HAUPTLÖSUNGEN VON DIFFERENZENGLEICHUNGEN.

Von

S. BOCHNER

in MÜNCHEN.

Inhaltsverzeichnis.

§ 1. Fragestellung 1
§ 2. Eine Summenformel 7
§ 3. Die Speziallösungen 13
§ 4. Ein Kompositionssatz für Speziallösungen 16

§ 1. Fragestellung.

1. Wir betrachten Differenzengleichungen

$$c_0\,\varphi(x)+c_1\,\varphi(x+\delta_1)+c_2\,\varphi(x+\delta_2)+\cdots+c_p\,\varphi(x+\delta_p)=g(x) \tag{1}$$

mit irgendwelchen reellen Differenzen δ_ν, $0<\delta_1<\delta_2<\cdots<\delta_p$, und irgendwelchen reellen oder komplexen Koeffizienten $c_\nu \neq 0$. Die linke Seite von (1) werden wir zur Abkürzung mit $\varDelta\varphi$ bezeichnen und werden demnach schreiben

$$\varDelta\varphi = g(x).$$

Von der gegebenen Funktion $g(x)$ setzen wir vorderhand nur voraus, dass sie auf einer Halbgraden $x \geqq a$, wo a eine festgewählte reelle Zahl bedeutet, definiert ist; späterhin werden wir sie geeigneten Bedingungen unterwerfen. Damit eine Funktion $\varphi(x)$ als Lösung von (1) in Frage kommt, werden wir von ihr in erster Linie verlangen, dass sie gleichfalls für $x \geqq a$ definiert ist, und dass sie daselbst für jeden Punkt x der Gleichung (1) genügt. Solcher Lösungen gibt es immer, d. h.

im Falle einer jeden Gleichung (1), unendlich viele.[1] Es entsteht das Problem, für passend eingeschränkte $g(x)$ unter den Lösungen eine — wir werden für sie

$$L(g) = L_\Delta(g)$$

schreiben — sinngemäss auszuzeichnen.

2. Man kann verschiedenartige Gesichtspunkte für die Auswahl von $L(g)$ geltend machen, und demgemäss zu verschiedenen ausgezeichneten Lösungen gelangen. Für uns wird, nach dem Vorbild von Herrn N. E. Nörlund (vgl. weiter unten), der folgende Sachverhalt massgebend sein. Ist $g(x)$ ein Polynom in x, $g(x) = \pi(x)$, so kommt unter den Lösungen von (1) ein Polynom $\Phi_\pi(x)$ vor (vgl. § 2), welches in einem gleich zu präzisierenden Sinne sogar eindeutig ist. Einem jeden Ausdruck $\Delta\varphi$ läst sich ein »Index» k zuordnen[2], welcher einen der Werte $0, 1, 2, 3, \ldots$ hat und durch die folgende Eigenschaft gekennzeichnet ist. Jedes Polynom $(k-1)$-ten Grades, aber kein Polynom höheren Grades genügt der »homogenen» Gleichung

$$\Delta\varphi = 0.$$

Jedem Polynom $\pi(x)$ vom n-ten Grade entspricht als Lösung von (1) ein Polynom $\Phi_\pi(x)$ vom $(n+k)$-ten Grade, welches bis auf ein willkürliches additives Polynom $(k-1)$-ten Grades[3] eindeutig bestimmt ist. In funktionentheoretischer Hinsicht ist es das Natürlichste, im Falle $g(x) = \pi(x)$ die Funktion $\Phi_\pi(x)$ zur ausgezeichneten Lösung zu machen, und für allgemeinere $g(x)$ eine Funktion $L(g)$ anzustreben, welche sich auf Grund passender Erhaltungsvorschriften als »funktionale Fortsetzung» von Φ_π auffassen lässt, gemäss dem folgenden

Postulat. *Die Klasse $G = G_\Delta$ der Funktionen $g(x)$, für welche $L(g)$ definiert ist, umfasst alle Polynome. Die Lösung $L(g)$ stimmt für polynomiales $g(x)$, $g(x) = \pi(x)$, mit Φ_π überein, und ist auch für allgemeine $g(x)$ bis auf ein willkürliches Polynom $(k-1)$-ten Grades eindeutig bestimmt.*

---

[1] Schreibt man nämlich (1) in der Form

$$\varphi(x+\delta_p) = \frac{1}{c_p}\{g(x) - c_0\varphi(x) - c_1\varphi(x+\delta_1) - \cdots - c_{p-1}\varphi(x+\delta_{p-1})\},$$

so erkennt man leicht, dass jede in $a \leqq x < a + \delta_p$ gegebene Funktion in solcher Weise auf dem Intervall $a + \delta_p \leqq x < \infty$ ergänzt werden kann, dass eine Lösung unserer Gleichuug herauskommt.

[2] Wir werden mit dem Buchstaben k durchweg diesen Index bezeichnen.

[3] Für $k = 0$ verstehen wir darunter die Funktion identisch null; in diesem Falle herrscht also Eindeutigkeit im engeren Sinne.

3. Von verschiedenen diesem Postulat genügenden Lösungen wird man derjenigen den Vorzug geben, für welche möglichst viele Eigenschaften von Φ_π erhalten bleiben. (Zu diesen gehört in erster Linie das Gesetz der Additivität[1] und etwa in zweiter Linie das in § 4 erörterte Kompositionsgesetz.) Dies legt den Gedanken nahe, unser Postulat durch weitere passende Forderungen zu ergänzen, welche zusammengenommen eine (im wesentlichen) eindeutige Funktion $L(g)$ charakterisieren. Wir werden im folgenden nicht ganz so, aber doch ähnlich verfahren. Wir werden nicht allgemeine Eigenschaften axiomatisch voranstellen, sondern werden eine, mehr direkte, konstruktive Möglichkeit zur »funktionalen Fortsetzung» von Φ_π uns zunutze machen, u. z. die folgende.

