# ZUR THEORIE DER FASTPERIODISCHEN FUNKTIONEN.

## II.

## Zusammenhang der fastperiodischen Funktionen mit Funktionen von unendlich vielen Variabeln; gleichmässige Approximation durch trigonometrische Summen.

Von

HARALD BOHR

in Kopenhagen.

### Inhaltsverzeichnis.

## Einleitung.

In der Abhandlung I[1] haben wir den Begriff einer **fastperiodischen** Funktion $f(x)$ der reellen Variablen $x$ durch die folgende Definition eingeführt:

**Definition.** *Eine für* $-\infty < x < \infty$ *stetige Funktion* $f(x) = u(x) + iv(x)$ *soll fastperiodisch heißen, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine Länge* $l = l(\varepsilon)$ *derart gibt, daß jedes Intervall* $\alpha < x < \beta$ *der Länge* $\beta - \alpha = l$ *mindestens eine zu* $\varepsilon$ *gehörige Verschiebungszahl* $\tau$ *der Funktion* $f(x)$ *enthält, d. h. eine Zahl* $\tau$, *für welche die Ungleichung*

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leqq \varepsilon$$

*für alle* $x$ *besteht.*

Von diesen Funktionen wurde in der Abhandlung I, die den Untertitel „Eine Verallgemeinerung der Theorie der Fourierreihen" trug, gezeigt, daß zu jeder solchen fastperiodischen Funktion $f(x)$ eine bestimmte „Fourierreihe" $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ gehört, wo die „Fourierexponenten" $\Lambda_n$ als diejenigen reellen Zahlen $\lambda$ charakterisiert wurden, für welche der Mittelwert

$$a(\lambda) = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\lambda x}\,dx$$

von 0 verschieden ist, während der zu dem Exponenten $\Lambda_n$ gehörige „Fourierkoeffizient" $A_n$ gerade den (von 0 verschiedenen) obigen Mittelwert $a(\Lambda_n)$ angab. Die Theorie dieser Fourierreihen fastperiodischer Funktionen erwies sich in vieler Beziehung als eine direkte und naturgemäße Verallgemeinerung der Theorie der gewöhnlichen Fourierreihen rein periodischer Funktionen; vor allem galt auch hier der **Fundamentalsatz**:

$$\sum |A_n|^2 = M\{|f(x)|^2\},$$

[1] Bohr [3]. (Die Angabe bezieht sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit).

welcher auch so gedeutet werden konnte, daß die Fourierreihe $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ einer fastperiodischen Funktion $f(x)$ immer im Mittel gegen $f(x)$ konvergierte.

In einem wichtigen Spezialfall, nämlich dem der linear unabhängigen Exponenten $\Lambda_n$, war die Fourierreihe $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ sogar konvergent im gewöhnlichen Sinne mit der Summe $f(x)$, und zwar gleichmässig für $-\infty < x < \infty$, d. h. es bildeten hier die Fourierabschnitte

$$\sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}$$

eine Folge, die für $N \to \infty$ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert. In dem allgemeinen Fall einer beliebigen fastperiodischen Funktion $f(x)$ gilt dieser Satz aber nicht, wie schon aus der Theorie der gewöhnlichen Fourierreihen rein periodischer (stetiger) Funktionen bekannt ist. Für diese letzteren Funktionen besitzt man aber einen anderen Satz, der, obwohl er nicht direkt mit der Theorie der Fourierreihen zu tun hat, doch gewissermaßen den erwähnten (nicht immer gültigen) Satz ersetzen kann, und welcher besagt, daß es möglich ist zu jeder rein periodischen stetigen Funktion $f(x)$ mit der Periode $p = \frac{2\pi}{\beta}$ eine Folge von endlichen trigonometrischen Summen der Form $\sum_{-N}^{N} \alpha_n e^{in\beta x}$ zu bestimmen (deren Koeffizienten aber nicht immer als die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x)$ gewählt werden können), die gleichmäßig für alle $x$ gegen $f(x)$ konvergiert. Wir sprechen diesen, Weierstraßschen, Satz in der folgenden Fassung aus, bei der wir die evidente Umkehrung mit hinzunehmen:

*Dafür, daß die Funktion $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ eine stetige rein periodische Funktion mit der Periode $p = \frac{2\pi}{\beta}$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie durch irgend eine Folge von trigonometrischen Polynomen der Form*

$$P_N(x) = \sum_{-N}^{N} \alpha_n e^{in\beta x}$$

*gleichmäßig approximiert werden kann.*

Das Hauptresultat der vorliegenden Abhandlung ist nun die Gewinnung des entsprechenden Satzes für fastperiodische Funktionen, welcher in einfachster Weise die Klasse dieser ursprünglich durch Verschiebungseigenschaften bestimmten Funktionen nunmehr durch Schwingungseigenschaften genau charakterisiert:

*Für die Fastperiodizität der Funktion $f(x)$ ist notwendig und hinreichend, daß* *sie sich überhaupt durch irgend welche endliche trigonometrische Summen*

$$\sum_{1}^{N} b_n e^{i\lambda_n x}$$

*gleichmäßig approximieren läßt.*

Der Beweis beruht auf der Auflösung der Fourierexponenten $\Lambda_n$ der fastperiodischen Funktion $f(x)$ in ihre linear unabhängigen Bestandteile und der damit eng zusammenhängenden Heranziehung der Funktionen von unendlich vielen Variabeln. Hierbei wird eine Klasse von Funktionen von mehreren Veränderlichen eingeführt, die „grenzperiodischen" Funktionen, welche dadurch definiert werden, daß sie sich durch rein periodische stetige Funktionen gleichmäßig approximieren lassen; es wird hierbei u. a. der folgende Satz bewiesen, welcher die fastperiodischen Funktionen $f(x)$ von einem dritten Gesichtspunkte aus charakterisiert:

*Jede fastperiodische Funktion $f(x)$ läßt sich in der Form*

$$f(x) = G(a_1 + b_1 x, a_2 + b_2 x, \ldots, a_n + b_n x, \ldots)$$

*darstellen, wo $G(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ eine grenzperiodische Funktion von unendlich vielen Variabeln bedeutet (und sogar in „wesentlich" eindeutiger Weise), und umgekehrt wird jede Funktion $f(x)$, welche aus einer solchen grenzperiodischen Funktion $G(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ entsteht, wenn sie nur auf einer festen Geraden $x_1 = a_1 + b_1 x$ $x_2 = a_2 + b_2 x, \ldots$ des unendlich-dimensionalen Raumes betrachtet wird, fastperiodisch sein.*

Wie schon in der Einleitung zu der Abhandlung I erwähnt, haben die Untersuchungen der vorliegenden Abhandlung II eine enge Beziehung zu einigen interessanten Arbeiten von Bohl und Esclangon über „quasiperiodische" Funktionen. Diese Beziehung wird im Laufe der Abhandlung genau angegeben, und es wird u. a. — mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Abhandlung I — gezeigt, wie die Bohl-Esclangonschen Funktionen auch in anderer Weise, als es diese Forscher bei ihren Definitionen getan haben, charakterisiert werden können, und zwar so, daß man sie sofort als einen natürlichen und einfachen Spezialfall der allgemeinen Klasse der fastperiodischen Funktionen erkennt.

Obwohl das Hauptproblem, welches in dieser Abhandlung II behandelt wird, nämlich die gleichmäßige Approximation von fastperiodischen Funktionen durch beliebige trigonometrische Summen, nicht direkt mit der in der Abhandlung I entwickelten Theorie der Fourierreihen fastperiodischer Funktionen zu tun hat, wird doch diese letzte Theorie die Grundlage sein, auf der die folgenden Untersuchungen beruhen.

# KAPITEL I.

## Beziehung der Verschiebungszahlen $\tau(\varepsilon)$ zu den Fourierexponenten $\Lambda_n$.

### § 1.

### Eine notwendige Bedingung für die Verschiebungszahlen.

Es sei $f(x)$ eine beliebige fastperiodische Funktion und $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ ihre Fourierreihe. Aus

$$f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$$

folgt (nach I, § 5, Satz XXII) sofort, daß, falls $\tau$ eine ganz beliebige reelle Zahl bedeutet, die Fourierentwicklung der (ebenfalls fastperiodischen) Funktion $f(x+\tau)$ so lauten wird:

$$f(x+\tau) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n \tau} \cdot e^{i\Lambda_n x},$$

und daß also die Fourierentwicklung der Differenz $f(x+\tau) - f(x)$ durch

$$(1) \qquad f(x+\tau) - f(x) \sim \sum A_n \left(e^{i\Lambda_n \tau} - 1\right) \cdot e^{i\Lambda_n x}$$

gegeben wird. Hieraus ergibt sich der

**Hilfssatz 1.** *Es sei $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ eine fastperiodische Funktion, $\varepsilon$ eine positive Größe und $\tau$ eine beliebige zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$. Dann gilt für jedes $n$ die Ungleichung*

$$\left| A_n \left(e^{i\Lambda_n \tau} - 1\right) \right| \leqq \varepsilon.$$

**Beweis.** In der Tat ist nach (1)

$$A_n \left(e^{i\Lambda_n \tau} - 1\right) = M\{(f(x+\tau) - f(x))\, e^{-i\Lambda_n x}\},$$

wo der Mittelwert auf der rechten Seite, wegen $|f(x+\tau) - f(x)| \leqq \varepsilon$ für alle $x$, offenbar numerisch $\leqq \varepsilon$ ist.

Aus diesem Hilfssatz ergibt sich sofort die gesuchte notwendige Bedingung:

**Satz I.** *Es sei $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ eine fastperiodische Funktion, und es sei eine Anzahl $N$ [1] und eine „Genauigkeit" $\delta < \pi$ beliebig gegeben. Dann gibt es ein $\varepsilon = \varepsilon(N, \delta)$ derart, daß eine Zahl $\tau$ gewiß keine zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl*

[1] In dem speziellen Fall, wo die Fourierreihe $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ nur endlich viele Glieder enthält, muß natürlich die Anzahl $N \leqq$ der Gliederzahl der Fourierreihe angenommen werden, damit der Satz einen Sinn hat. Eine ähnliche Bemerkung gilt mehrmals im Folgenden.

*der Funktion $f(x)$ sein kann, ohne daß sie die $N$ diophantischen Ungleichungen*

$$|A_n \tau| < \delta \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

*befriedigt*[1]. Mit anderen Worten: dafür daß $\tau$ eine zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl sei, ist notwendig, daß der „Anfang" $\sum\limits_1^N$ der Fourierreihe $\sum A_n e^{iA_n x}$ fast ungeändert bleibt, wenn $x$ durch $x + \tau$ ersetzt wird, d. h. daß die Amplitudenänderungen $A_n \tau$, welche die $N$ ersten Glieder dadurch erleiden, alle numerisch $< \delta \pmod{2\pi}$ sind.

**Beweis.** Wir bemerken zunächst, daß die Aussage, daß eine reelle Zahl $y$ die Ungleichung $|y| < \delta \pmod{2\pi}$ erfüllt, offenbar damit gleichbedeutend ist, daß $y$ der Ungleichung

$$|e^{iy} - 1| < |e^{i\delta} - 1| = \delta_1$$

genügt. Es bezeichne nunmehr $c_N$ die kleinste der $N$ (von 0 verschiedenen) Zahlen $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_N|$. Ich behaupte, daß die Zahl

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2} c_N \delta_1$$

die erwünschte Eigenschaft besitzt. In der Tat gilt, falls $\tau$ eine beliebige zu diesem $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl unserer Funktion $f(x)$ ist, nach dem Hilfssatze 1 bei jedem $n$ die Ungleichung

$$\left| A_n \left(e^{iA_n \tau} - 1\right) \right| \leqq \varepsilon,$$

also a fortiori für $n = 1, \ldots, N$ die Ungleichung

$$\left| e^{iA_n \tau} - 1 \right| \leqq \frac{\varepsilon}{c_N} < \delta_1,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Es ist für die Untersuchungen dieser Abhandlung von ausschlaggebender Bedeutung, daß sich dieser Satz 1 auch umkehren läßt, d. h. daß es für die Eignung einer Zahl $\tau$ zur Verschiebungszahl $\tau(\varepsilon)$ auch hinreichend ist, daß für ein „großes" $N$ die $N$ Produkte $A_1 \tau, \ldots, A_N \tau$ alle, modulo $2\pi$ genommen, sehr „klein" sind. Wenn die Fourierreihe $\sum A_n e^{iA_n x}$ für alle $x$ gleichmäßig konvergent wäre, so wäre es ein Leichtes dieses Resultat abzuleiten; in der Tat hätten wir nur zunächst einen belanglosen Rest $\sum\limits_{n > N}$ der Fourierreihe abzuschneiden, wonach es klar wäre, daß $\tau$ als Verschiebungszahl zu $\varepsilon$ gehören würde, wenn nur die $N$ Größen $e^{iA_n \tau}$ $(n = 1, \ldots, N)$ alle sehr nahe an 1 herankämen. Es

[1] Unter der Schreibweise $|a| < b \pmod{c}$, wo $a, b, c$ reell, $b > 0$, $c \neq 0$ sind, verstehen wir, daß eine ganze Zahl $g$ derart existiert, daß $|a - gc| < b$ ist.

ist aber die Fourierreihe $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ im Allgemeinen nicht einmal konvergent für alle $x$, also erst recht nicht gleichmäßig konvergent. Wir werden jedoch sehen, daß wir mit Hilfe der Mittelkonvergenz der Fourierreihe, d. h. mit Hilfe des Fundamentalsatzes aus Abhandlung I, im Stande sind, den Beweis für eine beliebige fastperiodische Funktion zu führen. Bevor wir aber diesen Satz genau formulieren und beweisen, werden wir zunächst einen auch für spätere Zwecke wichtigen Hilfssatz ableiten, welcher uns in manchen Fällen erlaubt aus dem Erfülltsein einfacher Mittelwertsbedingungen für die Funktionen einer Folge von fastperiodischen Funktionen auf die gleichmäßige Konvergenz dieser Folge zu schließen.

## § 2.

### Ein Hilfssatz über gleichmäßige Konvergenz einer Folge fastperiodischer Funktionen.

Wir werden im Folgenden eine Menge $\mathsf{A}$ von fastperiodischen — und also gewiß (I, § 1, Satz II) gleichmäßig stetigen — Funktionen $\varphi(x)$ eine *„ausgezeichnete" Menge* heißen, falls sie die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:

1. *Die Funktionen $\varphi(x)$ der Menge $\mathsf{A}$ sind „gleichartig" gleichmäßig stetig,* d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein nur von $\varepsilon$ und der Menge $\mathsf{A}$ abhängiges $\delta > 0$ derart, daß für jede Funktion $\varphi(x)$ der Menge $\mathsf{A}$ und jedes Punktepaar $x_1$, $x_2$ mit $|x_1 - x_2| \leqq \delta$ die Ungleichung

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqq \varepsilon$$

besteht.

2. *Die Funktionen $\varphi(x)$ der Menge $\mathsf{A}$ sind „gleichartig" fastperiodisch,* d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine, nur von $\varepsilon$ und der Menge $\mathsf{A}$ abhängige, Länge $l$ derart, daß jedes Intervall $\alpha < x < \beta$ der Länge $l$ mindestens eine Zahl $\tau$ enthält, welche gleichzeitig eine zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl jeder der Funktionen $\varphi(x)$ der Menge ist; wir werden eine solche Zahl $\tau$ eine zu $\varepsilon$ gehörige „Verschiebungszahl der Menge $\mathsf{A}$" nennen.

Als besonders einfach nennen wir das folgende

**Beispiel einer ausgezeichneten Menge:** *die Menge $\mathsf{A}$ aller fastperiodischen Funktionen $\varphi(x)$ von der Form*

$$\varphi(x) = f(x+k),$$

*wo $f(x)$ eine gegebene fastperiodische Funktion ist, und $k$ eine beliebige reelle Zahl bedeutet.* In der Tat ist klar, daß 1) die Funktionen $\varphi(x)$ dieser Menge $\mathsf{A}$ gleichartig gleichmäßig stetig sind, da ja jede der Funktionen $\varphi(x)$ aus einer und derselben gleichmäßig stetigen Funktion $f(x)$ durch einfache Verlegung des Nullpunktes der $x$-Achse hervorgeht, und daß sie 2) auch gleichartig fastperiodisch sind, da ja jede zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl der festen Funktion $f(x)$ offenbar eine zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl der ganzen Menge $\mathsf{A}$ darstellt.

Es lautet nun unser

**Hilfssatz 2.** *Es sei $\mathsf{A}$ eine ausgezeichnete Menge von fastperiodischen Funktionen $\varphi(x)$; dann gibt es zu jedem $\alpha > 0$ eine nur von $\alpha$ und der Menge $\mathsf{A}$ abhängige Zahl $\beta > 0$ derart, daß jedes Funktionenpaar $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ der Menge $\mathsf{A}$, welches die Ungleichung*

$$(2) \qquad M\{|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|^2\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|^2\,dx \leqq \beta$$

*erfüllt, ebenfalls der Ungleichung*

$$(3) \qquad G\{|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|\} \leqq \alpha$$

*genügt*, wo wir zur Abkürzung (hier und im Folgenden) mit $G\{\psi(x)\}$ die obere Grenze einer reellen Funktion $\psi(x)$ für $-\infty < x < \infty$ bezeichnen.

**Beweis.** Der Satz besagt, anders ausgedrückt, daß es zu dem gegebenen $\alpha > 0$ ein $\beta = \beta(\alpha, \mathsf{A})$ derart gibt, daß jedes Funktionenpaar $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ der Menge $\mathsf{A}$, welches nicht die Ungleichung (3) erfüllt, d. h. zu welchem es eine Zahl $x_0$ mit

$$|\varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0)| > \alpha$$

gibt, der Ungleichung

$$M\{|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|^2\} > \beta$$

genügt.

Um die Existenz eines solchen $\beta > 0$ zu beweisen, bestimmen wir einerseits, auf Grund der gleichartig gleichmäßigen Stetigkeit der Funktionen der Menge $\mathsf{A}$, eine Zahl $\gamma = \gamma(\alpha) > 0$ derart, daß für jede Funktion $\varphi(x)$ dieser Menge und jedes Punktepaar $x'$, $x''$ mit $|x' - x''| < \gamma$ die Ungleichung

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \frac{\alpha}{8}$$

besteht, und daß somit jedes Funktionenpaar $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ unserer Menge, welches in einem Punkte $\xi$ die Ungleichung

$$|\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)| > \frac{\alpha}{2}$$

erfüllt, im ganzen Intervalle $(\xi - \gamma,\ \xi + \gamma)$ der Ungleichung

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| > |\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)| - 2\frac{\alpha}{8} > \frac{\alpha}{4}$$

genügt. Und andererseits bestimmen wir, nach der gleichartigen Fastperiodizität der Funktionen der Menge A, eine Länge $l_0 = l_0\left(\frac{\alpha}{4}\right)$ derart, daß jedes Intervall dieser Länge mindestens eine zu $\frac{\alpha}{4}$ gehörige Verschiebungszahl der Menge A enthält.

Ich behaupte, daß die Zahl

$$\beta = \frac{\alpha^2}{16} \cdot \frac{\gamma}{l_0 + 2\gamma}$$

die erwünschte Eigenschaft besitzt.

Es sei also $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ein beliebiges Funktionenpaar der Menge A, welches in einem gewissen Punkte $x_0$ der Ungleichung

$$|\varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0)| > \alpha$$

genügt. Wir bestimmen durch sukzessive Wahl eine Folge $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \ldots$ von zu $\frac{\alpha}{4}$ gehörigen Verschiebungszahlen der Menge A so, daß $\tau_n$ im Intervalle $\tau_{n-1} + 2\gamma < z < \tau_{n-1} + 2\gamma + l_0$ der Länge $l_0$ gelegen ist, und bezeichnen $x_0 + \tau_n$ mit $x_n$,

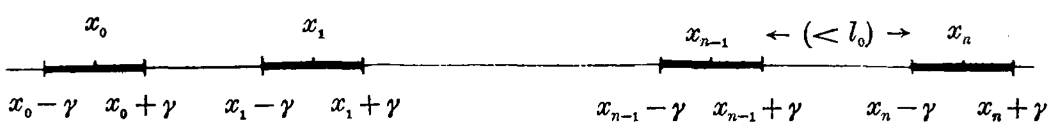


Fig. 1.

so daß die Folge der $x_n$ (vergl. Fig. 1) den Ungleichungen

$$x_{n-1} + \gamma < x_n - \gamma < x_{n-1} + \gamma + l_0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

genügt. Dann gilt in jedem Punkte $x_n = x_0 + \tau_n$ die Ungleichung

$$|\varphi_1(x_n) - \varphi_2(x_n)| \geqq |\varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0)| - 2 \cdot \frac{\alpha}{4} > \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

und es ist daher, nach einer obigen Bemerkung, im ganzen Intervalle $(x_n - \gamma,\ x_n + \gamma)$

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| > \frac{\alpha}{4}.$$

Weil aber die Intervalle $(x_n - \gamma,\ x_n + \gamma)$ der Länge $2\gamma$ nicht über einander greifen, und der Abstand der Mittelpunkte zweier auf einander folgender Intervalle $< l_0 + 2\gamma$ ist, ergibt sich hieraus für den Mittelwert $M\{|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|^2\}$ die Abschätzung

$$M\{|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|^2\} \geqq \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 \frac{2\gamma}{l_0 + 2\gamma} > \beta,$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hierin ist das wichtige Corollar enthalten:

**Corollar** (Konvergenzhilfssatz). *Es sei* A *eine ausgezeichnete Menge von fastperiodischen Funktionen, und es seien* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ *eine Folge von Funktionen dieser Menge, welche der Bedingung*

$$\lim_{m,n\to\infty} M\{|\varphi_m(x)-\varphi_n(x)|^2\} = 0 \tag{4}$$

*genügen*, d. h. es existiere zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $Q = Q(\varepsilon)$ derart, daß für $m > Q$, $n > Q$ die Ungleichung

$$M\{|\varphi_m(x)-\varphi_n(x)|^2\} < \varepsilon$$

besteht. *Dann konvergiert die Funktionenfolge* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ *gegen eine Grenzfunktion, und zwar gleichmäßig für alle* $x$ *des Intervalles* $-\infty < x < \infty$.

In der Tat folgt aus dem obigen Hilfssatze, daß eine Funktionenfolge $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ der Menge A, welche der Limesgleichung (4) genügt, ebenfalls die Limesgleichung

$$\lim_{m,n\to\infty} G\{|\varphi_m(x)-\varphi_n(x)|\} = 0 \tag{5}$$

erfüllt, und diese Limesgleichung besagt ja eben, daß die Funktionenfolge gleichmäßig für alle $x$ einer Grenzfunktion zustrebt.

## § 3.

### Eine hinreichende Bedingung für die Verschiebungszahlen.

Mit Hilfe des in § 2 aufgestellten Hilfssatzes können wir nunmehr — unter Heranziehung des Fundamentalsatzes der Abhandlung I — den folgenden Satz beweisen, welcher die am Schlusse des § 1 erwähnte Umkehrung des dort gegebenen Satzes I ausspricht.

**Satz II.** *Es sei* $f(x)$ *eine fastperiodische Funktion mit der Fourierentwicklung* $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$. *Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine Anzahl* $N$ *und eine Genauigkeit* $\delta$ *derart, daß jede Zahl* $\tau$ *eine zu* $\varepsilon$ *gehörige Verschiebungszahl der Funktion* $f(x)$ *ist, wenn sie nur die* $N$ *diophantischen Ungleichungen*

$$|\Lambda_n \tau| < \delta \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, \ldots, N) \tag{6}$$

*erfüllt.* Mit anderen Worten ist das Erfülltsein dieser $N$ Ungleichungen eine hinreichende Bedingung dafür, daß $\tau$ eine zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl ist.

**Beweis.** Wir betrachten die Menge aller fastperiodischen Funktionen der Form $\varphi(x) = f(x+k)$, wo $k$ eine beliebige reelle Zahl bedeutet. Diese Funktionen bilden (nach § 2) eine „ausgezeichnete" Menge, und es läßt sich daher, nach Hilfssatz 2, zu dem gegebenen $\varepsilon$ eine Zahl $\varepsilon_1 > 0$ so bestimmen, daß die Ungleichung

$$G\{|f(x+\tau)-f(x)|\} \leqq \varepsilon \tag{7}$$

besteht, falls nur die Ungleichung

$$M\{|f(x+\tau)-f(x)|^2\} \leqq \varepsilon_1 \tag{8}$$

erfüllt ist, so daß also $\tau$ gewiß eine zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl unserer Funktion $f(x)$ ist, falls nur die Ungleichung (8) gilt. Wir ziehen nun den Fundamentalsatz aus Abhandlung I heran, und zwar indem wir ihn auf die Fourierentwicklung

$$f(x+\tau)-f(x) \sim \sum A_n\left(e^{i\Lambda_n\tau}-1\right)e^{i\Lambda_n x}$$

anwenden, wobei $\tau$ vorläufig eine beliebige Zahl bedeutet. Dann ergibt sich

$$M\{|f(x+\tau)-f(x)|^2\} = \sum\left|A_n\left(e^{i\Lambda_n\tau}-1\right)\right|^2. \tag{9}$$

Nun wählen wir das $N$ so groß, daß

$$\sum_{n>N}|A_n|^2 < \frac{\varepsilon_1}{8}$$

ist, und dann, nachdem $N$ festgelegt ist, das $\delta\,(<\pi)$ so klein, daß

$$\left|e^{i\delta}-1\right|^2\sum_1^N|A_n|^2 < \frac{\varepsilon_1}{2}$$

ist. Für dieses $N$ und dieses $\delta$ wird dann die Forderung des Satzes erfüllt sein. Falls nämlich die Zahl $\tau$ die $N$ diophantischen Ungleichungen (6) erfüllt, gilt ja nach (9) die Ungleichung

$$M\{|f(x+\tau)-f(x)|^2\} = \sum\left|A_n\left(e^{i\Lambda_n\tau}-1\right)\right|^2$$
$$\leqq \sum_1^N|A_n|^2\cdot\left|e^{i\delta}-1\right|^2+\sum_{n>N}|2A_n|^2 < \frac{\varepsilon_1}{2}+4\cdot\frac{\varepsilon_1}{8} = \varepsilon_1;$$

also ist auch (7) erfüllt, d. h. $\tau$ eine zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl von $f(x)$.

## § 4.

### Die „quasiperiodischen" Funktionen von Bohl und Esclangon.

Wir schalten hier einen Paragraphen ein, in welchem wir die im Vorhergehenden gefundenen allgemeinen Beziehungen zwischen den Fourierexponenten und den Verschiebungszahlen einer beliebigen fastperiodischen Funktion speziell dazu verwenden, um zu zeigen, wie die Bohl-Esclangonschen

„quasiperiodischen“ Funktionen als ein natürlicher und einfacher Spezialfall in der allgemeinen Klasse der „fastperiodischen“ Funktionen enthalten sind. Hierzu müssen wir aber zunächst an zwei einfache Sätze aus der Theorie der diophantischen Approximationen erinnern [1].

Der erste dieser Sätze ist die folgende, von Bohl [2] und Wennberg [1] herrührende, Verschärfung eines bekannten Dirichlet-Kroneckerschen Satzes [2].

**Satz A.** *Es seien* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_M$ *beliebige von Null verschiedene reelle Zahlen, sowie* $\delta > 0$ *beliebig gegeben. Dann gibt es eine Länge* $l$ *derart, daß jedes Intervall* $\alpha < t < \beta$ *dieser Länge* $l$ *mindestens eine Lösung* $t$ *der* $M$ *diophantischen Ungleichungen*

$$|\mu_m t| < \delta \pmod{2\pi} \qquad (m = 1, 2, \ldots, M)$$

*enthält.* Es besteht also immer die Möglichkeit die $M$ Produkte $\mu_m t$ mit vorgegebener Genauigkeit in die Nähe des Nullpunktes (auf der Kreisperipherie betrachtet) zu bringen, und zwar für unendlich viele $t$, die nicht „allzu“ sparsam verteilt sind.

Der zweite zu erwähnende Satz über diophantische Approximationen hängt mit dem Dirichlet-Kroneckerschen Satze dadurch zusammen, daß er die Aufgabe behandelt, wieder $M$ Produkte $\mu_m t$ in die Nähe des Nullpunktes zu bringen, während aber ein $(M+1)$-tes Produkt $\lambda t$ so zu liegen kommen soll, daß es in sicherer Entfernung von 0 bleibt, z. B in eine gewisse Umgebung von $\pi$ fällt.

Über die neu hinzukommende $(M+1)$-te Zahl $\lambda$ soll nur vorausgesetzt werden, daß sie nicht als linear homogener Ausdruck in den $\mu_m$ mit ganzzahligen Koeffizienten darstellbar ist. Wir fragen nach denjenigen Zahlen $\eta$, für welche die $M+1$ diophantischen Ungleichungen

$$(10) \qquad |\mu_m t| < \delta \pmod{2\pi} \quad (m = 1, \ldots, M) \quad \text{und} \quad |\lambda t - 2\pi\eta| < \delta \pmod{2\pi}$$

bei jedem beliebig kleinen $\delta > 0$ eine Lösung in $t$ besitzen. Wie aus einem allgemeinen Kroneckerschen Satz über diophantische Ungleichungen sofort abzuleiten [3], lautet die Antwort folgendermaßen: Die Ungleichungen (10) haben (bei jedem $\delta > 0$) stets eine Lösung, falls sie nicht untereinander in „offenkundigem“ Widerspruch dadurch stehen, daß es möglich ist ganze Zahlen $g_1, \ldots, g_M, g_{M+1}$ so zu finden, daß $g_1\mu_1 + \cdots + g_M\mu_M + g_{M+1}\lambda = 0$ ist, ohne daß gleichzeitig $g_{M+1}\eta$

[1] Der späteren Anwendung halber werden wir mit „mod. $2\pi$“ statt mit „mod. 1“ operieren, was ja nur eine Änderung der Länge der gewählten Einheit bedeutet.

[2] Vergl. Abhandlung I, Zusatz 2.

[3] Vergl. z. B. Bohr, [4].

eine ganze Zahl wird. Mit anderen Worten: 1) Wenn die Zahl $\lambda$ von den Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_M$ **linear unabhängig** ist, d. h. nicht einmal mit **rationalen** Koeffizienten als linear homogener Ausdruck in den $\mu_m$ darstellbar ist, darf für $\eta$ überhaupt jeder reelle Wert verwendet werden. 2) Falls dagegen die Zahl $\lambda$ von den $\mu_m$ **rational abhängt**, also in der Form $\lambda = r_1\mu_1 + \cdots + r_M\mu_M$ mit rationalen $r_1, \ldots, r_M$ darstellbar ist, gibt es eine ganze Zahl $Q > 1$ derart, daß die „erlaubten" Werte von $\eta$ genau die sämtlichen Zahlen der Form $\frac{P}{Q}$ sind, wo $P$ eine beliebige ganze Zahl bedeutet; hierbei ist $Q$ übrigens der Hauptnenner der rationalen Koeffizienten $r_1, \ldots, r_M$ in dem Ausdruck $\lambda = r_1\mu_1 + \cdots + r_M\mu_M$, falls diese Darstellung so gewählt wird — wenn es mehrere solche Darstellungen von $\lambda$ geben sollte — daß der zugehörige Hauptnenner der Koeffizienten am kleinsten ausfällt. Es genügt für unsere Zwecke zu bemerken, daß in beiden Fällen die Zahl $\eta$ so gewählt werden kann, daß sie nicht „allzu" nahe an eine ganze Zahl herankommt; es kann ja z. B. immer ein $\eta$ auf der Strecke $\frac{1}{3} \leqq \eta < \frac{2}{3}$ genommen werden. Indem wir durch eine solche Wahl von $\eta$ das $(M+1)$-te Produkt $\lambda t$ in eine „Umgebung" $\left(\text{von einer Breite} > \frac{2\pi}{3}\right)$ des Punktes $\pi$ bringen können, haben wir das folgende Resultat gewonnen:

**Satz B.** *Es seien $\mu_1, \ldots, \mu_M$ beliebige reelle Zahlen $\neq 0$, und $\lambda$ eine Zahl, die nicht in der Form $n_1\mu_1 + \cdots + n_M\mu_M$ mit ganzzahligen $n_m$ darstellbar ist. Dann gibt es bei jedem $\delta > 0$ eine Zahl $t$, welche gleichzeitig die $M+1$ diophantischen Ungleichungen*

$$(11) \qquad |\mu_m t| < \delta \ (\text{mod.}\ 2\pi) \quad (m = 1, \ldots, M) \quad \textit{und} \quad |\lambda t - \pi| < \frac{\pi}{2} \ (\text{mod.}\ 2\pi)$$

*erfüllt.*

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir nunmehr zu unserer Aufgabe, der Charakterisierung der Bohl-Esclangonschen Funktionen innerhalb des Rahmens der fastperiodischen Funktionen über. Die Definition dieser Funktionen lautet (wie schon in der Einleitung zur Abhandlung I erwähnt) folgendermaßen:

*Es sei eine endliche Anzahl von Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_M$ ($\neq 0$) beliebig gegeben. Dann soll eine stetige Funktion $f(x)$ quasiperiodisch mit den Perioden $\frac{2\pi}{\mu_1}, \frac{2\pi}{\mu_2}, \ldots, \frac{2\pi}{\mu_M}$ heißen*[1], *falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, daß jede Zahl $\tau$, welche die*

[1] Die Benennung „quasiperiodisch" rührt von ESCLANGON ([1], [2]) her. BOHL gebraucht die Bezeichnung „im weiteren Sinne periodisch mit den Perioden $\frac{2\pi}{\mu_1}, \ldots, \frac{2\pi}{\mu_M}$".

*$M$ diophantischen Ungleichungen*

$$|\tau\mu_m| < \delta \pmod{2\pi} \qquad (m = 1, 2, \ldots, M)$$

*erfüllt, eine zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ ist.*

Wir werden beweisen, daß es möglich ist, diese „quasiperiodischen Funktionen mit den Perioden $\frac{2\pi}{\mu_m}$" in wesentlich anderer Weise zu charakterisieren, und zwar so, daß nicht, wie in der obigen Definition, den Verschiebungszahlen $\tau(\varepsilon)$ gewisse einschränkende Bedingungen mit Hilfe der vorgegebenen Zahlen $\mu_m$ auferlegt werden, sondern daß die Verschiebungszahlen ganz frei gelassen werden (abgesehen von der Forderung der Existenz der „Länge $l = l(\varepsilon)$") und die $\mu_m$ vielmehr dazu dienen, einen gewissen Typus von Fourierexponenten $\Lambda_n$ auszuzeichnen.

**Satz III.** *Es ist, bei gegebenen $\mu_1, \ldots, \mu_M$ $(\neq 0)$, die Menge der quasiperiodischen Funktionen mit den Perioden $\frac{2\pi}{\mu_1}, \ldots, \frac{2\pi}{\mu_M}$ mit derjenigen Teilmenge der fastperiodischen Funktionen $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ identisch, deren Fourierexponenten $\Lambda_n$ sämtlich in der Form*

$$\Lambda_n = g_{n,1}\mu_1 + g_{n,2}\mu_2 + \cdots + g_{n,M}\mu_M \tag{12}$$

*mit ganzzahligen Koeffizienten $g_{n,m}$ geschrieben werden können*[1].

