d-1).$$

Satz V umfasst auch den Fall, dass 1 *eine Wurzel von* (58) *ist.*

§ 2. Ergänzungen.

Das in § 1 auseinandergesetzte Approximationsverfahren konvergiert auch in vielen anderen Fällen und liefert so verschiedene Verallgemeinerungen der obigen Sätze. Die Voraussetzung $\sum_{i=0}^{n} p_i = 0$ ist dabei unnötig.

1. Es habe zum Beispiel (1) bzw. ($65^{(0)}$) eine Lösung $\bar{u}(s) = v^{(0)}(s)$ mit

$$|v^{(0)}(s)| \leqq C q^s,$$

wo C und $q \neq |\alpha_\nu|$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ Konstanten sind. Es ist dann für $s \geqq s_0$

$$|D_s[v^{(0)}(s)]| \leqq C q^s \delta_s' \leqq C \delta' q^s$$

mit

$$\delta'_s = |\delta_0(s)| + q\,|\delta_1(s)| + \cdots + q^n\,|\delta_n(s)| \text{ und } \delta' = \operatorname*{Max}_{s \geqq s_0} \delta'_s,$$

und nach Hilfsatz 4 von S. 168 hat dann ($65^{(1)}$) für $s \geqq s_0$ genau eine Lösung $v^{(1)}(s)$ mit

$$|v^{(1)}(s)| \leqq C\,M_q\,\delta'\,q^s$$

und

$$v^{(1)}(s_0) = v^{(1)}(s_0+1) = \cdots = v^{(1)}(s_0+d_q-1) = 0.$$

d_q ist dabei wieder die Anzahl der α_ν mit $|\alpha_\nu| < q$. Fortfahrend kann man ebenso $v^{(2)}(s), \ldots, v^{(k)}(s)$ den Bedingungen

$$|v^{(k)}(s)| \leqq C(\delta'\,M_q)^k\,q^s \text{ und } v^{(k)}(s_0) = \cdots = v^{(k)}(s_0+d_q-1) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

entsprechend eindeutig bestimmen, und wenn $\delta'\,M_q < 1$ ist, was wegen (55) für genügend grosses s_0 sicher zutrifft, so erhält man für $s \geqq s_0$ eine Lösung

$$u(s) = \bar{u}(s) + \sum_{k=1}^{\infty} v^{(k)}(s),$$

die den Bedingungen

$$|u(s)| \leqq C'\,q^s,$$

$$u(s_0) = \bar{u}(s_0),\, u(s_0+1) = \bar{u}(s_0+1), \ldots, u(s_0+d_q-1) = \bar{u}(s_0+d_q-1) \tag{77}$$

genügt. Ähnlich wie auf S. 174—175 zeigt man, dass es die einzige derartige Lösung ist.

Für die Konvergenz des Verfahrens ist es wieder ganz unwesentlich (vgl. S. 176), dass $\delta_s' \to 0$ strebt für $s \to \infty$; es genügt, dass $\delta'\,M_q < 1$ ist.[1] Wenn aber $\lim\limits_{s \to \infty} \delta_s' = 0$ ist, kann man für die so erhaltenen Lösungen noch weiter

$$u(s) = \bar{u}(s) + o(q^s) \tag{78}$$

finden. (Man erhält diese Ergebnisse auch aus Satz V vermittels der Substitution $u(s) = q^s\,v(s)$.)

[1] Schreibt man in der Kette $\{v^{(k)}(s)\}$ bei beliebigem $v^{(0)}(s)$ immer $v^k(0) = v_{(k)}(1) = \cdots = v^{(k)}(n-1) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ vor, so konvergiert das Verfahren überhaupt immer und liefert *alle* Lösungen von (54), da dann wegen der Voraussetzung $\delta_n(s) = 0$ sogar $v^{(k)}(0) = \cdots = v^{(k)}(n+k-1) = 0$ ist, also für irgend ein (festes) $s \geqq n$ alle $v^{(k)}(s)$ mit $k \geqq s+1-n$ verschwinden.

Eine geringe Modifikation dieser Schlüsse ergibt den schon in der Einleitung (mit $q = 1$) erwähnten Satz:

Es seien in (54) *die Voraussetzungen* (55) *und* (59) *erfüllt, und weiter sei* $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|\varphi(s)|} \leqq q$ *(mit endlichem* q*). Dann gibt es auch Lösungen* $u(s)$ *mit* $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|u(s)|} \leqq q$, *und zwar, wenn* d_q^* *die Anzahl der* α_ν *mit* $|\alpha_\nu| \leqq q$ *und* s_0 *hinreichend gross ist, zu beliebig vorgegebenen Werten* $u(s_0), u(s_0+1), \ldots, u(s_0+d_q^*-1)$ *genau eine.*

Bei kleinem $\varepsilon > 0$ gibt es nämlich genau d_q^* Wurzeln α_ν mit $|\alpha_\nu| < q+\varepsilon$. Andererseits ist $\left|\frac{\varphi(s)}{(q+\varepsilon)^s}\right|$ beschränkt. Es gibt also auch Lösungen $u(s)$ von (54), für die $\left|\frac{u(s)}{(q+\varepsilon)^s}\right|$ beschränkt ist. Man kann sie durch die Werte $u(s_0), \ldots, u(s_0+d_q^*-1)$ charakterisieren, wobei es zunächst von ε abhängt, wie gross s_0 mindestens zu wählen ist. Da man aber diese Wahl so treffen kann, dass s_0 zugleich für ein beliebig gegebenes $\varepsilon' < \varepsilon$ passt, so bleibt für alle diese Lösungen auch $\left|\frac{u(s)}{(q+\varepsilon')^s}\right|$ beschränkt, woraus für $\varepsilon' \to 0$ der Satz folgt.