4. Ist $g(x)$ ein Polynom $\pi(x)$ von n-ten Grade, so hat man für $L(g)=\Phi_\pi$ die Darstellung (vgl. § 2)

$$L(g)=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{P_\nu}{\nu!}\bar{g}^{(\nu)}(x), \qquad \left(g^{(\nu)}(x)=\frac{d^{(\nu)}\bar{g}}{dx^\nu}\right); \tag{2_1}$$

hierin sind $P_0, P_1, \ldots$ eine Folge von Konstanten, welche in eindeutiger Weise von $\varDelta\varphi$ abhängen und m irgendeine Zahl $\geqq n$; und der Querstrich von $\bar{g}(x)$ soll den Übergang zu irgendeiner Funktion bedeuten, deren k-te Ableitung mit $g(x)$ übereinstimmt.[2] Die Formel (2_1) entsteht für $h=0$ aus der allgemeineren Formel

$$L(g(x+h))=\sum_{\nu=0}^{m}\frac{P_\nu(h)}{\nu!}\bar{g}^{(\nu)}(x), \tag{2_2}$$

in welcher h irgendeinen festen Parameterwert aus $-\infty<h<\infty$ und $P_\nu(h)$ das mit den Konstanten P_μ gebildete Polynom

$$P_\nu(h)=P_0+\binom{\nu}{1}P_1h+\binom{\nu}{2}P_2h^2+\cdots+\binom{\nu}{\nu}P_\nu h^\nu \tag{3}$$

bedeutet. Im Falle $\varDelta\varphi\equiv\varphi$, in welchem die Gleichung (1) die Gestalt $\varphi(x)=g(x)$

---

[1] Darunter verstehen wir folgendes: Gehören g_1 und g_2 zu $G_\varDelta$, so gehört auch die mit beliebigen Konstanten γ_1 und γ_2 gebildete Funktion $\gamma_1 g_1+\gamma_2 g_2$ dazu, und es ist

$$L(\gamma_1 g_1+\gamma_2 g_2)=\gamma_1 L(g_1)+\gamma_2 L(g_2).$$

[2] Z.B. $\bar{g}(x)=\int\limits_0^x\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}g(t)\,dt$; die Funktion $\bar{g}(x)$ ist also bis auf ein willkürliches Polynom $(k-1)$-ten Grades bestimmt.

hat, ist $P_0 = 1$ und $P_1 = P_2 = \cdots = 0$ und die Formeln (2) reduzieren sich auf $g(x) = g(x)$ und

$$g(x+h) = g(x) + \frac{h}{1!} g'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} g^{(n)}(x)$$

also auf die Taylorsche Reihe. Die Taylorsche Formel besteht aber auch für Nicht-Polynome $g(x)$, wenn man sie mit einem geeigneten Restglied versieht. Dies lässt erwarten, dass auch für allgemeinere $\Delta\varphi$ ein unseren Zwecken entsprechendes Restglied existieren wird. Ein solches ist tatsächlich in der Gestalt des Ausdrucks

$$\int_0^\infty \frac{\overline{P}_{n+k}(-t)}{(n+k)!} g^{(n+1)}(x+t)\,dt \tag{4}$$

vorhanden, in welchem die für $-\infty < \xi < \infty$ definierten Funktionen $\overline{P}_\nu(\xi)$ mit den Polynomen $P_\nu(\xi)$ eng zusammenhängende, durch $\Delta\varphi$ eindeutig bestimmte Funktionen sind.[1] Falls für eine Funktion $g(x)$ bei passendem $n \geqq 0$ das Integral (4) für jedes x aus $x \geqq a$ konvergiert, ist die Funktion

$$\sum_{\nu=0}^{n+k} \frac{P_\nu}{\nu!} \overline{g}^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overline{P}_{n+k}(-t)}{(n+k)!} g^{(n+1)}(x+t)\,dt \tag{5}$$

eine Lösung von (1). Auf Grund dessen (vgl. § 3) kann man ausgezeichnete Lösungen angeben, welche folgender Eigenschaft genügen.[2]

5. **Eigenschaft A.** *Die Lösung $L(g)$ existiert, falls $g(x)$ gewisse Bedingungen $B(B_1, B_2, \ldots)$ erfüllt, die von folgender Art sind:*

---

[1] Die Definition der $\overline{P}_\nu(\xi)$ und demnach auch des Restgliedes (4) versagt im trivialen Fall $\Delta\varphi \equiv c_0\varphi$, der also von der weiteren Betrachtung auszuschliessen ist.

[2] Wir haben uns von Anfang an auf eine rechte Halbebene, $x \geqq a$, festgelegt. Dem Übergang zu einer linken Halbebene, $x \leqq b$, würden eine zu (4) analoge »linksseitige» Restformel und dazugehörige »linksseitige» ausgezeichnete Lösungen entsprechen. Wir müssen die Frage offen lassen, ob man nicht, abgesehen von dieser Zweideutigkeit, durch eine andere Fassung des Restgliedes zu wesentlich anderen ausgezeichneten Lösungen gelangen könnte. Allerdings scheinen die in der Literatur (über spezielle $\Delta\varphi$) vorkommenden Restglieder nur vom Typus des unsrigen zu sein.

Man kann die Formeln (2) auch in der Weise für nicht-polynomiale $g(x)$ erschliessen, dass man in ihnen, unter der Voraussetzung dass $g(x)$ unbeschränkt oft differentiierbar ist, den Übergang $n \to \infty$ vornimmt, also eine unendliche Reihe ohne Restglied zugrundelegt. Diese für spezielle $\Delta\varphi$ geläufige Form einer Lösung werden wir nicht betrachten, weil sie einerseits mehr im Falle von analytischen Funktionen zur Geltung kommt und andererseits auf ganz allgemeine linear-distributive mit der Differentiation vertauschbare Operationen (vgl. etwa PINCHERLE und AMALDI, Operazioni distributive, 1901) und nicht nur auf die von uns betrachteten $\Delta\varphi$ zugeschnitten ist.

α) *Die Bedingungen sind erfüllt, falls $g(x)$ ein Polynom ist.*

β) *Es gibt ein n, so dass $L(g)$ durch (5) dargestellt wird, also bis auf ein Polynom $(k-1)$-ten Grades eindeutig bestimmt ist.*

6. Unsere Lösung $L(g)$ für allgemeine $\varDelta\varphi$ ist aus der von Herrn Nörlund aufgestellten »Hauptlösung» entstanden (vgl. zum Ganzen sein Buch: Vorlesungen über Differenzenrechnung, Kap. II, III, VI und VII, und dort zitierte Literatur), welche sich auf die Fälle bezieht

$$\varDelta\varphi = \frac{1}{2}\{\varphi(x) + \varphi(x+1)\} \tag{6_1}$$

$$\varDelta\varphi = \varphi(x) - \varphi(x+1), \tag{7_1}$$

und ihre Verallgemeinerungen

$$\varDelta\varphi = \frac{1}{2^v}\left\{\varphi(x) + \sum_{\alpha=1}^{v}\varphi(x+\omega_\alpha) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha \neq \beta}\varphi(x+\omega_\alpha+\omega_\beta) + \cdots + \varphi(x+\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_v)\right\} \tag{6_2}$$

$$\varDelta\varphi = \frac{1}{\omega_1\,\omega_2\,\ldots\,\omega_v}\left\{\varphi(x) - \sum_{\alpha=1}^{v}\varphi(x+\omega_\alpha) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha \neq \beta}\varphi(x+\omega_\alpha+\omega_\beta) - \cdots \pm \varphi(x+\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_v)\right\} \tag{7_2}$$