**Beweis.** 1. Wir zeigen zunächst, daß jede quasiperiodische Funktion $f(x)$ mit den Perioden $\frac{2\pi}{\mu_1}, \ldots, \frac{2\pi}{\mu_M}$ eine fastperiodische Funktion von der erwähnten Art ist. Hierzu haben wir zunächst zu beweisen, daß die Funktion $f(x)$ überhaupt fastperiodisch ist, also (da sie nach Voraussetzung stetig ist) daß zu jedem $\varepsilon$ eine Länge $l = l(\varepsilon)$ existiert, derart, daß jedes Intervall dieser Länge mindestens eine zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl enthält. Dies folgt aber sofort aus dem obigen Satze A über diophantische Approximationen; denn nach der Definition der quasiperiodischen Funktionen können wir zu dem gegebenen $\varepsilon$ ein $\delta$ so bestimmen, daß jede Zahl $t = \tau$, welche den $M$ Ungleichungen

$$|t\mu_m| < \delta \pmod{2\pi} \qquad (m = 1, \ldots, M)$$

genügt, eine zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl ist, und nach dem Satze A gibt es ja eine Länge $l$ derart, daß jedes Intervall dieser Länge mindestens eine

---

[1] In Kapitel II, § 5 wird es übrigens möglich sein, mit Hilfe des dort eingeführten Begriffes einer „Basis" der Exponenten, die quasiperiodischen Funktionen als Teilmenge der fastperiodischen Funktionen noch etwas übersichtlicher zu charakterisieren.

Lösung $t = \tau$ dieser $M$ Ungleichungen enthält[1]. Nachdem somit die gegebene quasiperiodische Funktion $f(x)$ als fastperiodisch erkannt ist, soll nunmehr gezeigt werden, daß jeder Fourierexponent $\Lambda_n$ der Funktion $f(x)$ in der Form (12) darstellbar ist. Wir führen den Beweis indirekt, und nehmen also an, daß es einen Fourierexponenten, etwa $\Lambda_R = \lambda$, gibt, der nicht diese Form besitzt. Nach Hilfssatz 1 (§ 1) können wir das $\varepsilon > 0$ so klein wählen, daß eine Zahl $\tau$, für welche das Produkt $\tau\lambda$ die Ungleichung

$$(13) \qquad |\tau\lambda - \pi| < \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

erfüllt (d. h. modulo $2\pi$ nicht nahe an Null kommt), gewiß keine zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl ist. Andererseits können wir aber nach der Definition der Quasiperiodizität zu diesem $\varepsilon$ ein $\delta > 0$ so finden, daß jede Zahl $\tau$, welche den $M$ Ungleichungen

$$(14) \qquad |\tau\mu_m| < \delta \pmod{2\pi} \qquad (m = 1, \ldots, M)$$

genügt, gewiß eine zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl ist. Hierin liegt aber ein Widerspruch; denn nach dem obigen Satze B gibt es ja — weil $\lambda$ nach Voraussetzung nicht von der Form (12) ist — ein $\tau$, welches gleichzeitig die Ungleichungen (13) und (14) befriedigt.

2. Danach haben wir zu zeigen, daß umgekehrt jede fastperiodische Funktion $f(x)$, deren Fourierexponenten $\Lambda_n$ alle die Form (12) besitzen, auch eine quasiperiodische Funktion mit den Perioden $\frac{2\pi}{\mu_1}, \ldots, \frac{2\pi}{\mu_M}$ ist. Dieser Teil des Satzes ist, im Gegenteil zu dem obigen, ein tiefliegender, indem sein Beweis der Heranziehung der „hinreichenden Bedingung" (Satz II) aus § 3 bedarf, welche ihrerseits auf dem Fundamentalsatz der Abhandlung I beruht. Wenn wir aber diesen Satz II zur Verfügung haben, können wir den Beweis in wenigen Worten führen. In der Tat können wir nach diesem Satze, falls $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben wird, eine Anzahl $N$ und eine Genauigkeit $\delta_1$ so bestimmen, daß jede Zahl $\tau$, welche die $N$ Ungleichungen

$$(15) \qquad |\tau\Lambda_n| < \delta_1 \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

befriedigt, eine zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl ist; und ferner können wir, nachdem $N$ und $\delta_1$ festgelegt sind, aus Stetigkeitsgründen (weil ja nach Voraussetzung alle $\Lambda$ die Form (12) haben) das $\delta > 0$ so klein wählen, daß jede Zahl

[1] Die Existenz der „Länge $l(\varepsilon)$" bei jeder quasiperiodischen Funktion war, wie in Abhandlung I, Zusatz 2 bemerkt, bereits Bohl bekannt; gerade ihretwegen hat er ja den „Satz A" aufgestellt.

$\tau$, welche die $M$ Ungleichungen

$$(16)\qquad |\tau\mu_m| < \delta \pmod{2\pi} \qquad (m = 1, \ldots, M)$$

erfüllt, ebenfalls die obigen $N$ Ungleichungen (15) befriedigt, so daß jede Zahl $\tau$, welche (16) erfüllt, tatsächlich eine zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl ist.

Wie schon in der Einleitung zu I erwähnt, ist Bohl dadurch zur Einführung seiner quasiperiodischen Funktionen mit den Perioden $\frac{2\pi}{\mu_1}, \ldots, \frac{2\pi}{\mu_M}$ gekommen, daß er sich die Aufgabe gestellt hatte, die Klasse derjenigen Funktionen zu charakterisieren, welche gleichmäßig durch endliche trigonometrische Summen der speziellen Form $\sum a_{n_1, \ldots, n_M} e^{i(n_1\mu_1 + \cdots + n_M\mu_M)x}$ approximiert werden können, und als Lösung die angegebene Eigenschaft der Quasiperiodizität gefunden hat. Nun haben wir aber durch den Satz III bewiesen, daß die Menge der quasiperiodischen Funktionen tatsächlich mit einer gewissen einfachen Teilmenge der fastperiodischen Funktionen übereinstimmt[1], und es fragt sich daher von selbst, ob nicht das oben erwähnte Bohlsche Resultat über die gleichmäßige Approximation von quasiperiodischen Funktionen einen einfachen Spezialfall eines allgemeinen Satzes über die Approximation von fastperiodischen Funktionen darstellt. In den folgenden Kapiteln werden wir zeigen, daß es in der Tat so ist. Die Beweismethode, die wir dabei anwenden werden, stimmt in den großen Zügen — dem Übergang zu periodischen Funktionen von mehreren Veränderlichen mit Hilfe des Kroneckerschen Approximationssatzes[2], und danach der Annäherung dieser Funktionen durch trigonometrische Summen in mehreren Variablen — mit der Bohlschen

---

[1] Bezüglich der gegenseitigen Stellung dieser beiden Charakterisierungen einer und derselben Funktionenklasse sei zur Erläuterung bemerkt, daß die erste (quasiperiodische) anscheinend mehr von den Funktionen verlangt wie die zweite (fastperiodische), und die zweite daher in gewissem Sinne „tiefer" liegend genannt werden kann. Wie nämlich aus dem obigen Beweise des Satzes III hervorgeht, kann man mit Hilfe einfacher Sätze über diophantische Approximationen sofort einsehen, daß jede Funktion der „ersten" Art auch eine Funktion der „zweiten" Art ist, während der Nachweis, daß umgekehrt jede Funktion der zweiten Art auch eine Funktion der ersten Art ist, der Heranziehung des tiefliegenden Fundamentalsatzes aus I bedarf.

Überhaupt beruht die Hauptschwierigkeit unserer ganzen Untersuchung — aber auch ihr Hauptinteresse — darin, daß in unserer Definition der Fastperiodizität den Verschiebungszahlen gar keine Bedingungen (außer ihrer relativen Dichte) auferlegt sind.

[2] Dieselbe Idee, wenn auch in anderer Form, liegt auch verschiedenen Arbeiten des Verfassers über Dirichletsche Reihen zu Grunde. Bei diesen Untersuchungen, welche ihren Ausgangspunkt in dem Gebiete der analytischen Zahlentheorie hatten, waren mir die Bohlschen Arbeiten über trigonometrische Summen noch unbekannt geblieben.

Beweismethode überein. In den Einzelheiten aber verlaufen unsere Untersuchungen ganz anders wie die Bohlschen und bedürfen der Ausbildung von Methoden von viel schwierigerem analytischen Charakter, was ja nur zu erwarten war, da die von uns betrachtete Funktionenklasse von weit größerer Allgemeinheit ist, als die der quasiperiodischen Funktionen. Vor allem müssen wir mit periodischen Funktionen von abzählbar vielen (statt von nur endlich vielen) Variabeln operieren, und können nicht einmal mit den rein periodischen Funktionen von abzählbar vielen Variabeln auskommen, sondern müssen die (in der Einleitung erwähnten) grenzperiodischen Funktionen einführen. Auch die Art, in welcher wir zu den Funktionen von mehreren Veränderlichen kommen, ist eine andere als bei Bohl. In der Tat läßt sich die Bohlsche Methode, welche kurz gesagt darauf beruht, die Funktionen von mehreren Veränderlichen, welche zu seinen quasiperiodischen Funktionen „gehören", zuerst nur in einer überall dicht liegenden Punktmenge des mehrdimensionalen Raumes zu definieren und erst danach durch einen Grenzübergang die Definition für den ganzen Raum auszudehnen, nicht direkt auf die Behandlung beliebiger fastperiodischer Funktionen übertragen. Unsere Definition der zu einer fastperiodischen Funktion „gehörigen" Funktion von mehreren (abzählbar vielen) Veränderlichen geschieht mit einem Schlage, indem diese Funktion sogleich im ganzen unendlichdimensionalen Raume definiert wird, und zwar durch die „Summe" einer gewissen divergenten Reihe von abzählbar vielen Variabeln. Die formale Aufstellung dieser Reihe hängt eng mit Gesichtspunkten zusammen, welche der Verfasser in früheren Arbeiten über Dirichletsche Reihen [1] entwickelt hat. Damals handelte es sich aber immer um konvergente Reihen, während die hier auftretenden Reihen wie gesagt im allgemeinen divergieren; durch die in Abhandlung I entwickelte Theorie der Fourierreihen fastperiodischer Funktionen wird es aber ermöglicht, die betreffenden Reihen in natürlicher Weise zu „summieren".

[1] Vergl. insb. Bohr [2].

## KAPITEL II.

### Übergang zu Funktionen von unendlich vielen Variabeln mit Hilfe des Kroneckerschen Approximationssatzes.

Obwohl die in Kapitel I gewonnenen Resultate als Hilfsmittel bei den folgenden Untersuchungen eine wichtige Rolle spielen werden, so schließen sie sich doch ihrem Inhalte nach — dem Zusammenhang zwischen Verschiebungseigenschaften und Fourierentwicklung — dem Problemkreis der Abhandlung I an.

Wir gehen nunmehr zur Behandlung der in der Einleitung erwähnten andersartigen Fragen über. Wie schon dort erwähnt, besteht unser Hauptproblem darin, die fastperiodischen Funktionen durch Schwingungseigenschaften genau zu charakterisieren. Dazu müssen wir aber vorerst die fastperiodischen Funktionen von einem anderen Gesichtspunkte aus kennzeichnen, indem wir sie mit Funktionen von unendlich vielen Variabeln in Beziehung bringen. Den Übergang zu ihnen werden wir in diesem Kapitel mit Hilfe des Kroneckerschen Satzes über diophantische Approximationen bewerkstelligen.

Es sei $f(x)$ eine beliebige fastperiodische Funktion und $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ ihre Fourierentwicklung. Wir wollen uns zunächst überlegen, wie sich die Bildpunkte der Glieder $A_n e^{i\Lambda_n x}$ in der komplexen Ebene bewegen, wenn die Variable $x$ das Intervall $-\infty < x < \infty$ durchläuft. Unmittelbar klar ist, daß sich jedes einzelne Glied auf einem festen Kreise bewegt; denn $A_n = |A_n| e^{i\vartheta_n}$ gesetzt, ist ja

$$A_n e^{i\Lambda_n x} = |A_n| e^{i(\vartheta_n + \Lambda_n x)},$$

wo der Modul $|A_n|$ nicht von $x$ abhängt. Wenn man aber die Gesamtheit aller Glieder der Reihe ins Auge faßt, ist ihr Verhalten nicht mehr so übersichtlich, weil sie ja alle von dem einen Parameter $x$ abhängen und ihre Bewegungen daher gekoppelt sind. Die den folgenden Untersuchungen zu Grunde liegende Idee besteht nun darin, diese Koppelung dadurch aufzulösen, daß man aus der Gesamtheit dieser Bewegungen die „unabhängigen" Komponenten herauszufinden sucht. Hierbei kann wohl nicht von einer „strengen" Unabhängigkeit der Bewegungen dieser im Allgemeinen unendlich vielen Komponenten die Rede sein (weil ja das ganze System von dem einen Parameter $x$ abhängt), sondern nur von einer „ungefähren" Unabhängigkeit in dem Sinne, daß nur endlich viele von den Punkten des „unabhängigen“ Systems in vorgeschriebene kleine Umgebungen beliebig gewählter Punkte der entsprechenden Bahnkurven gebracht werden können. Die Auffindung solcher „unabhängigen“ Komponenten beruht auf dem erwähnten Kroneckerschen Satz über diophantische Approximationen:

**Kroneckerscher Satz.** *Es seien $\beta_1, \ldots, \beta_M$ eine endliche Anzahl von linear unabhängigen reellen Zahlen, d. h. es bestehe keine Relation der Form*

$$r_1\beta_1 + \cdots + r_M\beta_M = 0$$

*in rationalen nicht sämtlich verschwindenden Zahlen $r_1, \ldots, r_M$. Dann haben, bei beliebig gewählten reellen Zahlen $\theta_1, \ldots, \theta_M$ und einem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ die $M$ diophantischen Ungleichungen*

$$|x\beta_m - \theta_m| < \varepsilon \ (\mathrm{mod.}\ 1) \qquad (m = 1, \ldots, M)$$

*immer eine Lösung in $x$.*

In dem Spezialfall, wo die Fourierexponenten $\Lambda_n$ unserer Reihe selbst linear unabhängig sind, kann der Kroneckersche Satz unmittelbar auf die Amplituden $\vartheta_n + \Lambda_n x$ der einzelnen Glieder angewendet werden [1]. Im allgemeinen Falle beliebiger Exponenten müssen wir dagegen, bevor wir diesen Satz heranziehen können, die Exponenten $\Lambda_n$ in ihre „linear unabhängigen Bestandteile“ zerlegen. Zu diesem Zwecke führen wir den Begriff einer Basis der Exponentenfolge ein.

## § 5.

## Basis einer Exponentenfolge.

**Definition** [2]. *Unter einer Basis $\mathsf{B} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ der Exponentenfolge $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ soll eine (endliche oder abzählbare) Folge von reellen Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots$ mit den beiden folgenden Eigenschaften verstanden werden:*

1. *Die Basiszahlen $\beta$ sind linear unabhängig, d. h. es besteht bei keinem $M$ eine Relation der Form*

$$r_1\beta_1 + \cdots + r_M\beta_M = 0$$

*mit rationalen nicht sämtlich verschwindenden Zahlen $r_1, \ldots, r_M$.* [3]

---

[1] Es war eben dieser Umstand, auf welchem die Einfachheit der Resultate der in Abhandlung I, Kapitel III entwickelten Theorie der Fourierreihen mit linear unabhängiger Exponentenfolge beruhte.

[2] Vergl. Bohr [2].

[3] Hiermit ist speziell gesagt, daß kein $\beta$ gleich 0 ist.

2. *Jeder Exponent* $\Lambda_n$ *ist in der Form*

$$\Lambda_n = r_{n,1}\beta_1 + r_{n,2}\beta_2 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n}$$

*mit rationalen Koeffizienten* $r_{n,m}$ *darstellbar.* Hierbei ist offenbar, nach 1, die Darstellung jedes $\Lambda_n$ (bis auf Glieder mit Nullkoeffizienten) eine eindeutige.

In der oben zitierten Abhandlung war — was für manche Zwecke natürlicher ist — den Begriff einer „Basis" etwas enger gefaßt. Dieser engere Begriff einer „eigentlichen" Basis, wie wir sie nennen wollen, ist folgendermaßen definiert:

*Eine Basis* $\mathsf{B} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ *der Folge* $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ *soll eine eigentliche Basis dieser Folge heißen, falls sie außer den beiden obigen Eigenschaften* 1 *und* 2 *noch die weitere Eigenschaft besitzt:*

3. *Jede Basiszahl* $\beta_n$ *ist in der Form*

$$\beta_n = s_{n,1}\Lambda_1 + s_{n,2}\Lambda_2 + \cdots + s_{n,p_n}\Lambda_{p_n}$$

*mit rationalen Koeffizienten* $s_{n,m}$ *darstellbar.*

Wie unmittelbar zu beweisen, *gibt es zu jeder Exponentenfolge nicht nur Basen, sondern auch eigentliche Basen.* Indem wir von den speziellen Fällen absehen, wo die Exponentenfolge „leer" ist oder nur die einzige Zahl 0 enthält (d. h. wo die Funktion identisch 0 bezw. gleich einer Konstanten $\neq 0$ ist), und wo eine eigentliche Basis durch eine leere Menge gegeben wird[1], können wir durch das folgende Verfahren sofort eine eigentliche Basis der Exponentenfolge $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ erhalten: Als erste Basiszahl $\beta_1$ nehmen wir die erste Zahl $\Lambda_{n_1}$ der Folge $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$, welche von 0 verschieden ist (also entweder $\Lambda_1$ oder $\Lambda_2$) und streichen danach jede Zahl $\Lambda_n$ der Folge $\Lambda_{n_1+1}, \Lambda_{n_1+2}, \ldots$, für die eine Relation der Form $r_1\beta_1 + r_2\Lambda_n = 0$ in rationalen Zahlen $r_1, r_2$ mit $r_2 \neq 0$ besteht. Es sei $\Lambda_{n_2}$ die erste Zahl der Folge $\Lambda_{n_1+1}, \Lambda_{n_1+2}, \ldots$, die hierbei nicht ausgestrichen wird. Dann setzen wir $\beta_2 = \Lambda_{n_2}$ und streichen jede (noch nicht ausgestrichene) Zahl $\Lambda_n$ der Folge $\Lambda_{n_2+1}, \Lambda_{n_2+2}, \ldots$, für die eine Relation der Form $r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + r_3\Lambda_n = 0$ in rationalen Zahlen $r_1, r_2, r_3$ mit $r_3 \neq 0$ besteht. Danach setzen wir $\beta_3 = \Lambda_{n_3}$, wo $\Lambda_{n_3}$ die erste nicht ausgestrichene Zahl der Folge $\Lambda_{n_2+1}, \Lambda_{n_2+2}, \ldots$ bedeutet, usw. Bricht dies Verfahren nach dem $m$-ten Schritte dadurch ab, daß die sämtlichen Zahlen $\Lambda_{n_m+1}, \Lambda_{n_m+2}, \ldots$ gestrichen sind (oder daß keine $\Lambda$ übrig

[1] Damit die obige Bedingung 2 auch in dem Ausnahmefall, wo die Exponentenfolge nur aus der Zahl 0 besteht (also $f(x) = c \neq 0$), erfüllt erscheint, muß man sie eigentlich in der Form

$$\Lambda_n = 0 + r_{n,1}\beta_1 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n}$$

geschrieben denken.

sind), so bildet die endliche Menge

$$\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\} = \{\Lambda_{n_1}, \Lambda_{n_2}, \ldots, \Lambda_{n_m}\}$$

offenbar eine eigentliche, „$m$-gliedrige“, Basis. Geschieht dies jedoch niemals, so wird offenbar eine eigentliche Basis durch die abzählbare Folge

$$\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \ldots\} = \{\Lambda_{n_1}, \Lambda_{n_2}, \ldots, \Lambda_{n_m}, \ldots\}$$

gegeben.

Nachdem die Existenz einer eigentlichen Basis der $\Lambda$-Folge bewiesen ist, sieht man sofort, *daß es zu jeder $\Lambda$-Folge sogar unendlich viele verschiedene eigentliche Basen gibt* (abgesehen von den oben genannten beiden Sonderfällen, wo die Basis leer ist). Denn ist $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ eine eigentliche Basis, so wird ja z. B. die Menge $\{r_1\beta_1, r_2\beta_2, \ldots\}$, wo $r_1, r_2, \ldots$ beliebige von Null verschiedene rationale Zahlen sind, ebenfalls eine eigentliche Basis sein.

Beispiel 1. Sind $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ und $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$ zwei eigentliche Basen einer und derselben $\Lambda$-Folge, so ist offenbar jedes $\gamma$ als ein linearer homogener Ausdruck in endlich vielen $\beta$ mit rationalen Koeffizienten darstellbar (und umgekehrt); denn jedes $\gamma$ ist ja linear in endlich vielen $\Lambda$, und jedes $\Lambda$ linear in endlich vielen $\beta$ ausdrückbar. Hieraus folgt sofort durch eine elementare algebraische Überlegung, daß in dem Spezialfall, wo die $\Lambda$-Folge eine endlichgliedrige eigentliche Basis $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ besitzt, die sämtlichen eigentlichen Basen dieser $\Lambda$-Folge durch $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ gegeben werden, wo die $\gamma$ linear homogene Ausdrücke in den $\beta$ mit rationalen Koeffizienten sind, deren Determinante $\neq 0$ ist. Hiermit ist speziell gesagt, *daß, falls die $\Lambda$-Folge eine eigentliche endlichgliedrige, etwa $m$-gliedrige, Basis besitzt, jede eigentliche Basis dieser $\Lambda$-Folge ebenfalls endlichgliedrig, und zwar genau $m$-gliedrig, sein muß.*

Beispiel 2. Für die Folge $\Lambda_n = n(1+\sqrt{2})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ist $\{1+\sqrt{2}\}$ oder allgemeiner $\{r(1+\sqrt{2})\}$, wo $r$ eine rationale Zahl $\neq 0$ ist, eine eigentliche Basis. Wenn aber nur irgend eine Basis (und nicht gerade eine eigentliche Basis) gewünscht wird, kann z. B. auch $\{1, \sqrt{2}\}$ oder etwa $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi\}$ verwendet werden.

In der vorliegenden Abhandlung werden wir übrigens — weil dadurch verschiedene Sätze kürzer und übersichtlicher formuliert werden können — immer mit allgemeinen Basen operieren und nicht den Begriff der eigentlichen Basen heranziehen. Dagegen wird ein ganz andersartiger Begriff, nämlich der einer „ganzen“ Basis[1], eine wesentliche Rolle spielen.

---

[1] Vergl. Bohr [2].

**Definition.** *Eine Basis* $\mathsf{B} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ *einer Exponentenfolge* $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ *soll eine ganze Basis genannt werden, falls in der Darstellung jeder Zahl* $\Lambda_n$ *durch Zahlen der Basis,*

$$\Lambda_n = r_{n,1}\beta_1 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n},$$

*die Koeffizienten* $r_{n,1}, \ldots, r_{n,q_n}$ *nicht nur rationale sondern sogar ganze Zahlen sind.*

Beispiel 3. Für die Folge $\Lambda_n = \log n$ ist, nach der eindeutigen Zerlegbarkeit jeder ganzen Zahl $n > 1$ in Primfaktoren, die Menge

$$\{\log 2, \log 3, \log 5, \ldots, \log p_n, \ldots\},$$

wo $p_n$ die $n$-te Primzahl bedeutet, eine ganze (eigentliche) Basis[1].

**Bemerkung.** Die Eigenschaft einer Exponentenfolge eine ganze Basis zu besitzen, hängt nicht davon ab, ob wir mit „eigentlichen" Basen oder mit „allgemeinen" Basen operieren. Mit anderen Worten: *Falls die Exponentenfolge* $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ *überhaupt eine ganze Basis* $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ *besitzt, so wird sie auch eine eigentliche ganze Basis* $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$ *besitzen.*

In der Tat können wir aus einer beliebigen ganzen Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ durch das folgende einfache Verfahren eine eigentliche ganze Basis $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$ erhalten: Es sei $\beta_{m_1}$ das $\beta$ mit dem niedrigsten Index, welches überhaupt in den gegebenen Darstellungen der $\Lambda$ durch die $\beta$ vorkommt, und es sei

$$\Lambda_{n_1} = g_1\beta_{m_1} + \text{ganzzahl. Kombin. von } \beta_m \text{ mit } m > m_1$$

dasjenige $\Lambda$ mit dem niedrigsten Index, in dem $\beta_{m_1}$ vorkommt. Wir setzen dann

$$\gamma_1 = \frac{1}{g_1}\Lambda_{n_1} = \beta_{m_1} + \frac{1}{g_1}(\cdots).$$

Nunmehr eliminieren wir $\beta_{m_1}$ in allen Darstellungen der $\Lambda$, in welchen es auftritt, und schreiben das Resultat in der Form

$$\Lambda_n - h_{n,1}\gamma_1 = \text{ganzzahl. Komb. von } \beta'_m = \frac{\beta_m}{g_1} \text{ mit } m > m_1$$
$$(n = 1, 2, \ldots;\ h_{n,1} \text{ ganz}).$$

---

[1] Diese Bemerkung bildet den Ausgangspunkt der vom Verfasser entwickelten Theorie des Zusammenhanges der Dirichletschen Reihen vom Typus $\sum \frac{a_n}{n^s}$ mit den Potenzreihen von unendlich vielen Variabeln. Vergl. Bohr [1].

Es ist klar, daß $\gamma_1, \beta'_{m_1+1}, \beta'_{m_1+2}, \ldots$, ebenso wie $\beta_1, \beta_2, \ldots$, linear unabhängig sind (weil ja $\beta_{m_1}$ in $\gamma_1$ vorkommt), daß $\gamma_1, \beta'_{m_1+1}, \ldots$ eine ganze Basis der $\Lambda$-Folge bildet, und schließlich daß $\gamma_1$ linear mit rationalen Koeffizienten durch endlich viele $\Lambda$ ausdrückbar ist $\left(\text{es ist ja } \gamma_1 = \frac{1}{g_1}\Lambda_{n_1}\right)$.

Wir setzen nun dieses Verfahren fort, indem wir statt von den $\Lambda_n$ selbst von den „reduzierten" Ausdrücken $\Lambda_n - h_{n,1}\gamma_1$ ausgehen: Wir bezeichnen mit $m_2 > m_1$ die kleinste Zahl, welche als Index eines $\beta'$ in den Ausdrücken von $\Lambda_n - h_{n,1}\gamma_1$ vorkommt, und mit $n_2$ die kleinste Zahl, für welche $\beta'_{m_2}$ in

$$\Lambda_{n_2} - h_{n_2,1}\gamma_1 = g_2\beta'_{m_2} + \text{ganzzahl. Kombin. von } \beta'_m \text{ mit } m > m_2$$

auftritt; wir setzen dann

$$\gamma_2 = \frac{1}{g_2}(\Lambda_{n_2} - h_{n_2,1}\gamma_1) = \beta'_{m_2} + \frac{1}{g_2}(\cdots),$$

eliminieren $\beta'_{m_2}$ in allen den Darstellungen der $\Lambda_n - h_{n,1}\gamma_1$ und schreiben das Resultat in der Form

$$\Lambda_n - h_{n,1}\gamma_1 - h_{n,2}\gamma_2 = \text{ganzzahl. Kombin. von } \beta''_m = \frac{\beta'_m}{g_2} \text{ mit } m > m_2$$
$$(n = 1, 2, \ldots;\ h_{n,1}, h_{n,2} \text{ ganz}).$$

Es ist klar, daß $\gamma_1, \gamma_2, \beta''_{m_2+1}, \beta''_{m_2+2}, \ldots$ ebenso wie $\gamma_1, \beta'_{m_1+1}, \beta'_{m_1+2}, \ldots$ linear unabhängig sind (weil ja $\beta'_{m_2}$ in $\gamma_2$ vorkommt), daß $\gamma_1, \gamma_2, \beta''_{m_2+1}, \beta''_{m_2+2}, \ldots$ eine ganze Basis der $\Lambda$-Folge bildet, und schließlich das $\gamma_2$ linear mit rationalen Koeffizienten durch endlich viele $\Lambda$ ausdrückbar ist (es ist ja $\gamma_2 = \frac{1}{g_2}(\Lambda_{n_2} - h_{n_2,1}\gamma_1)$, und von $\gamma_1$ wissen wir es schon).

In dieser Weise setzen wir fort und bekommen dadurch eine Folge $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ der gewünschten Art, d. h. es bildet $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$ eine *eigentliche* ganze Basis. In der Tat ist offenbar jedes $\gamma$ rational durch die $\Lambda$ ausdrückbar und die $\gamma$ untereinander linear unabhängig, und ferner wird auch jedes $\Lambda$ durch das angegebene Verfahren linear mit ganzzahligen Koeffizienten durch die $\gamma$ ausgedrückt,

$$\Lambda_n = h_{n,1}\gamma_1 + h_{n,2}\gamma_2 + \cdots + h_{n,s_n}\gamma_{s_n},$$

wo der letzte Index $s_n$ übrigens, wie leicht zu sehen, kleiner oder höchstens gleich dem größten Index eines $\beta$ ist, welcher in den ursprünglichen Darstellungen der $\Lambda$ von $\Lambda_1$ bis zu diesem $\Lambda_n$ durch die $\beta$ überhaupt auftritt.

**Beispiel 4.** Als ein möglichst einfaches Beispiel einer $\Lambda$-Folge, die keine ganze Basis besitzt, nennen wir die Folge $\Lambda_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. In der Tat, falls diese Folge eine ganze Basis besäße, müßte sie nach der obigen „Bemerkung" auch eine eigentliche ganze Basis haben. Nun hat aber jede eigentliche Basis der Folge $\Lambda_n = \frac{1}{n}$ die Form $\{r\}$, wo $r$ eine rationale Zahl $\neq 0$ ist, und von diesen Basen kann offenbar keine einzige eine ganze Basis unserer Folge sein, da ja bei festem $r$ unmöglich sämtliche Zahlen $\Lambda_n = \frac{1}{n}$ ganze Multipla von $r$ sein können.

Bevor wir diesen Paragraphen schließen, werden wir noch zeigen, wie der in Kapitel I, § 4 gegebenen Charakterisierung der quasiperiodischen Funktionen eine besonders übersichtliche Formulierung gegeben werden kann, wenn wir den Begriff der Basis heranziehen.

**Einordnung der quasiperiodischen Funktionen.** Es sei $\mu_1, \ldots, \mu_M$ eine beliebige Anzahl von untereinander und von Null verschiedenen reellen Zahlen, und es bestehe die Folge $\Lambda_n$ aus lauter Zahlen, welche in der Form $g_1\mu_1 + \cdots + g_M\mu_M$ mit rationalen ganzen Koeffizienten geschrieben werden können. Dann hat die Exponentenfolge $\Lambda_n$ offenbar eine endlichgliedrige ganze Basis; denn die endliche Folge $\mu_1, \ldots, \mu_M$ besitzt offenbar eine endlichgliedrige ganze Basis $\{\beta_1, \ldots, \beta_L\}$, und diese wird ja zugleich eine ganze Basis der aus den $\Lambda_n$ gebildeten Folge sein. Man zeigt übrigens leicht — da die Menge aller Zahlen $g_1\mu_1 + \cdots + g_M\mu_M$, wenn sie in der Form $h_1\beta_1 + \cdots + h_L\beta_L$ geschrieben und danach auf die Punkte des $L$-dimensionalen Raumes mit den (ganzzahligen) Koordinaten $(h_1, \ldots, h_L)$ abgebildet werden, ein Gitter dieses Raumes bilden — *daß man hier die ganze Basis $\{\beta_1, \ldots, \beta_L\}$ so wählen kann, daß die Menge aller Zahlen der Form $g_1\mu_1 + \cdots + g_M\mu_M$ nicht nur eine Teilmenge der Menge aller Zahlen der Form $h_1\beta_1 + \cdots + h_L\beta_L$ bildet, sondern daß die beiden Menge sogar identisch sind.*

Hieraus folgt, daß wir im Folgenden, wenn von einer quasiperiodischen Funktion mit den Perioden $\frac{2\pi}{\mu_1}, \cdots, \frac{2\pi}{\mu_M}$ die Rede ist — also (nach Satz III, § 4) von einer fastperiodischen Funktion, deren Exponenten $\Lambda_n$ alle in der Form $g_1\mu_1 + \cdots + g_M\mu_M$ geschrieben werden können — ohne weiteres annehmen dürfen, *daß die Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_M$ von einander linear unabhängig sind,* da wir sonst einfach die Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_M$ durch die Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_L$ ersetzen können. Und wir können alsdann unserer Charakterisierung der quasiperiodischen Funktionen den besonders prägnanten Ausdruck geben, *daß die Menge der quasiperiodischen*

*Funktionen mit gegebenen Perioden* $\frac{2\pi}{\mu_1}, \cdots, \frac{2\pi}{\mu_M}$ *mit der Menge derjenigen fastperiodischen Funktionen übereinstimmt, deren Exponentenfolge die endliche Zahlenmenge* $\{\mu_1, \ldots, \mu_M\}$ *als ganze Basis besitzt.*

Hierin ist speziell der Satz enthalten:

*Die Gesamtmenge aller quasiperiodischen Funktionen ist mit derjenigen Teilmenge der fastperiodischen Funktionen identisch, deren Exponentenfolge eine endlichgliedrige ganze Basis besitzt.*

## § 6.

### Einführung von Reihen mit unendlich vielen Variablen und ihre Summierung.

Es sei $f(x)$ eine beliebige fastperiodische Funktion und $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ ihre Fourierentwicklung. Wir wählen eine beliebige, aber im Folgenden fest zu haltende Basis $\mathsf{B} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ der Exponentenfolge $\Lambda_n$ und schreiben die obige Reihe $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ in der Form

$$\sum A_n e^{i(r_{n,1}\beta_1 x + r_{n,2}\beta_2 x + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x)}. \tag{17}$$

Nun wissen wir aber nach dem Kroneckerschen Approximationssatz, daß sich die Größen $e^{i\beta_1 x}, e^{i\beta_2 x}, \ldots$, wegen der linearen Unabhängigkeit der $\beta$, bei Änderung von $x$ gewissermaßen so benehmen, als wären sie Größen, die sich unabhängig von einander auf ihren respektiven Kreisen bewegen; es liegt daher nahe noch einen Schritt weiter zu gehen, und diese Größen von einander vollständig frei zu machen. Wir drücken dies dadurch aus, daß wir an Stelle der Größen $e^{i\beta_1 x}, e^{i\beta_2 x}, \ldots$ die Größen $e^{i\beta_1 x_1}, e^{i\beta_2 x_2}, \ldots$ einführen, wo $x_1, x_2, \ldots$ abzählbar[1] viele voneinander unabhängige reelle Variabeln bedeuten. Dadurch geht die obige Reihe (17) in die neue Reihe

$$\sum A_n e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1 + r_{n,2}\beta_2 x_2 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n})} = \sum B_n(x_1, x_2, \ldots) \tag{18}$$

über.

Es ist diese, zunächst rein formal gebildete, Reihe, welche uns auf die zu $f(x)$ „gehörige“ Funktion von abzählbar vielen Variablen führen soll.