2. Weiter habe unter der Annahme, dass die Wurzeln α_ν zum Teil auf dem Einheitskreis liegen und (71) erfüllt ist, (1) eine Lösung $\bar{u}(s) = v^{(0)}(s)$ mit

$$(79) \qquad |v^{(0)}(s)| \leqq C(s+1)^h \qquad (C \text{ konstant; } 0 \leqq h \leqq l-1).$$

Es ist dann

$$|D_s[v^{(0)}(s)]| \leqq C(s+1)^h \left(|\delta_0(s)| + \left(\frac{s+2}{s+1}\right)^h |\delta_1(s)| + \cdots + \left(\frac{s+n+1}{s+1}\right)^h |\delta_n(s)|\right) = C\mu(s),$$

und wegen (71) ist $\sum\limits_{s=0}^{\infty} s^{l-h-1}\mu(s)$ konvergent. Wir wenden jetzt Hilfssatz 3 von S. 166 an. Nach diesem hat $(65^{(1)})$ für $s \geqq s_0$ eine eindeutig bestimmte Lösung $v^{(1)}(s)$ mit dem Verhalten

$$|v^{(1)}(s)| \leqq C(s+1)^h \gamma(s) \leqq \gamma\, C(s+1)^h \qquad (\gamma = \operatorname*{Max}_{s \geqq s_0} \gamma(s))$$

und den Anfangswerten

$$v^{(1)}(s_0) = v^{(1)}(s_0+1) = \cdots = v^{(1)}(s_0+d+g-1) = 0.$$

$\gamma(s)$ und g haben dabei dieselbe Bedeutung wie in Hilfssatz 3. Man erhält wieder zu $v^{(0)}(s)$ eine eindeutig bestimmte Kette von Funktionen $v^{(k)}(s)$, die den Bedingungen

$$
(80) \qquad \begin{aligned} &|v^{(k)}(s)| \leqq C\gamma^{k-1}\gamma(s)(s+1)^h \qquad (s \geqq s_0;\ k = 1, 2, \ldots), \\ &v^{(k)}(s_0) = v^{(k)}(s_0+1) = \cdots = v^{(k)}(s_0+d+g-1) = 0 \end{aligned}
$$

genügen. Für hinreichend grosses s_0 wird $\gamma < 1$, und wir haben in

$$
u(s) = \bar{u}(s) + \sum_{k=1}^{\infty} v^{(k)}(s)
$$

für $s \geqq s_0$ eine Lösung von (54), die wegen (80) das Verhalten

$$
(81) \qquad u(s) = \bar{u}(s) + o(s^h)
$$

zeigt und ferner die Werte

$$
(82) \qquad u(s_0) = \bar{u}(s_0), u(s_0+1) = \bar{u}(s_0+1), \ldots, u(s_0+d+g-1) = \bar{u}(s_0+d+g-1)
$$

hat. Es ist die einzige (81) und (82) genügende Lösung (vgl. S. 174—175). Falls kein α_ν auf dem Einheitskreise liegt, also $g=0$ ist, ergibt sich das entsprechende Ergebnis schon unter den Voraussetzungen (55) und (59).

3. In allen diesen Fällen ist die bis jetzt der Einfachheit halber gemachte Voraussetzung $p_n(s) = 1$ für die Konvergenz des Approximationsverfahrens ohne Bedeutung. Es genügt genau so die Voraussetzung

$$
\lim_{s \to \infty} p_n(s) = p_n \qquad (p_n \text{ endlich}).
$$

Dabei darf auch $p_n = 0$ *sein.* Wir setzen nur voraus, dass $\sum_{i=0}^{n} p_i \alpha^i$ nicht identisch verschwindet. Um bei beliebigen Anfangswerten $u(0), \ldots, u(n-1)$ die Fortsetzung der Lösungen nach rechts zu sichern, kann man noch die Voraussetzung $p_n(s) \neq 0$ machen. Die Anwendbarkeit des Approximationsverfahrens ist aber davon nicht abhängig.

Ist

$$
p_n = p_{n-1} = \cdots = p_{m+1} = 0, \quad p_m \neq 0 \qquad (0 \leqq m \leqq n),
$$

so reduziert sich die charakteristische Gleichung (58) auf eine Gleichung m-ten Grades. Es sind dann $n-m$ Wurzeln »ins Unendliche gerückt», welche als ausserhalb des Einheitskreises gelegene Wurzeln mit zu zählen sind. Ebenso reduziert sich die (54) zugeordnete Gleichung

$$(1)\qquad L[\bar{u}(s)] = \sum_{i=0}^{n} p_i \bar{u}(s+i) = \sum_{i=0}^{m} p_i \bar{u}(s+i) = \varphi(s)$$

auf eine Differenzengleichung m-ter Ordnung. Man kann noch $p_m = 1$ annehmen, da man ja in (54) durch p_m durchdividieren kann; doch ist das unwesentlich.

Das Approximationsverfahren wird wieder genau so gehandhabt wie in § 1 und oben unter 1 und 2. Dabei ist in den Gleichungen (65)

$$L[v(s)] = \sum_{i=0}^{m} p_i v(s+i) \quad \text{und} \quad D_s[v(s)] = \sum_{i=0}^{n} \delta_i(s) v(s+i).$$

Man erhält entsprechende Ergebnisse. U. a. liefern ähnliche Schlüsse wie oben unter 1. den

Satz VI. Es sei in (54)

$$p_0(s) \neq 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{s\to\infty} p_i(s) = p_i \qquad (p_i \textit{ endlich}; i = 1, 2, \ldots, n)$$

und

$$p_n = p_{n-1} = \cdots = p_{m+1} = 0, p_m \neq 0 \qquad (0 \leqq m \leqq n.)$$

Weiter sei $\overline{\lim_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|\varphi(s)|} = \lambda$ *endlich.*

Dann gibt es bei hinreichend grossem s_0 *zu* m *beliebigen Anfangswerten* $u(s_0)$, $u(s_0+1), \ldots, u(s_0+m-1)$ *genau eine Lösung* $u(s)$, *für welche* $\overline{\lim_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|u(s)|}$ *endlich ist. Für jede andere Lösung mit diesen Anfangswerten ist* $\overline{\lim_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|u(s)|} = \infty$.

Dieser Satz gilt sogar noch unter den allgemeineren Voraussetzungen

(83) (a) $p_0(s) \neq 0,$

(b) $p_n(s) \to 0, p_{n-1}(s) \to 0, \ldots, p_{m+1}(s) \to 0$ *für* $s \to \infty \qquad (0 \leqq m \leqq n),$

(c) $|p_\mu(s)| \leqq C \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m-1),$

(d) $0 < c \leqq |p_m(s)|,$

wo C *und* c, $c \leqq C$, *Konstante sind.*[1]

[1] Es genügt natürlich auch, dass (83 c) und (83 d) von einer Stelle $S \geqq 0$ an erfüllt sind; Gleiches gilt im Satz VII von (86 c) und (86 d).