(worin $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_v$ irgendwelche Zahlen >0 sind). Für (6) ist $k=0$, für (7) ist $k=1$ bezw. $=v$. Die $P_\nu(h)$ sind in den Fällen (7) einfache bzw. verallgemeinerte Bernoullische Polynome und in den Fällen (6) entsprechend Eulersche Polynome. Die Hauptlösung genügt der Eigenschaft A und stimmt durchaus mit der unsrigen überein, nur dass für (6_2) und (7_2) unsere Bedingungen B etwas allgemeiner als die Nörlundschen sind. Aber der formale Weg zur Hauptlösung ist in der Darstellung von Herrn Nörlund ein wenig vom unsrigen verschieden. Betrachten wir (6_1) und (7_1). Unter den Bedingungen B ist

$$2\,g(x) - 2\,g(x+1) + 2\,g(x+2) - \cdots$$

bzw.

$$C + g(x) + g(x+1) + g(x+2) + \ldots,$$

wo C eine Konstante ist, gleichmässig in jedem endlichen Intervall $a \leqq x \leqq b$, konvergent oder derart summierbar, dass z. B. für (7_1) der Limes

$$S(x) = \lim_{\eta \to 0} S(\eta, x), \quad \eta > 0,$$

$$S(\eta, x) = \int_a^\infty g(t)\, e^{-\eta t}\, dt + \sum_{\nu=0}^{\infty} g(x+\nu)\, e^{-\eta(x+\nu)};$$

existiert. Es ist $S(x) = L(g)$. Analoges gilt in den Fällen (6_2) bzw. (7_2) von

$$C(x) + e_0\, g(x) + e_1\, g(x + \Omega_1) + e_2\, g(x + \Omega_2) + e_3\, g(x + \Omega_3) + \cdots, \tag{8}$$

wo $C(x)$ Null bzw. ein Polynom $(k-1)$-ten Grades ist, und die e und Ω, $(0 < \Omega_1 < \Omega_2 < \cdots \to \infty)$, so beschaffen sind, dass (8) formal, d. h. ohne Rücksicht auf Konvergenzfragen, ihre Gleichung $\Delta \varphi = g$ erfüllt. Auf Grund dessen kann Herr Nörlund, obwohl für ihn im Grunde genommen die funktionen-theoretische Einstellung (Eigenschaft A) massgebend ist seine Hauptlösungen durch den formalen Ansatz einführen, dass sie durch passende Summation von (8) entstehen sollen.

7. Die Reihe (8) ist für jedes $\Delta \varphi$ vorhanden. Wir führen die Hilfsfunktionen $O(t)$ und $H(t)$ ein,

$$O(t) = c_0 + c_1\, e^{\delta_1 t} + c_2\, e^{\delta_2 t} + \cdots + c_p\, e^{\delta_p t} \tag{9}$$

$$O(t) = t^k H(t), \quad H(0) \neq 0, \tag{10}$$

und machen die unwesentliche Voraussetzung

$$H(0) = 1.$$

Die durch (10) definierte Zahl $k \geqq 0$ ist der Index von $\Delta \varphi$. Die e_ν und Ω_ν entstehen durch Ordnen der Reihe

$$\frac{1}{O(t)} \sim \frac{1}{c_0} + \frac{1}{c_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-c_1\, e^{\delta_1 t} - c_2\, e^{\delta_2 t} - \cdots - c_p\, e^{\delta_p t}}{c_0} \right)^n \tag{11}$$

nach den $e^{\Omega t}$:

$$\frac{1}{O(t)} \sim e_0 + e_1\, e^{\Omega_1 t} + e_2\, e^{\Omega_2 t} + e_3\, e^{\Omega_3 t} + \cdots \tag{12}$$

Man kann nun unter Umständen durch Limesbildung (vgl. § 4. 2) oder allgemeiner durch eine passende Summation von (8) eine Funktion erhalten, die als Reihe (5) geschrieben werden kann. Von einer »Hauptlösung» könnte man aber erst dann sprechen, wenn sie im Falle eines beliebigen Polynoms $g(x)$ bestünde.

Da wir diesen Punkt nicht klären werden, wollen wir unsere Lösungen als »Speziallösungen» bezeichnen.

9. Die in § 2 hergeleitete Summenformel stammt von Hermite[1] und ist eine Verallgemeinerung der Summenformeln von Euler-Maclaurin und von Boole. Wir schreiben ihr Restglied in wesentlich abgeänderter Form und bringen für sie, da die Darstellung l. c. sehr knapp ist, eine vollständige Herleitung.

§ 2. Eine Summenformel.

Wir erinnern an § 1. 7.

1. Es sei vorerst $k=0$, also $c_0+c_1+\cdots+c_p=1$. Wir setzen

$$\frac{e^{xt}}{H(t)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{P_\nu(x)}{\nu!}t^\nu \tag{13}$$

$$P_\nu(0)=P_\nu;\ P_0(x)=P_0=1. \tag{14}$$

Also ist

$$\frac{1}{H(t)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{P_\nu}{\nu!}t^\nu. \tag{15}$$

Aus

$$\frac{e^{xt}}{H(t)}=e^{xt}\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu\frac{t^\nu}{\nu!} \tag{16}$$

folgt, vgl. (3),

$$P_n(x)=(P+x)^n, \tag{17}$$

wobei in derartigen symbolischen Ausdrücken nach Auflösen der Klammern P^ν durch P_ν zu ersetzen ist. Aus

$$1=O(t)\frac{1}{H(t)}=(c_0+c_1e^{\delta_1 t}+\cdots+c_pe^{\delta_p t})\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu\frac{t^\nu}{\nu!} \tag{18}$$

erhält man

$$c_0P^\nu+c_1(P+\delta_1)^\nu+c_2(P+\delta_2)^\nu+\cdots+c_p(P+\delta_p)^\nu=0,\ \nu>0, \tag{19}$$