Die Reihe (18) ist aber im Allgemeinen sicher divergent — sie enthält ja als Spezialfall für $x_1 = x_2 = \cdots = x$ die obige Fourierreihe (17) — und muß

[1] Wir gebrauchen der Kürze halber das Wort „abzählbar“ im Sinne von „abzählbar oder endlich“.

daher, um überhaupt mit einer Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ in Verbindung gebracht werden zu können, einem „Summationsverfahren" unterworfen werden. Die allgemeine Idee des anzuwendenden Summationsverfahrens besteht darin, daß man vorübergehend, bei jeweils festgehaltenen $x_1, x_2, \ldots$, einen frei veränderlichen (reellen) Parameter $x$ einführt und zwar dadurch, daß man dem $n$-ten Gliede der Reihe (18) einen Faktor $e^{i\Lambda_n x}$ hinzufügt, wodurch eine Reihe der Form

$$(19) \qquad \sum A_n e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n})} \cdot e^{i\Lambda_n x} = \sum B_n(x_1, x_2, \ldots) \cdot e^{i\Lambda_n x}$$

entsteht, die also wenigstens „äußerlich" wie eine Fourierreihe mit dem Exponenten $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ aussieht. Unter diesen Reihen (19) gibt es aber gewiß auch solche, die tatsächlich Fourierreihen sind, nämlich diejenigen, die man dadurch erhält, daß man $x_1 = x_2 = \cdots = k$ setzt, d. h. die Reihen

$$(20) \quad \sum A_n e^{i(r_{n,1}\beta_1 k + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} k)} \cdot e^{i\Lambda_n x} = \sum A_n e^{i\Lambda_n k} e^{i\Lambda_n x} = \sum A_n e^{i\Lambda_n(x+k)},$$

welche ja als Fourierreihen zu den fastperiodischen Funktionen $f(x+k)$ gehören. Von ausschlaggebender Bedeutung ist nun die Tatsache, daß nicht nur diese speziellen Reihen (20), sondern die sämtlichen Reihen (19) Fourierreihen sind:

**Satz IV.** *Bei jeder Wahl der reellen Größen $x_1, x_2, \ldots$ ist die obige Reihe* (19) *die Fourierreihe einer gewissen fastperiodischen Funktion $\varphi(x) = \varphi(x; x_1, x_2, \ldots)$.*

**Beweis.** Es sei also $x_1, x_2, \ldots$ eine beliebig gegebene Folge von festen reellen Zahlen. Wir führen den Beweis dadurch, daß wir die Existenz einer Folge von reellen Konstanten $k_1, k_2, \ldots$ beweisen, derart, daß 1) die Funktion $f(x+k_m)$ für $m \to \infty$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $\varphi(x)$ konvergiert, und daß 2) diese (gewiß fastperiodische) Funktion $\varphi(x)$ die gewünschte Eigenschaft hat, d. h. die Reihe (19) als Fourierreihe besitzt.

Es sei zur Abkürzung

$$r_{n,1}\beta_1 x_1 + r_{n,2}\beta_2 x_2 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n} = \vartheta_n$$

gesetzt. Dann folgern wir zunächst aus dem Kroneckerschen Satze, daß wir bei beliebig gegebener Anzahl $N$ und beliebigem $\delta > 0$ ein reelles $k$ derart bestimmen können, daß die $N$ Ungleichungen

$$\left| e^{i\vartheta_n} - e^{i\Lambda_n k} \right| < \delta \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

d. h. die $N$ Ungleichungen

$$(21) \quad \left| e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n})} - e^{i(r_{n,1}\beta_1 k + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} k)} \right| < \delta \quad (n = 1, \ldots, N)$$

alle bestehen. In der Tat können wir, wenn $M$ den höchsten Index eines Basiselementes $\beta$ bezeichnet, welches noch bei der Darstellung der $N$ ersten $\Lambda_n$ auftritt, und $g$ den Hauptnenner aller in diesen $\Lambda_n$ vorkommenden rationalen Koeffizienten $r$ bedeutet, aus Stetigkeitsgründen offenbar das $\delta_1$ so klein wählen, daß die $N$ Ungleichungen (21) alle bestehen, falls nur jede der $M$ Zahlen $\beta_1 \frac{k}{g}, \ldots, \beta_M \frac{k}{g}$ von der entsprechenden der Zahlen $\beta_1 \frac{x_1}{g}, \ldots, \beta_M \frac{x_M}{g}$ mod. $2\pi$ um weniger als $\delta_1$ abweicht; dies können wir aber, wegen der linearen Unabhängigkeit der Basiszahlen, nach dem Kroneckerschen Satze durch Wahl von $k$ sicherlich erreichen.

Aus dem soeben Bewiesenen folgt unmittelbar, daß wir eine Zahlenfolge $k_1, k_2, \ldots$ derart bestimmen können, daß bei jedem festen $n$ die Limesgleichung

$$\lim_{m \to \infty} e^{i\Lambda_n k_m} = e^{i\vartheta_n} \tag{22}$$

besteht. Hieraus folgt weiter, daß der Mittelwert

$$M_{p,q} = M\{|f(x+k_p) - f(x+k_q)|^2\}$$

für $p, q \to \infty$ gegen 0 strebt, d. h. daß $M_{p,q} < \varepsilon$ ist für $p, q > R(\varepsilon)$; in der Tat ist nach dem Fundamentalsatz

$$M_{p,q} = \sum \left| A_n e^{i\Lambda_n k_p} - A_n e^{i\Lambda_n k_q} \right|^2 = \sum |A_n|^2 \left| e^{i\Lambda_n k_p} - e^{i\Lambda_n k_q} \right|^2,$$

und von der Reihe rechts gilt offenbar, daß sie 1) für alle $p$ und $q$ gleichmäßig konvergiert, weil sie die konvergente Majorantenreihe $\sum 4|A_n|^2$ besitzt, und daß 2) die einzelnen Glieder der Reihe, wegen (22), für $p, q \to \infty$ gegen 0 streben.

Aus $M_{p,q} \to 0$ für $p, q \to \infty$ folgt aber weiter (aus dem Konvergenzhilfssatz in § 2), da ja die Menge $\{f(x+k)\}$ aller fastperiodischen Funktionen $f(x+k)$ eine ausgezeichnete Menge bildet, daß die Funktionenfolge

$$f(x+k_1), f(x+k_2), \ldots, f(x+k_m), \ldots$$

gleichmäßig für alle $x$ gegen eine Grenzfunktion $\varphi(x)$ strebt.

Es fehlt noch der Nachweis, daß diese (fastperiodische) Funktion $\varphi(x)$ von der erwünschten Art ist, d. h. daß sie die gegebene Reihe $\sum A_n e^{i\vartheta_n} \cdot e^{i\Lambda_n x}$ als Fourierreihe besitzt. Dies ergibt sich aber sofort, unter Benutzung von (22), aus der gleichmäßig gültigen Limesgleichung $\varphi(x) = \lim_{m \to \infty} f(x+k_m)$; denn hieraus folgt für jedes reelle $\lambda$ (vergl. I, § 5, Satz XXV), daß

$$M\{\varphi(x)e^{-i\lambda x}\} = \lim_{m\to\infty} M\{f(x+k_m)e^{-i\lambda x}\}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\begin{cases} A_n e^{iA_n k_m} & \text{für } \lambda = A_n \\ 0 & \text{für } \lambda \neq A_n \end{cases} = \begin{cases} A_n e^{i\vartheta_n} & \text{für } \lambda = A_n \\ 0 & \text{für } \lambda \neq A_n. \end{cases}$$

Hiermit ist der Beweis unseres Satzes beendet.

Wir schieben hier einen Hilfssatz ein, den wir wohl erst im nächsten Paragraphen verwenden werden, dessen Richtigkeit sich aber sofort aus dem obigen Beweise ergibt.

**Hilfsatz 3.** *Die Menge $\{\varphi(x)\}$ aller den sämtlichen Punkten $(x_1, x_2, \ldots)$ des abzählbar-dimensionalen Raumes entsprechenden fastperiodischen Funktionen*

$$\varphi(x; x_1, x_2, \ldots) \sim \sum A_n e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n})} \cdot e^{iA_n x}$$

*bildet eine ausgezeichnete Funktionenmenge.*

**Beweis.** Dies ergibt sich sofort daraus, daß (nach dem Beweis des Satzes IV) jede der Funktionen $\varphi(x)$ die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge der Form $f(x+k_m)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ ist, und daß die Funktionenmenge $\{f(x+k)\}$ schon (vergl. § 2) als ausgezeichnet erkannt ist. In der Tat sind die Funktionen der Menge $\{\varphi(x)\}$ einerseits gleichartig gleichmäßig stetig (sogar mit demselben „$\delta = \delta(\varepsilon)$" wie die Funktionen der Menge $\{f(x+k)\}$) und andererseits gleichartig fastperiodisch (da ja jede Verschiebungszahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ der Menge $\{f(x+k)\}$ offenbar ebenfalls eine Verschiebungszahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ der Menge $\{\varphi(x)\}$ darstellt)[1].

Mit Hilfe des Satzes IV sind wir nunmehr im Stande, bei beliebig festgehaltenen $x_1, x_2, \ldots,$ die Reihe

$$\sum A_n e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n})} = \sum B_n(x_1, x_2, \ldots) \tag{18}$$

zu „summieren". Wir bestimmen einfach die fastperiodische Funktion $\varphi(x; x_1, x_2, \ldots)$, welche die Reihe

$$\sum B_n(x_1, x_2, \ldots)\cdot e^{iA_n x}$$

[1] In dem der Abhandlung hinzugefügten Anhang I werden wir übrigens die „abgeschlossene Hülle" $\mathsf{H}(f(x+k))$ der Funktionenmenge $\{f(x+k)\}$, d. h. die Menge, die aus den sämtlichen Funktionen $\psi(x)$ besteht, welche als Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge der Form $f(x+k_m)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ dargestellt werden können, genauer studieren, und dabei auch die obige Menge $\{\varphi(x)\}$ als Teilmenge dieser abgeschlossenen Hülle $\mathsf{H}(f(x+k))$ untersuchen. Dadurch werden wir auf einige wichtige Klasseneinteilungen der fastperiodischen Funktionen geführt.

zur Fourierreihe besitzt, und setzen durch Definition fest, *daß die „Summe“ $F(x_1, x_2, \ldots)$ der Reihe* (18) *durch den Wert*

$$F(x_1, x_2, \ldots) = \varphi(0; x_1, x_2, \ldots)$$

*dieser Funktion* $\varphi$ *im Punkte* $x = 0$ *gegeben werden soll.*

Wir heben sogleich eine entscheidende (obwohl ganz auf der Oberfläche liegende) Eigenschaft der somit zu $f(x)$ „gehörigen“ Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ hervor, nämlich daß sie bei jedem reellen $\xi$ die Relation

$$F(\xi, \xi, \ldots) = f(\xi)$$

erfüllt. In der Tat ist unter $F(\xi, \xi, \ldots)$ nach Definition der Wert zu verstehen, welchen die durch die Fourierreihe

$$\sum A_n e^{i(r_{n,1}\beta_1\xi + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n}\xi)} \cdot e^{i\Lambda_n x},$$

d. h. durch die Reihe

$$\sum A_n e^{i\Lambda_n \xi} \cdot e^{i\Lambda_n x},$$

bestimmte fastperiodische Funktion $\varphi(x; \xi, \xi, \ldots)$ im Punkte $x = 0$ annimmt; diese letzte Funktion ist aber eben die Funktion $f(\xi + x)$ und ihr Wert für $x = 0$ also gleich $f(\xi)$.

Mit anderen Worten: *Die Werte der fastperiodischen Funktion $f(x)$ sind die Werte, welche die Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ auf der Geraden $x_1 = x, x_2 = x, \ldots$, d. h. auf der „Hauptdiagonalen“ des unendlich-dimensionalen Raumes, annimmt.*

Im Folgenden werden wir die zu $f(x)$ gehörige Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ von unendlich vielen Variabeln einem eingehenderen Studium unterwerfen, wobei wir Anlaß haben werden, die Untersuchung in zwei Kapitel zu zerlegen, von denen das eine den Fall einer ganzen, das andere den einer beliebigen Basis behandelt. Wir werden aber noch diesem Kapitel einen letzten Paragraphen hinzufügen, in dem gewisse einfache Eigenschaften allgemeiner Art dieser Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ erörtert werden.

## § 7.

## Stetigkeitseigenschaften der zu einer fastperiodischen Funktion gehörigen Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$.

Der Begriff der „Stetigkeit“ einer Funktion $\Phi(x_1, x_2, \ldots)$ von unendlich vielen Variabeln — die wir uns im ganzen abzählbar-dimensionalen Raume $-\infty < x_m < \infty$ $(m = 1, 2, \ldots)$ definiert denken — läßt sich bekanntlich in wesentlich verschiedener Weise definieren. Allen diesen Definitionen ist wohl die Forderung gemeinsam, daß jede Folge von Funktionswerten

$$\Phi(x_1', x_2', \ldots), \; \Phi(x_1'', x_2'', \ldots), \; \ldots, \; \Phi(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots), \; \ldots,$$

die zu einer beliebigen Punktfolge

$$P': (x_1', x_2', \ldots), \; P'': (x_1'', x_2'', \ldots), \; \ldots, \; P^{(n)}: (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots) \; \ldots$$

gehört, welche gegen einen festen Punkt $P^*: (x_1^*, x_2^*, \ldots)$ konvergiert, auch ihrerseits gegen den festen Funktionswert $\Phi(x_1^*, x_2^*, \ldots)$ konvergieren soll. Was aber bei dem Ausdruck „es konvergiert die Punktfolge $P^{(n)}$ gegen den Punkt $P^*$" zu verstehen ist, läßt sich sehr verschiedenartig definieren. Für unsere Zwecke werden wir immer „Stetigkeit" im Sinne von „Vollstetigkeit" auffassen, d. h. wir werden von einer Punktfolge $P^{(n)}: (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$ sagen, daß sie gegen den Punkt $P^*: (x_1^*, x_2^*, \ldots)$ konvergiert, wenn sie nur die (geringfügigste) Bedingung erfüllt, daß bei jedem festen Index $m$ die Limesgleichung

$$\lim_{n \to \infty} x_m^{(n)} = x_m^*$$

besteht. (Es wird also u. a. nicht die gleichmäßige Konvergenz in allen Koordinaten verlangt). Wie unmittelbar zu sehen, ist diese Definition der Stetigkeit mit der folgenden äquivalent:

**Definition.** *Es soll die Funktion $\Phi(x_1, x_2, \ldots)$ im Punkte $(x_1^*, x_2^*, \ldots)$ stetig heißen, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Anzahl $M$ und ein $\delta > 0$ derart gibt, daß jeder Punkt $(x_1, x_2, \ldots)$ des Raumes, für welchen die $M$ Ungleichungen*

$$|x_m - x_m^*| < \delta \qquad (m = 1, 2, \ldots, M)$$

*bestehen, die Ungleichung*

$$|\Phi(x_1, x_2, \ldots) - \Phi(x_1^*, x_2^*, \ldots)| < \varepsilon$$

*erfüllt.*

Wir sagen ferner von einer im ganzen Raume — d. h. in jedem Punkt des Raumes — stetigen Funktion $\Phi(x_1, x_2, \ldots)$, daß sie überall *gleichmäßig stetig* ist, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $M$ und ein $\delta > 0$ derart gibt, daß ein beliebiges Punktepaar $(x_1', x_2', \ldots)$ und $(x_1'', x_2'', \ldots)$, für welches die $M$ Ungleichungen

$$|x_m' - x_m''| < \delta \qquad (m = 1, 2, \ldots, M)$$

bestehen, die Ungleichung

$$|\Phi(x_1', x_2', \ldots) - \Phi(x_1'', x_2'', \ldots)| < \varepsilon$$

erfüllt.

Wir gehen nun zur Untersuchung unserer, in § 6 eingeführten, Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ über.

**Satz V.** *Die zu einer beliebigen fastperiodischen Funktion $f(x)$ (und einer beliebig gewählten Basis ihrer Exponentenfolge) gehörige Funktion von abzählbar vielen Variablen $F(x_1, x_2, \ldots)$ ist im ganzen abzählbar-dimensionalen Raume gleichmäßig stetig.*

**Beweis.** Ganz wie beim Beweise der „hinreichenden Bedingung" in § 3 liegt die Schwierigkeit darin, daß bei der Reihe

$$\sum A_n e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n})}, \tag{18}$$

welche unsere Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ „bestimmt", nicht unmittelbar ein belangloser Rest abgeschnitten werden kann, da sie ja im Allgemeinen nicht einmal konvergent sein muß. Wie dort, gelingt aber der Beweis durch Heranziehung des Hilfssatzes aus § 2 über ausgezeichnete Funktionenmengen und des Fundamentalsatzes der Abhandlung I.

Nach Definition ist der Funktionswert $F(x_1, x_2, \ldots)$ in einem beliebigen Punkte $(x_1, x_2, \ldots)$ des Raumes der Wert, den die durch die Fourierreihe

$$\sum A_n e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n})} e^{i\Lambda_n x}$$

bestimmte fastperiodische Funktion $\varphi(x; x_1, x_2, \ldots)$ im Punkte $x = 0$ annimmt. Nun bildet aber (nach dem Hilfssatz 3 in § 6) die Menge $\{\varphi(x)\}$ aller den sämtlichen Punkten $(x_1, x_2, \ldots)$ des Raumes entsprechenden Funktionen $\varphi(x) = \varphi(x; x_1, x_2, \ldots)$ eine a u s g e z e i c h n e t e Menge. Hieraus folgt (nach dem Hilfssatze 2 des § 2), daß wir zu dem gegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\gamma > 0$ so bestimmen können, daß aus der Ungleichung

$$M\{|\varphi(x; x_1', x_2', \ldots) - \varphi(x; x_1'', x_2'', \ldots)|^2\} < \gamma \tag{23}$$

die Ungleichung

$$G\{|\varphi(x; x_1', x_2', \ldots) - \varphi(x; x_1'', x_2'', \ldots)|\} < \varepsilon$$

also a fortiori die Ungleichung

$$|\varphi(0; x_1', x_2', \ldots) - \varphi(0; x_1'', x_2'', \ldots)| < \varepsilon$$

d. h. die Ungleichung

$$|F(x_1', x_2', \ldots) - F(x_1'', x_2'', \ldots)| < \varepsilon \tag{24}$$

geschlossen werden darf.

Nunmehr benutzen wir den **Fundamentalsatz** aus I, nach welchem

$$M\{|\varphi(x; x_1', x_2', \ldots) - \varphi(x; x_1'', x_2'', \ldots)|^2\}$$
$$= \sum |A_n|^2 \left| e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1' + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n}')} - e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1'' + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n}'')} \right|^2$$

ist. Wir bestimmen das $N$ so groß, daß

$$\sum_{n > N} 4|A_n|^2 < \frac{\gamma}{2}$$

ist und somit die gewünschte Ungleichung

$$(23) \qquad M\{|\varphi(x; x_1', x_2', \ldots) - \varphi(x; x_1'', x_2'', \ldots)|^2\} < \gamma$$

gewiß besteht, wenn nur die Punkte $(x_1', x_2', \ldots)$ und $(x_1'', x_2'', \ldots)$ die Ungleichung

$$(25) \quad \sum_1^N |A_n|^2 \left| e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1' + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n}')} - e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1'' + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n}'')} \right|^2 < \frac{\gamma}{2}$$

erfüllen. Es bezeichne $M$ den größten Index eines $x$, welches in den Exponenten der $N$ ersten Glieder der Reihe (18) vorkommt; dann bestimmen wir (was aus Stetigkeitsgründen möglich ist) das $\delta > 0$ so klein, daß für jedes Punktepaar $(x_1', x_2', \ldots)$ und $(x_1'', x_2'', \ldots)$, für welches die $M$ Ungleichungen

$$(26) \qquad |x_m' - x_m''| < \delta \qquad (m = 1, 2, \ldots, M)$$

bestehen, die obige Ungleichung (25) gilt. Dieses $M$ und dieses $\delta$ werden dann von der erwünschten Eigenschaft sein; in der Tat gilt ja für jedes Punktepaar, welches die Bedingung (26) erfüllt, die Ungleichung (23) und also, nach der Bestimmung von $\gamma$, ebenfalls die Ungleichung

$$(24) \qquad |F(x_1', x_2', \ldots) - F(x_1'', x_2'', \ldots)| < \varepsilon.$$

Hiermit ist die gleichmäßige Stetigkeit von $F(x_1, x_2, \ldots)$ bewiesen.

Für einen späteren Zweck wollen wir diesem Satze eine etwas weitergehende[1] Formulierung geben:

**Satz VI.** *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Anzahl $N$ und ein $\eta > 0$ derart, daß die Ungleichung*

$$(24) \qquad |F(x_1', x_2', \ldots) - F(x_1'', x_2'', \ldots)| < \varepsilon$$

*für zwei beliebige Punkte $(x_1', x_2', \ldots)$ und $(x_1'', x_2'', \ldots)$ des Raumes besteht, wenn nur*

[1] Der Satz VI ist deshalb „weitergehend" als Satz V, als eine „kleine" Änderung einer „großen" Anzahl von den Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ gewiß (aus Stetigkeitsgründen) nur eine kleine Änderung einer großen Anzahl von Gliedern der Reihe (18) bewirkt, während der umgekehrte Schluß nicht erlaubt ist.

*die $N$ Ungleichungen*

$$\left| e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1' + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n}')} - e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1'' + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n}'')} \right| < \eta \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

*alle erfüllt sind.*

**Beweis.** In der Tat haben wir ja im Laufe des obigen Beweises von Satz V die Existenz einer Anzahl $N$ und einer Größe $\gamma > 0$ nachgewiesen, derart, daß die Ungleichung (24) gewiß erfüllt ist, wenn nur die Ungleichung

$$(25) \qquad \sum_1^N |A_n|^2 \left| e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1' + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n}')} - e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1'' + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n}'')} \right| < \frac{\gamma}{2}$$

besteht, woraus sich die Richtigkeit der Behauptung sofort ergibt.

## KAPITEL III.

## Fastperiodische Funktionen mit ganzer Basis und ihre Beziehung zu den rein periodischen Funktionen von unendlich vielen Variabeln.

### § 8.

### Fastperiodische Funktionen mit ganzer eingliedriger Basis.

In dem Falle einer fastperiodischen Funktion mit einer ganzen eingliedrigen Basis $\mathsf{B} = \{\beta\}$, wo also jeder der Fourierexponenten $\Lambda_n$ ein ganzes Multiplum einer einzigen Zahl $\beta$ ist, haben wir es, wie zu erwarten ist, einfach mit einer rein periodischen Funktion der Periode $\frac{2\pi}{\beta}$ zu tun. In der Tat gilt der

**Satz VII.** *Es sei $\beta$ eine beliebige reelle Zahl $\neq 0$. Dann ist die Menge aller fastperiodischen Funktionen $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$, deren Exponentenfolge die eingliedrige ganze Basis $\mathsf{B} = \{\beta\}$ besitzt, mit der Menge aller stetigen rein periodischen Funktionen der Periode $\frac{2\pi}{\beta}$ identisch.*

**Beweis.** 1. Daß eine stetige rein periodische Funktion mit der Periode $\frac{2\pi}{\beta}$, als fastperiodische Funktion aufgefaßt, eine Fourierreihe besitzt, deren Exponentenfolge die ganze eingliedrige Basis $\{\beta\}$ hat, haben wir schon in I, § 3, Satz XI gezeigt; in der Tat haben wir dort bewiesen, daß unsere

Fourierreihe für eine rein periodische Funktion mit der „gewöhnlichen" Fourierreihe zusammenfällt.

2. Und daß umgekehrt jede fastperiodische Funktion $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$, deren Exponentenfolge die ganze eingliedrige Basis $\{\beta\}$ besitzt, rein periodisch mit der Periode $\frac{2\pi}{\beta}$ ist, folgt sofort aus dem Eindeutigkeitssatz (I, § 4). In der Tat ist ja die Fourierreihe der Funktion $g(x) = f\left(x + \frac{2\pi}{\beta}\right)$ d. h. die Reihe

$$\sum A_n e^{i\Lambda_n \frac{2\pi}{\beta}} \cdot e^{i\Lambda_n x}$$

mit der Reihe $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ formal identisch, da $\frac{\Lambda_n}{\beta}$ bei jedem $n$ eine ganze Zahl ist, weshalb nach dem Eindeutigkeitssatze auch die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x) = f\left(x + \frac{2\pi}{\beta}\right)$ identisch sein müssen.

Im Folgenden werden wir einen allgemeinen Satz über den Zusammenhang von fastperiodischen Funktionen mit ganzer Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ und rein periodischen Funktionen von abzählbar vielen Veränderlichen $(x_1, x_2, \ldots)$ ableiten, welcher den obigen Satz als einfachsten Spezialfall enthält. Bevor wir diesen Satz aufstellen, werden wir aber zunächst einige allgemeine Bemerkungen über rein periodische Funktionen von unendlich vielen Variablen vorausschicken.

## § 9.

### Rein periodische Funktionen von unendlich vielen Variabeln.

Es sei $P(x_1, x_2, \ldots)$ eine (wie immer komplexe) Funktion von abzählbar vielen reellen Variabeln, die im ganzen Raume definiert ist. Wir führen die folgende Definition ein:

**Definition.** *Es soll die Funktion $P(x_1, x_2, \ldots)$ „periodisch mit dem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots)$" heißen, wo $p_1, p_2, \ldots$ von 0 verschiedene reelle Zahlen sind, falls sie ungeändert bleibt, wenn $x_m$ durch $x_m + p_m$ ersetzt wird, d. h. falls in jedem Punkte $(x_1, x_2, \ldots)$ des Raumes und bei jedem $m = 1, 2, \ldots$ die Gleichung*

$$P(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m + p_m, x_{m+1}, \ldots) = P(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \ldots)$$

*besteht.*

Wir bemerken, daß aus der Voraussetzung, daß $P(x_1, x_2, \ldots)$ periodisch ist mit dem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots)$, im Allgemeinen nicht geschlossen werden darf, daß für eine Folge von unendlich vielen ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ die Gleichung

$$P(x_1 + n_1 p_1, x_2 + n_2 p_2, \ldots, x_m + n_m p_m, \ldots) = P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) \tag{27}$$

besteht. Z. B. ist die Funktion von unendlich vielen Variablen

$$P(x_1, x_2, \ldots) = \begin{cases} 0 & \text{wenn unendlich viele der Koordinaten gleich 0 sind} \\ 1 & \text{wenn höchstens endlich viele Koordinaten gleich 0 sind,} \end{cases}$$

sogar bei jeder Wahl der von 0 verschiedenen Zahlen $p_1, p_2, \ldots,$ periodisch mit dem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots)$, da ja eine Änderung von nur einer der Koordinaten keinen Punkt $(x_1, x_2, \ldots)$ der einen „Kategorie" in einen Punkt der anderen überführen kann; dagegen erfüllt sie bei keiner Wahl der Zahlen $p_1, p_2, \ldots$ die obige Bedingung (27), weil ja z. B.

$$P(p_1, p_2, p_3, \ldots) = 1 \quad \text{und} \quad P(0, 0, 0, \ldots) = 0$$

ist.

Im Folgenden werden wir nur stetige Funktionen $P(x_1, x_2, \ldots)$ betrachten, und für solche Funktionen gilt offenbar der

**Hilfssatz 4.** *Es sei $P(x_1, x_2, \ldots)$ eine stetige Funktion von abzählbar vielen Variablen, die periodisch ist mit dem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots)$. Dann gilt, falls $n_1, n_2, \ldots$ eine beliebige Folge von ganzen Zahlen ist, im ganzen Raume die Gleichung*

$$P(x_1 + n_1 p_1, x_2 + n_2 p_2, \ldots, x_m + n_m p_m, \ldots) = P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots).$$

**Beweis.** In der Tat folgt aus der Stetigkeit (Vollstetigkeit), daß in jedem festen Punkte $(x_1, x_2, \ldots)$ die Limesgleichung

$$\begin{aligned} &P(x_1 + n_1 p_1, \ldots, x_m + n_m p_m, x_{m+1} + n_{m+1} p_{m+1}, \ldots) \\ = &\lim_{m \to \infty} P(x_1 + n_1 p_1, \ldots, x_m + n_m p_m, x_{m+1}, \ldots) \end{aligned}$$

besteht; und der Funktionswert nach dem Limeszeichen ist ja (bei jedem $m$) gleich $P(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$.

Wir beweisen danach den folgenden

**Hilfssatz 5.** *Es sei $P(x_1, x_2, \ldots)$ eine stetige rein periodische Funktion mit dem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots)$. Dann ist*

1. *$P(x_1, x_2, \ldots)$ im ganzen Raume gleichmäßig stetig, und*
2. *die Menge der Funktionswerte von $P(x_1, x_2, \ldots)$ eine beschränkte, abgeschlossene Zahlenmenge.*

**Beweis.** Nach dem obigen Hilfssatz 4 können wir uns so zu sagen auf die Betrachtung eines endlichen (abgeschlossenen) Intervalles beschränken —

d. h. eines Raumteiles, welcher durch Ungleichungen der Form $\alpha_m \leqq x_m \leqq \beta_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ bestimmt ist — nämlich etwa des Intervalles $0 \leqq x_m \leqq |p_m|$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Nun gilt aber bekanntlich, wie durch das „Diagonalverfahren" unmittelbar zu beweisen, der fundamentale Satz, daß jede unendliche Punktfolge

$$Q^{(n)}: (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}, \ldots) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

die in einem solchen abgeschlossenen Intervall des Raumes gelegen ist, mindestens eine, dem Intervall angehörige „Häufungsstelle" $Q^*: (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*, \ldots)$ hat, d. h. einen Punkt $Q^*$ mit der Eigenschaft, daß aus der gegebenen Folge $Q^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine unendliche Teilfolge $Q^{(n_1)}, Q^{(n_2)}, \ldots$ herausgegriffen werden kann, die gegen $Q^*$ konvergiert (was immer in dem weitesten Sinne gemeint ist, daß bei jedem festen $m$ die Limesgleichung $\lim\limits_{q \to \infty} x_m^{(n_q)} = x_m^*$ besteht). Unter Benutzung dieses Satzes ergibt sich nun sofort die Richtigkeit des Hilfssatzes 5 ganz wie beim Spezialfall einer Funktion von nur endlich vielen Variabeln. Wir beweisen z. B. die erste Behauptung (bei der zweiten geht es noch einfacher), welche die gleichmäßige Stetigkeit betrifft: Wenn $P(x_1, x_2, \ldots)$ nicht gleichmäßig stetig wäre, könnten wir ein festes $\varepsilon_0 > 0$ und eine Folge von Punktepaaren

$$\{(x_1', x_2', \ldots), (y_1', y_2', \ldots)\}, \ \ldots, \ \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots), (y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \ldots)\}, \ \ldots,$$

wobei die Punkte $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$ alle im Intervalle $0 \leqq x_m \leqq |p_m|$ liegen, derart finden, daß für alle $n$ die Ungleichung

$$(28) \qquad |P(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots) - P(y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \ldots)| > \varepsilon_0$$

gälte, während bei jedem festen $m$ die Limesgleichung

$$(29) \qquad \lim_{n \to \infty} (y_m^{(n)} - x_m^{(n)}) = 0$$

bestünde, und es könnte hierbei ferner — nach dem Satz über die Existenz einer Häufungsstelle — angenommen werden, daß die Punktfolge $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$ gegen einen festen Punkt $Q^*: (x_1^*, x_2^*, \ldots)$ konvergierte. Dann würde offenbar auch, wegen (29), die Punktfolge $(y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \ldots)$ gegen den Punkt $Q^*$ konvergieren, und es stünde die Ungleichung (28) im Widerspruch mit der Stetigkeit der Funktion $P(x_1, x_2, \ldots)$ im Punkte $Q^*$.

Wir beweisen schließlich noch den folgenden

**Hilfssatz 6.** *Es sei $P(x_1, x_2, \ldots)$ eine stetige Funktion von abzählbar vielen Variabeln, die periodisch ist mit dem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots)$, und es seien die Zahlen $\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \ldots$ linear unabhängig. Es bezeichne ferner* M *die (nach dem Hilfs-*

*satze 5) beschränkte abgeschlossene Zahlenmenge, die aus den sämtlichen Funktionswerten* $P(x_1, x_2, \ldots)$ *besteht, und* $\mathsf{M}'$ *die Menge der Werte, welche die Funktion* $P(x_1, x_2, \ldots)$ *auf der „Hauptdiagonalen"* $x_1 = x_2 = \cdots = x$ *annimmt, d. h. die Menge der Werte der Funktion von nur einer Variablen*

$$h(x) = P(x, x, x, \ldots) \qquad (-\infty < x < \infty).$$

*Dann liegt die Menge* $\mathsf{M}'$, *welche offenbar eine Teilmenge von* $\mathsf{M}$ *ist, in dieser Menge* $\mathsf{M}$ *überall dicht.*

**Beweis.** Es sei $(x_1^*, x_2^*, \ldots)$ ein beliebiger Punkt des Raumes und $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Wir haben die Existenz eines $x$ derart zu beweisen, daß

$$|P(x, x, \ldots) - P(x_1^*, x_2^*, \ldots)| < \varepsilon$$

ist. Hierzu genügt es, wegen der Periodizität der Funktion $P(x_1, x_2, \ldots)$ in Verbindung mit ihrer gleichmäßigen Stetigkeit, zu beweisen, daß, wie groß auch die ganze Zahl $M$ und wie klein auch die positive Zahl $\delta$ gewählt werden, die $M$ diophantischen Ungleichungen

$$|x - x_m^*| < \delta \ (\mathrm{mod.}\ p_m) \qquad (m = 1, 2, \ldots, M)$$

d. h. die $M$ Ungleichungen

$$\left|\frac{1}{p_m} x - \frac{1}{p_m} x_m^*\right| < \frac{\delta}{|p_m|} \ (\mathrm{mod.}\ 1) \qquad (m = 1, 2, \ldots, M)$$

bei passender Wahl eines $x$ befriedigt werden können. Dies folgt aber, wegen der linearen Unabhängigkeit der Zahlen $\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \ldots$, sofort aus dem Kroneckerschen Approximationssatze.

## § 10.

### Fastperiodische Funktionen mit beliebiger ganzer Basis.

Wir beweisen zunächst den

**Satz VIII a.** *Es sei* $P(x_1, x_2, \ldots)$ *eine stetige Funktion von abzählbar vielen Variabeln, die rein periodisch ist mit dem Periodensystem* $(p_1, p_2, \ldots)$, *wo die Zahlen* $\beta_1 = \frac{2\pi}{p_1}, \beta_2 = \frac{2\pi}{p_2}, \ldots$ $\left(\textit{d. h. die Zahlen } \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \ldots\right)$ *linear unabhängig sind. Dann ist die Funktion*

$$h(x) = P(x, x, x, \ldots) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

*eine fastperiodische Funktion, deren Fourierexponenten die ganze Basis* $\mathsf{B} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ *besitzen.*

**Beweis.** 1. Daß die (offenbar stetige) Funktion $h(x)$ fastperiodisch ist, daß es also zu einem beliebig gegebenen $\varepsilon > 0$ eine Länge $l = l(\varepsilon)$ derart gibt, daß jedes Intervall dieser Länge mindestens eine zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $h(x)$ enthält, ergibt sich folgendermaßen: Zunächst bestimmen wir, auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion $P(x_1, x_2, \ldots)$ und ihrer Periodizität, die Zahlen $M = M(\varepsilon)$ und $\delta = \delta(\varepsilon)$ derart, daß zwei beliebige Punkte $(x_1', x_2', \ldots)$ und $(x_1'', x_2'', \ldots)$ des Raumes, welche die $M$ diophantischen Ungleichungen

$$|x_m' - x_m''| < \delta \pmod{p_m} \qquad (m = 1, \ldots, M)$$

erfüllen, ebenfalls der Ungleichung

$$|P(x_1', x_2', \ldots) - P(x_1'', x_2'', \ldots)| < \varepsilon$$

genügen. Hieraus folgt, daß $\tau$ gewiß eine zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $h(x) = P(x, x, \ldots)$ ist, d. h. daß für alle $x$

$$|h(x+\tau) - h(x)| = |P(x+\tau, x+\tau, \ldots) - P(x, x, \ldots)| < \varepsilon$$

ist, falls $\tau$ die $M$ Ungleichungen

$$|\tau| < \delta \pmod{p_m} \qquad (m = 1, \ldots, M)$$

d. h. die $M$ Ungleichungen

$$\left|\frac{2\pi}{p_m}\tau\right| < \frac{2\pi}{|p_m|}\delta \pmod{2\pi} \qquad (m = 1, \ldots, M) \tag{30}$$

erfüllt. Nach dem Satze A des § 4 gibt es aber eine Länge $l$ derart, daß jedes Intervall dieser Länge mindestens eine Lösung $\tau$ dieser $M$ Ungleichungen enthält.

