SUR LES VALEURS EXCEPTIONNELLES DES FONCTIONS DÉRIVÉES ET LE THÉORÈME DE M. SAXER.

Par

THÉODORE VAROPOULOS

à PARIS.

1. On doit à M. Saxer[1] des propositions remarquables concernant les fonctions entières d'ordre quelconque, et en particulier la suivante:

Soit $g(x)$ *une fonction entière, et considérons ses deux premières dérivées* $g'(x)$, $g''(x)$; *s'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de* x *qui annulent l'une des fonctions* $g(x), g'(x), g''(x)$ *sans annuler les autres, la fonction* $g(x)$ *a nécessairement la forme*

$$g(x) = p(x)e^{q(x)}$$

$p(x), q(x)$ *étant des polynomes.*

M. Saxer, pour démontrer cette proposition, s'appuie sur *l'impossibilité d'une identité de la forme*

$$\alpha(x)e^{f_1(x)} + \beta(x)e^{f_2(x)} + \gamma(x)f_1'(x) + \delta(x) = 0,$$

$\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \delta(x)$ *étant des polynomes et* $f_1(x), f_2(x)$ *des fonctions entières, si l'on a à la fois*

$$a(x) \not\equiv 0, \quad f_1(x) \not\equiv \text{const.}$$

2. Dans ce qui suit j'établis, suivant les indications de M. Montel, quelques propositions concernant les valeurs exceptionnelles des fonctions entières et d'une classe de fonctions méromorphes et ensuite j'expose une démonstration du théorème de M. Saxer basée sur le lemme suivant.

---

[1] *Ueber die Picardschen Ausnahmewerte sukzessiver Derivierten.* Math. Zeitschrift t. 17 (1923), p. 206—227 (Thèse, Zürich 1923).

I. **Théorème**: *Si une fonction entière $g(x)$ admet la valeur a comme valeur exceptionnelle* (au sens de MM. Picard, Borel) *sa dérivée $g'(x)$ admettra* o *comme valeur exceptionnelle* (au sens de M. Borel) *seulement.*

En effet, la fonction entière $g(x)$ se mettra sous la forme

$$g(x) = a + p(x)\, e^{Q(x)},$$

$p(x)$ étant un polynome si la valeur a est exceptionnelle au sens de M. Picard ou une fonction d'ordre inférieur à celui de la fonction $g(x)$ si la valeur a est exceptionnelle au sens de M. Borel.

Il vient

$$g'(x) = [p'(x) + p(x)\, Q'(x)]\, e^{Q(x)};$$

il est évident que l'ordre de la croissance de la fonction $p'(x) + p(x)\, Q'(x)$ est inférieur à celui de la fonction $g(x)$. Or, M. Valiron a démontré que l'ordre de la dérivée $g'(x)$ est le même que celui de la fonction $g(x)$.[1]

On voit donc que la valeur o est bien une valeur exceptionnelle pour la dérivée au sens large du mot exceptionnel (au sens de M. Borel).

II. Le théorème restera vrai *si on l'applique à une fonction entière divisée par un polynome* c'est-à-dire à une fonction de la forme $\varphi = \dfrac{f(x)}{p(x)}$.

En effet il suffit de montrer qu'une telle fonction ne saurait pas admettre deux valeurs exceptionnelles a, b. S'il en était ainsi on aurait

$$f(x) = a p(x) + f_1(x)\, e^{\varphi_1(x)}$$

$$f(x) = b p(x) + f_2(x)\, e^{\varphi_2(x)}$$

ce qui nous conduirait à l'identité

$$(b - a)\, p(x) = f_1(x)\, e^{\varphi_1(x)} - f_2(x)\, e^{\varphi_2(x)}, \qquad (a \neq b)$$

où $p(x)$ est un polynome $\not\equiv$ o, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ des fonctions entières non constantes, $f_1(x)$, $f_2(x)$ des fonctions entières d'ordre inférieur à celui de $f(x)$.

Une telle identité est impossible.