[1] Crelle's Journal, 116 (1896), S. 139 ff.

und daraus für irgend ein Polynom $\pi(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\pi_\nu x^\nu$ die (symbolische) Relation

$$c_0\,\pi(x+P)+c_1\,\pi(x+P+\delta_1)+\cdots+c_p\,\pi(x+P+\delta_p)=\pi(x), \tag{20}$$

oder anders geschrieben

$$\Delta\,\pi(x+P)=\pi(x); \tag{21}$$

insbesondere ist für $\pi(x)=x^n$

$$\Delta\,P_n(x)=x^n. \tag{22}$$

Das Polynom

$$L_\Delta(\pi)=\pi(x+P)=\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu\,\frac{\pi^{(\nu)}(x)}{\nu!} \tag{23}$$

ist demnach eine polynomiale Lösung von $\Delta\,\varphi=\pi$, u. z., wie man an

$$\pi(x)=\Delta\,\pi(x+P)=\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu\,\frac{\Delta\,\pi^{(\nu)}(x)}{\nu!} \tag{24}$$

und $\frac{d}{dx}\,(\Delta\,\pi(x))=\Delta\,\pi'(x)$ erkennt, die einzige solche Lösung. In Verallgemeinerung von (24) besteht

$$\pi\,(x+h)=\sum_{\nu=0}P_\nu\,(h)\,\frac{\Delta\,\pi^{(\nu)}(x)}{\nu!}. \tag{25}$$

Aus

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu{}'(x)\frac{t^\nu}{\nu!}=t\,\frac{e^{xt}}{H(t)}=\sum_{\nu=1}^{\infty}P_{\nu-1}\frac{t^\nu}{(\nu-1)!}$$

entspringen die wichtigen Relationen

$$P_n{}'(x)=n\;\;P_{n-1}(x),\qquad n=1,2,3,\ldots. \tag{26}$$

2. Wir führen jetzt die Funktionen $\bar{P}_n(x)$, $n=0,1,2,\ldots,$ ein. Die Funktion $\bar{P}_n(x)$ ist eindeutig definiert durch

$$\Delta\,\bar{P}_n(x)=0,\qquad -\infty<x<+\infty, \tag{27_1}$$

$$\overline{P}_n(x) = P_n(x), \qquad 0 \leqq x < \delta_p. \tag{27$_2$}$$

Sie lässt sich vermöge

$$\overline{P}_n(x) = -\frac{1}{c_0}[c_1 \overline{P}_n(x+\delta_1) + c_2 \overline{P}_n(x+\delta_2) + \cdots + c_p \overline{P}_n(x+\delta_p)] \tag{28$_1$}$$

$$\overline{P}_n(x) = -\frac{1}{c_p}[c_{p-1} \overline{P}_n(x+\delta_{p-1}-\delta_p) + c_{p-2} \overline{P}_n(x+\delta_{p-2}-\delta_p) + \cdots + c_0 \overline{P}_n(x-\delta_p)] \tag{28$_2$}$$

durch dachziegelartige Überdeckung ausserhalb von $0 \leqq x < \delta_p$ konstruieren. Bezeichnet man die untereinander verschiedenen der Zahlen $n_1 \delta_1 + \cdots + n_p \delta_p$ bzw. $\delta_p + n_1(\delta_p - \delta_{p-1}) + n_2(\delta_p - \delta_{p-2}) + \cdots + n_p \delta_p, (n_1, \ldots, n_p = 0, 1, 2, \ldots)$, der Grösse nach geordnet mit Ω_ν bezw. Ω'_ν, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, so ist $P_n(x)$, auf Grund von (28), in jedem offenen Intervall, das keinen der Punkte $-\Omega_\nu$ und Ω'_ν enthält, analytisch.

Die Ω_ν sind dieselben wie in (12).[1]

$\overline{P}_0(x)$ ist für $-\Omega_{\mu+1} \leqq x < -\Omega_\mu$ und $\Omega'_\mu \leqq x < \Omega'_{\mu+1}$ konstant, für $\Omega_0 \leqq x < \Omega'_0$ konstant $= 1$. Es existieren auch die

$$\lim_{x=-0} \overline{P}_0(x - \Omega_\mu), \qquad \lim_{x=-0} \overline{P}_0(x + \Omega'_\mu),$$

brauchen aber nicht den bezüglichen Werten $\overline{P}_0(-\Omega_\mu)$ und $P_0(\Omega'_\mu)$ zu gleichen. Z. B. haben die Sprünge

$$\sigma(\Omega_\mu) = \overline{P}_0(-\Omega_\mu) - \lim_{x=-0} \overline{P}_0(x - \Omega_\mu)$$

die Werte $\sigma(\Omega_\mu) = e(\Omega_\mu)$, wo $e(\Omega_\mu) = e_\mu$ durch (12) gegeben ist. Das folgt daraus, dass die $\sigma(\Omega_\nu)$ ebenso wie die $e(\Omega_\nu)$ der Rekursionsgleichung

$$\psi(\Omega) = -\frac{1}{c_0}[c_1 \psi(\Omega + \delta_1) + \cdots + c_p \psi(\Omega + \delta_p)]$$

mit den Anfangsbedingungen: $\psi(\xi) = 0$ für $\xi < 0$, $\psi(0) = \frac{1}{c_0}$, $\psi(\xi) = 0$ für $\Omega_0 < \xi < \Omega_1$ genügen. Aus

[1] Sofern man in (12) zur Bestimmung der e die c unbestimmt lässt, damit nicht durch zufälliges Verschwinden eines e_ν das entsprechende Ω_ν verloren geht.

$$\bar{P}_n(x) = -\frac{1}{c_0}[c_1 P_n(x+\delta_1) + \cdots + c_p P_n(x+\delta_p)] = P_n(x) - \frac{1}{c_0} x^n, \quad (-\delta_1 \leqq x < 0),$$

folgt, dass für $n > 0$ $\bar{P}_n(x)$ im Punkte $x = 0$, und daher wegen (28) überall stetig ist. Nach (26) und (28) ist für $x \neq -\Omega, \Omega'$

$$\frac{d}{dx}\bar{P}_n(x) = n\bar{P}_{n-1}(x), \qquad n \geqq 1. \tag{29}$$

Es ist leicht einzusehen, dass diese Relation auch in den Punkten $-\Omega$ und Ω' gilt, u. z. für $n = 1$ nur im Lebesgueschen Sinne (d. h. dass $\bar{P}_1(x)$ in den Punkten $-\Omega$ und Ω' absolut stetig ist).