2. Nachdem die Funktion $h(x)$ als fastperiodisch erkannt ist, sei ihre Fourierentwicklung mit $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ bezeichnet. Wir haben zu beweisen, daß die Fourierexponenten $\Lambda_n$ die ganze Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\} = \left\{\frac{2\pi}{p_1}, \frac{2\pi}{p_2}, \ldots\right\}$ besitzen, also daß jeder Exponent $\Lambda_n$ in der Form

$$\Lambda_n = g_{n,1}\frac{2\pi}{p_1} + g_{n,2}\frac{2\pi}{p_2} + \cdots + g_{n,q_n}\frac{2\pi}{p_{q_n}} \tag{31}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $g$ geschrieben werden kann. Wir führen den Beweis indirekt, d. h. wir nehmen an, daß es unter den Fourierexponenten $\Lambda_n$ einen gibt, etwa $\Lambda_R = \lambda$, der nicht in dieser Form geschrieben werden kann. Nach Hilfssatz 1, § 1 können wir das $\varepsilon_0$ so klein wählen, daß eine Zahl $\tau$, für welche die Ungleichung

$$|\tau\lambda - \pi| < \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \tag{32}$$

erfüllt ist, gewiß keine zu $\varepsilon_0$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $h(x)$ ist. Andererseits haben wir ja oben gesehen, daß wir zu diesem $\varepsilon_0$ (nämlich zu jedem $\varepsilon > 0$) ein $M$ und ein $\delta$ so finden können, daß jede Zahl $\tau$, welche den $M$ Ungleichungen (30) genügt, gewiß eine zu $\varepsilon_0$ gehörige Verschiebungszahl von $h(x)$ ist. Dies ist aber ein Widerspruch; denn nach Satz B in § 4 gibt es ja — weil $\lambda$ nicht von der Form (31) ist — eine Zahl $\tau$, welche gleichzeitig die Ungleichungen (30) und (32) befriedigt.

Es ist ein Hauptsatz der Theorie, daß sich dieser Satz VIIIa auch umkehren läßt:

**Satz VIIIb.** *Es sei $f(x)$ eine fastperiodische Funktion mit der ganzen Basis* $\mathsf{B} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$. *Dann gibt es eine stetige rein periodische Funktion $P(x_1, x_2, \ldots)$ mit dem Periodensystem* $(p_1, p_2, \ldots) = \left(\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots\right)$ *derart, daß*

$$f(x) = P(x, x, x, \ldots) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

*ist.* Und ferner: *Diese Funktion $P(x_1, x_2, \ldots)$ ist durch die gegebene fastperiodische Funktion $f(x)$ und die gegebene Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ eindeutig bestimmt.*

**Beweis.** Wir zeigen zunächst, daß es höchstens eine solche Funktion $P(x_1, x_2, \ldots)$ existiert; denn wären $P_1(x_1, x_2, \ldots)$ und $P_2(x_1, x_2, \ldots)$ zwei Funktionen der erwünschten Art, so wäre ihre Differenz $P^*(x_1, x_2, \ldots) = P_1(x_1, x_2, \ldots) - P_2(x_1, x_2, \ldots)$ eine stetige rein periodische Funktion mit dem Periodensystem

$$(p_1, p_2, \ldots) = \left(\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots\right),$$

welche auf der ganzen Hauptdiagonalen $x_1 = x_2 = \cdots = x$ den Wert 0 besäße, was aber — da die Zahlen $\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \ldots$ linear unabhängig sind — nach dem Hilfssatze 6 des § 9 nur dann möglich ist, wenn $P^*(x_1, x_2, \ldots)$ im ganzen Raume gleich 0 ist, d. h. wenn $P_1(x_1, x_2, \ldots)$ und $P_2(x_1, x_2, \ldots)$ eine und dieselbe Funktion sind.

Um danach zu beweisen, daß es tatsächlich eine Funktion $P(x_1, x_2, \ldots)$ von der im Satze erwähnten Art gibt, brauchen wir nur die in Kapitel II eingeführte zu der gegebenen fastperiodischen Funktion $f(x)$ und der gegebenen Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ „gehörige" Funktion von abzählbar vielen Variablen $F(x_1, x_2, \ldots)$ heranzuziehen. In der Tat hat diese Funktion sämtliche geforderten Eigenschaften. Denn, wie dort gezeigt, ist sie stetig und erfüllt die Gleichung

$$f(x) = F(x, x, x, \ldots),$$

und ferner ist sie offenbar periodisch mit dem Periodensystem

$$(p_1, p_2, \ldots) = \left(\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots\right),$$

weil die Reihe

$$\sum A_n e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n})},$$

welche $F(x_1, x_2, \ldots)$ „bestimmt", ungeändert bleibt, wenn $x_m$ durch $x_m + \frac{2\pi}{\beta_m}$ ersetzt wird, da ja die Koeffizienten $r$ ganze Zahlen sind und $x_m$ überall mit dem Faktor $\beta_m$ auftritt.

Indem wir die Sätze VIII a und b zusammenfassen, haben wir also den folgenden Satz bewiesen, welcher die in § 8 erwähnte Verallgemeinerung des dortigen Satzes über fastperiodische Funktionen mit ganzer eingliedriger Basis darstellt.

**Satz VIII.** *Es sei $\beta_1, \beta_2, \ldots$ eine beliebige Folge von linear unabhängigen Zahlen. Dann ist die Menge aller fastperiodischen Funktionen $f(x)$, deren Exponentenfolge die ganze Basis $\mathsf{B} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ besitzt, mit der Menge aller derjenigen Funktionen $h(x)$ identisch, welche die Form $h(x) = P(x, x, \ldots)$ haben, wo $P(x_1, x_2, \ldots)$ eine stetige rein periodische Funktion mit dem Periodensystem $\left(\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots\right)$ ist.*

*Und die hierdurch (mit Hilfe der gewählten Basis) bewirkte Zuordnung zwischen den Funktionen $f(x)$ und den Funktionen $P(x_1, x_2, \ldots)$ ist eine eineindeutige.*

In dem speziellen Fall, wo die gegebene Folge von linear unabhängigen Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots$ nur endlich viele Zahlen enthält, geht dieser Satz — unter Benutzung des in § 5 gewonnenen Resultates, daß diejenigen fastperiodischen Funktionen, deren Exponentenfolge die endlichgliedrige ganze Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ besitzt, mit den „quasiperiodischen" Funktionen mit den Perioden $\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots$ zusammenfallen — in einem zuerst von Bohl in seiner Magisterdissertation [1] bewiesenen (und später von Esclangon wiedergefundenen) Satz über quasiperiodische Funktionen über. Es ist also unser Satz VIII als eine Verallgemeinerung dieses Bohl-Esclangonschen Satzes anzusehen.

# KAPITEL IV.

## Fastperiodische Funktionen mit beliebiger Basis und ihre Beziehung zu den grenzperiodischen Funktionen von unendlich vielen Variabeln.

### § 11.

### Fastperiodische Funktionen mit eingliedriger Basis.

Wir führen die folgende Definition ein:

**Definition.** *Eine für* $-\infty < x < \infty$ *definierte Funktion* $g(x)$ *soll „grenzperiodisch" heißen, falls sie durch rein periodische stetige Funktionen gleichmäßig approximiert werden kann, d. h. falls es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine rein periodische stetige Funktion* $p(x)$ *derart gibt, daß für alle* $x$

$$|g(x) - p(x)| < \varepsilon$$

*ist.*

Jede grenzperiodische Funktion ist offenbar eine *stetige* Funktion, da sie sich gleichmäßig durch stetige Funktionen approximieren läßt. Die Menge der grenzperiodischen Funktionen enthält offenbar als Spezialfall die Menge der rein periodischen (stetigen) Funktionen, und ist andererseits (nach I, § 1, Satz VI) in der Menge der fastperiodischen Funktionen enthalten, ist aber nicht mit dieser letzteren Menge identisch; wir werden vielmehr in diesem Paragraphen zeigen, *daß sie genau mit derjenigen Teilmenge der fastperiodischen Funktionen übereinstimmt, deren Exponentenfolge eine eingliedrige Basis besitzt.*

Wir werden übrigens dieses Resultat in einer wesentlich verschärften Form ableiten, bei der nicht nur von der Existenz einer eingliedrigen Basis $\{\beta\}$, sondern auch von dem Wert der Basiszahl $\beta$ die Rede ist. Die Möglichkeit dieser verschärften Form hängt mit der auch an sich interessanten Tatsache zusammen, daß bei dem Grenzübergang, der von den rein periodischen zu den grenzperiodischen Funktionen führt, der Begriff der „Periode" nicht verloren geht; nur ist hier die Periode nicht (wie bei den rein periodischen stetigen Funktionen) bis auf einen ganzzahligen Faktor, sondern bloß bis auf einen beliebigen rationalen Faktor bestimmt.

**Satz IX.** *Zu jeder grenzperiodischen Funktion* $g(x)$ *gibt es eine reelle Zahl* $q \neq 0$, *eine „Periode" der Funktion, derart, daß es möglich ist,* $g(x)$ *gleichmäßig durch* *solche rein periodische stetige Funktionen zu approximieren, deren Perioden in einem rationalen Verhältnis zu* $q$ *stehen.*

*Hierbei ist die Periode* $q$ *(abgesehen von dem trivialen Falle, wo die Funktion* $g(x)$ *eine Konstante ist und daher offenbar jede Zahl* $\neq 0$ *als Periode besitzt) bis auf einen selbstverständlichen rationalen Faktor* $\neq 0$ *eindeutig bestimmt; ja, es gibt sogar, bei hinreichend kleiner Wahl von* $\varepsilon > 0$, *unter den rein periodischen stetigen Funktionen, welche* $g(x)$ *bis auf* $\varepsilon$ *approximieren, keine einzige, deren Periode in einem irrationalen Verhältnis zu* $q$ *steht.*

**Beweis.** Es sei also $g(x)$ eine beliebige grenzperiodische Funktion, die nicht für alle $x$ konstant ist, d. h. es möge gewiß zwei Punkte $x_1$ und $x_2$ (siehe Fig. 2) mit $g(x_1) \neq g(x_2)$ geben. Der Satz wird offenbar bewiesen sein, wenn wir eine feste Zahl $\varepsilon_0 > 0$ derart angeben können, daß, falls $p_1(x)$ und $p_2(x)$ zwei beliebige rein periodische stetige Funktionen mit Perioden $p_1$ bzw. $p_2$ sind, welche beide $g(x)$ mit der Genauigkeit $\varepsilon_0$ approximieren, d. h. für die

$$|g(x) - p_1(x)| < \varepsilon_0 \quad \text{und} \quad |g(x) - p_2(x)| < \varepsilon_0 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

ist, das Periodenverhältnis $p_1 : p_2$ eine rationale Zahl wird. Wir werden zeigen, daß die Zahl $\varepsilon_0 = \frac{\gamma}{8}$, wo $\gamma$ die Zahl $|g(x_1) - g(x_2)|$ bedeutet, diese Eigenschaft besitzt. Zu diesem Zwecke wählen wir zunächst, mit Hilfe der Stetigkeit

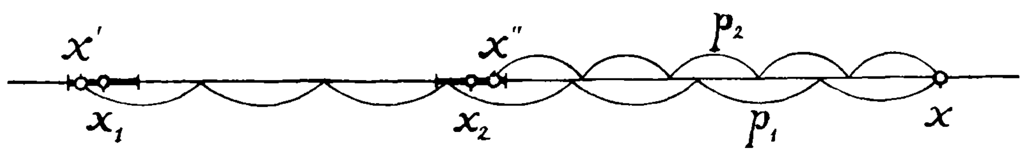


Fig. 2.

von $g(x)$, die Zahl $\delta > 0$ so klein, daß für zwei beliebige Punkte $x'$ und $x''$, welche den Intervallen $(x_1 - \delta,\ x_1 + \delta)$ bzw. $(x_2 - \delta,\ x_2 + \delta)$ angehören, die Ungleichung

$$|g(x') - g(x'')| > \frac{\gamma}{2}$$

gilt. Wir führen den Beweis indirekt, d. h. wir nehmen an, daß es zwei mit der Genauigkeit $\varepsilon_0$ approximierende rein periodische Funktionen $p_1(x)$ und $p_2(x)$ gäbe, für welche das Periodenverhältnis $p_1 : p_2$ eine irrationale Zahl wäre. Dann könnten wir nach dem Kroneckerschen Approximationssatze einen Wert $x$ finden (siehe Fig. 2), welcher den Ungleichungen

$$|x - x_1| < \delta \ (\text{mod. } p_1) \quad \text{und} \quad |x - x_2| < \delta \ (\text{mod. } p_2)$$

d. h. den Ungleichungen

$$\left|\frac{1}{p_1}x - \frac{1}{p_1}x_1\right| < \frac{\delta}{|p_1|} \ (\mathrm{mod.}\ 1) \quad \text{und} \quad \left|\frac{1}{p_2}x - \frac{1}{p_2}x_2\right| < \frac{\delta}{|p_2|} \ (\mathrm{mod.}\ 1)$$

genügen würde, also ein $x$, welches gleichzeitig in der Form $x = x' + n_1 p_1$ und $x = x'' + n_2 p_2$ geschrieben werden könnte, wo $x'$ und $x''$ den obigen Intervallen $(x_1 - \delta,\ x_1 + \delta)$ bzw. $(x_2 - \delta,\ x_2 + \delta)$ angehören und $n_1$, $n_2$ ganze Zahlen sind. Dies ist aber ein Widerspruch; denn für dieses $x$ wäre ja einerseits

$$|p_1(x) - p_2(x)| = |p_1(x') - p_2(x'')| > |g(x') - g(x'')| - 2\varepsilon_0 > \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{4} = \frac{\gamma}{4}$$

und andererseits

$$|p_1(x) - p_2(x)| < |g(x) - g(x)| + 2\varepsilon_0 = 2\varepsilon_0 = \frac{\gamma}{4}.$$

Wir beweisen nunmehr den folgenden wichtigen Satz, dessen Wortlaut sich nur dadurch von dem des Satzes VII des § 8 unterscheidet, daß einerseits „ganze Basis" durch „Basis" und andererseits „rein periodisch" durch „grenzperiodisch" ersetzt ist.

**Satz X.** *Es sei $\beta$ eine beliebige reelle Zahl $\neq 0$. Dann ist die Menge aller fastperiodischen Funktionen $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$, deren Exponentenfolge die eingliedrige Basis $\{\beta\}$ besitzt, mit der Menge aller grenzperiodischen Funktionen $g(x)$ der Periode $\frac{2\pi}{\beta}$ identisch.*

**Beweis.** 1. Wir beweisen zunächst, daß jede grenzperiodische Funktion $g(x)$ mit der Periode $\frac{2\pi}{\beta}$ eine fastperiodische Funktion mit der eingliedrigen Basis $\{\beta\}$ ist. Daß $g(x)$ fastperiodisch ist, haben wir schon oben bemerkt, und daß ihre Fourierexponenten alle die Form $r\beta$ mit rationalem $r$ besitzen, ergibt sich folgendermaßen: Nach Voraussetzung können wir zu der gegebenen Funktion $g(x)$ eine Folge von stetigen rein periodischen Funktionen $p_1(x), p_2(x), \ldots$ mit Perioden $r_1\frac{2\pi}{\beta}, r_2\frac{2\pi}{\beta}, \ldots$ (wo die $r$ rationale Zahlen bedeuten) derart bestimmen, daß gleichmäßig für alle $x$

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = g(x) \tag{33}$$

ist. In der Fourierreihe der rein periodischen Funktion $p_n(x)$ der Periode $r_n\frac{2\pi}{\beta}$ haben die Exponenten alle die Form $m\cdot\frac{\beta}{r_n}$, wo $m$ eine ganze Zahl ist, so daß eine Zahl $\lambda$ nicht Fourierexponent irgend einer der approximierenden Funktionen $p_n(x)$ sein kann, d. h. für jedes $n$ der Mittelwert $M\{p_n(x)e^{-i\lambda x}\}$ gleich 0 sein muß, wenn sie in einem irrationalen Verhältnis zu $\beta$ steht. Nun folgt aber aus (33) (nach I, § 5, Satz XXV), daß

$$M\{g(x)e^{-i\lambda x}\} = \lim_{n\to\infty} M\{p_n(x)e^{-i\lambda x}\}$$

ist; es muß daher auch $M\{g(x)e^{-i\lambda x}\} = 0$ sein, d. h. die Zahl $\lambda$ kommt auch nicht als Fourierexponent der Funktion $g(x)$ vor, womit die Behauptung bewiesen ist.

2. Tiefer liegt der Beweis, daß umgekehrt jede fastperiodische Funktion $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ mit der Basis $\{\beta\}$ eine grenzperiodische Funktion der Periode $\frac{2\pi}{\beta}$ ist, d. h. daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stetige rein periodische Funktion $p(x)$ mit einer Periode $r\frac{2\pi}{\beta}$ gibt, derart, daß für alle $x$

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

ist. Wir benutzen hier die „hinreichende Bedingung" aus § 3, nach welcher wir, um Verschiebungszahlen der fastperiodischen Funktion $f(x)$ zu bekommen, nur einen aus endlich vielen Gliedern bestehenden Anfang der Fourierreihe zu betrachten brauchen. Wir bestimmen nach diesem Satze zu der gegebenen Funktion $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ und der gegebenen Zahl $\frac{\varepsilon}{3}$ eine Anzahl $N$ und ein $\delta > 0$ derart, daß jede Zahl $\tau$, welche die $N$ Ungleichungen

$$|\Lambda_n \tau| < \delta \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, 2, \ldots, N) \tag{34}$$

erfüllt, eine zu $\frac{\varepsilon}{3}$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(x)$ ist. Nun ist aber nach Voraussetzung jeder Exponent $\Lambda_n$ von der Form $r_n\beta$ mit rationalem $r_n$, und wir können daher hier ein $\tau_0 \neq 0$, nämlich

$$\tau_0 = g\frac{2\pi}{\beta}, \tag{35}$$

wo $g$ den Hauptnenner der rationalen Zahlen $r_1, \ldots, r_N$ angibt, so finden, daß $\tau = \tau_0$ nicht nur die $N$ diophantischen Ungleichungen (34), sondern sogar die $N$ diophantischen Gleichungen (Kongruenzen)

$$\Lambda_n \tau \equiv 0 \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, 2, \ldots, N) \tag{36}$$

erfüllt. Hieraus folgt aber, daß nicht nur $\tau_0$ selbst, sondern auch jedes ganze Multiplum von $\tau_0$ eine zu $\frac{\varepsilon}{3}$ gehörige Verschiebungszahl von $f(x)$ ist;

denn bei jedem ganzen $m$ wird ja $m\tau_0$ eine Lösung der Gleichungen (36) also a fortiori der Ungleichungen (34) sein.

Wir betrachten nun die rein periodische Funktion $q(x)$ der Periode $\tau_0$, welche durch

$$q(x) = f(x) \qquad (\text{für } 0 \leqq x < |\tau_0|)$$

bestimmt ist. Diese Funktion $q(x)$ erfüllt offenbar für alle $x$ die Bedingung

$$|q(x) - f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3};$$

denn, falls $x$ eine beliebige reelle Zahl ist und in der Form $x = x_0 + m\tau_0$ geschrieben wird, wo $m$ ganz und $0 \leqq x_0 < |\tau_0|$ ist, ergibt sich ja

$$\begin{aligned}|q(x) - f(x)| &= |q(x_0 + m\tau_0) - f(x_0 + m\tau_0)| = |q(x_0) - f(x_0 + m\tau_0)| \\ &= |f(x_0) - f(x_0 + m\tau_0)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Diese Funktion $q(x)$ wird aber im Allgemeinen nicht überall stetig sein, weil ja nicht $f(0) = f(\tau_0)$ sein muß. Wir können sie aber leicht dadurch „glätten“, daß wir für jedes $x$ an Stelle des Funktionswertes $q(x)$ den Mittelwert

$$p(x) = \frac{1}{2\eta}\int_{x-\eta}^{x+\eta} q(y)\,dy$$

betrachten[1], wo die Konstante $\eta$ so klein gewählt ist, daß in jedem Intervall der Länge $2\eta$ die Oscillation von $q(x)$ kleiner als $\frac{2\varepsilon}{3}$ ist, was wegen

$$|f(0) - f(\tau_0)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$$

möglich ist. Die so ausgeglättete Funktion $p(x)$ genügt dann den gestellten Forderungen; denn 1) ist sie eine stetige rein periodische Funktion mit einer Periode $\tau_0$, welche nach (35) in einem rationalen Verhältnis zu $\frac{2\pi}{\beta}$ steht, und

[1] Wir hätten hier natürlich noch einfacher vorgehen können, indem wir die Funktion $q(x)$ nur in den Umgebungen der Sprungstellen $m\tau_0$ abgeändert hätten. Wir haben nur deshalb die Mittelwertsbildung verwendet, weil wir später eine ähnliche Ausglättung bei einer unstetigen Funktion von mehreren Veränderlichen vornehmen müssen, wo diese Methode die weitaus einfachste ist.

2) genügt sie für alle $x$ der Ungleichung

$$|f(x)-p(x)| \leqq |f(x)-q(x)|+|q(x)-p(x)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Bevor wir dazu übergehen, das für eingliedrige Basen gefundene Resultat auf den Fall beliebiger Basen zu verallgemeinern, müssen wir zunächst den Begriff einer grenzperiodischen Funktion von mehreren (unendlich vielen) Variabeln einführen.

## § 12.

### Grenzperiodische Funktionen von unendlich vielen Variabeln.

**Definition.** *Eine Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ von abzählbar vielen Variablen $x_1, x_2, \ldots$ soll „grenzperiodisch" heißen, falls sie durch stetige rein periodische Funktionen von ebenso vielen Variablen gleichmäßig approximiert werden kann, d. h. falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stetige rein periodische Funktion $P(x_1, x_2, \ldots)$ (mit irgend einem Periodensystem) derart gibt, daß im ganzen Raume die Ungleichung*

$$|G(x_1, x_2, \ldots)-P(x_1, x_2, \ldots)| < \varepsilon$$

*besteht.*

Aus der Definition folgt sofort die Richtigkeit des folgenden Hilfssatzes:

**Hilfssatz 7.** *Jede grenzperiodische Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ ist stetig, und sogar gleichmäßig stetig im ganzen Raume, und die Menge ihrer Funktionswerte bildet eine beschränkte Zahlenmenge*[1].

---

[1] Es sei dagegen bemerkt, daß die Menge der Funktionswerte einer grenzperiodischen Funktion nicht — wie es bei den rein periodischen (stetigen) Funktionen der Fall ist — abgeschlossen zu sein braucht. Betrachten wir z. B. die Funktion

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{i\lambda_n x} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

wo $\lambda_n = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$ ist; da die Reihe $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert, ist $f(x)$ eine fastperiodische Funktion mit der Fourierreihe $\sum \frac{1}{n^2} e^{i\lambda_n x}$, und da die Exponentenfolge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die eingliedrige Basis $\{\beta\} = \{1\}$ besitzt, ist $f(x)$ also (nach § 11) eine grenzperiodische Funktion der einen Variablen $x$. Von der Wertmenge dieser Funktion $f(x)$ ist aber sofort einzusehen, daß sie nicht abgeschlossen ist. In der Tat enthält sie nicht die Zahl $-\sum \frac{1}{n^2} \left(= -\frac{\pi^2}{6}\right)$, da bei jedem festen $x$ die Limesgleichung $\lim_{n\to\infty} \lambda_n x = 0$, d. h. die Limesgleichung $\lim_{n\to\infty} e^{i\lambda_n x} = 1$, besteht, und somit $\Re(f(x)) > -\sum \frac{1}{n^2}$ ist; dagegen ist diese Zahl $-\sum \frac{1}{n^2}$ gewiß ein Häufungspunkt

**Beweis.** Dieser Satz ergibt sich einfach daraus, daß die Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ mit einer beliebig vorgegebenen Genauigkeit durch eine rein periodische stetige Funktion approximiert werden kann, und daß die Behauptungen für die rein periodischen stetigen Funktionen schon (vergl. § 9, Hilfssatz 5) bewiesen sind.

Wenn in einer grenzperiodischen Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ einige (endlich oder unendlich viele) von den Variabeln festgehalten werden, entsteht offenbar eine grenzperiodische Funktion in den übrigen Variabeln. Mit Hilfe dieser Bemerkung beweisen wir sofort den folgenden

**Hilfssatz 8.** *Es sei $G(x_1, x_2, \ldots)$ eine grenzperiodische Funktion, und $m$ ein solcher Index, daß $G(x_1, x_2, \ldots)$ in der Variablen $x_m$ nicht konstant ist. Dann gibt es eine (bis auf einen rationalen Faktor $\neq 0$ offenbar eindeutig bestimmte) reelle Zahl $q_m \neq 0$ sowie eine Genauigkeit $\varepsilon_m$ derart, daß für jede rein periodische Funktion $P(x_1, x_2, \ldots)$, etwa mit dem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots)$, welche $G(x_1, x_2, \ldots)$ bis auf $\varepsilon_m$ approximiert, d. h. im ganzen Raume die Ungleichung*

$$|G(x_1, x_2, \ldots) - P(x_1, x_2, \ldots)| < \varepsilon_m$$

*erfüllt, die m-te Periode $p_m$ in einem rationalen Verhältnis zu der festen Zahl $q_m$ steht.*

**Beweis.** Daß $G(x_1, x_2, \ldots)$ in $x_m$ nicht konstant ist, bedeutet, daß sich solche feste Werte $x_1^0, \ldots, x_{m-1}^0, x_{m+1}^0, \ldots$ der von $x_m$ verschiedenen Variablen wählen lassen, daß die Funktion

$$g(x_m) = G(x_1^0, \ldots, x_{m-1}^0, x_m, x_{m+1}^0, \ldots) \qquad (-\infty < x_m < \infty)$$

keine Konstante ist. Diese Funktion $g(x_m)$ ist ferner, nach der obigen Bemerkung, eine grenzperiodische Funktion in der Variablen $x_m$, weshalb nach Satz IX, § 11 eine (bis auf einen rationalen Faktor eindeutig bestimmte) reelle Zahl $q_m \neq 0$ und ein $\varepsilon_m > 0$ existiert, derart, daß für jede rein periodische Funktion $p(x_m)$ mit der Periode $p_m$, welche $g(x_m)$ bis auf $\varepsilon_m$ approximiert, die Periode $p_m$ in rationalem Verhältnis zu $q_m$ stehen muß. Diese Zahlen $q_m$ und $\varepsilon_m$ erfüllen dann offenbar die Forderung des Satzes; falls nämlich $P(x_1, x_2, \ldots)$ eine rein periodische Funktion mit dem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots)$ ist, welche

---

der Wertmenge, weil ja zu jedem $N$ ein $x$, z. B. $x = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2N-1)\pi$, so gewählt werden kann, daß

$$\lambda_n x \equiv \pi \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

d. h.

$$e^{i\lambda_n x} = -1 \qquad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

ist.

$G(x_1, x_2, \ldots)$ bis auf $\varepsilon_m$ approximiert, wird ja die Funktion

$$p(x_m) = P(x_1^0, \ldots, x_{m-1}^0, x_m, x_{m+1}^0, \ldots)$$

eine rein periodische Funktion von $x_m$ mit der Periode $p_m$ sein, welche $g(x_m)$ bis auf $\varepsilon_m$ approximiert, weshalb also $p_m : q_m$ rational sein muß.

Wir stellen nunmehr die folgende Definition auf.

**Definition.** *Von einer grenzperiodischen Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ soll gesagt werden, daß sie das „Periodensystem" $(q_1, q_2, \ldots)$ besitzt, wo die $q_m$ reelle Zahlen $\neq 0$ sind, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ möglich ist eine rein periodische Funktion $P(x_1, x_2, \ldots)$ mit einem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots)$, dessen Elemente $p_m$ sämtlich in rationalen Verhältnissen zu den entsprechenden $q_m$ stehen, so zu wählen, daß sie die Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ bis auf $\varepsilon$ approximiert, d. h. im ganzen Raume die Ungleichung*

$$|G(x_1, x_2, \ldots) - P(x_1, x_2, \ldots)| < \varepsilon$$

*erfüllt.*

Es ist also speziell jede rein periodische (stetige) Funktion mit dem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots)$ auch eine grenzperiodische Funktion mit demselben Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots)$.

**Satz XI.** *Jede grenzperiodische Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ besitzt ein Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots)$, und die m-te „Periode" $q_m$ ist hierbei (abgesehen von dem Falle, wo die Funktion in $x_m$ konstant ist) bis auf einen rationalen Faktor $\neq 0$ eindeutig bestimmt.*

**Beweis.** Es ist zunächst klar, daß, falls überhaupt ein Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots)$ existiert, und $G(x_1, x_2, \ldots)$ in $x_m$ nicht konstant ist, die $m$-te Periode (bis auf einen rationalen Faktor) eindeutig bestimmt sein muß; denn nach dem Hilfssatze 8 muß ja auf dem $m$-ten Platze gewiß die dortige Zahl $q_m$ stehen.

Beim folgenden Beweis können wir uns offenbar auf den Fall beschränken, wo die gegebene grenzperiodische Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ in keiner der Variablen konstant ist[1]; es handelt sich dann darum zu zeigen, daß das System $(q_1, q_2, \ldots)$, wo $q_m$ die Zahl des Hilfssatzes 8 bedeutet, tatsächlich ein Periodensystem unserer Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ darstellt. Falls die Anzahl der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ nur eine endliche ist, ist die Richtigkeit dieser Behauptung klar; denn aus dem Hilfssatz 8 folgt ja hier sofort die Existenz einer Zahl $\varepsilon$ (nämlich der kleinsten der dortigen Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$) derart, daß sogar für jede rein

[1] Falls nämlich die Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ in gewissen Variablen konstant ist, können wir sie einfach als eine grenzperiodische Funktion von den übrigen Variabeln allein auffassen.

periodische Funktion $P(x_1, x_2, \ldots)$, welche $G(x_1, x_2, \ldots)$ bis auf $\varepsilon$ approximiert, gelten muß, daß ihre Perioden $p_m$ in rationalen Verhältnissen zu den entsprechenden $q_m$ stehen. Im Falle unendlich vieler Variablen aber, ist nur soviel klar, daß für eine rein periodische Funktion $P(x_1, x_2, \ldots)$ mit dem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots)$, welche $G(x_1, x_2, \ldots)$ bis auf einen „sehr kleinen" Fehler approximiert, eine „sehr große" Anzahl von Perioden $p_m$ in rationalem Verhältnis zu den entsprechenden $q_m$ stehen werden; wir müssen dann hier beweisen, daß die approximierende Funktion $P(x_1, x_2, \ldots)$ so gewählt werden kann, daß die sämtlichen Perioden $p_m$ in rationalen Verhältnissen zu den $q_m$ stehen. Zu diesem Zwecke verfahren wir folgendermaßen:

Es sei

$$P^{(n)}(x_1, x_2, \ldots) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

eine Folge von rein periodischen Funktionen mit den Periodensystemen $(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots)$, die im ganzen Raume gleichmäßig gegen $G(x_1, x_2, \ldots)$ konvergiert, und wo daher gewiß (nach Hilfssatz 8) die $m$-te Periode $p_m^{(n)}$ für hinreichend großes $n$, d. h. für $n > N = N(m)$, in rationalem Verhältnis zu $q_m$ steht. Da $G(x_1, x_2, \ldots)$ gleichmäßig vollstetig ist, können wir zu dem gegebenen $\varepsilon > 0$ ein $M$ so groß wählen, daß im ganzen Raume die Ungleichung

$$|G(x_1, \ldots x_M, x_{M+1}, x_{M+2}, \ldots) - G(x_1, \ldots, x_M, 0, 0, \ldots)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

besteht; und nachdem $M$ festgelegt ist, wählen wir das $n_0$ so groß, daß einerseits im ganzen Raume

$$\left| P^{(n_0)}(x_1, x_2, \ldots) - G(x_1, x_2, \ldots) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

also a fortiori bei jeder Wahl der $M$ ersten Koordinaten

$$\left| P^{(n_0)}(x_1, \ldots, x_M, 0, 0, \ldots) - G(x_1, \ldots, x_M, 0, 0, \ldots) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist, und andererseits die $M$ Perioden $p_1^{(n_0)}, \ldots, p_M^{(n_0)}$ rationale Multipla der entsprechenden Zahlen $q_1, \ldots, q_M$ sind. Ich behaupte, daß die Funktion

$$P(x_1, \ldots, x_M, x_{M+1}, \ldots) = P^{(n_0)}(x_1, \ldots, x_M, 0, 0, \ldots)$$

(welche also nur von den $M$ ersten Koordinaten abhängt, d. h. in den übrigen Koordinaten konstant ist) die geforderte Eigenschaft besitzt. In der Tat ist sie eine rein periodische (stetige) Funktion mit dem Periodensystem

$$(p_1^{(n_0)}, \ldots, p_M^{(n_0)}, c_{M+1}, c_{M+2}, \ldots),$$

wo die $M$ ersten Zahlen rationale Multipla von $q_1, \ldots, q_M$ sind, während die übrigen Zahlen $c_{M+1}, c_{M+2}, \ldots$ ganz beliebig gewählt werden können, also auch etwa gleich $q_{M+1}, q_{M+2}, \ldots$; und andererseits erfüllt sie die Ungleichung

$$|G(x_1, x_2, \ldots) - P(x_1, x_2, \ldots)| \leqq$$
$$|G(x_1, \ldots, x_M, x_{M+1}, \ldots) - G(x_1, \ldots, x_M, 0, \ldots)|$$
$$+ |G(x_1, \ldots, x_M, 0, \ldots) - P^{(n_0)}(x_1, \ldots, x_M, 0, \ldots)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

In dem obigen Beweise war als approximierende rein periodische Funktion $P(x_1, x_2, \ldots)$ eine solche gewählt, die nur von endlich vielen der Variablen abhängt. Daß die Möglichkeit einer solchen Wahl besteht, wollen wir als besonderen Satz formulieren:

**Hilfssatz 9.** *Es sei $G(x_1, x_2, \ldots)$ eine beliebige grenzperiodische Funktion von abzählbar vielen Variabeln mit dem Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots)$. Dann läßt sich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein ganzes $M$ und eine rein periodische (stetige) Funktion von nur $M$ Variablen $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_M)$ mit einem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots, p_M)$, dessen Zahlen in rationalen Verhältnissen zu den entsprechenden Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_M$ stehen, so wählen, daß im ganzen abzählbar dimensionalen Raume die Ungleichung*

$$|G(x_1, x_2, \ldots, x_M, x_{M+1}, \ldots) - \Pi(x_1, x_2, \ldots, x_M)| < \varepsilon$$

*besteht*[1].