Die Lösungen $u(s)$ mit endlichem $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|u(s)|}$ lassen sich nämlich durch sukzessive Approximationen in der Form

$$u(s) = v^{(0)}(s) + \sum_{k=1}^{\infty} v^{(k)}(s)$$

gewinnen, wobei an die Stelle der Gleichungen (65) die Gleichungen

$$(84)\quad \begin{aligned} L[v^{(0)}(s)] &= v^{(0)}(s+m) = \frac{\varphi(s)}{p_m(s)} = \bar{\varphi}(s), \\ v^{(k)}(s+m) &= D_s[v^{(k-1)}(s)] = \sum_{i=0}^{n} \delta_i(s)\, v^{(k-1)}(s+i) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

mit $\delta_i(s) = \begin{cases} -\dfrac{p_i(s)}{p_m(s)} & \text{für } i \neq m, \\ 0 & \text{für } i = m \end{cases}$ treten. Das folgt wieder aus Hilfssatz 4 von S. 168, der hier auf die Gleichung $E^m u(s) = u(s+m) = \varphi(s)$ angewandt wird; es ist dabei $d_q = m$, $M_q = \dfrac{1}{q^m}$ für jedes $q \geqq 0$. Genügt

$$q > \overline{\lim_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|\varphi(s)|} = \lambda \geqq \overline{\lim_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|\bar{\varphi}(s)|}$$

der Bedingung

$$q^m > \sum_{i=0}^{m-1} |\delta_i(s)|\, q^i,$$

was z. B. für $q > \operatorname{Max}\left(\lambda, m\,\dfrac{C}{c}\right)$ sicher zutrifft, dann ist wegen (83 b) für hinreichend grosses $s_0 \geqq s_1(q)$ auch

$$\operatorname*{Max}_{s \geqq s_0} \sum_{i=0}^{n} |\delta_i(s)|\, q^i = \delta < q^m, \text{ d. h. } \delta M_q < 1.$$

Wenn man daher ausgehend von einer Lösung $v^{(0)}(s)$ von $(84^{(0)})$ auf dem Bereich

$s \geqq s_0$ mit beliebigen Anfangswerten[1] $v^{(0)}(s_0), \ldots, v^{(0)}(s_0+m-1)$ den Funktionen $v^{(k)}(s)\,(k=1,2,\ldots)$ immer die Anfangswerte $v^{(k)}(s_0)=\cdots=v^{(k)}(s_0+m-1)=0$ vorschreibt, so konvergiert das Verfahren sicher und liefert die einzige (vgl. S. 174—175) Lösung $u(s)$ von (54) mit den Anfangswerten $u(s_0)=v^{(0)}(s_0), \ldots, u(s_0+m-1) = v(s_0+m-1)$ und dem Verhalten $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|u(s)|} \leqq q$. Der Rest folgt aus $q \to \infty$.

Für die so gefundenen Lösungen gilt nun sogar weiter

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|u(s)|} \leqq \operatorname{Max}\left(\lambda, m\frac{C}{c}\right). \tag{85}$$

Denn man erhält diese Lösungen genau so, wenn man s_0 durch irgend ein $s_0' \geqq s_0$ ersetzt. Da man nun s_0' zugleich für ein beliebiges $q' > \operatorname{Max}\left(\lambda, m\frac{C}{c}\right)$ passend wählen kann, erweisen sie sich auch als die Lösungen mit $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|u(s)|} \leqq q'$. Aus $q' \to \operatorname{Max}\left(\lambda, m\frac{C}{c}\right)$ folgt (85).

Ein Gegenstück zu Satz VI ist der

Satz VII. *Die Koeffizienten von (54) mögen den Bedingungen*

(86) (a) $p_0(s) \neq 0,$

(b) $p_0(s) \to 0, p_1(s) \to 0, \ldots, p_{m'-1}(s) \to 0$ *für* $s \to \infty$ $\quad (0 \leqq m' \leqq n-1),$[2]

(c) $|p_\mu(s)| \leqq C'$ $\quad (m'+1 \leqq \mu \leqq n),$

(d) $0 < c' \leqq |p_{m'}(s)|$

mit konstantem C' und $c', c' \leqq C'$, genügen, und weiter sei

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|\varphi(s)|} = \lambda < \frac{1}{n-m'} \frac{c'}{C'}. \tag{87}$$

Dann gibt es bei genügend grossem s_0 zu beliebigen Werten $u(s_0), \ldots, u(s_0+m'-1)$ genau eine Lösung mit

$$\lim_{s\to\infty} \sqrt[s]{|u(s)|} \leqq \lambda. \tag{88}$$

[1] Die einzelnen Lösungen $v^{(0)}(s)$ auf dem Bereich $s \geqq s_0$ unterscheiden sich nur in diesen Anfangswerten; bis auf eine sind sie nach links über s_0 hinaus nicht fortsetzbar.

[2] Der Fall $m'=n$ ist schon in § 2, 1 erledigt worden.

Für alle andern Lösungen ist $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|u(s)|} \geqq \frac{1}{n-m'} \frac{c'}{C'}$.

Zum Beweise betrachten wir wieder nur die Gleichungskette

$$v^{(0)}(s+m') = \frac{\varphi(s)}{p_{m'}(s)},$$

$$v^{(k)}(s+m') = \sum_{i=0}^{n} \delta_i(s)\, v^{(k-1)}(s+i) \text{ mit } \delta_i(s) = \begin{cases} -\frac{p_i(s)}{p_{m'}(s)} & \text{für } i \neq m', \\ 0 & \text{für } i = m' \end{cases} ; k = 1, 2, \ldots .$$

Genügt q der Bedingung

$$\lambda < q < \frac{1}{n-m'} \frac{c'}{C'},$$

so ist

$$\sum_{i=m'+1}^{n} |\delta_i(s)|\, q^i < q^{m'}$$

und wegen (86 b) für hinreichend grosses s_0 auch

$$\operatorname*{Max}_{s \geqq s_0} \sum_{i=0}^{n} |\delta_i(s)|\, q^i < q^{m'} .$$

Sobald aber das der Fall ist, konvergiert wieder nach Hilfssatz 4, wobei $M_q = \frac{1}{q^{m'}}$ ist, das Approximationsverfahren mit der üblichen Vorschrift $v^{(k)}(s_0) = \cdots = v^{(k)}(s_0 + m' - 1) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und liefert *alle* Lösungen, für welche