Wir kommen jetzt zu unserer Summenformel.

3. Die Funktion $g(\xi)$ sei für $\xi \geqq x$ definiert und $(n+1)$-mal, $n = 0, 1, 2, \ldots$, differentiierbar. Für h aus $0 \leqq h \leqq \delta_p$ ist

$$g(x+h) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{P_\nu(h)}{\nu!} \Delta g^{(\nu)}(x) + R_n(h, x) \tag{30}$$

$$R_n(h, x) = \int_0^\infty \frac{\bar{P}_n(h-t)}{n!} \Delta g^{(n+1)}(x+t)\, dt \tag{31}$$

sofern die Integrale

$$I_q = \int_0^\infty \bar{P}_n(h-t)\, g^{(n+1)}(x+\delta_q+t)\, dt, \quad q = 1, 2, \ldots, p, \tag{32}$$

existieren.

Beweis. Es sei zuerst $h = 0$. Aus

$$I_q = \int_{\delta_q}^\infty \bar{P}_n(\delta_q - \tau)\, g^{(n+1)}(x+\tau)\, d\tau = \int_0^\infty + \int_{\delta_q}^0$$

folgt, durch Anwendung von (27_1) und Berücksichtigung von (27_2),

$$R_n(0, x) = \frac{1}{n!}\sum_{q=1}^{p} c_q \int_{\delta_q}^{0} P_n(\delta_q - \tau)\, g^{(n+1)}(x+\tau)\, d\tau.^1$$

[1] In dieser Form ist das Restglied von Hermite l. c. angegeben worden.

Wenn man jedes Integral $\int\limits_{\delta}^{0} P_n(\delta - t)\, g^{(n+1)}(x+t)\, dt$ $(n+1)$-mal partiell integriert, ergibt sich

$$R_n(0, x) = \sum_{\nu=0}^{n} \varDelta\, P_\nu(0)\, \frac{g^{(\nu)}(x)}{\nu\,!} - \sum_{\nu=0}^{n} P_\nu\, \frac{\varDelta\, g^{(\nu)}(x)}{\nu\,!}\,. \tag{33}$$

Bezeichnet man die rechte Seite von (30) mit $G(h, x)$ so ist demnach

$$G(0, x) = \sum_{\nu=0}^{n} \varDelta\, P_\nu(0)\, \frac{g^{(\nu)}(x)}{\nu\,!} \tag{34}$$

und daher wegen (19)

$$G(0, x) = g(x). \tag{35}$$

4. Vermöge

$$\int\limits_{0}^{\infty} \bar{P}_n(h-t)\, \varDelta\, g^{(n+1)}(x+t)\, dt = \int\limits_{-h}^{\infty} \bar{P}_n(-t)\, \varDelta\, g^{(n+1)}(x+h+t)\, dt$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} + \int\limits_{-h}^{0}$$

ist für $h \neq 0$

$$G(h, x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{P_\nu(h)}{\nu\,!}\, \varDelta\, g^{(\nu)}(x) + \int\limits_{-h}^{0} \frac{\bar{P}_n(-t)}{n\,!}\, \varDelta\, g^{(n+1)}(x+h+t)\, dt \tag{36}$$

$$+ \; G(0, x+h) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{P_\nu}{\nu\,!}\, \varDelta\, g^{(\nu)}(x+h).$$

Einerseits ist nach Obigem $G(0, x+h) = g(x+h)$ und andererseits ist die Summe der übrigen Terme rechts in (36) null, wie man durch partielle Integration des Integrals findet. Also ist $G(h, x) = g(x+h)$.

5. Nunmehr wollen wir die Einschränkung $k = 0$ fallen lassen und $k > 0$ voraussetzen. Die Summenformel (44) selbst bleibt auch für $k = 0$ bestehen.

6. Aus $c_0 + \sum\limits_{q=1}^{p} c_q\, \delta_q^{\varkappa} = 0$, $(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$, folgt, dass jedes Polynom

$(k-1)$-ten Grades der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ genügt. (13)—(17) bleiben bestehen. Statt (18) tritt

$$O(t)\frac{1}{H(t)} = t^k$$

und daraus folgt

$$c_0 P^\nu + c_1 (P+\delta_1)^\nu + \cdots + c_p (P+\delta_p)^\nu = 0, \nu \neq k \tag{37_1}$$

$$= k!, \nu = k \tag{37_2}$$

Statt (21)—(24) treten jetzt

$$\Delta\pi(x+P) = \pi^{(k)}(x) \tag{38}$$

$$\Delta P_n(x) = \frac{d^k}{dx^k}(x^n), \tag{39}$$

also insbesondere

$$\Delta P_k(x) = k!, \tag{40}$$

$$L_\Delta(\pi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{P_\nu}{\nu!} \overline{\pi}^{(\nu)}(x) \tag{41}$$

$$\pi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{P_\nu}{\nu!} \Delta \overline{\pi}^{(\nu)}(x), \tag{42}$$

wobei

$$\frac{d^k}{dx^k}\overline{\pi}(x) = \pi(x).$$

7. Die $\overline{P}_n(x)$ seien wiederum durch (27) gegeben. Es ist $P_n(x) = \overline{P}_n(x)$ für $n \leqq k-1$; für $n > k$ gilt, dass die $\overline{P}_n(x)$ nur in den Punkten $-\Omega$ und Ω' unregulär werden; für $n \geqq k$ sind sie stetig und genügen der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\overline{P}_n(x) = n\overline{P}_{n-1}(x); \tag{43}$$

$\overline{P}_k(x)$ hat in den Punkten $-\Omega$ und Ω' linkseitige Unstetigkeiten und in den Punkten $-\Omega_\nu$ Sprünge vom Wert $k!\,e_\nu$.

8. An Stelle von (30) tritt, mit ganz analogem Gültigkeitsbereich,

$$g(x+h) = \sum_{\nu=0}^{k+n} \frac{P_\nu(h)}{\nu!} \Delta \overline{g}^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overline{P}_{k+n}(h-t)}{(k+n)!} \Delta g^{(n+1)}(x+t)\,dt, \tag{44}$$

was so herauskommt, dass jetzt (34) den Wert $\Delta P_k(0)\frac{\bar{g}^{(k)}(x)}{k!}=g(x)$ hat.

9. An (28) sieht man:

$$|P_n(-x)|\leqq K_n e^{\lambda x},\quad x\geqq -\delta_p, \tag{45}$$

wo $\lambda(>0)$ bzw. K_n nur von $\Delta\varphi$ bzw. $\Delta\varphi$ und n abhängen.