Aus diesem Satze ergibt sich das folgende

**Corollar.** *Es sei $G(x_1, x_2, \ldots)$ eine beliebige grenzperiodische Funktion mit dem Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots)$ und $\varepsilon$ eine vorgeschriebene Genauigkeit; dann gibt*

---

[1] Aus diesem Hilfssatze ergibt sich unmittelbar die Richtigkeit der folgenden später zu verwendenden

Bemerkung: *Die Differenz zweier grenzperiodischen Funktionen $G_1(x_1, x_2, \ldots)$ und $G_2(x_1, x_2, \ldots)$ mit demselben Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots)$ ist wieder eine grenzperiodische Funktion mit dem Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots)$.*

In der Tat lassen sich nach dem Hilfssatz 9 die Funktionen $G_1(x_1, x_2, \ldots)$ und $G_2(x_1, x_2, \ldots)$ durch zwei rein periodische Funktionen von nur endlich vielen Variabeln (wobei wir offenbar für beide Funktionen dieselbe Anzahl von Variabeln schreiben können)

$$\Pi_1(x_1, \ldots, x_M) \quad \text{und} \quad \Pi_2(x_1, \ldots, x_M)$$

mit Periodensystemen der Form $(r_1' q_1, \ldots, r_M' q_M)$ und $(r_1'' q_1, \ldots, r_M'' q_M)$, und also auch mit einem gemeinsamen Periodensystem $(r_1 q_1, \ldots, r_M q_M)$, bis auf $\frac{\varepsilon}{2}$ approximieren. Dann ist aber $\Pi_1(x_1, \ldots, x_M) - \Pi_2(x_1, \ldots, x_M)$ eine rein periodische Funktion mit dem Periodensystem $(r_1 q_1, \ldots, r_M q_M)$, welche $G_1(x_1, x_2, \ldots) - G_2(x_1, x_2, \ldots)$ bis auf $\varepsilon$ approximiert, woraus sofort folgt, daß $G_1 - G_2$ grenzperiodisch mit dem Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots)$ ist.

Ganz ebenso ergibt sich, *daß das Produkt zweier grenzperiodischer Funktionen mit demselben Periodensystem wieder grenzperiodisch mit diesem Periodensystem wird.*

*es eine Anzahl $M$ und eine rationale Zahl $r$, derart, daß die Ungleichung*

$$|G(x_1', x_2', \ldots) - G(x_1'', x_2'', \ldots)| < \varepsilon \tag{37}$$

*für zwei beliebige Punkte $(x_1', x_2', \ldots)$ und $(x_1'', x_2'', \ldots)$ des Raumes besteht, wenn nur die $M$ Kongruenzen*

$$x_m' \equiv x_m'' \pmod{r q_m} \qquad (m = 1, \ldots, M)$$

*erfüllt sind, d. h. wenn nur ihre Projektionen $(x_1', \ldots, x_M')$ bzw. $(x_1'', \ldots, x_M'')$ auf den $M$-dimensionalen Unterraum bezüglich einer, durch die Seitenlängen $rq_1, \ldots, rq_M$ bestimmten, parallelepipedischen Raumteilung „aequivalent" liegen.*

In der Tat kann man nach dem Hilfssatze 9 zu dem gegebenen $\frac{\varepsilon}{2}$ eine rein periodische Funktion von einer endlichen Anzahl $M$ Variabeln $\Pi(x_1, \ldots, x_M)$ mit einem Periodensystem der Form $(rq_1, \ldots, rq_M)$ so bestimmen, daß im ganzen abzählbar dimensionalen Raume die gegebene Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ von dieser Funktion $\Pi(x_1, \ldots, x_M)$ um weniger als $\frac{\varepsilon}{2}$ abweicht; hieraus folgt aber sofort, daß für zwei Punkte $(x_1', x_2', \ldots)$ und $(x_1'', x_2'', \ldots)$, deren Projektionen auf den $M$-dimensionalen Unterraum im obigen Sinne „aequivalent" liegen, und für die also $\Pi(x_1', \ldots, x_M') = \Pi(x_1'', \ldots, x_M'')$ ist, die Ungleichung

$$\begin{aligned} &|G(x_1', x_2', \ldots) - G(x_1'', x_2'', \ldots)| \\ \leqq\, &|G(x_1', x_2', \ldots) - \Pi(x_1', \ldots, x_M')| + |G(x_1'', x_2'', \ldots) - \Pi(x_1'', \ldots, x_M'')| \\ < &\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

erfüllt ist [1].

Für einen späteren Zweck ist es nützlich zu bemerken, daß sich dieses Corollar auch umkehren läßt, was also besagt, daß die genannte Eigenschaft für eine mit dem Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots)$ grenzperiodische Funktion „charakteristisch" ist:

**Hilfssatz 10.** *Damit eine Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ von abzählbar vielen Variablen grenzperiodisch mit dem Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots)$ ist, ist auch hinreichend,*

---

[1] Wir bemerken für eine spätere Anwendung, daß aus dem obigen Beweise unmittelbar hervorgeht, daß wir das Corollar auch in einer etwas verallgemeinerten Form aussprechen können, die besagt, daß sich zu dem gegebenen $\varepsilon$ ein $M$, ein $r$ und eine positive Größe $\delta$ derart finden läßt, daß für zwei beliebige Punkte $(x_1', x_2', \ldots)$ und $(x_1'', x_2'', \ldots)$ die Ungleichung (37) besteht, wenn nur die $M$ diophantischen Ungleichungen

$$|x_m' - x_m''| < \delta \pmod{r q_m} \qquad (m = 1, \ldots, M)$$

erfüllt sind, d. h. wenn die Projektionen $(x_1', \ldots, x_M')$ bzw. $(x_1'', \ldots, x_M'')$ nur angenähert „aequivalent" liegen.

*daß sie die folgende Bedingung erfüllt: Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es eine ganze Zahl* $M$ *sowie eine rationale Zahl* $r \neq 0$ *derart, daß, falls* $(x'_1, \ldots, x'_M, x'_{M+1}, \ldots)$ *und* $(x''_1, \ldots, x''_M, x''_{M+1}, \ldots)$ *zwei beliebige Punkte des Raumes sind, welche die* $M$ *Kongruenzen*

$$x'_m \equiv x''_m \pmod{r q_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, M)$$

*befriedigen, die Ungleichung*

$$|G(x'_1, x'_2, \ldots) - G(x''_1, x''_2, \ldots)| < \varepsilon$$

*erfüllt ist.*

**Beweis.** Wir haben zu zeigen, daß bei erfüllten Voraussetzungen $G(x_1, x_2, \ldots)$ grenzperiodisch ist mit dem Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots)$, d. h. sich durch eine stetige rein periodische Funktion $P(x_1, x_2, \ldots)$, deren Perioden $p_m$ in rationalen Verhältnissen zu den $q_m$ stehen, mit beliebiger Genauigkeit approximieren läßt. Wir führen diesen Nachweis dadurch, daß wir zeigen, daß es zu jedem $\delta > 0$ eine (stetige) Funktion $\Pi(x_1, \ldots, x_M)$ einer endlichen Anzahl $M = M(\delta)$ von Variablen gibt, die rein periodisch mit einem Periodensystem $(r q_1, \ldots, r q_M)$ ist und im ganzen abzählbar-dimensionalen Raume die Ungleichung

$$|G(x_1, \ldots, x_M, x_{M+1}, \ldots) - \Pi(x_1, \ldots, x_M)| < \delta$$

erfüllt.

Um zu dem gegebenen $\delta$ eine solche Funktion $\Pi(x_1, \ldots, x_M)$ zu finden, sei zunächst im Sinne der Voraussetzung zu $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$ ein $M$ und ein $r$ so bestimmt, daß zwei beliebige Punkte des abzählbar-dimensionalen Raumes, deren Projektionen auf den $M$-dimensionalen Unterraum aequivalente Punkte bezüglich einer parallelepipedischen Teilung mit den Seitenlängen $r q_1, \ldots, r q_M$ sind, Funktionswerte von $G(x_1, x_2, \ldots)$ ergeben, die um weniger als $\varepsilon$ unterschieden sind. Aus der gegebenen Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ bilden wir dann eine grenzperiodische Hilfsfunktion von nur $M$ Variablen $x_1, \ldots, x_M$, dadurch, daß wir $x_{M+1}, x_{M+2}, \ldots$ festhalten, also etwa die Funktion

$$G_0(x_1, \ldots, x_M) = G(x_1, \ldots, x_M, 0, 0, \ldots).$$

Diese Funktion $G_0(x_1, \ldots, x_M)$ weicht offenbar von $G(x_1, x_2, \ldots)$ um weniger als $\varepsilon$ ab, d. h. es gilt im ganzen abzählbar-dimensionalen Raume die Ungleichung

$$|G(x_1, \ldots, x_M, x_{M+1}, \ldots) - G_0(x_1, \ldots, x_M)| < \varepsilon,$$

da die beiden Punkte $(x_1, \ldots, x_M, x_{M+1}, \ldots)$ und $(x_1, \ldots, x_M, 0, \ldots)$ sogar dieselbe Projektion auf den $M$-dimensionalen Unterraum besitzen; ferner unterscheiden sich die Werte der Funktion $G_0$ in zwei aequivalenten Punkten $(x'_1, \ldots, x'_M)$

und $(x_1'', \ldots, x_M'')$ des $M$-dimensionalen Raumes ebenfalls um weniger als $\varepsilon$, weil ja

$$\begin{aligned} &|G_0(x_1', \ldots, x_M') - G_0(x_1'', \ldots, x_M'')| \\ = &|G(x_1', \ldots, x_M', 0, 0, \ldots) - G(x_1'', \ldots, x_M'', 0, 0, \ldots)| < \varepsilon \end{aligned}$$

ist. Wir definieren nun eine zweite Hilfsfunktion, nämlich eine rein periodische Funktion $Q(x_1, \ldots, x_M)$ mit dem Periodensystem $(rq_1, \ldots, rq_M)$, dadurch, daß in dem $M$-dimensionalen „Grundparallelepiped" $0 \leqq |x_m| < |rq_m|$ $(m = 1, \ldots, M)$

$$Q(x_1, \ldots, x_M) = G_0(x_1, \ldots, x_M)$$

gesetzt wird. Diese Funktion $Q$ erfüllt offenbar in jedem Punkt $(x_1, \ldots, x_M, x_{M+1}, \ldots)$ des abzählbar-dimensionalen Raumes die Ungleichung

$$\begin{aligned} &|G(x_1, \ldots, x_M, x_{M+1}, \ldots) - Q(x_1, \ldots, x_M)| \\ \leqq &|G(x_1, \ldots, x_M, x_{M+1}, \ldots) - G_0(x_1, \ldots, x_M)| + |G_0(x_1, \ldots, x_M) - Q(x_1, \ldots, x_M)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

und wäre also eine Funktion $\Pi(x_1, \ldots, x_M)$ der gewünschten Art $\left(\text{mit } \frac{\delta}{2} \text{ statt } \delta\right)$, falls sie stetig wäre; das ist sie aber nicht, weil sie, im Gegensatz zu $G_0$, Unstetigkeiten (übrigens sehr „unschuldiger" Art) dort aufweisen kann, wo die einzelnen $M$-dimensionalen Parallelepipede an einander stoßen. Um nun wirklich zu einer Funktion $\Pi(x_1, \ldots, x_M)$ zu gelangen, müssen wir daher — wie beim Beweise des Satzes X in § 11, wo es sich zwar nur um eine Funktion von einer Variabeln handelte — eine Glättung der Funktion $Q$ vornehmen. Dies geschieht wie dort durch eine Mittelwertbildung, indem wir einfach für jedes $(x_1, \ldots, x_M)$ an Stelle des Funktionswertes $Q(x_1, \ldots, x_M)$ den Mittelwert $\Pi(x_1, \ldots, x_M)$ der Funktion $Q$ über das Innere einer kleinen Kugel mit dem Zentrum in $(x_1, \ldots, x_M)$ und einem festen Radius $\gamma$ betrachten, wobei die Zahl $\gamma$ so klein gewählt ist, daß die Oszillation der Funktion $Q$ für jede Kugel mit diesem Radius kleiner als $\frac{\delta}{2}$ ist; eine solche Wahl von $\gamma$ ist offenbar möglich, da $Q$ niemals um mehr als $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$ springt. Diese Funktion $\Pi(x_1, \ldots, x_M)$ erfüllt dann die gestellten Forderungen. Denn sie ist 1) rein periodisch mit dem Periodensystem $(rq_1, \ldots, rq_M)$, weil dies schon $Q(x_1, \ldots, x_M)$ ist, 2) ist sie, im Gegensatz zu $Q$, überall stetig, da das Integral bei der Mittelwertbildung über ein $M$-dimensionales Gebiet zu erstrecken ist, während die „Diskontinuitätsflächen" nur $(M-1)$-dimensionale Gebiete (Ebenen) ausmachen, und 3) erfüllt sie im ganzen abzählbar-dimensionalen Raume die Ungleichung

$$\begin{aligned} &|G(x_1, \ldots, x_M, x_{M+1}, \ldots) - \Pi(x_1, \ldots, x_M)| \\ \leqq &|G(x_1, \ldots, x_M, x_{M+1}, \ldots) - Q(x_1, \ldots, x_M)| + |Q(x_1, \ldots, x_M) - \Pi(x_1, \ldots, x_M)| \\ < &\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned}$$

Wir beweisen schließlich noch den folgenden Satz:

**Hilfssatz 11.** *Es sei $G(x_1, x_2, \ldots)$ eine grenzperiodische Funktion von abzählbar vielen Variablen mit dem Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots)$, und es seien die Zahlen $\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \ldots$ linear unabhängig. Dann liegt die Menge der Werte, welche $G(x_1, x_2, \ldots)$ auf der „Hauptdiagonalen" $x_1 = x_2 = \cdots = x$ annimmt, in der aus den sämtlichen Funktionswerten von $G(x_1, x_2, \ldots)$ bestehenden Menge überall dicht.*

**Beweis.** Die Richtigkeit des Satzes folgt unmittelbar daraus, daß $G(x_1, x_2, \ldots)$ mit beliebiger Genauigkeit $\varepsilon$ durch eine rein periodische (stetige) Funktion $P(x_1, x_2, \ldots)$ mit einem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots)$, dessen Zahlen $p_m$ in rationalen Verhältnissen zu den Zahlen $q_m$ stehen, approximiert werden kann, und daß die Behauptung des Satzes für diese rein periodische Funktion $P(x_1, x_2, \ldots)$ gewiß richtig ist (vergl. Hilfssatz 6 des § 9), da aus der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Zahlen $\frac{1}{q_m}$ auch die lineare Unabhängigkeit der Zahlen $\frac{1}{p_m}$ folgt.

## § 13.

### Fastperiodische Funktionen mit beliebiger Basis.

Wir beweisen den folgenden Satz, der die Verallgemeinerung des Satzes X in § 11 über den Fall einer eingliedrigen Basis ist, und dessen Wortlaut aus dem des Satzes VIII des § 10 einfach dadurch hervorgeht, daß „ganze Basis" durch „Basis" und „rein periodisch" durch „grenzperiodisch" ersetzt wird.

**Satz XII.** *Es sei $\beta_1, \beta_2, \ldots$ eine beliebige Folge von linear unabhängigen Zahlen. Dann ist die Menge aller fastperiodischen Funktionen $f(x)$, deren Exponentenfolge die Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ besitzt, mit der Menge aller derjenigen Funktionen $g(x)$ identisch, welche die Form $g(x) = G(x, x, \ldots)$ haben, wo $G(x_1, x_2, \ldots)$ eine grenzperiodische Funktion mit dem Periodensystem $\left(\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots\right)$ ist.*

*Ferner ist die hierdurch bewirkte Verbindung zwischen den fastperiodischen Funk-*

*tionen* $f(x)$ *mit der Basis* $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ *und den grenzperiodischen Funktionen* $G(x_1, x_2, \ldots)$ *mit dem Periodensystem* $\left(\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots\right)$ *eine eineindeutige*, d. h. zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ gibt es nur eine Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$.

**Beweis.** 1. Wir zeigen zunächst, daß, falls $G(x_1, x_2, \ldots)$ eine grenzperiodische Funktion mit dem Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots) = \left(\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots\right)$ ist, die Funktion

$$g(x) = G(x, x, \ldots) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

eine fastperiodische Funktion wird, deren Exponentenfolge die Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ besitzt. Hierzu bestimmen wir, nach der Definition der Grenzperiodizität, eine Folge von stetigen rein periodischen Funktionen

$$P^{(n)}(x_1, x_2, \ldots) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

mit den Periodensystemen $(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots)$ derart, daß bei jedem $n$ (und $m$) die $m$-te Periode $p_m^{(n)}$ in rationalem Verhältnis zu $q_m = \frac{2\pi}{\beta_m}$ steht $\left(\text{etwa } p_m^{(n)} = \frac{q_m}{r_m^{(n)}}\right)$, und daß gleichmäßig im ganzen Raume die Limesgleichung

$$\lim_{n \to \infty} P^{(n)}(x_1, x_2, \ldots) = G(x_1, x_2, \ldots)$$

gilt. Wir betrachten diese Funktionen $P^{(n)}(x_1, x_2, \ldots)$ auf der Hauptdiagonalen $x_1 = x_2 = \cdots = x$ und bezeichnen die Funktion $P^{(n)}(x, x, \ldots)$ mit $\varphi_n(x)$. Dann ist nach Satz VIII a in § 10, die Funktion $\varphi_n(x)$ eine fastperiodische Funktion mit der ganzen Basis $\left\{\frac{2\pi}{p_1^{(n)}}, \frac{2\pi}{p_2^{(n)}}, \ldots\right\} = \{r_1^{(n)}\beta_1, r_2^{(n)}\beta_2, \ldots\}$, und es gilt gleichmäßig für alle $x$ die Limesgleichung

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x)$$

Hieraus folgt aber sofort die Richtigkeit unserer Behauptung. Denn 1) ist $g(x)$ eine fastperiodische Funktion, da sie die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge von fastperiodischen Funktionen ist, und 2) hat die Exponentenfolge dieser Funktion $g(x)$ die Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$, d. h. falls $\lambda$ eine beliebige Zahl bedeutet, die nicht in der Form $r_1\beta_1 + \cdots + r_m\beta_m$ geschrieben werden kann, kommt $\lambda$ gewiß nicht unter den Fourierexponenten von $g(x)$ vor; es tritt nämlich $\lambda$ bei keinem $n$ unter den Fourierexponenten von $\varphi_n(x)$ auf, d. h. es ist

$M\{\varphi_n(x)e^{-i\lambda x}\} = 0$, woraus sofort folgt, da ja (I, § 5, Satz XXV)

$$M\{g(x)e^{-i\lambda x}\} = \lim_{n\to\infty}\{M\varphi_n(x)e^{-i\lambda x}\}$$

ist, daß auch $M\{g(x)e^{-i\lambda x}\}$ gleich 0 sein muß.

2. Danach haben wir zu beweisen, daß umgekehrt, falls $f(x)$ eine fastperiodische Funktion bedeutet, deren Exponentenfolge die Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ besitzt, eine grenzperiodische Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ mit dem Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots) = \left(\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots\right)$ derart existiert, daß

$$f(x) = G(x, x, \ldots)$$

ist. Wir werden zeigen — ganz wie in § 10 im Falle einer ganzen Basis — daß die in Kapitel II definierte zu der gegebenen fastperiodischen Funktion $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ und der gewählten Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ „gehörige" Funktion von unendlich vielen Variabeln $F(x_1, x_2, \ldots)$, von welcher wir ja schon wissen (§ 6), daß $f(x) = F(x, x, \ldots)$ ist, eine solche grenzperiodische Funktion darstellt. Nach dem Hilfssatze 10 des § 12 genügt es hierzu nachzuweisen, daß es zu jedem $\varepsilon$ eine Anzahl $M$ und eine rationale Zahl $r \neq 0$ so gibt, daß $F(x_1, x_2, \ldots)$ für zwei beliebige Punkte $(x_1', x_2', \ldots)$ und $(x_1'', x_2'', \ldots)$, deren Projektionen $(x_1', \ldots, x_M')$ und $(x_1'', \ldots, x_M'')$ auf den $M$-dimensionalen Unterraum bezüglich einer parallelepipedischen Raumteilung der Seitenlängen $rq_1, \ldots, rq_M$ „aequivalent" liegen, nur um höchstens $\varepsilon$ unterschiedene Werte annimmt. Wir betrachten nun die Reihe

$$\sum A_n e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n})}, \tag{38}$$

welche unsere Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ „bestimmt", und wählen, was nach dem Satze VI des § 7 möglich ist, zu dem gegebenen $\varepsilon$ ein $N$ und ein $\eta$ derart, daß, falls $(x_1', x_2', \ldots)$ und $(x_1'', x_2'', \ldots)$ zwei beliebige Punkte des Raumes sind, für welche die $N$ Ungleichungen

$$\left|e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1' + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n}')} - e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1'' + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n}'')}\right| < \eta \tag{39}$$

$$(n = 1, \ldots, N)$$

alle gelten, die gewünschte Ungleichung

$$|F(x_1', x_2', \ldots) - F(x_1'', x_2'', \ldots)| < \varepsilon \tag{40}$$

erfüllt ist. Es bezeichne nun $M$ den größten Index eines $x$, welcher in den Exponenten der $N$ ersten Glieder der Reihe (38) auftritt, und es sei $r$ die rationale (ganze) Zahl, welche den Hauptnenner aller hierbei vorkommenden

Koeffizienten $r_{n,m}$ angibt. Dann haben diese Zahlen $M$ und $r$ offenbar die geforderte Eigenschaft; in der Tat, falls $(x_1', x_2', \ldots)$ und $(x_1'', x_2'', \ldots)$ zwei beliebige Punkte sind, welche die $M$ Kongruenzen

$$x_m' \equiv x_m'' \pmod{r q_m} \qquad (m = 1, \ldots, M)$$

d. h. die $M$ Kongruenzen

$$\frac{1}{r}\beta_m x_m' \equiv \frac{1}{r}\beta_m x_m'' \pmod{2\pi} \qquad (m = 1, \ldots, M)$$

erfüllen, werden sie ja auch die $N$ Ungleichungen (39), nämlich sogar die $N$ Gleichungen

$$e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1' + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n}')} - e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1'' + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n}'')} = 0$$

erfüllen, und also auch die gewünschte Ungleichung (40).

3. Schließlich haben wir zu zeigen, daß es zu einer gegebenen fastperiodischen Funktion $f(x)$ mit der Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ nur eine einzige grenzperiodische Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ der erwähnten Art gibt. Dies erhellt aber sofort aus dem Hilfssatze 11 des § 12. In der Tat wäre, falls $G_1(x_1, x_2, \ldots)$ und $G_2(x_1, x_2, \ldots)$ zwei grenzperiodische Funktionen dieser Art sind, ihre Differenz[1]

$$\Gamma(x_1, x_2, \ldots) = G_1(x_1, x_2, \ldots) - G_2(x_1, x_2, \ldots)$$

eine grenzperiodische Funktion mit demselben Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots)$, welche auf der ganzen Geraden $x_1 = x_2 = \cdots = x$ gleich 0 wäre, was aber (wegen der linearen Unabhängigkeit der reziproken Werte $\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \ldots$) nach dem zitierten Hilfssatze nur dann möglich ist, wenn $\Gamma(x_1, x_2, \ldots)$ im ganzen Raume gleich 0 ist, d. h. wenn $G_1(x_1, x_2, \ldots)$ und $G_2(x_1, x_2, \ldots)$ dieselbe Funktion sind.

In dem vorhergehenden Satze ist speziell enthalten, *daß jede fastperiodische Funktion $f(x)$ als eine auf einer geraden Linie betrachtete grenzperiodische Funktion von abzählbar vielen Variablen angesehen werden kann.* Wir werden schließlich noch beweisen, daß auch dieser Satz (wo also von den Werten der Basisgrößen nicht mehr die Rede ist) umgekehrt werden kann.

**Satz XIII.** *Es sei $G(x_1, x_2, \ldots)$ irgend eine grenzperiodische Funktion von unendlich vielen Variablen und*

$$x_1 = c_1 + d_1 x, \quad x_2 = c_2 + d_2 x, \quad \ldots$$

[1] Vgl. die Bemerkung von Seite 150, Fußnote 1.

*irgend eine Gerade im abzählbar-dimensionalen Raume. Dann ist die Funktion*

$$h(x) = G(c_1 + d_1 x, \; c_2 + d_2 x, \ldots) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

*fastperiodisch.*

**Beweis.** Wir können offenbar annehmen, daß die $d_m$ alle von Null verschieden sind (weil ja sonst die entsprechenden Variablen konstant gehalten werden; vgl. S. 147). Um die Fastperiodizität der Funktion

$$h(x) = G(c_1 + d_1 x, \; c_2 + d_2 x, \ldots)$$

nachzuweisen, haben wir zu zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Länge $l$ derart gibt, daß jedes Intervall dieser Länge mindestens eine zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $h(x)$ enthält. Zu diesem Zwecke bestimmen wir nach dem Corollar zu Hilfssatz 9 (in der in der Fußnote S. 151 genannten Verschärfung) zu dem gegebenen $\varepsilon$ die Zahlen $M$, $r$ und $\delta$ derart, daß zwei beliebige Punkte des Raumes, welche die $M$ diophantischen Ungleichungen

$$|x'_m - x''_m| < \delta \pmod{r q_m} \qquad (m = 1, \ldots, M)$$

erfüllen, ebenfalls der Ungleichung

$$|G(x'_1, x'_2, \ldots) - G(x''_1, x''_2, \ldots)| < \varepsilon$$

genügen. Hieraus folgt, daß die Zahl $\tau$ gewiß eine zu $\varepsilon$ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $h(x)$ ist, falls sie die $M$ Ungleichungen

$$|(c_m + d_m(x+\tau)) - (c_m + d_m x)| = |d_m \tau| < \delta \pmod{r q_m} \qquad (m = 1, \ldots, M)$$

d. h. die $M$ Ungleichungen

$$\left| \frac{d_m}{r q_m} \cdot \tau \right| < \frac{\delta}{|r q_m|} \pmod{1} \qquad (m = 1, \ldots, M)$$

erfüllt. Nach dem Satze A von Kapitel I, § 4 gibt es aber gewiß eine Länge $l$ derart, daß jedes Intervall dieser Länge mindestens eine Lösung $\tau$ dieser $M$ Ungleichungen enthält.

Wir bemerken ausdrücklich, daß die zuletzt besprochene Beziehung zwischen den fastperiodischen Funktionen $f(x)$ einerseits und den grenzperiodischen Funktionen $G(x_1, x_2, \ldots)$ von unendlich vielen Variabeln andererseits einen etwas anderen Charakter trägt als die früheren Sätze, in welchen die Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ der Funktion $f(x)$ und das Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots)$ der Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ in unmittelbare Beziehung gebracht waren. In der Tat war es eben diese Verbindung, welche es uns ermöglicht hat, jeder Funktion $f(x)$ in eindeutiger

Weise eine Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ zuzuordnen[1]. Der andersartige Charakter des Satzes XIII zeigt sich auch dadurch, daß der „entsprechende" Satz für ganze Basen, der so lauten würde: „Falls $P(x_1, x_2, \ldots)$ eine beliebige rein periodische (stetige) Funktion und $x_m = c_m + d_m x$ $(m = 1, 2, \ldots)$ eine beliebige Gerade des Raumes ist, so ist die Funktion $\varphi(x) = P(c_1 + d_1 x,\ c_2 + d_2 x, \ldots)$ eine fastperiodische Funktion mit einer ganzen Basis" nicht richtig ist. In der Tat ist z. B. die Funktion

$$P(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{i x_n}$$

eine rein periodische (stetige) Funktion, mit dem Periodensystem $(2\pi, 2\pi, \ldots)$, aber die Funktion

$$\varphi(x) = P\left(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \ldots\right) = \sum \frac{1}{n^2} e^{i \frac{x}{n}}$$

die natürlich, nach dem vorhergehenden Satze, fastperiodisch ist, hat die Exponentenfolge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, welche keine ganze Basis besitzt.

---

## KAPITEL V.

### Gleichmäßige Approximation fastperiodischer Funktionen durch endliche trigonometrische Summen.

Die in den vorhergehenden Kapiteln gewonnenen Darstellungen fastperiodischer Funktionen mit Hilfe rein oder grenz-periodischer Funktionen von abzählbar vielen Variabeln erlauben uns nun ohne weiteres, wichtige allgemeine

---

[1] Daß wir in diesen Sätzen gerade die „Hauptdiagonale" $x_1 = x_2 = \cdots = x$ ausgezeichnet haben, ist natürlich insofern unwesentlich, als wir durch eine einfache Transformation der Form $x_m = k_m x_m^*$ diese Richtung in eine beliebige andere hätten überführen können, aber dann freilich gleichzeitig auch die Perioden $q_m$ der entsprechenden Transformation $q_m = \frac{1}{k_m} q_m^*$ hätten unterwerfen müssen. (Z. B. hätten wir so das Periodensystem der Funktion statt der Richtung der Geraden auszeichnen können, indem wir etwa alle Perioden gleich $2\pi$ gesetzt hätten, und dabei die, von der Basis abhängige Gerade $x_m = \beta_m x$ hätten betrachten müssen).

Wenn aber, wie in dem Satze XIII, weder die Richtung der Geraden noch das Periodensystem der Funktion fest vorgeschrieben wird, so ist natürlich von vornherein auf die Möglichkeit einer eineindeutigen Beziehung zwischen $f(x)$ und $G(x_1, x_2, \ldots)$ verzichtet.

Sätze über die gleichmäßige Approximation fastperiodischer Funktionen durch endliche trigonometrische Summen abzuleiten. Der Übergang geschieht durch den folgenden bekannten Satz [1]:

**Trigonometrischer Approximationssatz.** *Es sei $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_M)$ eine beliebige stetige rein periodische Funktion einer endlichen Anzahl von Variabeln mit dem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots, p_M)$. Dann läßt sich $\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_M)$ durch endliche trigonometrische Summen der Form*

$$S(x_1, \ldots, x_M) = \sum \alpha_{n_1, \ldots, n_M} e^{i(n_1 \beta_1 x_1 + \cdots + n_M \beta_M x_M)}$$
$$\left(\beta_m = \frac{2\pi}{p_m};\ n_1, \ldots, n_M \text{ ganz}\right)$$

*gleichmäßig im ganzen M-dimensionalen Raume approximieren,* d. h. zu jedem $\varepsilon$ läßt sich eine solche endliche Summe $S(x_1, \ldots, x_M)$ finden, daß im ganzen Raume

$$|\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_M) - S(x_1, x_2, \ldots, x_M)| < \varepsilon$$

ist.

## § 14.

### Ganze Basis.

**Satz XIV.** *Es sei $\beta_1, \beta_2, \ldots$ eine beliebige Folge von linear unabhängigen Zahlen. Dann ist die Menge aller fastperiodischen Funktionen $f(x)$, deren Exponentenfolge die ganze Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ besitzt, mit der Menge aller derjenigen Funktionen $\omega(x)$ identisch, welche sich gleichmäßig durch endliche trigonometrische Summen $S(x) = \sum b_n e^{i\lambda_n x}$ approximieren lassen, deren Exponenten $\lambda$ linear mit ganzzahligen Koeffizienten aus je endlich vielen der $\beta$ zusammengesetzt sind.*

**Beweis.** 1. Wir zeigen zunächst, daß jede Funktion $\omega(x)$ auch eine Funktion $f(x)$ ist, also daß $\omega(x)$ fastperiodisch ist mit der ganzen Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$. Dies folgt sofort daraus, daß nach Voraussetzung eine Folge von endlichen trigono-

---

[1] Dieser Satz bildet die unmittelbare Verallgemeinerung (auf $M$ Dimensionen) des berühmten Weierstraßschen Approximationssatzes, nach welchem jede stetige rein periodische Funktion $\Pi(x)$ der Periode $p$ mit beliebiger Genauigkeit durch ein trigonometrisches Polynom $\sum_{-N}^{N} \alpha_n e^{in\beta x}$ $\left(\beta = \frac{2\pi}{p}\right)$ angenähert werden kann. Im Prinzip findet sich auch dieser verallgemeinerte Satz schon bei Weierstrass selbst [1]; unabhängig davon ist er von Bohl [1] explizite ausgesprochen und bewiesen worden, und zwar gerade bei seinen Untersuchungen über die Approximation „quasiperiodischer“ Funktionen durch trigonometrische Summen. Vgl. übrigens die Einleitung zum Anhang I.

metrischen Summen $S_1(x), S_2(x), \ldots$ der obigen Form bestimmt werden kann, die für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen $\omega(x)$ konvergiert. Denn da jede dieser Summen fastperiodisch ist (I, § 1, Corollar zu Satz III), wird es auch die Funktion $\omega(x) = \lim S_n(x)$ sein (I, § 1, Satz VI); und da eine beliebig gegebene Zahl $\lambda$, die nicht in der Form $n_1\beta_1 + \cdots + n_m\beta_m$ mit ganzzahligen Koeffizienten geschrieben werden kann, nach Voraussetzung bei keiner der approximierenden Summen $S_n(x)$ als Exponent vorkommt, wird sie auch nicht Fourierexponent der Grenzfunktion $\omega(x)$ sein (I, § 5, Satz XXV).

2. Danach zeigen wir, daß umgekehrt auch jede Funktion $f(x)$ eine Funktion $\omega(x)$ ist, sich also gleichmäßig durch trigonometrische Summen der obigen Form approximieren läßt. Hierzu betrachten wir die zu der gegebenen fastperiodischen Funktion (und der gegebenen ganzen Basis) „gehörige" rein periodische Funktion $P(x_1, x_2, \ldots)$ mit dem Periodensystem

$$(p_1, p_2, \ldots) = \left(\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots\right),$$

für welche also

$$f(x) = P(x, x, \ldots) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

ist. Da $P(x_1, x_2, \ldots)$ gleichmäßig stetig ist, können wir zunächst in der gewohnten Weise (indem wir einfach alle Variabeln von einer gewissen Stelle an, etwa $x_{M+1}, x_{M+2}, \ldots$, konstant, z. B. gleich 0, setzen) eine stetige rein periodische Funktion $\Pi(x_1, \ldots, x_M)$ von nur endlich vielen Variabeln mit dem Periodensystem $(p_1, \ldots, p_M)$ so wählen, daß im ganzen abzählbar-dimensionalen Raume

$$(41) \qquad |P(x_1, x_2, \ldots) - \Pi(x_1, \ldots, x_M)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Danach wenden wir den obigen trigonometrischen Approximationssatz an und bestimmen zu dieser Funktion $\Pi(x_1, \ldots, x_M)$ eine endliche Summe

$$S(x_1, \ldots, x_M) = \sum \alpha_{n_1, \ldots, n_M} e^{i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_M\beta_M x_M)}$$

derart, daß im ganzen $M$-dimensionalen Raume

$$(42) \qquad |\Pi(x_1, \ldots, x_M) - S(x_1, \ldots, x_M)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Aus (41) und (42) folgt

$$|P(x_1, x_2, \ldots) - S(x_1, \ldots, x_M)| < \varepsilon.$$

Wird hierin speziell $x_1 = x_2 = \cdots = x$ gesetzt, so geht diese Ungleichung in

$$|f(x) - S(x)| < \varepsilon$$

über, wo $S(x) = \sum a_{n_1,\ldots,n_M} e^{i(n_1\beta_1+\cdots+n_M\beta_M)x}$ eine endliche Summe der erwähnten Art $\sum b_n e^{i\lambda_n x}$ ist.