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|u(s)|} \leqq q$$

ist. Man kann nun wieder p gegen λ bzw. gegen $\frac{1}{n-m'} \frac{c'}{C'}$ streben lassen und erhält so den obigen Satz. $\Bigl($Ist $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|p_{m'}(s)|} = 1$, so gilt in (88) sogar genauer $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|u(s)|} = \lambda.\Bigr)$

4. Man kann hier auch die Summengleichung

(89) $$\sum_{i=0}^{n} p_i u(s+i) - \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(s) u(s+i) = \varphi(s) \text{ mit } p_n = 1, p_0 - \delta_0(s) \neq 0$$

einbeziehen, wo $\sum_{i=0}^{\infty} |\delta_i(s)| q^i = \delta(s; q)$ für ein geeignetes $q > 0$ konvergiert und $\delta(s; q) \to 0$ mit wachsendem s strebt (oder auch nur $\operatorname{Max}_{s \geqq s_0} |\delta(s; q)| < \frac{1}{M_q} = \prod_{\nu=0}^{n} |q - |\alpha_\nu||$ für ein s_0 ist). Durch eine von Herrn Perron in seiner Arbeit »Summengleichungen und Poincarésche Differenzengleichungen» angegebene Transformation kann man auch allgemeinere Summengleichungen auf diese Form bringen, und so erhält man die dort abgeleiteten Ergebnisse.

Ebenso kann man zum Beispiel bei beschränktem $\varphi(s)$ auf die Existenz beschränkter Lösungen von (89) schliessen:

Falls keine Wurzel α_ν *von* $\sum_{i=0}^{n} p_i \alpha^i = 0$ *auf dem Einheitskreis liegt und* $\delta_s = \sum_{i=0}^{\infty} |\delta_i(s)|$ *für* $s \to \infty$ *gegen Null strebt (oder wenigstens* $\operatorname{Max}_{s \geqq s_0} \delta_s < \prod_{\nu=1}^{n} |1 - |\alpha_\nu||$ *für ein* s_0 *ist), gibt es immer solche Lösungen* (*Hilfssatz* 1); *falls Wurzeln auf dem Einheitskreise vorkommen und*

(71 a) $$\sum_{s=0}^{\infty} s^{l-1} \delta_s \qquad \left(\delta_s = \sum_{i=0}^{\infty} |\delta_i(s)|\right)$$

konvergiert, genau dann, wenn

$$\sum_{i=0}^{n} p_i \bar{u}(s+i) = \varphi(s)$$

beschränkte Lösungen hat (*Hilfssatz* 2).

§ 3. Die homogene Gleichung.

Wir machen einige Anwendungen auf die homogene Gleichung

(90) $$\sum_{i=0}^{n} p_i(s) w(s+i) = 0$$

mit $\varphi(s) = 0$.

1. Satz IV besagt hier:

Es seien in (90) die Voraussetzungen (55) und (59) erfüllt. Ausserdem gelte für alle Wurzeln α_ν *von (58)* $|\alpha_\nu| \neq 1$, *und d sei die Anzahl der Wurzeln im Einheitskreise. Dann gibt es bei genügend grossem* s_0 *zu d beliebigen Werten* $w(s_0), \ldots, w(s_0 + d - 1)$ *genau eine nullstrebige Lösung von (90). Die Gesamtheit aller nullstrebigen Lösungen hat also ein Fundamentalsystem von d unabhängigen Funktionen.*

Daraus folgert man leicht den bekannten Satz von Perron über Poincarésche Differenzengleichungen[1]:

Unter den Voraussetzungen (55) und (59) seien

$$0 \leqq q_1 < q_2 < \cdots < q_\mu$$

die verschiedenen absoluten Beträge der Wurzeln α_ν *der charakteristischen Gleichung (58), und* e_λ *sei die Anzahl der Wurzeln vom Betrage* q_λ, *mehrfache mehrfach gezählt.*

Dann hat die Differenzengleichung (90) ein Fundamentalsystem von Lösungen, das derart in μ *Klassen zerfällt, dass für die Lösungen der* λ*-ten Klasse und deren lineare Verbindungen die Beziehung*

$$\overline{\lim_{s \to \infty}} \sqrt[s]{|w(s)|} = q_\lambda$$

statthat. Die Anzahl der Lösungen in der λ*-ten Klasse ist gleich* e_λ.

2. Es sei weiter der Fall betrachtet, dass ein Teil der Wurzeln α_ν auf dem Einheitskreise liegt und dabei (71) erfüllt ist.

Es sei etwa α_ν eine von ihnen; ihre Vielfachheit sei r. Die (90) entsprechende Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$L[\overline{w}(s)] = \sum_{i=0}^{n} p_i(s)\, \overline{w}(s+i) = 0$$

hat dann unter anderem die Lösungen

$$\alpha_n^s, s\,\alpha_n^s, \ldots, s^{r-1}\,\alpha_n^s.$$

[1] Die Ausführung läuft auf eine Wiederholung des von Herrn PERRON in *Summengleichungen und Poincarésche Differenzengleichungen*, Math. Ann. 84 (1921), S. 1—15, Gesagten hinaus, und ich kann sie hier übergehen; vgl. auch O. PERRON, *Über die Poincarésche lineare Differenzengleichung*, J. reine, angew. Math. 137 (1910), S. 6—64.

Nach II, § 2, 2, S. 181 hat daher (90) Lösungen mit dem Verhalten

$$w_1(s) = \alpha_n^s + o(1), w_2(s) = s\,\alpha_n^s + o(s), \ldots, w_r(s) = s^{r-1}\alpha_n^s + o(s^{r-1}).$$

Es strebt für sie also für $s \to \infty$

$$\frac{w_\varrho(s+1)}{w_\varrho(s)} \to \alpha_n \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r).$$

Durch Transformationen von der Form $w(s) = |\alpha_\nu|\, v(s)$ kann man jede nicht verschwindende Wurzel α_ν auf den Einheitskreis schieben, wobei (71) im wesentlichen erhalten bleibt. So ergibt sich folgende Ergänzung des Satzes von Poincaré (nicht dieser Satz selbst).