§ 3. Die Speziallösungen.

1. Für irgendein $n(=0,1,2,\ldots)$ sei $g(x)$ $(n+1)$-mal differentiierbar und es existiere

$$\int_0^\infty \bar{P}_{k+n}(-t)\,g^{(n+1)}(x+t)\,dt,\quad x\geqq a.$$

(Ist $g(x)$ ein Polynom m-ten Grades, so trifft dies mit $n\geqq m$ zu.) Dann ist die bis auf ein willkürliches Polynom $(k-1)$-ten Grades bestimmte Funktion

$$L(x)=L(g)\sim\sum_{\nu=0}^{k+n}\frac{P_\nu}{\nu!}\bar{g}^{(\nu)}(x)+\int_0^\infty\frac{\bar{P}_{k+n}(-t)}{(k+n)!}g^{(n+1)}(x+t)\,dt \tag{46}$$

eine Lösung von (1) für $x\geqq a$.

2. Wendet man nämlich die Überlegung von § 2.4 mit $k+n$ statt n auf $\bar{g}(x)$ statt $\Delta g(x)$ an, so erhält man in erster Linie für $0\leqq h\leqq\delta_p$

$$L(x+h)=\sum_{\nu=0}^{k+n}\frac{P_\nu(h)}{\nu!}g^{(\nu)}(x)+\int_0^\infty\frac{\bar{P}_{k+n}(h-t)}{(k+n)!}g^{(n+1)}(x+t)\,dt.$$

Benutzt man nun dies für $h=0,\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_p$, so ergibt sich

$$\Delta L(x)=\sum_{\nu=0}^{k+n}\frac{\Delta P_\nu(0)}{\nu!}g^{(\nu)}(x)+\int_0^\infty\frac{\Delta P_{k+n}(-t)}{(k+n)!}g^{(n+1)}(x+t)\,dt,$$

also, wegen (27_1) und (37),

$$\Delta L(x)=g(x).$$

Um (46) als Speziallösung von (1), vgl. § 1.7, ansprechen zu können, muss man vergewissert sein, dass beim Zutreffen von 1. für zwei verschiedene Werte $n = n_1$ und $n = n_2$, $n_2 > n_1$, die dazugehörigen Ausdrücke $L_1(x)$ und $L_2(x)$ dieselbe Lösung darstellen. Dafür sind hinreichend die

Bedingungen B_1. Es ist $g(x)$ für $x \geqq a$ definiert und für passendes n $(= 0, 1, 2, \ldots)$ $(n+1)$-mal stetig differentiierbar. Gleichmässig in jedem endlichen Intervall $a \leqq x \leqq b$ sind

$$\int_0^\infty \frac{\overline{P}_{k+n}(-t)}{(k+n)!} g^{(n+1)}(x+t)\,dt$$

und

$$\lim_{t \to \infty} \overline{P}_{k+\nu}(-t)\, g^{(n+1)}(x+t) = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{47}$$

vorhanden.

Beweis. Partielle Integration gibt

$$\sum_{\nu=1}^{n_2-n_1} \psi_\nu(0)\, \bar{g}^{(k+n_1+\nu)}(x) + \int_0^\tau \psi_{n_2-n_1}(t)\, g^{(n_2+1)}(x+t)\,dt$$

$$- \int_0^\tau \psi_0(\tau)\, g^{(n_1+1)}(x+t)\,dt$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n_2-n_1} \psi_\nu(\tau)\, g^{(n_1+\nu)}(x+\tau) = D(\tau, x),$$

wobei $\psi_\nu(\tau) = \dfrac{\overline{P}_{k+n_1+\nu}(-\tau)}{(k+n_1+\nu)!}$. Es existiert der

$$\lim_{\tau \to \infty} D(\tau, x) = D(x),$$

u. z. ist

$$D(x) = L_2(x) - L_1(x).$$

Wir werden beweisen, dass für irgendwelche *positive* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu$, $\mu = n_2 - n_1$,

$$D_\mu(x) = \mathop{\Delta}_{\omega_1, \ldots, \omega_\mu} D(x),$$

definiert durch

$$D_1(x) = \frac{1}{\omega_1}\{D(x+\omega_1) - D(x)\}$$

$$D_{\nu+1}(x) = \frac{1}{\omega_{\nu+1}} \{ D_\nu (x + \omega_{\nu+1}) - D_\nu (x) \}, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

identisch verschwindet,

$$D_\mu (x) \equiv 0. \tag{48}$$

Daraus folgt, dats $D(x)$ ein Polynom ist, und da es auf Grund unserer Voraussetzungen der Gleichung $\Delta \varphi \equiv 0$ genügt, ist es vom $(k-1)$-ten Grade, also sind $L_1(x)$ und $L_2(x)$ dieselbe Lösung.

Es wird genügen, den Beweis von (48) im Falle $\mu = 3$, nämlich $n_1 = n$ und $n_2 = n + 3$, auszuführen. Für

$$D_1(\tau, x) = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\psi_\nu(\tau)}{\omega_1} \{ g^{(n+\nu)}(x + \tau + \omega_1) - g^{(n+\nu)}(x + \tau) \}$$

hat man nach dem Mittelwertsatz

$$D_1(\tau, x) = \sum_{\nu=1}^{3} \psi_\nu(\tau) \, g^{(n+\nu+1)}(x + \Theta_1 \omega_1 + \tau),$$

wo Θ_1 (und später $\Theta_{21}, \Theta_{22}, \ldots$) zwar von verschiedenen Parametern abhängig, aber in $0 \leqq \Theta \leqq 1$ gelegen ist. Eine Anwendung von (47) mit $x + \Theta_1 \omega_1$ an Stelle von x gibt

$$D_1(x) = \lim_{\tau \to \infty} D_1(\tau, x) = \lim_{\tau \to \infty} [\psi_1(\tau) g^{(n+2)}(x + \Theta_1 \omega_1 + \tau) + \psi_2(\tau) \, g^{(n+3)}(x + \Theta_1 \omega_1 + \tau)].$$

Eine erneute Anwendung des Mittelwertsatzes ergibt

$$\begin{aligned} D_2(x) &= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\omega_2} (D_1(\tau, x + \omega_2) - D_1(\tau, x)) \\ &= \sum_{\nu=0}^{1} \lim_{\tau \to \infty} \psi_{1+\nu}(\tau) \, g^{(n+3+\nu)}(x + \Theta_{21} \omega_1 + \Theta_{22} \omega_2 + \tau) \\ &= \lim_{\tau \to \infty} \psi_1(\tau) \, g^{(n+3)}(x + \Theta_{21} \omega_1 + \Theta_{22} \omega_2 + \tau). \end{aligned}$$

Aus $D_3(x) = \lim\limits_{\tau \to \infty} \frac{1}{\omega_3} [D_2(\tau, x + \omega_3) - D_2(\tau, x)]$ folgt dann, wiederum auf Grund des Mittelwertsatzes, endgültig

$$D_3(x) \equiv 0.$$

§ 4. Ein Kompositionssatz für Speziallösungen.