III. *Considérons une fonction de la forme $\dfrac{f(x)}{g(x)}$; $f(x), g(x)$ étant des fonctions méromorphes. Si elle admet la valeur a comme exceptionnelle au sens de MM. Picard, Borel alors la fonction $f(x)\, g'(x) - f'(x)\, g(x)$ admettra nécessairement la valeur zéro*

[1] *Sur les zéros des fonctions entières d'ordre infini* (C. R. 21 mars 1921, t. 172, pp. 741—744).

comme valeur exceptionnelle[1] *lorsque* $f(x)$ *et* $g(x)$ *ont des ordres de croissance différents.*

Nous pouvons toujours supposer sans nuire à la généralité que l'ordre de la fonction $f(x)$ est supérieur à celui de $g(x)$. À cet effet nous n'avons qu'à prendre $\dfrac{\dfrac{1}{g(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}$ *à la place de* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Notre fonction se mettra sous la forme

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a + \frac{f_1(x)}{g(x)} e^{\varphi(x)}$$

$f_1(x)$ *etant une fonction entière qui croît moins vite que* $f(x)$ et $\varphi(x)$ une fonction entière.

Il vient

$$\frac{f'g - fg'}{g^2} = \left[\frac{f_1'g - f_1g'}{g^2} + \frac{f_1\varphi'}{g}\right] e^{\varphi(x)}$$

d'où

$$f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x) = [f_1'g - f_1 g' + g f_1 \varphi'] e^{\varphi(x)}$$

et comme l'ordre de la fonction $f_1'g - f_1g' + gf_1\varphi'$ est inférieur à celui de $f'g - fg'$ on voit que la valeur o est bien une valeur exceptionnelle au sens large du mot exceptionnel.

IV. *Sous les mêmes conditions la fonction* $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *admettra la valeur* a *comme valeur exceptionnelle au sens de M. Borel.*

En effet nous avons

$$f(x) = a g(x) + f_1(x) e^{\varphi_1 x}$$

par conséquent

$$f'(x) = a g'(x) + [f_1'(x) + f_1 \varphi_1'(x)] e^{\varphi_1(x)}$$
$$f'(x) = a g'(x) + f_2(x) e^{\varphi_1(x)}$$

$f_2(x)$ designant une fonction qui croît moins vite que $f(x)$, donc

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = a + \frac{f_2(x)}{g'(x)} e^{\varphi_1(x)}$$

et la valeur a est bien une valeur exceptionnelle pour la fonction $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ au sens de M. Borel.

[1] Au sens de M. Borel.

V. Voici maintenant comment on arrive à obtenir la proposition de M. Saxer.

Considérons les trois fonctions $g(x), g'(x), g''(x)$ et supposons qu'elles n'ont pas de racines *non* communes. Nous pouvons poser

$$g(x) = \varphi(x) e^{\sigma_1(x)}$$

$$g'(x) = \varphi(x) e^{\sigma_2(x)}$$

$$g''(x) = \varphi(x) e^{\sigma_3(x)}$$

$\varphi(x), \sigma_1(x), \sigma_2(x), \sigma_3(x)$ désignant des fonctions entières. On en déduit

$$\frac{g'}{g} = e^{f_1(x)}, \quad \frac{g''}{g'} = e^{f_2(x)}; \quad f_1 \equiv \sigma_2 - \sigma_1, \quad f_2 \equiv \sigma_3 - \sigma_2$$

et en éliminant g il vient

$$e^{f_2(x)} - e^{f_1(x)} = f_1'(x)$$

ce qui nous fournit

$$1 - e^{f_2 - f_1} = [e^{-f_1}]'.$$

Une telle expression est impossible si $f_1 \not\equiv$ const. car la fonction e^{-f_1} admettant la valeur o comme valeur exceptionnelle sa dérivée ne peut admettre autre valeur exceptionnelle que la valeur o selon la proposition I.

Donc

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \text{const.}$$

et alors notre fonction entière $g(x)$ serait de la forme

$$g(x) = e^{\lambda x + \mu}$$

λ, μ étant des constantes.

Supposons maintenant que les trois fonctions g, g', g'' ont les mêmes racines sauf un nombre fini de racines qui ne sont pas communes, nous pouvons alors poser

$$g(x) = p(x)\varphi(x) e^{\sigma_1(x)}$$

$$g'(x) = q(x)\varphi(x) e^{\sigma_2(x)}$$

$$g''(x) = r(x)\varphi(x) e^{\sigma_3(x)}$$

p, q, r étant des polynomes; φ, σ_1, σ_2, σ_3 désignant des fonctions entières.