In dem speziellen Falle, wo die Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ aus nur endlich vielen Zahlen besteht, geht dieser Satz — wenn die schon mehrmals erwähnte Tatsache benutzt wird, daß eine fastperiodische Funktion, deren Exponentenfolge die endliche ganze Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ besitzt, dasselbe ist wie eine „quasiperiodische" Funktion mit den Perioden $\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots$ — in den Hauptsatz der Bohlschen Theorie über, *daß die Menge der quasiperiodischen Funktionen $f(x)$ mit den Perioden $\frac{2\pi}{\beta_1}, \ldots, \frac{2\pi}{\beta_M}$ mit der Menge derjenigen Funktionen identisch ist, welche gleichmäßig durch endliche trigonometrische Summen der Form $\sum a_{n_1,\ldots,n_M} e^{i(n_1\beta_1+\cdots+n_M\beta_M)x}$ approximiert werden können.*

## § 15.

### Beliebige Basis.

**Satz XV.** *Es sei $\beta_1, \beta_2, \ldots$ eine beliebige Folge von linear unabhängigen Zahlen. Dann ist die Menge aller fastperiodischen Funktionen $f(x)$, deren Exponentenfolge die Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ besitzt, mit der Menge aller jener Funktionen $\omega(x)$ identisch, welche sich gleichmäßig durch solche endliche trigonometrische Summen $S(x) = \sum b_n e^{i\lambda_n x}$ approximieren lassen, deren Exponenten linear mit rationalen Koeffizienten aus endlich vielen der $\beta$ zusammengesetzt sind.*

**Beweis.** 1. Daß jede Funktion $\omega(x)$ auch eine Funktion $f(x)$ ist, beweist man wörtlich wie die entsprechende Behauptung beim Satze XIV, indem nur „Basis" durch „ganze Basis" und „ganzzahlige Koeffizienten" durch „rationale Koeffizienten" ersetzt wird.

2. Auch der Beweis, daß jede Funktion $f(x)$ eine Funktion $\omega(x)$ ist, verläuft fast genau wie der Beweis des entsprechendes Teiles des Satzes XIV. Wir bestimmen die grenzperiodische Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ mit dem Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots) = \left(\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots\right)$, für welche

$$f(x) = G(x, x, \ldots) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

ist; diese Funktion $G(x_1, x_2, \ldots)$ wird nach dem Hilfssatze 9 des § 12 durch eine rein periodische stetige Funktion $\Pi(x_1, \ldots, x_M)$ von nur endlich vielen Variabeln mit einem Periodensystem $(r_1 q_1, \ldots, r_M q_M)$ so approximiert, daß der „Fehler" kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist; danach wird diese rein periodische Funktion $\Pi(x_1, \ldots, x_M)$ durch eine endliche trigonometrische Summe bis auf $\frac{\varepsilon}{2}$ approximiert, deren Exponenten die Form $n_1 \frac{2\pi}{r_1 q_1} x_1 + \cdots + n_M \frac{2\pi}{r_M q_M} x_M$ also die Form $s_1 \beta_1 x_1 + \cdots + s_M \beta_M x_M$ mit rationalen Koeffizienten $s$ besitzen; schließlich wird $x_1 = x_2 = \cdots = x$ gesetzt, wodurch sich die Ungleichung

$$|f(x) - S(x)| < \varepsilon$$

ergibt, worin $S(x)$ eine endliche trigonometrische Summe der erwünschten Art ist.

## § 16.

### Allgemeiner Approximationssatz.

Wir beweisen schließlich noch den folgenden allgemeinen Approximationssatz, der, obwohl er aus dem vorhergehenden viel präziseren Satz (in welchem auch der Zusammenhang zwischen den Fourierexponenten und den Exponenten der gleichmäßig approximierenden trigonometrischen Summen behandelt wird) unmittelbar abzuleiten ist, doch gewissermaßen als der Hauptsatz dieser Abhandlung angesehen werden kann, weil er die Gesamtmenge der fastperiodischen Funktionen in einfachster Weise abgrenzt.

**Satz XVI.** *Die Menge aller fastperiodischen Funktionen $f(x)$ ist mit der Menge aller Funktionen $\omega(x)$ identisch, welche sich überhaupt durch (irgendwelche) endliche trigonometrische Summen $\sum b_n e^{i\lambda_n x}$ gleichmäßig approximieren lassen.*

**Beweis.** 1. Daß jede Funktion $\omega(x)$ eine Funktion $f(x)$, d. h. eine fastperiodische Funktion ist, ist klar, da ja $\omega(x)$ gleichmäßig durch fastperiodische Funktionen (nämlich durch trigonometrische Summen) approximiert werden kann.

2. Und daß jede fastperiodische Funktion $f(x)$ auch eine Funktion $\omega(x)$ ist, also durch endliche trigonometrische Summen gleichmäßig approximiert werden kann, ist speziell im Satze XV enthalten.

# ANHANG I.
## Klasseneinteilung der fastperiodischen Funktionen.

In diesem Anhange werden wir uns mit der Einteilung der fastperiodischen Funktionen in Klassen beschäftigen. Die Untersuchung wird so verlaufen, daß wir von einer beliebig gegebenen fastperiodischen Funktion ausgehen und versuchen um sie eine „natürliche" Funktionenklasse aufzubauen, wobei wir als Ausgangspunkt die (nahezu selbstverständliche) Forderung benutzen, daß jede Funktion $f(x+k)$, also jede Funktion welche aus $f(x)$ durch einfache Verlegung des Nullpunktes der $x$-Achse entsteht, zur selben Klasse wie $f(x)$ gehören soll. Bei dem weiteren Aufbau werden wir uns von zwei verschiedenen Gesichtspunkten leiten lassen; so werden wir in § 1 vor allem dafür sorgen, daß jede unserer Funktionenklassen einen gegenüber Grenzübergang abgeschlossenen Charakter haben soll, während wir in § 2 einen mehr formalen Gesichtspunkt (unter Heranziehung des Basisbegriffes) zu Grunde legen werden. Schließlich werden wir in § 3 die beiden in § 1 und § 2 gewonnenen Klasseneinteilungen mit einander vergleichen; hierbei werden wir sehen, daß in dem Spezialfalle einer ganzen Basis die beiden Klasseneinteilungen tatsächlich identisch sind, während in dem allgemeinen Falle einer beliebigen Basis sich die zweite als eine „feinere" Einteilung erweist, indem sie aus der ersten dadurch entsteht, daß jede Klasse in Unterklassen noch enger zusammengehöriger Funktionen geteilt wird.

### § 1.
### Die abgeschlossene Hülle $\mathsf{H}(f(x+k))$.

Wir benutzen zur Abkürzung die folgende Terminologie: Eine Funktion $g(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ soll als eine *Häufungsfunktion* einer vorgelegten Menge $\mathsf{M}$ von fastperiodischen Funktionen $\varphi(x)$ bezeichnet werden, falls aus der Menge $\mathsf{M}$ eine Folge von (gleichen oder verschiedenen) Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... herausgegriffen werden kann, welche gleichmäßig für alle $x$ gegen $g(x)$ konvergiert[1]; aus I, § 1, Satz VI folgt, daß jede Häufungsfunktion einer Menge von fastperiodischen Funktionen selbst fastperiodisch ist. Ferner werden wir eine

[1] Wir bemerken, daß nach dieser Terminologie jede der Funktionen einer Menge $\mathsf{M}$ selbst eine Häufungsfunktion von $\mathsf{M}$ ist.

Menge von fastperiodischen Funktionen *abgeschlossen* nennen, falls alle Häufungsfunktionen der Menge zu ihr gehören. Schließlich führen wir den Begriff der *abgeschlossenen Hülle* einer Menge $\mathsf{M}$ von fastperiodischen Funktionen ein; hierunter verstehen wir diejenige Funktionenmenge $\mathsf{M}^*$, welche aus sämtlichen Häufungsfunktionen der Menge $\mathsf{M}$ besteht. Es ist klar, daß $\mathsf{M}$ in $\mathsf{M}^*$ enthalten ist, daß $\mathsf{M}^*$ abgeschlossen ist, und daß das Zusammenfallen der beiden Mengen $\mathsf{M}$ und $\mathsf{M}^*$ für die Abgeschlossenheit von $\mathsf{M}$ notwendig und hinreichend ist.

Es sei nunmehr

$$f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$$

eine beliebig gegebene fastperiodische Funktion, und es bezeichne $\{f(x+k)\}$ die Menge aller Funktionen

$$(1) \qquad f(x+k) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n k} \cdot e^{i\Lambda_n x}, \qquad (-\infty < k < \infty).$$

Bei verschiedenen Untersuchungen (z. B. bei Differentialgleichungsproblemen) wird man dazu geführt, diese Menge $\{f(x+k)\}$ so auszubauen, daß sie abgeschlossen wird. Dies geschieht am einfachsten dadurch, daß man zu der abgeschlossenen Hülle übergeht. Die so entstandene Funktionenmenge, welche wir mit

$$\mathsf{H}(f(x+k))$$

bezeichnen, soll in diesem Paragraphen näher untersucht werden.

Wir beweisen zunächst, daß die Bildung solcher Mengen $\mathsf{H}(f(x+k))$ tatsächlich eine „Klasseneinteilung" der fastperiodischen Funktionen bedeutet.

**Satz 1.** *Wenn $g(x)$ eine beliebige Funktion der Menge $\mathsf{H}(f(x+k))$ ist, so sind die beiden Mengen $\mathsf{H}(f(x+k))$ und $\mathsf{H}(g(x+k))$ identisch;* es kann also eine beliebige Funktion einer solchen Menge $\mathsf{H}$ als ihr „Repräsentant" gelten.

**Beweis.** Daß $g(x)$ zu $\mathsf{H}(f(x+k))$ gehört, bedeutet, daß zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ die reelle Größe $k_1 = k_1(\varepsilon)$ so gewählt werden kann, daß für alle $x$ die Ungleichung

$$(2) \qquad |g(x) - f(x+k_1)| < \varepsilon$$

besteht. Diese Ungleichung besagt aber auch, daß $f(x)$ zu $\mathsf{H}(g(x+k))$ gehört, wie man sieht, wenn man sie in der Form

$$|f(x) - g(x-k_1)| < \varepsilon$$

schreibt. Also genügt es, aus Symmetriegründen, zu zeigen, daß jede Funktion

$h(x)$ der Menge $\mathsf{H}(f(x+k))$, für die also bei passender Wahl von $k_2 = k_2(\varepsilon)$

(3) $$|h(x) - f(x+k_2)| < \varepsilon$$

ist, auch zu $\mathsf{H}(g(x+k))$ gehört. Es folgt aber in der Tat aus (2) und (3), daß

$$|h(x) - g(x+k_2-k_1)| < 2\varepsilon$$

ist.

Wir wenden uns danach der Fragestellung zu, was die Einteilung der fastperiodischen Funktionen in Klassen $\mathsf{H}$ vom Gesichtspunkte der zugehörigen Fourierreihen bedeutet. Hierüber gibt der folgende Satz Aufschluß.

**Satz 2.** *Es sei* $\mathsf{H}$ *eine beliebige unserer Klassen und* $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ *ein beliebiger Repräsentant von* $\mathsf{H}$. *Dann hat die Fourierreihe jeder Funktion* $\varphi(x)$ *der Klasse* $\mathsf{H}$ *die Form*

(4) $$\sum A_n e^{i\Theta_n} \cdot e^{i\Lambda_n x},$$

*d. h. sie hat dieselben Exponenten und numerisch gleich große Koeffizienten wie die Fourierreihe von* $f(x)$. Und ferner: *Damit eine Reihe der Form* (4) *als Fourierreihe zu einer Funktion unserer Klasse* $\mathsf{H} = \mathsf{H}(f(x+k))$ *gehört, ist notwendig und hinreichend, daß der Punkt* $(\Theta_1, \Theta_2, \ldots)$ *des abzählbar-dimensionalen Raumes, dessen Koordinaten die „Drehungen" der Glieder angeben*, mod. $2\pi$ *betrachtet ein „Häufungspunkt" der aus den Punkten* $(\Lambda_1 k, \Lambda_2 k, \ldots)$ *bestehenden Punktmenge ist, in dem (weitest gehenden) Sinne, daß es eine Folge von reellen Größen* $k_1, k_2, \ldots$ *so geben soll, daß bei jedem festen* $n = 1, 2, \ldots$ *die diophantische Limesgleichung*[1]

$$\lim_{m\to\infty} \Lambda_n k_m = \Theta_n \ (\text{mod. } 2\pi)$$

*besteht.*

**Beweis.** 1. Wir zeigen zunächst, daß die Fourierreihe einer beliebigen Funktion $\varphi(x)$ der Menge $\mathsf{H} = \mathsf{H}(f(x+k))$, also einer Funktion

$$\varphi(x) = \lim_{m\to\infty} f(x+k_m),$$

die Form (4) hat, wo $(\Theta_1, \Theta_2, \ldots)$ ein Häufungspunkt der aus den Punkten $(\Lambda_1 k, \Lambda_2 k, \ldots)$ gebildeten Menge ist. In der Tat ist

$$f(x+k_m) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n k_m} \cdot e^{i\Lambda_n x},$$

[1] Unter der Schreibweise $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = a$ (mod. $2\pi$), wo $a_m$ und $a$ reelle Größen sind, verstehen wir, daß $\lim\limits_{m\to\infty} e^{ia_m} = e^{ia}$ ist.

also (nach I, § 5, Satz XXV)

$$\varphi(x) \sim \sum B_n e^{i A_n x}$$

mit

$$B_n = \lim_{m \to \infty} A_n e^{i A_n k_m} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Hieraus folgt aber, daß

$$B_n = A_n e^{i \Theta_n}$$

ist, wo der Faktor $e^{i\Theta_n}$ durch die Limesgleichung

$$e^{i\Theta_n} = \lim_{m \to \infty} e^{i A_n k_m}$$

bestimmt ist, d. h. wo $(\Theta_1, \Theta_2, \ldots)$ ein Häufungspunkt der erwähnten Menge ist.

2. Danach haben wir zu beweisen, daß umgekehrt, falls $(\Theta_1, \Theta_2, \ldots)$ mod. $2\pi$ betrachtet ein Häufungspunkt der aus den Punkten $(A_1 k, A_2 k, \ldots)$ gebildeten Menge ist, die Reihe (4) tatsächlich eine Fourierreihe ist, welche zu einer Funktion $\varphi(x)$ der Klasse $\mathsf{H} = \mathsf{H}(f(x+k))$ gehört. Hierzu bedienen wir uns ganz derselben Schlußweise wie beim Beweise des Satzes IV auf S. 127. Nach Voraussetzung gibt es eine reelle Zahlenfolge $k_1, k_2, \ldots$ derart, daß bei jedem $n$ die diophantische Limesgleichung $\lim\limits_{m \to \infty} A_n k_m = \Theta_n \pmod{2\pi}$, d. h die Limesgleichung

$$\lim_{m \to \infty} e^{i A_n k_m} = e^{i\Theta_n} \tag{5}$$

besteht. Hieraus folgern wir zunächst (mit Hilfe des Fundamentalsatzes aus I), daß der Mittelwert

$$M_{p,q} = M\{|f(x+k_p) - f(x+k_q)|^2\} = \sum |A_n|^2 \left| e^{i A_n k_p} - e^{i A_n k_q} \right|^2$$

für $p, q \to \infty$ gegen 0 strebt. Aus $M_{p,q} \to 0$ schließen wir dann weiter (mit Hilfe des Konvergenzhilfssatzes in § 2 auf die „ausgezeichnete" Menge $\{f(x+k)\}$ angewendet), daß die Funktionenfolge

$$f(x+k_1), f(x+k_2), \ldots, f(x+k_m), \ldots$$

gleichmäßig für alle $x$ gegen eine Grenzfunktion $\varphi(x)$ strebt. Diese (fastperiodische) Funktion $\varphi(x)$ wird dann von der erwünschten Art sein. Denn die Darstellung $\varphi(x) = \lim f(x+k_m)$ besagt, daß sie zur Klasse $\mathsf{H}(f(x+k))$ gehört, und aus (5) ergibt sich, daß sie die gegebene Reihe (4) als Fourierreihe besitzt.

## § 2.

### Einteilung in Klassen $\mathsf{K}(f(x))$ mit Hilfe der Basis.

Wir gehen wieder von einer beliebigen fastperiodischen Funktion

$$f(x) \sim \sum A_n e^{i A_n x}$$

aus und bilden die Menge der Funktionen

$$f(x+k) \sim \sum A_n e^{i A_n k} \cdot e^{i A_n x}, \qquad (-\infty < k < \infty).$$

Es sei $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ eine (beliebig gewählte) Basis der Exponentenfolge $\Lambda_n$; wir führen die Darstellung der $\Lambda_n$ durch die Basiszahlen,

$$\Lambda_n = r_{n,1}\beta_1 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n},$$

in die Fourierreihe von $f(x+k)$ ein, also

$$f(x+k) \sim \sum A_n e^{i(r_{n,1}\beta_1 k + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} k)} \cdot e^{i A_n x}.$$

Geleitet von dem Kroneckerschen Approximationssatze betrachten wir alsdann die sämtlichen Reihen der Form

$$\sum A_n e^{i(r_{n,1}\beta_1 k_1 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} k_{q_n})} \cdot e^{i A_n x}, \tag{6}$$

wo die Größen $k_1, k_2, \ldots$ ganz beliebige (von einander unabhängige) reelle Zahlen bedeuten. Diesen Reihen (6) sind wir schon früher begegnet — in der Tat waren es gerade diese Reihen, welche uns in § 6 von der Funktion $f(x)$ zu der zugehörigen Funktion von unendlich vielen Variablen führten — und wir haben in § 6, Satz IV bewiesen, *daß jede der Reihen* (6) *die Fourierreihe einer gewissen fastperiodischen Funktion* $\varphi(x) = \varphi(x; k_1, k_2, \ldots)$ *ist*, und überdies, daß $\varphi(x)$ durch Funktionen $f(x+k)$ gleichmäßig angenähert werden kann, d. h. in unserer jetzigen Sprachweise, *daß* $\varphi(x)$ *zu der abgeschlossenen Hülle* $\mathsf{H}(f(x+k))$ *gehört.*

Gelegentlich wird es bequem sein, zur Abkürzung

$$\beta_1 k_1 = \varrho_1,\ \beta_2 k_2 = \varrho_2,\ \ldots,\ \beta_m k_m = \varrho_m,\ \ldots$$

zu setzen, also die Reihen (6) in der Form

$$\sum A_n e^{i(r_{n,1}\varrho_1 + \cdots + r_{n,q_n}\varrho_{q_n})} \cdot e^{i A_n x} \tag{7}$$

zu schreiben; hierbei sind die Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ (ebenso wie die Größen $k_1, k_2, \ldots$) ganz beliebige von einander völlig unabhängige reelle Zahlen.

**Definition.** *Zur „Klasse* $\mathsf{K}(f(x))$*" soll jede fastperiodische Funktion gehören, deren Fourierreihe unter den obigen Reihen* (6) (*oder* (7)) *vorkommt.* Diese Klasse

$\mathsf{K}(f(x))$ enthält offenbar die Funktionenmenge $\{f(x+k)\}$, ist aber andererseits (nach einer obigen Bemerkung) in der abgeschlossenen Hülle $\mathsf{H}(f(x+k))$ enthalten.

Bevor wir zeigen, daß die Bildung solcher Mengen $\mathsf{K}$ tatsächlich zu einer „Klasseneinteilung" der fastperiodischen Funktionen führt, werden wir zunächst den folgenden Satz beweisen, durch welchen die obige Definition erst einen eigentlichen Sinn bekommt.

**Satz 3.** *Die Menge aller Reihen* (7), *und damit die Klasse* $\mathsf{K}(f(x))$, *hängt nur von der gegebenen fastperiodischen Funktion* $f(x)$ *ab, d. h. sie ist von der speziellen Wahl der benutzten Basis* $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ *unabhängig.* Hierbei interessiert es uns nicht, ob eine Reihe vielleicht mehrmals d. h. für verschiedene Wertefolgen $(\varrho_1, \varrho_2, \ldots)$ vorkommt, und wie „oft" dergleichen geschieht.

**Beweis.** Es seien $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ und $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$ zwei verschiedene Basen der Exponentenfolge $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$, und es sei

$$\Lambda_n = r_{n,1}\beta_1 + r_{n,2}\beta_2 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} \tag{8}$$

bezw.

$$\Lambda_n = s_{n,1}\gamma_1 + s_{n,2}\gamma_2 + \cdots + s_{n,p_n}\gamma_{p_n} \tag{9}$$

die Darstellung von $\Lambda_n$ durch Zahlen der Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ bezw. $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$. Die Behauptung lautet, daß die Menge aller Reihen

$$\sum A_n e^{i(r_{n,1}\varrho_1 + r_{n,2}\varrho_2 + \cdots + r_{n,q_n}\varrho_{q_n})} e^{i\Lambda_n x}, \tag{10}$$

wo die $\varrho_m$ beliebige reelle Zahlen bedeuten, mit der Menge aller Reihen

$$\sum A_n e^{i(s_{n,1}\sigma_1 + s_{n,2}\sigma_2 + \cdots + s_{n,p_n}\sigma_{p_n})} e^{i\Lambda_n x}, \tag{11}$$

wo die $\sigma_m$ ebenfalls beliebige reelle Zahlen bedeuten, übereinstimmt. Aus Symmetriegründen genügt es offenbar nachzuweisen, daß jede Reihe der Menge (11) auch in der Menge (10) vorkommt, daß also, wenn $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ beliebig gewählte feste Zahlen sind, die abzählbar vielen Kongruenzen

$$r_{n,1}y_1 + \cdots + r_{n,q_n}y_{q_n} \equiv s_{n,1}\sigma_1 + \cdots + s_{n,p_n}\sigma_{p_n} \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

wo $y_1, y_2, \ldots$ abzählbar viele Unbekannte bedeuten, mindestens eine simultane Lösung $(y_1, y_2, \ldots) = (\varrho_1, \varrho_2, \ldots)$ haben. Wir werden übrigens zeigen, daß nicht nur die Kongruenzen (12), sondern sogar die Gleichungen

$$r_{n,1}y_1 + \cdots + r_{n,q_n}y_{q_n} = s_{n,1}\sigma_1 + \cdots + s_{n,p_n}\sigma_{p_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{13}$$

mindestens eine Lösung $(y_1, y_2, \ldots) = (\varrho_1, \varrho_2, \ldots)$ besitzen [1].

[1] Hätten wir nur mit eigentlichen, statt mit beliebigen Basen operiert, so wäre die Exi-

Damit ein solches System (13) von abzählbar vielen linearen Gleichungen mit abzählbar vielen Unbekannten, wo in jeder einzelnen Gleichung nur eine endliche Anzahl der Unbekannten auftritt, eine Lösung besitze, ist bekanntlich (Toeplitz [1], vergl. auch Bohr [5]) nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend — ganz wie in dem Spezialfall nur endlich vieler Gleichungen mit endlich vielen Unbekannten — daß kein „offenkundiger“ Widerspruch zwischen den Gleichungen besteht, d. h. daß es für kein $N$ möglich ist $N$ Konstanten $c_1, \ldots, c_N$ so zu bestimmen, daß in der Gleichung, welche aus den $N$ ersten Gleichungen des Systems durch Multiplikation mit den respektiven Konstanten $c_1, \ldots, c_N$ und darauf folgende Addition entsteht, die auftretenden Unbekannten sämtlich die Koeffizienten 0 bekommen, während auf der rechten Seite eine Konstante $\neq 0$ zu stehen kommt. Um nachzuweisen, daß bei unseren Gleichungen (13) keine derartigen Multiplikatoren $c_1, \ldots, c_N$ existieren, können wir uns, da die Koeffizienten der Unbekannten in den vorgelegten Gleichungen (13) sämtlich rational sind, auf die Betrachtung von rationalen Konstanten $c$ beschränken; denn aus der elementaren Algebra geht sofort hervor, daß es möglich sein wird, falls $N$ lineare Gleichungen mit endlich vielen Unbekannten und rationalen Koeffizienten einen Widerspruch in unserem Sinne enthalten, allein unter Benutzung von rationalen Multiplikatoren $c_1, \ldots, c_N$ diesen Widerspruch zu Tage treten zu lassen.

Wir bezeichnen nunmehr zur Abkürzung die Gleichungen unseres Systems (13) mit [1], [2], [3], ... und die aus (8) und (9) folgenden numerischen Identitäten

$$r_{n,1}\beta_1 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} = s_{n,1}\gamma_1 + \cdots + s_{n,p_n}\gamma_{p_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{14}$$

---

stenz einer Lösung $(y_1, y_2, \ldots) = (\varrho_1, \varrho_2, \ldots)$ der abzählbar vielen Gleichungen (13) klar ersichtlich. Auf Grund der Bedingung 3 auf S. 120 kann nämlich dann jedes Element der einen Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ durch endlich viele Elemente der anderen Basis $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$ linear mit rationalen Koeffizienten ausgedrückt werden:

$$\beta_m = d_{m,1}\gamma_1 + \cdots + d_{m,t_m}\gamma_{t_m}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in den Ausdruck

$$A_n = r_{n,1}\beta_1 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n}$$

formal ein, so muß wegen der linearen Unabhängigkeit der $\gamma$ dabei gerade der Ausdruck

$$s_{n,1}\gamma_1 + \cdots + s_{n,p_n}\gamma_{p_n}$$

herauskommen. Also sind, wie durch einfache Ersetzung der Buchstaben $\gamma$ durch die Buchstaben $\sigma$ hervorgeht, die Zahlen

$$\varrho_m = d_{m,1}\sigma_1 + \cdots + d_{m,t_m}\sigma_{t_m}$$

eine Lösung der Gleichungen (13).

mit $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, .... Es seien $c_1, \ldots, c_N$ beliebige rationale Zahlen derart, daß die Koeffizienten der Unbekannten auf der linken Seite der durch den Prozeß

$$c_1 \cdot [1] + c_2 \cdot [2] + \cdots + c_N \cdot [N] \tag{15}$$

gebildeten Gleichung sämtlich 0 sind; wir haben zu beweisen, daß die auf der rechten Seite dieser Gleichung (15) stehende Konstante ebenfalls 0 ist. Zu diesem Zwecke bilden wir aus den Identitäten $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, ... durch denselben Prozeß, d. h. mittels denselben Faktoren $c_1, \ldots, c_N$, die neue Identität

$$c_1 \cdot \{1\} + c_2 \cdot \{2\} + \cdots + c_N \cdot \{N\}. \tag{16}$$

In dieser Identität (16) steht gewiß auf der linken Seite die Zahl 0, da die linke Seite von (16) aus der linken Seite von (15) durch das Einsetzen von $y_1 = \beta_1$, $y_2 = \beta_2, \ldots$ hervorgeht. Es muß daher auch die rechte Seite der Identität (16) gleich 0 sein. Da aber die auf der rechten Seite der Identitäten $\{1\}$, $\{2\}$, ... eingehenden Größen $\gamma$ nach Voraussetzung linear unabhängig sind, wird dies nur möglich sein, wenn bei der Ausrechnung der rechten Seite von (16) jede der auftretenden Größen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ für sich den Koeffizienten 0 bekommt. Hieraus folgt aber das erwünschte Resultat, daß auf der rechten Seite von (15) die Zahl 0 steht, da ja die rechte Seite von (15) aus der rechten Seite von (16) durch Ersetzen von $\gamma_m$ durch $\sigma_m$ entsteht.

Wir beweisen danach den folgenden Satz, aus welchem die Berechtigung des Wortes „Klasse" für unsere Menge $\mathsf{K}(f(x))$ hervorgeht.

**Satz 4.** *Es sei $f(x)$ eine beliebig gegebene fastperiodische Funktion und $g(x)$ irgend eine fastperiodische Funktion, welche der Menge $\mathsf{K}(f(x))$ angehört. Dann ist die Menge $\mathsf{K}(g(x))$ mit der Menge $\mathsf{K}(f(x))$ identisch.*

**Beweis.** Es sei $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ die Fourierreihe von $f(x)$ und $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ eine Basis der Exponentenfolge $\Lambda_n$, und es sei die Fourierreihe von $g(x)$ durch

$$g(x) \sim \sum B_n e^{i\Lambda_n x}$$

mit

$$B_n = A_n e^{i(r_{n,1}\varrho_1^* + \cdots + r_{n,q_n}\varrho_{q_n}^*)} \tag{17}$$

gegeben, wo $\varrho_1^*, \varrho_2^*, \ldots$ eine Folge von konstanten Zahlen bedeutet. Da die Fourierreihe von $g(x)$ dieselben Exponenten $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ wie die Fourierreihe von $f(x)$ besitzt, können wir für $g(x)$ auch dieselbe Basis wie für $f(x)$ benutzen, und es wird daher die Menge $\mathsf{K}(g(x))$ durch die Menge aller derjenigen

Funktionen gegeben, deren Fourierreihen durch

$$(18) \qquad \sum B_n e^{i(r_{n,1}\varrho_1 + \cdots + r_{n,q_n}\varrho_{q_n})} e^{i\Lambda_n x},$$

bestimmt werden, wenn $(\varrho_1, \varrho_2, \ldots)$ alle möglichen reellen Zahlenfolgen durchläuft. Es handelt sich darum zu beweisen, daß die Menge der Reihen (18) mit der Menge der Reihen

$$(7) \qquad \sum A_n e^{i(r_{n,1}\varrho_1 + \cdots + r_{n,q_n}\varrho_{q_n})} e^{i\Lambda_n x}$$

übereinstimmt. Dies ist aber unmittelbar klar; denn aus (17) folgt ja, daß die Reihen (18) auch in der Form

$$\sum A_n e^{i(r_{n,1}(\varrho_1 + \varrho_1^*) + \cdots + r_{n,q_n}(\varrho_{q_n} + \varrho_{q_n}^*))} e^{i\Lambda_n x}$$

geschrieben werden können, wo $(\varrho_1 + \varrho_1^*, \varrho_2 + \varrho_2^*, \ldots)$ zugleich mit $(\varrho_1, \varrho_2, \ldots)$ alle reellen Zahlenfolgen durchläuft.

Wir betrachten nun eine bestimmte (beliebig gewählte) Klasse K und werden die Zusammengehörigkeit der Funktionen dieser Klasse vom Standpunkte der Funktionen von unendlich vielen Variablen erörtern. Die Funktionen der Klasse K haben alle dieselben Fourierexponenten $\Lambda_n$; wir werden eine bestimmte (beliebig gewählte) Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ dieser Exponentenfolge $\Lambda_n$ herausgreifen und sie im Folgenden festhalten. Mit Hilfe dieser Basis gehört dann (vergl. § 6) zu jeder Funktion unserer Klasse K eine eindeutig bestimmte Funktion von abzählbar vielen Variablen, welche grenzperiodisch mit dem Periodensystem $\left(\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots\right)$ ist. Wir beweisen zunächst den

**Satz 5.** *Es sei*

$$f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$$

*ein beliebiger Repräsentant der Klasse* K *und*

$$g(x) \sim \sum A_n e^{i(r_{n,1}\beta_1 k_1 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} k_{q_n})} e^{i\Lambda_n x} \quad \left(= \sum B_n e^{i\Lambda_n x}\right)$$

*eine beliebige andere Funktion dieser Klasse, wo also $k_1, k_2, \ldots$ eine Folge von reellen Konstanten bedeuten. Dann sind die zu $f(x)$ und $g(x)$ gehörigen Funktionen von abzählbar vielen Variablen $F(x_1, x_2, \ldots)$ und $G(x_1, x_2, \ldots)$ im ganzen abzählbardimensionalen Raume durch die Gleichung*

$$G(x_1, x_2, x_3, \ldots) = F(x_1 + k_1, x_2 + k_2, x_3 + k_3, \ldots)$$

*verbunden.*

**Beweis.** In der Tat sind in jedem Punkte $(x_1, x_2, \ldots)$ des Raumes die beiden Reihen, welche $G(x_1, x_2, \ldots)$ und $F(x_1+k_1, x_2+k_2, \ldots)$ „bestimmen", d. h. die Reihen

$$\sum B_n e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n})}$$

und

$$\sum A_n e^{i(r_{n,1}\beta_1 (x_1+k_1) + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n}(x_{q_n}+k_{q_n}))},$$

wegen

$$B_n = A_n e^{i(r_{n,1}\beta_1 k_1 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} k_{q_n})},$$

mit einander identisch, und es müssen daher auch ihre „Summen" $G(x_1, x_2, \ldots)$ und $F(x_1+k_1, x_2+k_2, \ldots)$ gleich groß sein, da die Reihen durch dasselbe Summationsverfahren summiert werden.

Mit Hilfe dieses Satzes können wir nun sofort den folgenden wichtigen Satz beweisen.

**Satz 6.** *Es sei $f(x)$ ein beliebiger Repräsentant der Klasse $\mathsf{K}$ und $F(x_1, x_2, \ldots)$ die zu $f(x)$ gehörige Funktion von abzählbar vielen Variablen. Dann besteht die Klasse $\mathsf{K}$ einfach aus allen Funktionen der Form*

$$g(x) = F(x+k_1, x+k_2, x+k_3, \ldots),$$

*wo $(k_1, k_2, k_3, \ldots)$ einen beliebigen festen Punkt des abzählbar-dimensionalen Raumes bedeutet.* Es entsteht mit anderen Worten die ganze Klasse $\mathsf{K}$ aus der einen Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ dadurch, daß diese letztere auf allen Geraden

$$x_1 = x+k_1, \quad x_2 = x+k_2, \quad x_3 = x+k_3, \ldots$$

betrachtet wird, welche der Hauptdiagonalen $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x$ parallel sind.

**Beweis.** Es sei

$$g(x) \sim \sum A_n e^{i(r_{n,1}\beta_1 k_1 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} k_{q_n})} e^{i\Lambda_n x}$$

eine beliebige Funktion der Klasse $\mathsf{K} = \mathsf{K}(f(x))$. Dann ist nach Satz 5 die zu $g(x)$ gehörige Funktion von abzählbar vielen Variablen $G(x_1, x_2, \ldots)$ durch

$$G(x_1, x_2, x_3, \ldots) = F(x_1+k_1, x_2+k_2, x_3+k_3, \ldots)$$

gegeben. Aus der bekannten Relation

$$g(x) = G(x, x, x, \ldots)$$

folgt also, daß

$$g(x) = F(x+k_1, x+k_2, x+k_3, \ldots)$$

ist. Und wenn hier der Punkt $(k_1, k_2, \ldots)$ den ganzen abzählbar-dimensionalen Raum durchläuft, wird gleichzeitig die Funktion $g(x)$ die ganze Klasse $\mathsf{K}$ durchlaufen [1].