Es seien wieder (55) *und* (59) *erfüllt, und* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *seien die verschiedenen* r_1-, r_2-, $\ldots$, r_k-*fachen Wurzeln von* (58), *von denen keine verschwinden möge. Weiter konvergiere*

$$\sum_{s=0}^{\infty} s^{R-1}\,\delta_s$$

mit

$$\delta_s = |\delta_0(s)| + |\delta_1(s)| + \cdots + |\delta_n(s)| \quad \textit{und} \quad R = \operatorname*{Max}_{\varkappa=1,2,\ldots,k} r_\varkappa.$$

Dann hat die Differenzengleichung (90) *ein Fundamentalsystem von Lösungen von der Form*

$$(91)\quad \begin{aligned} &w_{11}(s) = \alpha_1^s + \alpha_1^s\, o(1), w_{12}(s) = s\,\alpha_1^s + \alpha_1^s\, o(s), \ldots, w_{1r_1}(s) = s^{r_1-1}\alpha_1^s + \alpha_1^s\, o(s^{r_1-1});\\ &w_{21}(s) = \alpha_2^s + \alpha_2^s\, o(1), w_{22}(s) = s\,\alpha_2^s + \alpha_2^s\, o(s), \ldots, w_{2r_2}(s) = s^{r_2-1}\alpha_2^s + \alpha_2^s\, o(s^{r_2-1});\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &w_{k1}(s) = \alpha_k^s + \alpha_k^s\, o(1), w_{k2}(s) = s\,\alpha_k^s + \alpha_2^s\, o(s), \ldots, w_{kr_k}(s) = s^{r_k-1}\alpha_k^s + \alpha_k^s\, o(s^{r_k-1}). \end{aligned}$$

Für die $\alpha_\varkappa$ *zugeordneten Lösungen gilt für* $s \to \infty$

$$(92)\qquad \frac{w_{\varkappa\varrho}(s+1)}{w_{\varkappa\varrho}(s)} = \alpha_\varkappa \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r_\varkappa;\ \varkappa = 1, 2, \ldots, k).$$

Die lineare Unabhängigkeit dieses Systems folgt leicht aus dem asymptotischen Verhalten.[1]

[1] Dieses Ergebnis stellt eine Verallgemeinerung eines Satzes von Herrn W. B. Ford dar, der ungefähr folgendes besagt (vgl. »*Sur les équations linéaires aux différences finies*«, Ann. Mat. pura appl. (3) 13 (1907), S. 263—328):

3. Der oben unter 1. ausgesprochene Satz von Perron bleibt auf Grund von § 2, 3, S. 181—185 auch gültig, wenn man in (55) die Voraussetzung $p_n(s) = 1$ durch

$$\lim_{s\to\infty} p_n(s) = p_n \qquad (p_n \text{ endlich, } p_n(s) \neq 0)$$

ersetzt. Ist dabei

$$p_n = p_{n-1} = \cdots = p_{m+1} = 0 \text{ und } p_m \neq 0 \qquad (0 \leqq m \leqq n),$$

so dass der charakteristischen Gleichung eine $(n-m)$-fache Wurzel im Unendlichen zuzuschreiben ist, dann ist eben für die $(n-m)$ Lösungen der μ-ten Klasse

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|w(s)|} = \infty.$$

Es sei noch angedeutet, wie man aus diesem allgemeinen Ergebnis einige Sätze von Herrn Perron[1] und Herrn Kreuser[2] herleiten kann, die sich auf Differenzengleichungen von der Form

$$(93) \qquad \sum_{i=0}^{n} s^{\lambda_i} h_i(s)\, w(s+i) = 0 \qquad (s \geqq 1;\, h_0(s) \neq 0,\, h_n(s) \neq 0)$$

beziehen. Die Exponenten λ_i sollen dabei reelle Zahlen sein, und für die $h_i(s)$ gelte von einer Stelle $S \geqq 1$ an

$$(94) \qquad 0 < c \leqq |h_i(s)| \leqq C \qquad (c \text{ und } C \text{ konstant}).$$

Es sei m der durch die Beziehungen

Wenn $\sum_{s=0}^{\infty} s^{2R-2}\delta_s$ konvergiert, dann gibt es Lösungen von (90) von der Form $w(s) = \alpha_\varkappa^s \sum_{i=0}^{r_\varkappa - 1} c_i s^i + s^{R-1}\alpha_\varkappa^s o\left(\sum_{\sigma=s}^{\infty} \sigma^{2R-2}\delta_\sigma\right)$, wobei $\alpha_\varkappa$ irgend eine der Wurzeln mit kleinstem Absolutbetrag ist. Man erhält diesen Satz noch etwas verschärft ebenfalls leicht durch sukzessive Approximationen unter Benutzung von (44 a) (Hilfssatz 2).

[1] O. Perron, *Über lineare Differenzengleichungen*, Acta math. 34 (1910), S. 109—137. Es wird daselbst spezieller $|h_i(s)| \to h_i \neq 0$ vorausgesetzt.

[2] P. Kreuser, *Über das Verhalten der Integrale homogener linearer Differenzengleichungen im Unendlichen.* Diss. (Tübingen) Borna-Leipzig 1914.

$$\lambda_m \begin{cases} > \lambda_i \text{ für } i > m \\ \geqq \lambda_i \text{ für } i < m \end{cases}$$

charakterisierte Index; er heisse »Hauptindex». Durch Division durch s^{λ_m} kann man (93) auf die Form

$$\sum_{i=0}^{n} s^{\lambda_i - \lambda_m} h_i(s)\, w(s+i) = 0$$

bringen, wo jetzt die Koeffizienten $s^{\lambda_i - \lambda_m} h_i(s) = p_i(s)$ den Bedingungen (83) in § 2, 3 genügen.

Es gibt daher genau m linear unabhängige Lösungen von (93) mit endlichem $\overline{\lim\limits_{s \to \infty}} \sqrt[s]{|w(s)|}$. Für die übrigen ist, wenn $m < n$ vorausgesetzt wird, $\overline{\lim\limits_{s \to \infty}} \sqrt[s]{|w(s)|} = \infty$.

Genauer ist für diese letzteren sogar

$$\text{(95)} \qquad \overline{\lim_{s \to \infty}} \sqrt[s]{\frac{|w(s)|}{(s\,!)^{\varkappa}}} > 0 \quad \text{mit } \varkappa = \operatorname*{Min}_{i > m} \frac{\lambda_m - \lambda_i}{i - m}.$$

Zum Beweise von (95) machen wir die Substitution

$$\text{(96)} \qquad w(s) = (s\,!)^q\, v(s).$$

Dadurch geht (93) in die Gleichung

$$\text{(97)} \qquad \sum_{i=0}^{n} s^{\lambda'_i} h'_i(s)\, v(s+i) = 0 \text{ mit } \lambda'_i = \lambda_i + q\,i, \quad h'_i(s) = \left(\frac{(s+i)!}{s\,!\, s^i}\right)^q h_i(s)$$

über, deren Koeffizienten wieder Voraussetzungen von der Form (94) genügen.