Zur Rechtfertigung für die Einführung der Speziallösungen wollen wir von ihnen zwei Eigenschaften besprechen: den Zusammenhang mit der Reihe (8) und einen darauf beruhenden Kompositionssatz. Für beides braucht man speziellere Voraussetzungen als die Bedingungen B_1, obwohl keineswegs solche von so spezieller Natur, wie wir sie zur Vereinfachung der Überlegungen annehmen werden; immerhin werden wir für den Kompositionssatz Voraussetzungen haben, die der Eigenschaft A genügen.

1. Ist die Reihe

$$S(x) = e_0\, g(x) + e_1\, g(x + \Omega_1) + e_2\, g(x + \Omega_2) + \cdots, \tag{49}$$

vgl. (8), für $x \geqq a$ konvergent, dann besteht

$$\Delta\, S(x) = g(x),$$

was sich in einfachster Weise aus der Natur der e und Ω ergibt. Die Reihe (49) ist konvergent, u. z. absolut konvergent, wenn $g(x)$ für $x \to \infty$ stärker klein wird als jedes $e^{-\lambda x}$, also

$$g(x) \leqq e^{-x\, w(x)}, \quad \lim w(x) = \infty\,. \tag{50}$$

Auf Grund von (12) gibt es nämlich eine Zahl $\lambda > 0$, so dass

$$\sum_{\nu \leqq \Omega_\mu < \nu + 1} |e_\mu| \leqq K\, e^{\lambda \nu},$$

wo K eine Konstante bedeutet.

2. Falls $g(x)$ und die Ableitungen $g^{(\nu)}(x)$, $(\nu = 1, 2, \ldots, n+1)$, von der Beschaffenheit (50) sind, ist $S(x) = L(x)$, wo $L(x)$ durch (46) gegeben ist und $\bar{g}(x)$ im Falle $k \geqq 1$ folgendermassen normiert ist:

$$\bar{g}(x) = -\int_x^\infty \frac{(x-\xi)^{k-1}}{(k-1)!}\, g(\xi)\, d\xi.$$

Denn setzt man allgemein

$$\overset{s}{\psi}(x) = \sum_{\sigma=0}^{s} e_\sigma\, \psi(x + \Omega_\sigma),$$

so ist zufolge (30)

$$\overset{s}{g}(x) = \sum_{\nu=0}^{k+n} \frac{P_\nu}{\nu!} \varDelta \overset{s}{g}^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overline{P}_{k+n}(-t)}{(k+n)!} \varDelta \overset{s}{g}^{(n+1)}(x+t)\,dt,$$

und hiernach durch einen auf Grund unserer Voraussetzungen zulässigen Grenzübergang

$$S(x) = \sum_{\nu=0}^{k+n} \frac{P_\nu}{\nu!} \bar{g}^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overline{P}_{k+n}(-t)}{(k+n)!} g^{(n+1)}(x+t)\,dt. \tag{51}$$

3. Gegeben seien: $\varDelta\varphi = \sum_{\nu=0}^{p} c_\nu \varphi(x+\delta_\nu)$, $\varDelta^{(1)}\varphi = \sum_{\nu=0}^{p^{(1)}} c_\nu^{(1)} \varphi(x+\delta_\nu^{(1)})$ und

$\varDelta^{(2)}\varphi = \sum_{\nu=0}^{p^{(2)}} c_\nu^{(2)} \varphi(x+\delta_\nu^{(2)})$, $(\delta_0 = \delta_0^{(1)} = \delta_0^{(2)} = 0)$, wobei

$$\begin{aligned}\varDelta\varphi = \varDelta^{(1)}(\varDelta^{(2)}\varphi) = \varDelta^{(2)}(\varDelta^{(1)}\varphi) = \varDelta^{(1)}\varDelta^{(2)}\varphi \\ = \sum_{\mu=0}^{p^{(1)}} \sum_{\nu=0}^{p^{(2)}} c_\mu c_\nu \varphi(x+\delta_\mu^{(1)}+\delta_\nu^{(2)}).\end{aligned}$$

Von den entsprechenden Reihen

$$Sg = \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu g(x+\Omega_\nu), \quad S^{(1)}g = \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu^{(1)} g(x+\Omega_\nu^{(1)}) \text{ und}$$

$$S^{(2)}g = \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu^{(2)} g(x+\Omega_\nu^{(2)}) \quad (\Omega_0 = \Omega_0^{(1)} = \Omega_0^{(2)} = 0), \text{ gilt}$$

$$Sg = S^{(1)}(S^{(2)}g) = S^{(2)}(S^{(1)}g) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} e_\mu e_\nu g(x+\Omega_\mu^{(1)}+\Omega_\nu^{(2)}). \tag{52}$$

Die Relationen (52) haben in erster Linie formale Bedeutung, als Zusammenfassung von Beziehungen zwischen den verschiedenen e und Ω. Überdies gelten sie unter bestimmten Bedingungen über $g(x)$ als tatsächliche Beziehungen zwischen den Funktionen, z. B., wie sehr leicht einzusehen ist, immer dann, wenn $g(x)$ von der Beschaffenheit (50) ist.

4. Wenn darüber hinaus $g(x)$ etwa unbeschränkt oft differentiierbar ist,

und jede ihrer Ableitungen (50) genügt, erhält man für die Speziallösungen die Beziehungen

$$Lg = L^{(1)}(L^{(2)}g) = L^{(2)}(L^{(1)}g). \tag{53}$$

Die Gleichungen (53) bestehen bis auf Polynome von höchstens $(k-1)$-ten Grade, wo k zu $\Delta\varphi$ gehört. Dies ist das Kompositionsgesetz, auf das wir hinweisen wollten.