Wir bemerken noch, daß schon Bohl [2] bei der Untersuchung seiner speziellen „quasiperiodischen“ Funktionen sich mit einer Klasseneinteilung derselben Art wie der in diesem Paragraphen betrachteten beschäftigt hat. Hierbei nahm Bohl seinen Ausgangspunkt in der Beziehung der quasiperiodischen Funktionen zu den rein periodischen Funktionen von mehreren Veränderlichen, d. h. er ging von einem Gesichtspunkte aus, das demjenigen entspricht, welches bei uns dem Satze 6 zu Grunde liegt. Unser Aufbau der Klasse $\mathsf{K}(f(x))$, welcher von der Fourierreihe der Funktion $f(x)$ ausgeht, ist nach dem Vorbilde einer ähnlichen Klasseneinteilung bei den Dirichletschen Reihen vorgenommen, welche der Verfasser in einer mehrmals zitierten Arbeit [5] angegeben hat.

## § 3.

### Beziehung der Klasse $\mathsf{K}(f(x))$ zu der abgeschlossenen Hülle $\mathsf{H}(f(x+k))$.

In den Paragraphen 1 und 2 haben wir von zwei verschiedenen Gesichtspunkten aus die Menge der fastperiodischen Funktionen in Klassen eingeteilt. In beiden Fällen hatten die Funktionen einer und derselben Klasse alle dieselben Exponenten $\Lambda_n$ (und überdies waren entsprechende Koeffizienten von gleich großem numerischen Betrage). Wenn wir jetzt dazu übergehen, die beiden Klasseneinteilungen mit einander zu vergleichen, brauchen wir daher nicht die sämtlichen fastperiodischen Funktionen gleichzeitig vor Augen zu haben, sondern

---

[1] Aus diesem Satze 6 in Verbindung mit dem Hilfssatze 11 in § 12 folgt speziell, *daß die abgeschlossene Hülle der Wertmenge $W_f$ einer fastperiodischen Funktion $f(x)$ nur von der Klasse $\mathsf{K}$ abhängt, in welcher $f(x)$ liegt.* In der Tat, falls $F(x_1, x_2, \ldots)$ die zu $f(x)$ gehörige Funktion von abzählbar vielen Variablen bezeichnet und $W_F$ die Wertmenge dieser Funktion, so ist nach dem angeführten Hilfssatze die abgeschlossene Hülle der Wertmenge $W_f$ mit der abgeschlossenen Hülle der Wertmenge $W_F$ identisch. Und der Übergang von $f(x)$ zu einer beliebigen anderen Funktion derselben Klasse $\mathsf{K}$ bedeutet ja, vom Gesichtspunkte der zugehörigen Funktion von unendlich vielen Variablen, nur eine Verlegung des Anfangspunktes des Koordinatensystems im abzählbar-dimensionalen Raume (durch welche die Wertmenge der Funktion natürlich ungeändert bleibt).

Diese spezielle Folgerung der angegebenen Sätze läßt sich übrigens auch ohne weiteres daraus ableiten, daß die Klasse $\mathsf{K}(f(x))$ in der abgeschlossenen Hülle $\mathsf{H}(f(x+k))$ enthalten ist. In der Tat sieht man sofort, *daß zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, welche zu derselben Menge $\mathsf{H}(f(x+k))$ gehören, Wertmengen $W_f$ und $W_g$ mit derselben abgeschlossenen Hülle besitzen,* weil ja $f(x)$ durch Funktionen $g(x+k)$, und umgekehrt $g(x)$ durch Funktionen $f(x+k)$ gleichmäßig angenähert werden kann.

können uns offenbar auf die Betrachtung solcher Funktionen beschränken, welche zu einer festen (aber beliebig gewählten) Exponentenfolge $\Lambda_n$ gehören.

In § 2 haben wir schon gesehen, daß bei einer beliebig gegebenen fastperiodischen Funktion $f(x)$ die Klasse $\mathsf{K}(f(x))$ einerseits die Funktionenmenge $\{f(x+k)\}$ enthält, andererseits aber in der abgeschlossenen Hülle $\mathsf{H}(f(x+k))$ dieser Menge enthalten ist. Hieraus ergibt sich sofort der

**Satz 7.** *Falls eine Klasse* $\mathsf{K}$ *und eine Klasse* $\mathsf{H}$ *eine Funktion* $f(x)$ *gemeinsam haben, ist* $\mathsf{K}$ *ganz in* $\mathsf{H}$ *enthalten, und es ist* $\mathsf{H}$ *gleich der abgeschlossenen Hülle der Menge* $\mathsf{K}$.

**Beweis.** In der Tat kann die gemeinsame Funktion $f(x)$ als „Repräsentant" sowohl der Klasse $\mathsf{K}$ wie der Klasse $\mathsf{H}$ angewendet werden, d. h. es ist

$$\mathsf{K} = \mathsf{K}(f(x)) \quad \text{und} \quad \mathsf{H} = \mathsf{H}(f(x+k)).$$

Somit ist $\mathsf{K}$ in $\mathsf{H}$ enthalten, und da $\mathsf{H}$ die abgeschlossene Hülle von $\{f(x+k)\}$ ist und $\{f(x+k)\}$ in $\mathsf{K}$ enthalten ist, muß $\mathsf{H}$ offenbar auch die abgeschlossene Hülle von $\mathsf{K}$ sein.

Es ist also eine Klasse $\mathsf{H}$ entweder mit einer Klasse $\mathsf{K}$ identisch, oder es zerfällt $\mathsf{H}$ in mehrere Klassen $\mathsf{K}$ und ist alsdann eine gemeinsame abgeschlossene Hülle jeder dieser Unterklassen. Wir gehen nunmehr dazu über, zu untersuchen, wann eine vorgelegte Klasse $\mathsf{H} = \mathsf{H}(f(x+k))$ mit der Klasse $\mathsf{K}(f(x))$ zusammenfällt, und wann $\mathsf{K}$ eine echte Teilmenge von $\mathsf{H}$ bildet. Hierbei werden wir die Fourierentwicklungen der Funktionen in den Vordergrund rücken und daher eine bestimmte Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ der Exponentenfolge $\Lambda_n$ festlegen, welche wir der Bequemlichkeit halber unter den eigentlichen Basen der Exponentenfolge wählen werden; wie immer bezeichnen wir die Darstellung von $\Lambda_n$ durch die Basiszahlen $\beta$ mit

$$\Lambda_n = r_{n,1}\beta_1 + r_{n,2}\beta_2 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n}.$$

Es sei nunmehr $f(x)$ eine beliebige fastperiodische Funktion mit der Exponentenfolge $\Lambda_n$ und es sei $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ ihre Fourierentwicklung. Wir bezeichnen mit $\Pi_{\mathsf{H}}$ die Menge aller Punkte $(\Theta_1, \Theta_2, \ldots)$ des abzählbar-dimensionalen Raumes, für welche die Reihe

$$\sum A_n e^{i\Theta_n} e^{i\Lambda_n x}$$

die Fourierreihe einer Funktion der Klasse $\mathsf{H} = \mathsf{H}(f(x+k))$ ist, und mit $\Pi_{\mathsf{K}}$ die Menge aller Punkte $(\theta_1, \theta_2, \ldots)$, für welche die Reihe

$$\sum A_n e^{i\theta_n} e^{i\Lambda_n x}$$

die Fourierreihe einer Funktion der Klasse $\mathsf{K} = \mathsf{K}(f(x))$ bildet. Aus den Resultaten in § 1 bezw. § 2 geht hervor:

I. Damit $(\Theta_1, \Theta_2, \ldots)$ ein Punkt der Menge $\Pi_{\mathsf{H}}$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß bei jedem $N$ und jedem $\varepsilon$ die $N$ diophantischen Ungleichungen

$$|\Lambda_n k - \Theta_n| < \varepsilon \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

eine Lösung in $k$ besitzen.

II. Damit $(\theta_1, \theta_2, \ldots)$ ein Punkt der Menge $\Pi_{\mathsf{K}}$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß die abzählbar vielen Kongruenzen

$$r_{n,1} k_1 + r_{n,2} k_2 + \cdots + r_{n,q_n} k_{q_n} \equiv \theta_n \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, 2, \ldots$$

eine simultane Lösung in $(k_1, k_2, \ldots)$ besitzen.

Die Charakterisierungen I und II der Punkte der Mengen $\Pi_{\mathsf{H}}$ bezw. $\Pi_{\mathsf{K}}$ scheinen beim ersten Anblick recht verschiedenartig zu sein. Mit Hilfe eines allgemeinen Kroneckerschen Satzes über diophantische Approximationen können wir aber leicht von I aus eine Brücke zu II schlagen. Wir gehen hierbei schrittweise vor.

1. Zunächst bemerken wir, daß die in I ausgesprochene Forderung, daß bei festem $N$ und jedem gegebenen $\varepsilon$ die $N$ diophantischen Ungleichungen

$$(19) \qquad |\Lambda_n k - \Theta_n| < \varepsilon \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

eine Lösung in $k$ besitzen sollen, damit gleichbedeutend ist zu verlangen, daß (bei festem $N$) die $N$ diophantischen Ungleichungen

$$(20) \qquad |r_{n,1} k_1 + r_{n,2} k_2 + \cdots + r_{n,q_n} k_{q_n} - \Theta_n| < \varepsilon \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

bei jedem gegebenen $\varepsilon$ eine Lösung in $(k_1, k_2, \ldots, k_L)$ besitzen, wo $L$ den größten Index eines $k$ bezeichnet, welches in den Ungleichungen (20) vorkommt. In der Tat besagt ein Kroneckerscher Satz (vgl. z. B. Bohr [4]), daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine beliebige endliche Anzahl $N$ von diophantischen Ungleichungen der Form

$$|\alpha_{n,1} x_1 + \alpha_{n,2} x_2 + \cdots + \alpha_{n,p} x_p - \beta_n| < \varepsilon \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

bei jedem gegebenen $\varepsilon$ eine Lösung in $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ besitzen, darin besteht, daß für jedes System von ganzen Zahlen $g_1, g_2, \ldots, g_N$, für welches der Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{N} g_n (\alpha_{n,1} x_1 + \alpha_{n,2} x_2 + \cdots + \alpha_{n,p} x_p)$$

identisch in den $x$ verschwindet, die Zahl

$$\sum_{n=1}^{N} g_n \beta_n$$

eine ganze Zahl sein soll. Und wenden wir diese Bedingung sowohl auf die $N$ diophantischen Ungleichungen (19) mit der einen Unbekannten $k$ als auch auf die $N$ diophantischen Ungleichungen (20) mit den $L$ Unbekannten $k_1, \ldots, k_L$ an, so sehen wir, daß die Bedingung in den beiden Fällen auf genau dasselbe hinausläuft, indem diejenigen Systeme von $N$ ganzen Zahlen $g_1, \ldots, g_N$, für welche der Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{N} g_n (\Lambda_n k) = \sum_{n=1}^{N} g_n (r_{n,1} \beta_1 + \cdots + r_{n,q_n} \beta_{q_n}) k$$

in $k$ verschwindet, wegen der linearen Unabhängigkeit der $\beta$, genau dieselben sind, für welche der Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{N} g_n (r_{n,1} k_1 + \cdots + r_{n,q_n} k_{q_n})$$

identisch in $k_1, \ldots, k_L$ verschwindet.

2. In den $N$ diophantischen Ungleichungen (20) (im Gegensatz zu den diophantischen Ungleichungen (19)) sind alle Koeffizienten rationale Zahlen. Hieraus folgt aber, daß die Forderung, daß diese Ungleichungen bei jedem $\varepsilon$ eine Lösung haben sollen, damit gleichbedeutend ist zu verlangen, daß die $N$ diophantischen Gleichungen (Kongruenzen)

$$r_{n,1} k_1 + r_{n,2} k_2 + \cdots + r_{n,q_n} k_{q_n} \equiv \Theta_n \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, 2, \ldots, N) \tag{21}$$

eine Lösung haben sollen. In der Tat, falls die $N$ Ungleichungen (20) bei jedem $\varepsilon$ eine Lösung haben, etwa bei $\varepsilon = \frac{1}{m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ die Lösung

$$(k_1, k_2, \ldots, k_L) = (k_1^{(m)}, k_2^{(m)}, \ldots, k_L^{(m)}),$$

können wir offenbar diese Lösungen so wählen, daß alle Koordinaten $k_1, \ldots, k_L$ zwischen 0 (inkl.) und $2\pi G$ (exkl.) liegen, wo $G$ den Hauptnenner der (endlich vielen) rationalen Koeffizienten $r$ bezeichnet; es ist alsdann die aus den Lösungen $(k_1^{(m)}, \ldots, k_L^{(m)})$ $(m = 1, 2, \ldots)$ bestehende Punktmenge eine beschränkte Punktmenge des $L$-dimensionalen Raumes, woraus folgt, daß sie mindestens einen Häufungspunkt $(k_1^*, \ldots, k_L^*)$ besitzt, und dieser Häufungspunkt wird offenbar eine Lösung der diophantischen Gleichungen (21) sein.

Zusammenfassend haben wir also gefunden, daß die in I gegebene Charakterisierung der Punkte $(\Theta_1, \Theta_2, \ldots)$ der Menge $\Pi_H$ damit äquivalent ist, daß bei jedem festen $N$ die $N$ Kongruenzen (21) eine Lösung in $k_1, k_2, \ldots$ besitzen.

Die gestellte Frage, wann $K(f(x))$ mit $H(f(x+k))$, d. h. wann $\Pi_K$ mit $\Pi_H$ zusammenfällt, ist hiermit auf ein Problem über unendlich viele Kongruenzen mit unendlich vielen Unbekannten zurückgeführt. In der Tat besteht ja nach dem Obigen die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jeder Punkt der Menge $\Pi_H$ auch der Menge $\Pi_K$ angehört, darin, daß die (aus den Darstellungen der $\Lambda_n$ durch die Basiszahlen $\beta$ hervorgehenden) rationalen Zahlen $r_{n,m}$ so beschaffen sind, daß es, bei beliebig gegebenen Werten $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$, für die simultane Lösbarkeit der sämtlichen abzählbar vielen Kongruenzen

$$r_{n,1}k_1 + r_{n,2}k_2 + \cdots + r_{n,q_n}k_{q_n} \equiv \Theta_n \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, daß bei jedem festen $N$ die $N$ ersten dieser Kongruenzen eine Lösung besitzen. Mit dem so entstandenen Problem hat sich der Verfasser in einer im Druck befindlichen Arbeit (Bohr [5]) beschäftigt und als Lösung den folgenden allgemeinen Satz gefunden:

*Es sei*

$$(22) \qquad r_{n,1}x_1 + r_{n,2}x_2 + \cdots + r_{n,q_n}x_{q_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

*ein System von abzählbar vielen linearen Ausdrücken in den abzählbar vielen Variablen* $x_1, x_2, \ldots$ *mit konstanten rationalen Koeffizienten, von dem nur angenommen wird, daß jede der Variablen* $x_1, x_2, \ldots$ *„isoliert" werden kann*[1]. *Dann besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine simultane Lösung der abzählbar vielen Kongruenzen*

$$(23) \qquad r_{n,1}x_1 + r_{n,2}x_2 + \cdots + r_{n,q_n}x_{q_n} \equiv \Theta_n \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

*immer dann vorhanden ist, wenn bei jedem festen N die N ersten dieser Kongruenzen lösbar sind, darin, daß eine lineare Substitution*

$$(24) \qquad x_m = \varrho_{m,1}y_1 + \varrho_{m,2}y_2 + \cdots + \varrho_{m,u_m}y_{u_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

[1] Hierunter verstehen wir, daß es bei jedem festen $m$ möglich sein soll, durch lineare Kombination endlich vieler der Ausdrücke (22) mit rationalen Multiplikatoren einen Ausdruck zu erhalten, welcher $x_m$ allein enthält. Diese Forderung der „Isolierbarkeit" der Variablen bedeutet keine eigentliche Einschränkung der Allgemeinheit und besagt nur, daß z. B. $x_2$ und $x_3$ nicht überall in einer festen Kombination (etwa $\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{5}x_3$) auftreten dürfen (in welchem Falle wir ja einfach diese Kombination durch eine einzige Variable ersetzen können).

*mit rationalen Koeffizienten $\varrho$ existiert, welche die gegebenen Ausdrücke* (22) *in neue Ausdrücke*

$$s_{n,1} y_1 + s_{n,2} y_2 + \cdots + s_{n,p_n} y_{p_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{25}$$

*überführt, deren Koeffizienten s sämtlich ganze Zahlen sind*[1].

Hierbei verstehen wir unter einer linearen Substitution ein System von Gleichungen der Form (24) (wo also in jedem der Ausdrücke auf den rechten Seiten nur endlich viele $y$ vorkommen), welche eine ein-eindeutige Abbildung des abzählbar-dimensionalen Raumes $x_1, x_2, \ldots$ auf den abzählbar-dimensionalen Raum $y_1, y_2, \ldots$ bewerkstelligt. Es läßt sich alsdann umgekehrt, wie leicht zu zeigen, jedes $y$ durch endlich viele $x$ linear ausdrücken; wir bezeichnen die so entstandene inverse Substitution mit

$$y_m = \sigma_{m,1} x_1 + \sigma_{m,2} x_2 + \cdots + \sigma_{m,v_m} x_{v_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Falls die Koeffizienten $\varrho$ in der ursprünglichen Substitution alle rational sind, werden die Koeffizienten $\sigma$ in der inversen Substitution ebenfalls rational sein.

Der angeführte Satz läßt sich unmittelbar auf unsere Frage, wann $\Pi_K$ mit $\Pi_H$ zusammenfällt, anwenden. In der Tat, dadurch daß wir als Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ eine eigentliche Basis gewählt haben — und daher jede Basiszahl $\beta_m$ durch eine lineare Kombination von endlich vielen $\Lambda_n$ mit rationalen Koeffizienten dargestellt werden kann — haben wir offenbar schon im Voraus dafür gesorgt, daß aus unseren Ausdrücken $r_{n,1} k_1 + \cdots + r_{n,q_n} k_{q_n}$ jede der Variablen $k_m$ isoliert werden kann. Es ergibt sich das folgende äußerst einfache Resultat:

**Satz 8.** *Für das Zusammenfallen der beiden Mengen* $\mathsf{K}(f(x))$ *und* $\mathsf{H}(f(x+k))$ *ist notwendig und hinreichend, daß die Exponentenfolge* $\Lambda_n$ *eine ganze Basis besitzt.*

**Beweis.** Wir gehen von den Darstellungen der Exponenten $\Lambda_n$ durch die beliebig gewählte (eigentliche) Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ aus,

$$\Lambda_n = r_{n,1} \beta_1 + \cdots + r_{n,q_n} \beta_{q_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{26}$$

Nach dem oben angeführten Satze über abzählbar viele Kongruenzen mit abzählbar vielen Unbekannten besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Punktmengen $\Pi_K$ und $\Pi_H$ zusammenfallen (d. h. das $\mathsf{K}(f(x))$ und

[1] Wir bemerken zur Orientierung, daß man sofort zeigen kann, daß die angegebene Bedingung hinreichend ist, und daß die ganze Schwierigkeit beim Beweise des Satzes darin besteht, ihre Notwendigkeit darzutun.

$\mathsf{H}(f(x+k))$ zusammenfallen) darin, daß das System von linearen Ausdrücken

(27) $$r_{n,1}x_1 + \cdots + r_{n,q_n}x_{q_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

durch eine lineare Substitution mit rationalen Koeffizienten

(28) $$x_m = \varrho_{m,1}y_1 + \cdots + \varrho_{m,u_m}y_{u_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

in ein neues System

(29) $$s_{n,1}y_1 + \cdots + s_{n,p_n}y_{p_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

mit lauter ganzen Koeffizienten $s$ übergeführt werden kann. Es handelt sich also darum zu beweisen, daß die Existenz einer solchen linearen Substitution mit der Existenz einer ganzen Basis $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ der Exponentenfolge $\Lambda_n$ äquivalent ist.

1. Wir beweisen zunächst, daß aus der Existenz einer linearen Substitution (28) der erwähnten Art die Existenz einer ganzen Basis $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$ gefolgert werden kann. Hierzu ersetzen wir in der Substitution (28) die Variablen $x_m$ durch die gegebenen Basiszahlen $\beta_m$. Das so entstandene System von linearen Gleichungen in den Variablen $y_1, y_2, \ldots$ hat nach Voraussetzung eine und nur eine Lösung; wir bezeichnen diese Lösung mit $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$ und behaupten, daß dadurch eine ganze Basis der Folge $\Lambda_n$ gewonnen ist. Es ist klar, daß falls wir in den Darstellungen (26) der $\Lambda_n$ durch die $\beta$ die Ausdrücke

$$\beta_m = \varrho_{m,1}\gamma_1 + \cdots + \varrho_{m,u_m}\gamma_{u_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

einführen, eine Darstellung mit lauter ganzen Koeffizienten, nämlich die Darstellung

$$\Lambda_n = s_{n,1}\gamma_1 + \cdots + s_{n,p_n}\gamma_{p_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

erhalten wird. Es handelt sich also nur darum zu zeigen, daß die $\gamma$ linear unabhängig sind, also daß bei jedem System von endlich vielen, nicht sämtlich verschwindenden rationalen Zahlen $R_1, R_2, \ldots, R_M$ die Zahl

(30) $$R_1\gamma_1 + R_2\gamma_2 + \cdots + R_M\gamma_M$$

von 0 verschieden ist. Hierzu betrachten wir den mit denselben Koeffizienten $R$ gebildeten Ausdruck

$$R_1y_1 + R_2y_2 + \cdots + R_My_M$$

in den Variablen $y_m$, und schreiben diesen Ausdruck mit Hilfe der zu (28) inversen Substitution

$$y_m = \sigma_{m,1}x_1 + \cdots + \sigma_{m,v_m}x_{v_m}$$

zu einem Ausdruck in den $x_m$,

$$S_1 x_1 + S_2 x_2 + \cdots + S_P x_P,$$

um, so daß für zwei beliebige durch die Substitution verbundene Punkte $(x_1, x_2, \ldots)$ und $(y_1, y_2, \ldots)$ die Gleichung

$$(31) \qquad R_1 y_1 + \cdots + R_M y_M = S_1 x_1 + \cdots + S_P x_P$$

besteht. Da der $x$-Punkt zugleich mit dem $y$-Punkt den ganzen abzählbar dimensionalen Raum durchläuft, und die Zahlen $R$ nach Voraussetzung nicht alle 0 sind, können die Zahlen $S$ offenbar auch nicht alle 0 sein. Hieraus folgt aber sofort, daß die Zahl (30) von 0 verschieden ist; denn es ist ja nach (31) diese Zahl gleich der Zahl

$$S_1 \beta_1 + \cdots + S_P \beta_P,$$

und diese letzte Zahl ist gewiß $\neq 0$, da die $\beta$ nach Voraussetzung linear unabhängig und die (rationalen) Koeffizienten $S$ nicht alle 0 sind.

2. Wir haben danach zu beweisen, daß aus der Existenz einer ganzen Basis $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ der Folge $\Lambda_n$ (welche Basis wir, nach der Bemerkung auf S. 122, als eigentliche Basis annehmen dürfen) die Existenz einer linearen Substitution der erwähnten Art gefolgert werden kann. Da $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ nach Voraussetzung eine eigentliche Basis bildet, lassen sich die Zahlen $\beta$ durch die neue Basiszahlen $\gamma$ linear mit rationalen Koeffizienten ausdrücken, etwa

$$(32) \qquad \beta_m = \varrho_{m,1} \gamma_1 + \cdots + \varrho_{m,u_m} \gamma_{u_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

und die Voraussetzung der Ganzzahligkeit der Basis $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$ besagt, daß durch Einführung dieser Ausdrücke (32) in die gegebenen Darstellungen

$$\Lambda_n = r_{n,1} \beta_1 + \cdots + r_{n,q_n} \beta_{q_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

neue Darstellungen

$$\Lambda_n = s_{n,1} \gamma_1 + \cdots + s_{n,p_n} \gamma_{p_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

mit lauter ganzen Koeffizienten $s$ erhalten werden. Wir ersetzen nun in den Formeln (32) die Buchstaben $\beta$ und $\gamma$ durch $x$ bezw. $y$, und behaupten, daß das so entstandene Gleichungssystem

$$(33) \qquad x_m = \varrho_{m,1} y_1 + \cdots + \varrho_{m,u_m} y_{u_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

eine lineare Substitution der gewünschten Art ist. Es ist von vorneherein klar, daß, wenn diese Ausdrücke (33) in die gegebenen Ausdrücke

$$r_{n,1} x_1 + \cdots + r_{n,q_n} x_{q_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

eingeführt werden, Ausdrücke in den $y$ mit lauter ganzen Koeffizienten entstehen, nämlich die Ausdrücke

$$s_{n,1}\,y_1 + \cdots + s_{n,p_n}\,y_{p_n}.$$

Es handelt sich also nur darum zu zeigen, daß (33) tatsächlich eine Substitution bildet, d. h. eine ein-eindeutige Abbildung des $x$-Raumes auf den $y$-Raum vermittelt. Mit anderen Worten: es soll gezeigt werden, daß die abzählbar vielen Gleichungen (33) bei beliebig gegebenen festen Werten der $x_1, x_2, \ldots$ eine und nur eine Lösung $(y_1, y_2, \ldots)$ besitzen. Wir behaupten, daß eine solche Lösung durch

$$(34) \qquad y_m = \sigma_{m,1}\,x_1 + \cdots + \sigma_{m,v_m}\,x_{v_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

gegeben wird, wo die Koeffizienten $\sigma$ aus den Darstellungen der $\gamma$ durch die $\beta$,

$$(35) \qquad \gamma_m = \sigma_{m,1}\,\beta_1 + \cdots + \sigma_{m,v_m}\,\beta_{v_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

geholt sind. In der Tat, weil die Ausdrücke (35) bei Einsetzung in die Gleichungen (32) diese befriedigen, und die $\beta$ linear unabhängig sind, folgt in gewohnter Weise, daß die Ausdrücke (34) bei Einsetzung in die Gleichungen (33) diese ebenfalls befriedigen müssen, d. h. daß (34) tatsächlich eine Lösung dieser Gleichungen (33) ist. Und daß (33) bei gegebenen $x$ nur eine Lösung besitzt, folgt aus der linearen Unabhängigkeit der $\gamma$. In der Tat, durch Multiplikation der $v_m$ ersten Gleichungen (32) mit den rationalen Faktoren $\sigma_{m,1}, \ldots, \sigma_{m,v_m}$ und darauf folgende Addition kommt, nach (35), auf der linken Seite die Zahl $\gamma_m$ heraus, und es muß daher bei der Ausrechnung der rechten Seite jedes $\gamma$ außer $\gamma_m$ den Koeffizienten 0 bekommen. Hieraus folgt aber, daß durch Multiplikation der $v_m$ ersten Gleichungen (33) mit denselben Faktoren $\sigma_{m,1}, \ldots, \sigma_{m,v_m}$ und folgende Addition, auf der rechten Seite alle Unbekannten außer $y_m$ wegfallen, d. h. aus diesen Gleichungen (33) jede Unbekannte $y_m$ „isoliert" werden kann, womit natürlich gezeigt ist, daß es höchstens eine Lösung $(y_1, y_2, \ldots)$ dieser Gleichungen geben kann.

## ANHANG II.

### Eine Verschärfung des gleichmässigen Approximationssatzes.

Im Kapitel V haben wir den „gleichmäßigen Approximationssatz" bewiesen, welcher besagt, daß jede fastperiodische Funktion

$$f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$$

mit beliebiger Genauigkeit $\varepsilon$ im ganzen Intervalle $-\infty < x < \infty$ durch eine endliche Summe

$$\sum_1^N a_n e^{i\lambda_n x}$$

approximiert werden kann; hierbei konnten die Exponenten $\lambda_n$, falls die Folge der Fourierexponenten $\Lambda_n$ die Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ besitzt, so gewählt werden, daß sie alle die Form

$$\lambda_n = \varrho_1\beta_1 + \varrho_2\beta_2 + \cdots + \varrho_m\beta_m \tag{1}$$

mit rationalen Koeffizienten $\varrho$ haben (also so, daß die Menge der Zahlen $\lambda_n$ auch die Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ besitzt), und in dem Fall einer *ganzen* Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ der Exponentenfolge $\Lambda_n$ konnte man die $\lambda_n$ sogar so wählen, daß in den Darstellungen (1) die Koeffizienten $\varrho$ alle *ganze* Zahlen sind.

In dem klassischen Spezialfalle einer *rein periodischen* (stetigen) Funktion

$$f(x) \sim \sum c_n e^{in\beta x}$$

mit der Periode $p = \frac{2\pi}{\beta}$, wo die Fourierexponenten $\Lambda_n$ die ganze eingliedrige Basis $\{\beta\}$ besitzen, läßt sich aber bekanntlich noch etwas mehr beweisen; in der Tat können hier die endlichen Approximationssummen $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$ nicht nur so gewählt werden, daß alle Exponenten $\lambda_n$ ganze Multipla von $\beta$ sind, sondern sogar so, *daß nur solche Multipla $n\beta$ als Exponenten verwendet werden, welche tatsächlich unter den Fourierexponenten der gegebenen Funktion vorkommen*, d. h. für welche die entsprechenden Fourierkoeffizienten $c_n \neq 0$ sind [1].

---

[1] Die Richtigkeit dieser verschärften Form des WEIERSTRASSschen Approximationssatzes folgt sofort aus dem Satze von FEJÉR [1] über die gleichmäßige CESÀRO-Summabilität der Fourierreihe

Bei der Übertragung der Theorie der fastperiodischen Funktionen auf analytische Funktionen einer komplexen Variabeln — worauf ich in einer späteren Arbeit eingehen werde — zeigt sich nun die Frage von prinzipieller Bedeutung, ob der gleichmäßige Approximationssatz auch bei einer beliebigen fastperiodischen Funktion $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ einer analogen Verschärfung fähig ist. In diesem Anhange wird diese Frage erledigt, und zwar im bejahenden Sinne, indem wir den folgenden Satz beweisen.

**Verschärfter Approximationssatz.** *Es sei $f(x)$ eine beliebige fastperiodische Funktion und $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ ihre Fourierentwicklung. Dann läßt sich zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Anzahl unter den Fourierexponenten $\Lambda_n$, etwa $\Lambda_{n_1}, \Lambda_{n_2}, \ldots, \Lambda_{n_q}$, und zugehörige Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_q$ so wählen, daß für alle $x$ die Ungleichung*

$$\left| f(x) - \sum_{\nu=1}^{q} a_\nu e^{i\Lambda_{n_\nu} x} \right| < \varepsilon$$

*besteht.*

Der Beweis dieses verschärften Approximationssatzes beruht, wie der Beweis des ursprünglichen Approximationssatzes, auf dem in den Kapiteln III und IV dargelegten Zusammenhang einer fastperiodischen Funktion $f(x)$ mit einer rein- bezw. grenzperiodischen Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ von unendlich vielen Variabeln. Das neu Hinzukommende besteht darin, daß dieser Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ eine Fourierreihe in unendlich vielen Variabeln zugeordnet wird, von welcher gezeigt werden kann, daß sie in enger Beziehung zu der Fourierreihe $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ der gegebenen fastperiodischen Funktion $f(x)$ steht. Bei unserem damaligen Beweise des gleichmäßigen Approximationssatzes hatten wir als einen wesentlichen Baustein des Beweises den Weierstrassschen Approximationssatz für eine rein periodische Funktion von einer beliebigen endlichen Anzahl von Variabeln benutzt. Bei dem folgenden Beweis des verschärften Approximationssatzes werden wir diesen Weierstraßschen Satz in der folgenden schärferen Formulierung zu benutzen haben. (Vgl. die obige Bemerkung, wo von einer rein periodischen Funktion in nur einer Variablen die Rede war.)

---

einer stetigen rein periodischen Funktion $f(x) \sim \sum c_n e^{in\beta x}$. In der Tat besagt dieser Satz, daß,

$$s_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu\beta x}$$

gesetzt, die endliche Summe

$$S_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right)(c_n e^{in\beta x} + c_{-n} e^{-in\beta x})$$

für $N \to \infty$ gleichmäßig in $x$ gegen $f(x)$ strebt.

**Verschärfter Weierstrassscher Approximationssatz.** *Jede rein periodische stetige Funktion $P(x_1, \ldots, x_M)$ von $M$ Variablen mit dem Periodensystem $(p_1, \ldots, p_M)$ läßt sich gleichmäßig im ganzen $M$-dimensionalen Raume durch endliche trigonometrische Summen der Form*

$$\sum a_{n_1,\ldots,n_M} e^{i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_M\beta_M x_M)} \qquad \left(\beta_m = \frac{2\pi}{p_m}\right)$$

*annähern, und zwar derart, daß in diesen Summen nur solche Exponentialausdrücke $e^{i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_M\beta_M x_M)}$ vorkommen, welche in der Fourierreihe*

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_M=-\infty}^{\infty} c_{n_1,\ldots,n_M} e^{i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_M\beta_M x_M)}$$

*der Funktion $P(x_1, \ldots, x_M)$ tatsächlich auftreten, d. h. für welche die entsprechenden Koeffizienten*

$$c_{n_1,\ldots,n_M} = \frac{1}{p_1\cdots p_M}\int_0^{p_1} dx_1 \ldots \int_0^{p_M} P(x_1, \ldots, x_M) e^{-i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_M\beta_M x_M)}\, dx_M$$

*nicht gleich* 0 *sind*[1].

Wir teilen den Beweis des verschärften Approximationssatzes in vier Paragraphen ein, von denen die zwei ersten den Fall einer ganzen Basis behandeln, wo die Untersuchung übersichtlicher verläuft, während in den beiden letzten der allgemeine Fall einer beliebigen Basis erledigt wird.

Schließlich werden wir in einem fünften Paragraphen einen — ebenfalls für die Theorie der fastperiodischen Funktionen einer komplexen Variablen nötigen — Satz über die gleichzeitige Approximation von mehreren fastperiodischen Funktionen beweisen.

[1] Wie im Falle $M = 1$ (vgl. Note auf Seite 183) folgt auch im Falle eines beliebigen $M$ die Richtigkeit dieses verschärften Weierstraßschen Satzes sofort aus einem bekannten Satze über die gleichmäßige Summierbarkeit der Fourierreihe einer rein periodischen stetigen Funktion $P(x_1, \ldots, x_M)$. In der Tat gilt der Fejérsche Satz — wie durch dieselbe Methode wie im Falle nur einer Variablen sofort zu beweisen — auch für die Fourierreihe einer rein periodischen stetigen Funktion $P(x_1, \ldots, x_M)$ von $M$ Variablen, und besagt hier, daß,

$$s_{n_1,n_2,\ldots,n_M}(x_1, x_2, \ldots, x_M) = \sum_{\nu_1=-n_1}^{n_1} \sum_{\nu_2=-n_2}^{n_2} \cdots \sum_{\nu_M=-n_M}^{n_M} c_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_M} e^{i(\nu_1\beta_1 x_1 + \nu_2\beta_2 x_2 + \cdots + \nu_M\beta_M x_M)}$$

gesetzt, die endliche Summe

$$S_N(x_1, x_2, \ldots, x_M) = \frac{1}{N^M} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \cdots \sum_{n_M=0}^{N-1} s_{n_1,n_2,\ldots,n_M}(x_1, x_2, \ldots, x_M)$$

für $N \to \infty$ gleichmäßig im ganzen $M$-dimensionalen Raume gegen $P(x_1, x_2, \ldots, x_M)$ strebt.