Solange $q < \varkappa = \operatorname*{Min}\limits_{i > m} \dfrac{\lambda_m - \lambda_i}{i - m}$ ist, bleibt m auch in (97) Hauptindex. Für $q = \varkappa$ dagegen wird ein Index $m_1 > m$ Hauptindex. Es gibt dann genau m_1 linear unabhängige Lösungen von (97) mit endlichem $\overline{\lim\limits_{s \to \infty}} \sqrt[s]{|v(s)|} = \overline{\lim\limits_{s \to \infty}} \sqrt[s]{\dfrac{|w(s)|}{(s\,!)^{\varkappa}}}$.

Da aber — nach Division durch $s^{\lambda'_{m_1}}$ — die Koeffizienten $p'_i(s) = s^{\lambda'_i - \lambda'_{m_1}} h'_i(s)$ für $q = \varkappa$ auch Bedingungen von der Form (86) aus § 2, 3 (mit $m' = m$) genügen, so gibt es weiter unter den Lösungen $v(s)$ mit endlichem $\overline{\lim\limits_{s \to \infty}} \sqrt[s]{|v(s)|}$ genau m

linear unabhängige, für welche dieser Limes superior verschwindet (das sind übrigens diejenigen, für die $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \sqrt[s]{(s!)^{\varkappa}|v(s)|} = \overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|w(s)|}$ endlich ist), während er für die anderen von Null verschieden ist.

So ergibt sich für (93) *die Existenz eines Fundamentalsystems von Lösungen*

$$w_1(s), w_2(s), \ldots, w_m(s);\quad w_{m+1}(s), \ldots, w_{m_1}(s);\quad w_{m_1+1}(s), \ldots, w_n(s) \tag{98}$$

mit

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \sqrt[s]{\frac{|w_\nu(s)|}{(s!)^{\varkappa}}} = \begin{cases} 0 \textit{ für } \nu = 1, 2, \ldots, m, \\ \textit{endlich und } \neq 0 \textit{ für } \nu = m+1, \ldots, m_1, \\ \infty \textit{ für } \nu = m_1 + 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{99}$$

Streben über die Voraussetzung (94) hinaus die $h_i(s)$ für $s \to \infty$ gegen endliche Grenzwerte

$$\lim_{s\to\infty} h_i(s) = h_i \neq 0, \tag{100}$$

dann ist für $q = \varkappa$ der (durch $s^{\lambda'_{m_1}}$ dividierten) Differenzengleichung (97) die charakteristische Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} \gamma_i \alpha^i = 0 \text{ mit } \gamma_i = \begin{cases} h_i, \text{ wenn } \lambda'_i = \lambda'_{m_1} = \lambda'_m \text{ ist,} \\ 0, \text{ wenn } \lambda'_i < \lambda'_{m_1} \text{ ist,} \end{cases}$$

zugeordnet. Diese hat $n - m_1$ Wurzeln im Unendlichen, m Wurzeln sind gleich Null und $m_1 - m$ Wurzeln sind endlich und von Null verschieden. *Es gibt daher nach dem allgemeinen Perronschen Satz speziell ein Fundamentalsystem* (98), *dessen Lösungen*

$$w_{m+1}(s), w_{m+2}(s), \ldots, w_{m_1}(s)$$

noch derart in Unterklassen zerfallen, dass für die Lösungen einer jeden Unterklasse und deren lineare Verbindungen $\overline{\lim\limits_{s=\infty}} \sqrt[s]{\frac{|w_\nu(s)|}{(s!)^{\varkappa}}}$ *gleich einem der verschiedenen Beträge der Wurzeln von* $\sum\limits_{i=m}^{m_1} \gamma_i \alpha^{i-m} = 0$ *ist* (*Kreusersche Unterklassen*). (Man braucht übrigens nur für diejenigen Indizes i, für welche $\lambda'_i = \lambda'_{m_1}$ ist, die schärfere Voraussetzung (100) zu machen.)

Die weitere Einteilung der Lösungen mit

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \sqrt[s]{\frac{|w(s)|}{(s!)^{\varkappa}}} = \infty \text{ bzw.} = 0$$

in Klassen geschieht wie bei Herrn Perron, indem man mittels geeigneter Substitutionen von der Form (96) den Hauptindex noch mehr nach links bzw. weiter nach rechts schiebt. Unter der Voraussetzung (100) zerfallen diese Klassen noch in Kreusersche Unterklassen.

Es sei noch erwähnt, dass für die Indizes i, die bei keiner derartigen Substitution Hauptindex werden, also z. B. oben für $i = m+1, m+2, \ldots, m_1 - 1$, anstelle von (94) nur die Voraussetzung

$$|h_i(s)| \leqq C$$

erfüllt zu sein braucht. Es hängt von den λ_i ab, welche i das sind. Den Fall, dass ein $h_i(s)$ identisch verschwindet, kann man so mit erledigen, indem man λ_i gleich $-\infty$ setzt.

§ 4. Die Gleichung 1. Ordnung; Beispiele.

An Hand der Differenzengleichung 1. Ordnung

$$u(s+1) - \alpha(s)\,u(s) = \varphi(s) \tag{101}$$

mit

$$\alpha(s) \neq 0, \ \lim_{s\to\infty} \alpha(s) = \alpha \neq 1, |\alpha| = 1 \ \text{ und } \lim_{s\to\infty} \varphi(s) = b$$

soll noch gezeigt werden, dass der Zusatz zu Satz IV (und ebenso natürlich auch Satz V) nicht mehr allgemein gilt, wenn (71) nicht erfüllt ist. Man braucht dabei wieder nur den Fall $\lim\limits_{s\to\infty} \varphi(s) = b = 0$ betrachten, da der allgemeine Fall durch die Substitution $u(s) = v(s) + \dfrac{b}{1-\alpha}$ auf diesen zurückgeführt werden kann.