On en déduit

$$\frac{g'}{g} = \frac{q(x)}{p(x)} e^{f_1(x)}, \quad \frac{g''}{g'} = \frac{r(x)}{q(x)} e^{f_2(x)}$$

avec

$$f_1(x) \equiv \sigma_2 - \sigma_1, \quad f_2(x) \equiv \sigma_3 - \sigma_2.$$

En prenant la dérivée logarithmique des deux membres de la première égalité, il vient

$$\frac{g''}{g'} - \frac{g'}{g} = \frac{q'}{q} - \frac{p'}{p} + f_1'(x)$$

c'est-à-dire

$$\frac{r}{q} e^{f_2} - \frac{q}{p} e^{f_1} = \frac{q'}{q} - \frac{p'}{p} + f_1'(x) \cdot$$

En multipliant les deux membres par $-\frac{p}{q} e^{-f_1(x)}$ nous obtenons

$$1 - \frac{pr}{q^2} e^{f_2 - f_1} = \left[\frac{p'q - pq'}{q^2} - \frac{p}{q} f_1'(x)\right] e^{-f_1(x)}$$

$$\left[\frac{p}{q} e^{-f_1(x)}\right]' = 1 - \frac{pr}{q^2} e^{f_2 - f_1}.$$

Le cas où $f_2 - f_1 \not\equiv$ const. ne peut pas se présenter car la fonction $\frac{p}{q} e^{-f_1(x)}$ qui est une fonction entière divisée par un polynome admet la valeur *zéro* comme valeur exceptionnelle et alors sa dérivée selon la proposition II ne peut admettre autre valeur exceptionnelle que la valeur 0, or si $f_1 - f_2$ était différent d'une constante la dérivée admettrait la valeur 1 alors qu'elle admet déjà la valeur 0 comme valeur exceptionnelle.

Examinons le cas où $f_2 - f_1 \equiv$ const.

Nous avons

$$\left[\frac{p}{q} e^{-f_1(x)}\right]' \equiv \text{ fonction rationnelle}$$

et alors

$$\frac{p}{q} e^{-f_1(x)} \equiv P(x) + \log Q(x)$$

$P(x)$ étant rationnelle et $Q(x)$ de la forme

$$Q(x) = \Pi (x - a_\nu)^{\alpha_\nu}$$

les α_ν étant des nombres complexes quelconques comme il nous l'a remarqué M. Nörlund.

De notre identité résulte que $Q(x)$ se réduit à une constante et alors

$$f_1(x) = \text{const.},$$

par conséquent le quotient $\frac{g'}{g}$ se réduit à une fonction rationnelle.

Donc, en intégrant

$$\log g(x) = B(x) + \log A(x)$$

$B(x)$ étant rationnelle et $A(x)$ de la forme

$$A(x) = \Pi (x - a_\nu)^{\alpha_\nu}$$

α_ν étant des nombres complexes quelconques. Par conséquent

$$g(x) = \{\Pi (x - a_\nu)^{\alpha_\nu}\} e^{B(x)}$$

et comme la fonction $g(x)$ est supposée entière alors la rationnelle $B(x)$ doit se réduire à un polynome.

Notons que les trois fonctions $g(x), g'(x), g''(x)$ ont bien un nombre fini de racines non communes lorsque $g(x)$ est de la forme

$$\{\Pi (x - a_\nu)^{\alpha_\nu}\} e^{B(x)}$$

$B(x)$ étant un polynome et les α_ν des nombres complexes quelconques.

VI. **Théorème.** *Soit une fonction entière $g(x)$ et $g'(x)$ sa dérivée. S'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de x qui annulent l'une des fonctions $g(x), g'(x)$ sans annuler l'autre, le nombre des racines communes est fini.*

En effet, puisque le nombre des racines non communes est fini les fonctions $g(x), g'(x)$ peuvent se mettre sous la forme

$$g(x) = p(x)\, \varphi(x)\, e^{f_1(x)}$$

$$g'(x) = q(x)\, \varphi(x)\, e^{f_2(x)}$$

$p(x), q(x)$ étant des polynomes; $\varphi(x), f_1(x), f_2(x)$ désignant des fonctions entières.

Il est facile de montrer que $\varphi(x)$ a un nombre fini de racines, c'est-à-dire qu'il est de la forme

$$r(x)\, e^{Q(x)}.$$

En effet, nous avons

$$\frac{g'(x)}{g(x)} \equiv \frac{q(x)}{p(x)} e^{f_2 - f_1} = \frac{p'(x)}{p(x)} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + f_1'(x),$$

on voit donc que $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ n'admet qu'un nombre fini de pôles, par conséquent la fonction $\varphi(x)$ ne peut admettre qu'un nombre fini de zéros.

Cette proposition peut encore s'énoncer de la manière suivante: *Considérons une fonction entière $g(x)$ et sa dérivée $g'(x)$. Si le nombre des racines non communes des fonctions $g(x), g'(x)$ est fini, le nombre des racines communes est aussi fini.*

Paris, Décembre 1925.