5. Die bisher über $g(x)$ gemachten Voraussetzungen genügen nicht der Eigenschaft A. Diesem Postulat genügt aber $g(x)$ unter etwas allgemeineren Voraussetzungen, nämlich den

Bedingungen B_2: $g(x)$ ist für $x \geqq a$ definiert und unendlich oft differentiierbar. Es gibt ein n_0, so dass für $n \geqq n_0$

$$g^{(n)}(x) \leqq e^{-x w_n(x)}, \quad \lim_{x \to \infty} w_n(x) = \infty.$$

(Dass diese Bedingung ein Spezialfall von B_1 ist, folgt nach § 2.9.)

Für die Gültigkeit des Kompositionssatzes unter diesen Bedingungen werden wir zwei Beweise geben.

1$^{\text{ter}}$ **Beweis.** Der grösseren Übersichtlichkeit wegen schreiben wir α, β, γ statt $k^{(1)}, k^{(2)}, k, (\gamma = \alpha + \beta)$, und A, B, C statt $P^{(1)}, P^{(2)}, P$. Weiterhin schreiben wir das m-fache Integral einer Funktion $\psi(x)$ als ihre $(-m)$-te Ableitung, also $\psi^{(-m)}(x)$.

Ist $g(x)$ ein Polynom, dann ist

$$\chi(x) = L^{(2)}g = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} g^{(\nu-\beta)}(x) \tag{54}$$

$$\chi^{(\sigma)}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} g^{(\sigma+\nu-\beta)}(x), \qquad \sigma \geqq -\alpha, \tag{55}$$

$$L^{(1)}\chi = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{A_\mu}{\mu!} \chi^{(\mu-\alpha)}(x) \tag{56}$$

$$Lg = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{C_\nu}{\nu!} g^{(\nu-\gamma)}(x). \tag{57}$$

Substituiert man in $L^{(1)}\chi$ für $\chi^{(\mu-\alpha)}$ die Reihen (55), so erhält man

$$L^{(1)}(L^{(2)}g) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{A_\mu}{\mu!} \frac{B_\nu}{\nu!} g^{(\mu+\nu-\gamma)}(x)$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma_\lambda}{\lambda!} g^{(\lambda-\gamma)}(x),$$

wo

$$\Gamma_\lambda = (A+B)^\lambda. \tag{58}$$

Aus

$$\frac{1}{H(t)} = \frac{1}{H^{(1)}(t)} \cdot \frac{1}{H^{(2)}(t)}$$

folgt aber, vgl. (15), $(A+B)^\lambda = C_\lambda$, womit

$$Lg = L^{(1)}(L^{(2)}g) \tag{59}$$

bewiesen ist.

Im allgemeinen Falle führen wir neben $g(x)$ die Funktion

$$\xi(x) = -\int_x^{\infty} \frac{(x-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\,dt, \qquad n \geqq n_0,$$

ein und setzen

$$g(x) = \xi(x) + \pi(x).$$

Hierin ist $\xi(x)$ von der in 4 betrachteten Art und $\pi(x)$ ein Polynom. Der Beweis von (59) ergibt sich nun in den folgenden leicht nachprüfbaren Schritten

$$\chi = L^{(2)} g = L^{(2)} \xi + L^{(2)} \pi = \chi_1 + \chi_2$$

$$L^{(1)} \chi = L^{(1)} \chi_1 + L^{(1)} \chi_2 = L\xi + L\pi$$

$$L^{(1)} \chi = L g.$$

2^{ter} **Beweis.** Wir beschränken uns auf den Fall $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Es ist, für $n \geqq n_0$,

$$\chi^{(\nu)}(x) = \sum_{\mu=0}^{n-\nu} \frac{B_\mu}{\mu!} g^{(\mu+\nu)}(x) + \int_0^{\infty} \frac{\overline{B}_{n-\nu}(-t)}{(n-\nu)!} g^{(n+1)}(x+t)\,dt \tag{60}$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$\chi^{(n+1)}(x) = B_0 g^{(n+1)}(x) + \int_0^{\infty} \overline{B}_0(-t) g^{(n+2)}(x+t)\,dt \tag{61}$$

$$L^{(1)}\chi = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{A_\nu}{\nu!}\chi^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\bar{A}_n(-t)}{n!}\chi^{(n+1)}(x+t)\,dt \tag{62}$$

$$Lg = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{C_\nu}{\nu!} g^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\bar{C}_n(-t)}{n!} g^{(n+1)}(x+t)\,dt. \tag{63}$$

Substituiert man in (62) die Reihen (60) und (61) und ersetzt man dann in

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\bar{A}_n(-t)\,\bar{B}_0(-\tau)}{n!} g^{(n+2)}(x+t+\tau)\,dt\,d\tau,$$ unter der Voraussetzung

$$n \geqq 1, \quad \int_0^\infty \frac{\bar{A}_n(-t)}{n!} g^{(n+2)}(x+t+\tau)\,dt$$ durch

$$-\frac{A_n}{n!} g^{(n+1)}(x+\tau) + \int_0^\infty \frac{\bar{A}_{n-1}(-t)}{(n-1)!} g^{(n+1)}(x+t+\tau)\,dt,$$ so ergibt sich

$$Lg = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{C_\nu}{\nu!} g^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\bar{\Gamma}_n(-t)}{n!} g^{(n+1)}(x+t)\,dt, \tag{64}$$

wobei

$$\bar{\Gamma}_n(-t) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n}{\nu} A_\nu \bar{B}_{n-\nu}(-t) + \bar{A}_n(-t) B_0 + n\int_0^t \bar{B}_0(-\tau)\,\bar{A}_{n-1}(-t+\tau)\,d\tau.$$

Ein Vergleich von (63) und (64) ergibt für

$$D(t) = \bar{\Gamma}_n(-t) - \bar{C}_n(-t)$$

$$\int_0^\infty D(t)\,g^{(n+1)}(x+t)\,dt = 0, \quad x \geqq a.$$

Daraus folgt leicht

$$\int_0^\infty D(t)\,\gamma(x+t)\,dt = 0$$

für jedes $\eta(x)$ das in $x \geqq a$ unendlich oft differentiierbar ist und ausserhalb eines endlichen Intervalls verschwindet. Das gibt $D(t) \equiv 0$, also

$$\bar{\Gamma}_n(-t) = \bar{C}_n(-t); \quad n \geqq 1, \quad t > 0.$$

Wenn man aber erst diese Relation hat, kann man auf dem umgekehrten Wege die Gültigkeit von (59) z. B. unter den Bedingungen B_2 nachweisen.