Aus (101) gewinnt man, $\alpha(s) = \alpha_s$ gesetzt,

$$\bar{u}(s) = \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{s-1}\left(u(0) + \frac{\varphi(0)}{\alpha_0} + \frac{\varphi(1)}{\alpha_0\alpha_1} + \cdots + \frac{\varphi(s-1)}{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{s-1}}\right). \tag{102}$$

Wir unterscheiden die Fälle

A. Es ist $\lim\limits_{s\to\infty} \frac{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{s-1}}{\alpha^s} = h \neq 0$ (h endlich),

B. Es ist $\lim\limits_{s\to\infty} \frac{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{s-1}}{\alpha^s} = \lim\limits_{s\to\infty} \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{s-1} = 0$,

C. $\frac{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{s-1}}{\alpha^s}$ strebt keinem endlichen Grenzwert zu.

Mittels einer Lösung $u_1(s)$ von (101) lassen sich die anderen in der Form

$$u(s) = u_1(s) + C \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{s-1}$$

schreiben. Nimmt man für $u_1(s)$ unter der Voraussetzung $b = 0$ speziell eine nullstrebige Lösung, so sieht man, dass in den Fällen A und C (101) höchstens *eine* derartige Lösung haben kann. Im Falle B dagegen streben entweder alle Lösungen gegen Null oder keine einzige.

Im Falle A und ebenso in allen Fällen mit

$$0 < c_1 \leqq |\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_s| < c_2 \qquad (c_1, c_2 \text{ konstant})$$

ist für die Existenz einer nullstrebigen Lösung notwendig und hinreichend, dass

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\varphi(s)}{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_s} \tag{103}$$

konvergiert; diese Lösung ist dann

$$u(s) = -\sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{\varphi(s+\sigma)}{\alpha_s \alpha_{s+1} \cdots \alpha_{s+\sigma}}. \tag{104}$$

Hinreichend ist (103) auch, wenn die α_s einer Relation

$$|\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_s| < c$$

mit konstantem c genügen (also z. B. im Falle B), notwendig dagegen, wenn $0 < c \leqq |\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_s|$ gilt (u. a. im Falle $\lim\limits_{s\to\infty} |\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_s| = \infty$).

In allen Fällen existieren übrigens nullstrebige Lösungen sicher, wenn $\varphi(s)$ einer Bedingung

$$|\varphi(s)| < C \vartheta^s$$

genügt, wo $\vartheta < 1$ und C Konstanten sind.

Abweichungen gegenüber der Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\bar{u}(s+1) - \alpha\,\bar{u}(s) = \varphi(s) \tag{105}$$

weist also vor allem Fall B auf. Hier ist auch die Bedingung (71) (mit $l = 1$) tatsächlich nicht erfüllt. Die Fälle, in denen (71) zutrifft, gehören alle unter Fall A. Doch ist es auch im Fall A möglich, dass (101) und (105) nicht gleichzeitig nullstrebige Lösungen haben (vgl. die Beispiele 3 und 4).

Beispiele:

1.) a) $$u(s+1) + \left(1 + \frac{1}{(s+1)^2}\right) u(s) = \frac{1}{s+1},$$

b) $$\bar{u}(s+1) + \bar{u}(s) = \frac{1}{s+1} \qquad (\alpha = -1;\ \varphi(s) \to 0).$$

a) und b) haben je eine nullstrebige Lösung.

2.) a) $$u(s+1) + \left(1 + \frac{1}{(s+1)^2}\right) u(s) = \frac{(-1)^s}{s+1},$$

b) $$\bar{u}(s+1) + \bar{u}(s) = \frac{(-1)^s}{s+1}.$$

a) und b) haben keine nullstrebige Lösungen.

1.) und 2.) sind Beispiele, in denen (71) erfüllt ist.

3.) a) $$u(s+1) + \left(1 + \frac{(-1)^s}{s+1}\right) u(s) = 1,$$

b) $$\bar{u}(s+1) + \bar{u}(s) = 1 \qquad (\alpha = -1;\ \varphi(s) \to 1).$$

Wegen $\alpha_s = -\dfrac{s+1+(-1)^s}{s+1}$ ist $\alpha_0\,\alpha_1 \cdots \alpha_s = (-1)^{s+1}$ oder $= (-1)^{s+1}\left(1 + \dfrac{1}{s+1}\right)$, je nachdem s ungerade oder gerade ist. Die Gleichung a) fällt also unter Fall A. Sie hat keine Lösung mit endlichem Grenzwert; denn die Substitution $u(s) = v(s) + \dfrac{1}{2}$ führt a) über in

$$v(s+1) + \left(1 + \frac{(-1)^s}{s+1}\right) v(s) = \frac{(-1)^{s+1}}{2\,(s+1)},$$

und wegen $\sum_{\sigma=0}^{s} \frac{\varphi(\sigma)}{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_\sigma} = \sum_{\sigma=0}^{s} \frac{1}{2(\sigma+1)} + o(1)$ konvergiert die Reihe (103) nicht.

b) dagegen hat die Lösung $\bar{u}(s) = \frac{1}{2}$ mit $\lim_{s \to \infty} \bar{u}(s) = \frac{1}{2}$.

4.) a) $$u(s+1) + \left(1 + \frac{(-1)^s}{s+1}\right) u(s) = 1 + \frac{(-1)^s}{2(s+1)},$$

b) $$\bar{u}(s+1) + \bar{u}(s) = 1 + \frac{(-1)^s}{2(s+1)} \qquad (\alpha = -1;\ \varphi(s) \to 1).$$

Hier hat a) als Lösung mit endlichem Grenzwert $u(s) = \frac{1}{2}$. b) dagegen hat keine derartige Lösung.

5.) a) $$u(s+1) + \left(1 - \frac{1}{s+2}\right) u(s) = 0,$$

b) $$\bar{u}(s+1) + \bar{u}(s) = 0 \qquad (\alpha = -1;\ \varphi(s) \to 0).$$

Wegen $\alpha_s = -\left(1 - \frac{1}{s+2}\right)$ ist $\lim_{s \to \infty} |\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{s-1}| = \lim_{s \to \infty} \frac{1}{s+2} = 0$, und es liegt Fall B vor; a) hat nur nullstrebige Lösungen, b) die einzige $\bar{u}(s) = 0$.

6.) a) $$u(s+1) + \left(1 - \frac{1}{s+2}\right) u(s) = \frac{(-1)^s}{(s+2)\log(s+2)},$$

b) $$\bar{u}(s+1) + \bar{u}(s) = \frac{(-1)^s}{(s+2)\log(s+2)} \qquad (\alpha = -1;\ \varphi(s) \to 0).$$

Da $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s+2)\log(s+2)}$ divergiert, hat b) keine nullstrebige Lösung, a) dagegen hat nur nullstrebige Lösungen; denn es ist

$$\sum_{\sigma=0}^{s-1} \frac{\varphi(\sigma)}{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_\sigma} = -\sum_{\sigma=0}^{s-1} \frac{1}{\log(\sigma+2)} = o(s),$$

$$u(s) = \frac{(-1)^s}{(s+1)} \left(u(0) + \sum_{\sigma=0}^{s-1} \frac{\varphi(\sigma)}{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_\sigma} \right) = o(1).$$

§ 5. Die Differenzengleichung mit beliebig reeller oder komplexer Veränderlicher.

Auch bei der Gleichung (54) mit nicht konstanten Koeffizienten kann man die Variable s, die jetzt wieder x heisse, beliebig reell oder komplex annehmen, wobei $\varphi(x)$ etwa für $x \geqq 0$ bzw. in einem nach rechts offenen Halbstreifen parallel der reellen Achse definiert sein möge. Man kann dann auf die Lösungen $u(x)$ der Gleichung

$$(54) \qquad \sum_{i=0}^{n} p_i(x)\, u(x+i) = \varphi(x) \qquad (p_n(x) = 1, p_0(x) = 0)$$

den Satz IV auf jeder Restklasse $(x_0 + s)$ anwenden, auf der seine Voraussetzungen erfüllt sind. Dabei können die Grenzwerte $\lim\limits_{s\to\infty} p_i(x_0+s) = p_i(x_0)$ noch von der Restklasse abhängen.

Man kann leicht einen Teil der in I, § 3, 1—3, S. 156—161 angestellten Überlegungen übertragen. So ergibt sich z. B.

Satz VIII. *In einem Halbstreifen $\Re x \geqq c, c_1 \leqq \Im x \leqq c_2$ seien die Koeffizienten $p_i(x)$ von (54*) reguläre Funktionen, die gleichmässig auf allen Restklassen (x_0+s) für $s \to \infty$ gegen von x_0 unabhängige Grenzwerte p_i streben. Die Wurzeln α_ν der charakteristischen Gleichung (58) seien alle ausserhalb des Einheitskreises gelegen. Wenn dann $\varphi(x)$ regulär und beschränkt ist, so gibt es genau eine reguläre, beschränkte Lösung von (54*). Auf jeder Restklasse (x_0+s), wo $\varphi(x_0+s) \to b(x_0)$ für $s \to \infty$, zeigt diese Lösung das Verhalten*

$$\lim_{s\to\infty} u(x_0+s) = \frac{b(x_0)}{\sum\limits_{i=0}^{n} p_i}.$$

Unter diesen Voraussetzungen schliessen sich nämlich bei der Gewinnung dieser Lösung durch sukzessive Approximationen die auf den einzelnen Restklassen gefundenen Funktionen $v^{(k)}(x_0+s)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ nach Satz III für jedes k zu einer regulären Funktion $v^{(k)}(x)$ zusammen, und wegen der Beschränktheit von $\varphi(x)$ und der gleichmässigen Konvergenz der $p_i(x) \to p_i$ konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{(k)}(x) = u(x)$$

in der Umgebung eines jeden x des Halbstreifens gleichmässig.

Als Beispiel — das aber nicht ganz unter Satz VIII fällt — betrachten wir noch die Differenzengleichung

$$(a x+b) u(x+1)+(c x+d) u(x)=\varphi(x)$$

mit
$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|\varphi(x+s)|}=l(x)<\left|\frac{c}{a}\right|,$$

oder für $x \neq -\frac{b}{a}$ die Differenzengleichung

$$u(x+1)+\frac{c x+d}{a x+b} u(x)=\frac{\varphi(x)}{a x+b}. \tag{106}$$

Hier gilt, und zwar in jedem Halbstreifen etwa mit $\Re x>-\frac{b}{a}+1$ auf allen Restklassen x_0+s gleichmässig,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{c(x_0+s)+d}{a(x_0+s)+b}=\frac{c}{a}.$$

Die Substitution $u(x)=v(x) q^x=v(x) e^{x \log q}$ führt (106) über in

$$v(x+1)+\frac{c x+d}{(a x+b) q} v(x)=\frac{\varphi(x)}{(a x+b) q^{x+1}}. \tag{107}$$

Wählt man q der Bedingung $l(x_0)<q<\left|\frac{c}{a}\right|$ entsprechend, so gilt auf der Restklasse (x_0+s)

$$\lim_{s\to\infty} \frac{c(x_0+s)+d}{(a(x_0+s)+b) q}=\frac{c}{a q}=\alpha, |\alpha|>1 \text{ und} \lim_{s\to\infty} \frac{\varphi(x_0+s)}{(a(x_0+s)+b) q^{x_0+s+1}}=0.$$

Man findet so ähnlich wie in I, § 3, 2, S. 159, dass (106) genau eine Lösung $u(x)$ mit dem Verhalten

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \sqrt[s]{|u(x+s)|}=l(x)<\left|\frac{c}{a}\right|$$

hat. Nach der entsprechend auch hier geltenden Gleichung (104) ist das die Lösung

$$u(x)=-\sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}(x+\sigma)}{\alpha(x) \alpha(x+1) \cdots \alpha(x+\sigma)} \tag{108}$$

mit
$$\alpha(x) = -\frac{cx+d}{ax+b} \quad \text{und} \quad \bar{\varphi}(x) = \frac{\varphi(x)}{ax+b}.$$

Sobald diese Reihe gleichmässig konvergiert, ist bei regulärem $\varphi(x)$ auch $u(x)$ im ganzen Halbstreifen[1] regulär.

Ist $\varphi(x)$ weiter ganz, so ist durch (108) bei gleichmässiger Konvergenz der Reihe zunächst eine meromorphe Lösung gegeben. Von dieser kann man dann wie in I, § 3, 2, S. 161 zu einer ganzen Lösung von (106) übergehen.

---

[1] Das deckt sich ungefähr mit einem der Ergebnisse von Herrn E. HILB (*Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen*, Math. Ztschr. 14 (1922), S. 211—229, insbes. S. 214).