## § 1.

**Fourierreihe einer rein periodischen Funktion von unendlich vielen Variabeln.**

Es bezeichne durchweg in diesem Paragraphen $F(x_1, x_2, \ldots)$ eine rein periodische Funktion von abzählbar vielen reellen Variablen $x_1, x_2, \ldots$ mit dem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots)$, welche im ganzen unendlich-dimensionalen Raume stetig (vollstetig), also nach § 9 auch gleichmäßig stetig ist; wie immer werden wir zulassen, daß $F(x_1, x_2, \ldots)$ komplex ist, also

$$F(x_1, x_2, \ldots) = U(x_1, x_2, \ldots) + iV(x_1, x_2, \ldots),$$

wo $U$ und $V$ reelle rein periodische Funktionen sind.

Wir zeichnen eine der Variablen, etwa $x_1$, aus und bilden bei beliebigen festgehaltenen Werten der übrigen Variablen $x_2, x_3, \ldots$ den Mittelwert

$$\frac{1}{p_1}\int_0^{p_1} F(x_1, x_2, \ldots)\,dx_1,$$

welchen wir zur Abkürzung mit

$$\underset{(x_1)}{M}\{F(x_1, x_2, \ldots)\}$$

bezeichnen. Dieser Mittelwert stellt offenbar eine Funktion der Variabeln $x_2, x_3, \ldots$ dar, welche in diesen rein periodisch mit dem Periodensystem $(p_2, p_3, \ldots)$ ist, und welche überdies im ganzen Raume stetig ist; denn wegen der Stetigkeit der ursprünglichen Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ können wir ja zu einem gegebenen $\varepsilon$ die Zahlen $N$ und $\delta$ so bestimmen, daß die Differenz der Werte der Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ in zwei beliebigen Punkten $(x_1', x_2', \ldots)$ und $(x_1'', x_2'', \ldots)$ numerisch $< \varepsilon$ ist, wenn nur

$$x_1' = x_1'' \quad \text{und} \quad |x_n' - x_n''| < \delta \qquad (n = 2, \ldots, N)$$

ist, wonach a fortiori die Werte des Mittelwertes $\underset{(x_1)}{M}$ in zwei beliebigen Punkten $(x_2', x_3', \ldots)$ und $(x_2'', x_3'', \ldots)$ um höchstens $\varepsilon$ von einander abweichen, falls die obigen $N-1$ Ungleichungen $|x_n' - x_n''| < \delta$ $(n = 2, \ldots, N)$ alle erfüllt sind. Diese Mittelwertbildung wird fortgesetzt, indem wir nun den Mittelwert in bezug auf $x_2$, dann in bezug auf $x_3$, usw. bilden. Nach $m$ Schritten gelangen wir zu dem Mittelwert

$$\frac{1}{p_m}\int_0^{p_m} dx_m \cdots \frac{1}{p_2}\int_0^{p_2} dx_2 \frac{1}{p_1}\int_0^{p_1} F(x_1, x_2, \ldots)\,dx_1,$$

welchen wir durch

$$(2) \qquad \underset{(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{M} \{F(x_1, x_2, \ldots)\}$$

bezeichnen. *Dieser Mittelwert ist dann eine stetige rein periodische Funktion in den Variablen* $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots$ *mit dem Periodensystem* $(p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots)$ [1].

In dem speziellen Falle, wo $F(x_1, x_2, \ldots)$ in allen Variablen von einer gewissen Stelle, etwa der $M$-ten, an konstant ist — also tatsächlich nur von den $M$ ersten Variablen $x_1, \ldots, x_M$ abhängt — ist offenbar für jedes $m \geqq M$ der Mittelwert (2) gleich einer festen (von $m$ unabhängigen) Konstanten. Im allgemeinen Falle einer beliebigen fastperiodischen Funktion gilt der folgende

**Satz 1.** *Es strebt der Mittelwert* (2) *für* $m \to \infty$ *gegen einen festen Grenzwert* $g$, welchen wir mit

$$\underset{(x_1, x_2, \ldots\ldots)}{M} \{F(x_1, x_2, \ldots)\}$$

bezeichnen werden, *in dem Sinne, daß es zu jedem* $\varepsilon$ *ein* $M$ *derart gibt, daß für* $m > M$ *die Ungleichung*

$$\left| \underset{(x_1, \ldots, x_m)}{M} \{F(x_1, x_2, \ldots)\} - g \right| < \varepsilon$$

*im ganzen unendlich-dimensionalen Raume der Variablen* $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots$ *besteht.*

**Beweis.** Wir können offenbar beim Beweise annehmen, daß $F(x_1, x_2, \ldots)$ eine reelle Funktion ist, da wir sonst nur

$$F(x_1, x_2, \ldots) = U(x_1, x_2, \ldots) + iV(x_1, x_2, \ldots)$$

zu setzen und $U$ und $V$ einzeln zu betrachten haben. Es bezeichne $G_m$ bezw. $g_m$ die obere bezw. untere Grenze der Funktion

$$\underset{(x_1, \ldots, x_m)}{M} \{F(x_1, x_2, \ldots)\}$$

oder, da die Wertmenge einer rein periodischen stetigen Funktion, nach § 9, eine beschränkte abgeschlossene Menge bildet, ihr Maximum bezw. Minimum).

---

[1] Wir bemerken, daß — wie aus der Gleichung

$$\underset{(x_1, \ldots, x_m)}{M} \{F(x_1, x_2, \ldots)\} = \frac{1}{p_1 \cdots p_m} \int_0^{p_m} dx_m \ldots \int_0^{p_1} F(x_1, x_2, \ldots)\, dx_1$$

sofort hervorgeht — die Reihenfolge, in welcher die Mittelwertsbildungen in bezug auf den Variablen $x_1, \ldots, x_m$ ausgeführt werden, gleichgültig ist.

Hierbei ist

$$g_m \leqq g_{m+1} \leqq G_{m+1} \leqq G_m,$$

weil $\underset{(x_1,\ldots,x_{m+1})}{M}$ durch Mittelwertbildung aus $\underset{(x_1,\ldots,x_m)}{M}$ hervorgeht. Um die Existenz des Grenzwertes $g$ zu beweisen, genügt es daher nachzuweisen, daß

$$\lim_{m\to\infty} (G_m - g_m) = 0$$

ist. Dies folgt aber sofort aus der gleichmäßigen Vollstetigkeit von $F(x_1, x_2, \ldots)$. Denn nach dieser können wir zu jedem $\varepsilon$ ein $M$ so groß bestimmen, daß in zwei beliebigen Punkten $(x_1, \ldots, x_M, x'_{M+1}, x'_{M+2}, \ldots)$ und $(x_1, \ldots, x_M, x''_{M+1}, x''_{M+2}, \ldots)$, deren $M$ erste Koordinaten übereinstimmen, die Ungleichung

$$|F(x_1, \ldots, x_M, x'_{M+1}, x'_{M+2}, \ldots) - F(x_1, \ldots, x_M, x''_{M+1}, x''_{M+2}, \ldots)| < \varepsilon$$

besteht, woraus sich sofort durch Mittelwertbildung ergibt, daß bei jedem $m \geqq M$ die Werte der Funktion $\underset{(x_1,\ldots,x_m)}{M} \{F(x_1, x_2, \ldots)\}$ in zwei beliebigen Punkten $(x'_{m+1}, x'_{m+2}, \ldots)$ und $(x''_{m+1}, x''_{m+2}, \ldots)$ um höchstens $\varepsilon$ abweichen, d. h. daß $G_m - g_m \leqq \varepsilon$ ist[1].

Wir ordnen nun unserer Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ eine *Fourierreihe in den unendlich vielen Variablen* $x_1, x_2, \ldots$ zu. Hierunter verstehen wir (indem wir von

---

[1] Wir bemerken, daß auch bei der unendlich oft wiederholten Mittelwertbildung die Reihenfolge der Variablen gleichgültig ist, d. h. falls $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ eine beliebige Permutation der natürlichen Zahlenreihe $1, 2, \ldots$ bedeutet, der Mittelwert

$$\underset{(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots)}{M} \{F(x_1, x_2, \ldots)\}$$

gleich dem Mittelwert

$$\underset{(x_1, x_2, \ldots)}{M} \{F(x_1, x_2, \ldots)\}$$

ist. Dies folgt sofort aus dem obigen Beweise des Satzes 1, bei dem wir uns wieder auf den Fall einer reellen Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ beschränken können; denn, falls $\Gamma_p$ bezw. $\gamma_p$ die obere bezw. untere Grenze des Mittelwertes

$$\underset{(x_{n_1}, \ldots, x_{n_p})}{M} \{F(x_1, x_2, \ldots)\}$$

bezeichnet, und $m$ die größte Zahl angibt, für welche die Zahlen $1, 2, \ldots, m$ sämtlich unter den Indexzahlen $n_1, \ldots, n_p$ vorkommen, gelten ja nach dem Obigen die Ungleichungen

$$g_m \leqq \gamma_p \leqq \Gamma_p \leqq G_m,$$

und $m$ strebt mit $p$ gegen $\infty$.

der Reihenfolge der Glieder ganz absehen) die *unendliche Reihe*

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\sum c_{n_1,\ldots,n_m} e^{i(n_1\beta_1 x_1+\cdots+n_m\beta_m x_m)} \\ &= c + \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}{}' c_{n_1} e^{in_1\beta_1 x_1} + \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty}{}' c_{n_1,n_2} e^{i(n_1\beta_1 x_1+n_2\beta_2 x_2)} + \cdots\cdots [1], \end{aligned}$$

*wo* $\frac{2\pi}{p_m}$ *durch* $\beta_m$ *bezeichnet ist, und der Koeffizient* $c_{n_1,\ldots,n_m}$ *durch die Mittelwertbildung*

$$(4)\qquad c_{n_1,\ldots,n_m} = \underset{(x_1,x_2,\ldots\ldots)}{M} \left\{ F(x_1, x_2, \ldots) e^{-i(n_1\beta_1 x_1+\cdots+n_m\beta_m x_m)} \right\}$$

*bestimmt ist.* Dieser Mittelwert existiert bei jeder Zahlenmenge $(n_1, \ldots, n_m)$; denn die Funktionen $F(x_1, x_2, \ldots)$ und $e^{-i(n_1\beta_1 x_1+\cdots+n_m\beta_m x_m)}$ sind beide stetige rein periodische Funktionen der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ mit dem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots)$, und somit ist auch ihr Produkt eine Funktion dieser Art[2].

Wir werden nunmehr die Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ durch eine rein periodische Funktion $P(x_1, \ldots, x_m)$ von nur endlich vielen Variablen $x_1, \ldots, x_m$ mit dem Periodensystem $(p_1, \ldots, p_m)$ approximieren, und zwar so, daß die Fourierreihe der approximierenden Funktion $P(x_1, \ldots, x_m)$ nur solche Glieder enthält, welche schon in der Fourierreihe der Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ selbst vorkommen[3]. Zu diesem Zwecke definieren wir bei be-

---

[1] $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}{}'$ bedeutet, daß bei der Summation über die ganzen Zahlen $n$ die Zahl 0 übersprungen werden soll.

[2] In dem speziellen Falle, wo die gegebene Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ in allen Variablen von einer gewissen Stelle an, etwa in $x_{M+1}, x_{M+2}, \ldots$, konstant ist, also tatsächlich eine Funktion $P(x_1, \ldots, x_M)$, von nur $M$ Variablen ist, geht unsere Fourierreihe (3) offenbar in die gewöhnliche Fourierreihe der Funktion $P(x_1, \ldots, x_M)$ über. Denn falls unter den Zahlen $n_1, \ldots, n_m$ mindestens eine Zahl $n_l \neq 0$ mit $l > M$ vorkommt, ist der Mittelwert (4) offenbar gleich 0 (weil ja das Integral $\frac{1}{p_l}\int_0^{p_l} e^{in_l\beta_l x_l} dx_l = 0$ ist), und falls dies nicht der Fall ist (also auch der Exponentialfaktor $e^{i(n_1\beta_1 x_1+\cdots+n_m\beta_m x_m)}$ nur von $x_1, \ldots, x_M$ abhängt, ist ja der Mittelwert (4) gleich dem Mittelwerte

$$\underset{(x_1,\ldots,x_M)}{M} \left\{ P(x_1, \ldots, x_M) e^{-i(n_1\beta_1 x_1+\cdots+n_m\beta_m x_m)} \right\}.$$

[3] Man sieht schon durch eine „formale" Betrachtung, daß das auf S. 161 benutzte Approximationsverfahren — wo es uns nur darauf ankam, die Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ durch eine periodische Funktion von endlich vielen Variablen zu approximieren, während von den zugehörigen Fourierreihen nicht die Rede war — für unseren jetzigen Zweck unbrauchbar ist. Das damalige Verfahren bestand nämlich einfach darin, daß alle Variablen von einer gewissen Stelle an konstant, etwa gleich 0, gesetzt wurden; falls aber die Fourierreihe der Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ z. B. kein Glied

liebigem festen $m > 0$ eine Funktion $\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ durch den Mittelwert

$$\varphi_m(x_1, \ldots, x_m) = \underset{(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)}{M} \{F(x_1, x_2, \ldots)\}.$$

Zunächst ist klar, daß dieser Mittelwert existiert; denn es ist ja bei beliebig festgehaltenen $x_1, \ldots, x_m$ die Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ eine stetige rein periodische Funktion der Variabeln $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots$ mit dem Periodensystem $(p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots)$.) Ferner ist $\varphi_m(x_1, \ldots, x_m)$ offenbar rein periodisch mit dem Periodensystem $(p_1, \ldots, p_m)$, und auch stetig im ganzen $m$-dimensionalen Raume; denn bei vorgegebenem $\varepsilon$ gilt ja (wegen der Stetigkeit von $F(x_1, x_2, \ldots)$) für ein hinreichend kleines $\delta$ und $|x_l' - x_l''| < \delta$ $(l = 1, \ldots, m)$ im ganzen Raume der Variabeln $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots$ die Ungleichung

$$|F(x_1', \ldots, x_m', x_{m+1}, \ldots) - F(x_1'', \ldots, x_m'', x_{m+1}, \ldots)| < \varepsilon,$$

woraus sofort durch Mittelwertbildung die Ungleichung

$$|\varphi_m(x_1', \ldots, x_m') - \varphi_m(x_1'', \ldots, x_m'')| \leqq \varepsilon$$

hervorgeht. Es ist ferner klar, *daß die Funktionenfolge*

$$\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_1, x_2), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_m), \ldots$$

*gleichmäßig im ganzen unendlich-dimensionalen Raume gegen die Funktion* $F(x_1, x_2, \ldots)$ *als Grenzfunktion konvergiert;* d. h. zu jedem $\varepsilon$ gibt es ein $M = M(\varepsilon)$ derart, daß für jedes $m \geqq M$ die Ungleichung

$$|F(x_1, x_2, \ldots) - \varphi_m(x_1, \ldots, x_m)| \leqq \varepsilon$$

in jedem Punkte $(x_1, x_2, \ldots)$ des unendlich-dimensionalen Raumes besteht. Wir brauchen offenbar nur das $M$ so groß zu wählen, daß in zwei beliebigen Punkten

$$(x_1, \ldots, x_M, x_{M+1}', x_{M+2}', \ldots) \quad \text{und} \quad (x_1, \ldots, x_M, x_{M+1}'', x_{M+2}'', \ldots)$$

mit denselben $M$ ersten Koordinaten die Ungleichung

$$|F(x_1, \ldots, x_M, x_{M+1}', x_{M+2}', \ldots) - F(x_1, \ldots, x_M, x_{M+1}'', x_{M+2}'', \ldots)| < \varepsilon$$

besteht; denn hieraus folgt ja sofort, daß für $m \geqq M$ in jedem Punkte $(x_1, x_2, \ldots)$

---

mit dem Faktor $e^{i(2x_2 + 5x_3)}$, aber ein Glied mit dem Faktor $e^{i(2x_2 + 5x_3 - 4x_{100})}$ enthält, wird ja, wennn $x_{100}$ gleich 0 gesetzt wird, ein Glied mit dem Faktor $e^{i(2x_2 + 5x_3)}$ auftauchen. Vom formalen Gesichtspunkte ist offenbar die „richtige" Methode um ein Glied wie $e^{i(2x_2 + 5x_3 - 4x_{100})}$ zugleich mit der Variablen $x_{100}$ wegzuschaffen die, daß man (statt $x_{100}$ konstant zu halten) den Mittelwert $\frac{1}{p_{100}} \int_0^{p_{100}} dx_{100}$ nimmt. Es sind solche Mittelwertsbildungen, auf denen das oben anzugebende Approximationsverfahren beruht.

die gewünschte Ungleichung

$$|F(x_1, x_2, \ldots) - \underset{(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)}{M} \{F(x_1, x_2, \ldots)\}| \leqq \varepsilon$$

gültig ist.

Wir betrachten nun bei einem festen $m$ die (gewöhnliche) Fourierentwickelung der Funktion $\varphi_m(x_1, \ldots, x_m)$ und werden beweisen, daß unser obiges Desideratum erfüllt ist, nämlich *daß die Fourierentwickelung dieser Funktion* $\varphi_m(x_1, \ldots, x_m)$ *einfach aus der Fourierentwickelung der Funktion* $F(x_1, x_2, \ldots)$ *entsteht, wenn in dieser letzteren alle Glieder, welche mindestens eine der Variablen* $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots$ *enthalten, gestrichen werden.* Es handelt sich darum zu zeigen, daß bei beliebiger Wahl der $m$ ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_m$ die beiden Fourierkoeffizienten

$$\underset{(x_1, \ldots, x_m)}{M} \{\varphi_m(x_1, \ldots, x_m) e^{-i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_m \beta_m x_m)}\} \tag{5}$$

und

$$\underset{(x_1, x_2, \ldots)}{M} \{F(x_1, x_2, \ldots) e^{-i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_m \beta_m x_m)}\} \tag{6}$$

gleich groß sind. Die Zahl (5), d. h. die Zahl

$$\underset{(x_1, \ldots, x_m)}{M} \{e^{-i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_m \beta_m x_m)} \cdot \underset{(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)}{M} \{F(x_1, x_2, \ldots)\}\}$$

können wir auch in der Form

$$\underset{(x_1, \ldots, x_m)}{M} \{ \underset{(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)}{M} \{F(x_1, x_2, \ldots) e^{-i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_m \beta_m x_m)}\}\} \tag{7}$$

schreiben, weil der Exponentialfaktor $e^{-i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_m \beta_m x_m)}$ nicht von den Variablen $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots$ abhängt und daher in das Zeichen $\underset{(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)}{M}$ hinein gesetzt werden darf. Bei dem Nachweis, daß die beiden Zahlen (6) und (7) gleich groß sind, dürfen wir uns offenbar auf den Fall beschränken, wo $n_1 = \cdots = n_m = 0$ ist, d. h. wo es sich um die konstanten Glieder der beiden Fourierentwickelungen handelt; denn sonst haben wir ja nur statt der gegebenen Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ die, ebenfalls mit dem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots)$ periodische, Funktion $G(x_1, x_2, \ldots) = F(x_1, x_2, \ldots) e^{-i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_m \beta_m x_m)}$ zu betrachten. Unsere Aufgabe ist also, die Richtigkeit der Gleichung

$$\underset{(x_1, \ldots, x_m)}{M} \{ \underset{(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)}{M} \{F(x_1, x_2, \ldots)\}\} = \underset{(x_1, x_2, \ldots)}{M} \{F(x_1, x_2, \ldots)\} \tag{8}$$

darzutun. Dies schließen wir durch den Grenzübergang $q \to \infty$ aus der bei festem $q$ offenbar (vgl. Note Seite 187) gültigen Gleichung

$$\begin{aligned}\underset{(x_1,\ldots,x_m)}{M}\Big\{\underset{(x_{m+1},\ldots,x_{m+q})}{M}\{F(x_1,\ldots,x_{m+q},0,0,\ldots)\}\Big\}\\ = \underset{(x_1,\ldots,x_{m+q})}{M}\{F(x_1,\ldots,x_{m+q},0,0,\ldots)\}.\end{aligned} \tag{9}$$

Wir wissen, daß für $q \to \infty$ die rechte Seite von (9) gegen die rechte Seite von (8) strebt; es handelt sich darum zu zeigen, daß auch die linke Seite von (9) gegen die linke Seite von (8) konvergiert, also daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $Q = Q(\varepsilon)$ so gibt, daß für $q > Q$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}\Big|\underset{(x_1,\ldots,x_m)}{M}\Big\{\underset{(x_{m+1},x_{m+2},\ldots\ldots)}{M}\{F(x_1,x_2,\ldots)\}\Big\}\\ - \underset{(x_1,\ldots,x_m)}{M}\Big\{\underset{(x_{m+1},\ldots,x_{m+q})}{M}\{F(x_1,\ldots,x_{m+q},0,0,\ldots)\}\Big\}\Big| \leqq \varepsilon\end{aligned}$$

besteht, d. h. die Ungleichung

$$\Big|\underset{(x_1,\ldots,x_m)}{M}\Big\{\underset{(x_{m+1},x_{m+2},\ldots\ldots)}{M}\{F(x_1,x_2,\ldots)\} - \underset{(x_{m+1},\ldots,x_{m+q})}{M}\{F(x_1,\ldots,x_{m+q},0,0,\ldots\{\}\Big\}\Big| \leqq \varepsilon$$

besteht. Diese Ungleichung können wir offenbar auch in der Form

$$\Big|\underset{(x_1,\ldots,x_m)}{M}\Big\{\underset{(x_{m+1},x_{m+2},\ldots\ldots)}{M}\{F(x_1,x_2,\ldots) - F(x_1,\ldots,x_{m+q},0,0,\ldots)\}\Big\}\Big| \leqq \varepsilon$$

schreiben, und hieraus geht sofort hervor, daß sie erfüllt ist, falls im ganzen unendlich-dimensionalen Raume $x_1, x_2, \ldots$ die Ungleichung

$$|F(x_1,x_2,\ldots) - F(x_1,\ldots,x_{m+q},0,0,\ldots)| < \varepsilon$$

besteht; diese letzte Ungleichung ist aber gewiß für hinreichend großes $q$, d. h. für $q > Q$, erfüllt.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun sofort den folgenden Satz beweisen, welcher das Ziel dieses Paragraphen bildet.

**Satz 2.** *Die beliebig gegebene rein periodische Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ läßt sich im ganzen unendlich-dimensionalen Raume mit einer vorgegebenen Genauigkeit $\varepsilon$ durch eine endliche Summe der Form*

$$\sum a_{n_1,\ldots,n_m} e^{i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_m\beta_m x_m)}$$

*annähern, wobei nur solche Exponentialausdrücke $e^{i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_m\beta_m x_m)}$ auftreten,* *welche tatsächlich in der Fourierreihe der Funktion* $F(x_1, x_2, \ldots)$ *vorkommen, d. h. für welche die entsprechenden Fourierkoeffizienten* $c_{n_1, \ldots, n_m}$ *nicht gleich* 0 *sind.*

**Beweis.** Wir wählen zunächst ein festes $M$ derart, daß die obige Funktion $\varphi_M(x_1, \ldots, x_M)$ die gegebene Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ bis auf $\frac{\varepsilon}{2}$ approximiert, also daß in jedem Punkte des unendlich-dimensionalen Raumes die Ungleichung

$$|F(x_1, x_2, \ldots) - \varphi_M(x_1, \ldots, x_M)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

besteht. Danach wählen wir nach dem „verschärften Weierstraßschen Approximationssatze" eine endliche Summe

$$S(x_1, \ldots, x_M) = \sum a_{n_1, \ldots, n_M} e^{i(n_1 \beta_1 x_1 + \cdots + n_M \beta_M x_M)} \qquad \left(\beta_m = \frac{2\pi}{p_m}\right), \tag{10}$$

welche $\varphi_M(x_1, \ldots, x_M)$ bis auf $\frac{\varepsilon}{2}$ approximiert, und wo nur solche Kombinationen $(n_1, \ldots, n_M)$ auftreten, für welche der entsprechende Fourierkoeffizient der Funktion $\varphi_M(x_1, \ldots, x_M)$ von 0 verschieden ist. Diese Summe (10) ist dann von der erwünschten Art; denn einerseits gilt im ganzen unendlich-dimensionalen Raume die Ungleichung

$$|F(x_1, x_2, \ldots) - S(x_1, \ldots, x_M)| < \varepsilon,$$

und andererseits treten in $S(x_1, \ldots, x_M)$ nur solche Exponentialausdrücke auf, welche in der Fourierreihe der Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ tatsächlich vorkommen, weil ja nach der Bestimmung der Funktion $\varphi_M(x_1, \ldots, x_M)$ jedes Glied der Fourierreihe von $\varphi_M(x_1, \ldots, x_M)$ zugleich ein Glied der Fourierreihe von $F(x_1, x_2, \ldots)$ ist.

## § 2.

### Beweis des verschärften Approximationssatzes bei einer ganzen Basis.

Es sei $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ eine beliebige fastperiodische Funktion, deren Exponentenfolge $\Lambda_n$ die ganze Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ besitzt, und $F(x_1, x_2, \ldots)$ die zugehörige Funktion von unendlich vielen Variablen, die stetig und rein periodisch mit dem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots) = \left(\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \cdots\right)$ ist. Hierbei ist nach § 6

$$f(x) = F(x, x, \ldots). \tag{11}$$

Wir beweisen den folgenden Satz, der einen Zusammenhang zwischen den Fourierreihen von $f(x)$ und $F(x_1, x_2, \ldots)$ darstellt.

**Satz 3.** *Die Fourierreihe* $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ *der fastperiodischen Funktion* $f(x)$ *entsteht aus der Fourierreihe*

$$\sum c_{n_1, \ldots, n_m} e^{i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_m\beta_m x_m)}$$

*der rein periodischen Funktion* $F(x_1, x_2, \ldots)$ *einfach dadurch, daß in dieser letzteren* $x_1 = x_2 = \cdots = x$ *gesetzt wird* (und natürlich Glieder mit den Koeffizienten $c_{n_1,\ldots,n_m} = 0$ weggelassen werden). Hierbei können, wegen der linearen Unabhängigkeit der $\beta$, keine zwei Glieder nach der Einsetzung von $x_1 = x_2 = \cdots = x$ zusammengezogen werden; denn es können ja keine zwei Größen der Form $n_1\beta_1 + \cdots + n_m\beta_m$, welche zwei verschiedenen Wertesystemen von $(n_1, \ldots, n_m)$ entsprechen, gleich groß ausfallen.

**Beweis.** Wir wissen, daß jeder Fourierexponent $\Lambda_n$ der Funktion $f(x)$ in der Form $n_1\beta_1 + \cdots + n_m\beta_m$ mit ganzen $n_1, \ldots, n_m$ darstellbar ist, und es besagt daher der Satz, daß für jede Kombination $n_1, \ldots, n_m$ die Gleichung

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-i(n_1\beta_1 + \cdots + n_m\beta_m)x}\, dx$$

$$= \underset{(x_1, x_2, \ldots\ldots)}{M} \left\{ F(x_1, x_2, \ldots) e^{-i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_m\beta_m x_m)} \right\}$$

besteht, also (indem wir für $f(x)$ den durch (11) gegebenen Ausdruck einsetzen) die Gleichung

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(x, x, \ldots)\, e^{-i(n_1\beta_1 + \cdots + n_m\beta_m)x}\, dx$$

$$= \underset{(x_1, x_2, \ldots\ldots)}{M} \left\{ F(x_1, x_2, \ldots) e^{-i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_m\beta_m x_m)} \right\}$$

besteht. Es genügt hierbei offenbar (wie in einem ähnlichen Falle in § 1) den Fall zu betrachten, wo es sich um die konstanten Glieder der beiden Entwickelungen handelt, d. h. wo der Faktor

$$e^{-i(n_1\beta_1 + \cdots + n_m\beta_m)x} \quad \text{bezw.} \quad e^{-i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_m\beta_m x_m)}$$

fehlt [1].

---

[1] Sonst haben wir nur statt der Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ die ebenfalls mit dem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots)$ periodische Funktion

$$G(x_1, x_2, \ldots) = F(x_1, x_2, \ldots)\, e^{-i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_m\beta_m x_m)}$$

zu betrachten.

Um nun die Richtigkeit der Gleichung

$$(12)\qquad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(x, x, \ldots)\,dx = \underset{(x_1, x_2, \ldots\ldots)}{M}\{F(x_1, x_2, \ldots)\}$$

zu beweisen, also zu zeigen, daß der Mittelwert der Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ über den ganzen Raum mit dem Mittelwerte der Funktion auf der Hauptdiagonalen des Raumes übereinstimmt, brauchen wir nur zu benutzen, daß die Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ bis auf eine beliebig vorgegebene Genauigkeit im ganzen unendlich-dimensionalen Raume durch eine endliche Summe der Form

$$\sum a_{n_1,\ldots,n_m} e^{i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_m\beta_m x_m)}$$

angenähert werden kann[1]. Denn für jede Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ der speziellen Form

$$e^{i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_m\beta_m x_m)}$$

(und also auch für jedes endliche Aggregat von solchen Exponentialausdrücken) ist die Gleichung (12) gewiß richtig; in der Tat reduziert sie sich im Falle $n_1 = \cdots = n_m = 0$ auf $1 = 1$, während sie sich in dem Falle, wo mindestens eines der $n$ (und damit wegen der linearen Unabhängigkeit der $\beta$ auch die Zahl $n_1\beta_1 + \cdots + n_m\beta_m$) von $0$ verschieden ist, auf $0 = 0$ reduziert, weil ja sowohl der Mittelwert

$$\underset{(x_1, x_2, \ldots\ldots)}{M}\{e^{i(n_1\beta_1 x_1 + \cdots + n_m\beta_m x_m)}\} = \underset{(x_1)}{M}\{e^{in_1\beta_1 x_1}\}\cdots \underset{(x_m)}{M}\{e^{in_m\beta_m x_m}\}$$

als auch der Mittelwert

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{i(n_1\beta_1 + \cdots + n_m\beta_m)x}\,dx$$

hier gleich 0 wird.

Wir können nunmehr den Beweis unseres Approximationssatzes in wenigen Worten führen.

**Beweis des verschärften Approximationssatzes** (für den Fall einer ganzen Basis). Es $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ eine fastperiodische Funktion mit einer ganzen Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ und $F(x_1, x_2, \ldots)$ die zugehörige rein periodische Funk-

---

[1] Daß wir hierbei mit solchen Kombinationen $(n_1, \ldots, n_m)$ auskommen können, für welche die entsprechenden Fourierkoeffizienten der Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ von 0 verschieden sind, ist für unseren jetzigen Zweck belanglos.

tion von unendlich vielen Variabeln mit dem Periodensystem $(p_1, p_2, \ldots) = \left(\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots\right)$. Nach Satz 2, § 1 können wir zu dem gegebenen $\varepsilon$ eine endliche trigonometrische Summe finden, welche die Ungleichung

$$(13) \qquad \left| F(x_1, x_2, \ldots) - \sum a_{n_1, \ldots, n_m} e^{i(n_1 \beta_1 x_1 + \cdots + n_m \beta_m x_m)} \right| < \varepsilon$$

im ganzen unendlich-dimensionalen Raume erfüllt, und wobei nur solche Kombinationen $(n_1, \ldots, n_m)$ vorkommen, für welche der Fourierkoeffizient $c_{n_1, \ldots, n_m}$ der Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ von 0 verschieden ist. Wir haben nun in (13) einfach $x_1 = x_2 = \cdots = x$ zu setzen; dann geht $F(x_1, x_2, \ldots)$ in $f(x)$, und die Summe $\sum a_{n_1, \ldots, n_m} e^{i(n_1 \beta_1 x_1 + \cdots + n_m \beta_m x_m)}$ in eine Summe der Form $\sum a_\nu e^{i A_{n_\nu} x}$ über — denn im Satz 3 ist ja speziell enthalten, daß bei jeder Kombination $(n_1, \ldots, n_m)$, für welche der Fourierkoeffizient $c_{n_1, \ldots, n_m}$ der Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ von 0 verschieden ist, die Summe $n_1 \beta_1 + \cdots + n_m \beta_m$ einen der Fourierkoeffizienten $A_n$ der Funktion $f(x)$ liefert — womit wir eine gewünschte Ungleichung

$$\left| f(x) - \sum_{\nu=1}^{q} a_\nu e^{i A_{n_\nu} x} \right| < \varepsilon$$

erhalten haben.

## § 3.

### Fourierreihe einer grenzperiodischen Funktion von unendlich vielen Variabeln.

Die Überlegungen in diesem Paragraphen haben eine große Ähnlichkeit mit den Überlegungen in § 1, wo von einer rein periodischen Funktion von unendlich vielen Variabeln die Rede war, und verschiedene Sätze lassen sich von dort direkt übertragen; nur an einer Stelle — wo es sich um eine besondere Art von „Glättung" einer grenzperiodischen Funktion zu einer rein periodischen Funktion handelt — tritt eine neuartige Betrachtung hinzu.

Es bezeichne im Folgenden durchweg $F(x_1, x_2, \ldots)$ eine grenzperiodische Funktion von abzählbar vielen reellen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ mit dem Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots)$. Bei beliebig festgehaltenen Werten von $x_2, x_3, \ldots$ ist $F(x_1, x_2, \ldots)$ eine grenzperiodische Funktion von $x_1$ (also a fortiori eine fastperiodische Funktion von $x_1$), und es existiert somit der Mittelwert

$$\lim_{T_1 \to \infty} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} F(x_1, x_2, \ldots)\, dx_1;$$

wir werden die durch diese Mittelwertbildung bestimmte Funktion von $x_2, x_3, \ldots$ mit

$$\underset{(x_1)}{M}\{F(x_1, x_2, \ldots)\} \tag{14}$$

bezeichnen[1]. Diese Funktion ist wieder eine grenzperiodische Funktion, und zwar mit dem Periodensystem $(q_2, q_3, \ldots)$; denn wenn $P(x_1, x_2, \ldots)$ eine (stetige) rein periodische Funktion mit dem Periodensystem $(r_1 q_1, r_2 q_2, \ldots)$ ist, welche $F(x_1, x_2, \ldots)$ bis auf $\varepsilon$ approximiert, wird ja der Mittelwert $\underset{(x_1)}{M}\{P(x_1, x_2, \ldots)\}$ eine rein periodische Funktion von $x_2, x_3, \ldots$ mit dem Periodensystem $(r_2 q_2, r_3 q_3, \ldots)$ sein, welche den Mittelwert (14) bis auf $\varepsilon$ approximiert, womit die Grenzperiodizität dieser letzten Funktion, und zwar mit dem Periodensystem $(q_2, q_3, \ldots)$, nachgewiesen ist. Wir können also die Mittelwertbildung fortsetzen, und gelangen nach $m$ Schritten zu einer grenzperiodischen Funktion in $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots$ mit dem Periodensystem $(q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots)$, welche wir mit

$$\underset{(x_1, \ldots, x_m)}{M}\{F(x_1, x_2, \ldots)\} = \lim_{T_m \to \infty} \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} dx_m \ldots \lim_{T_1 \to \infty} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} F(x_1, x_2, \ldots)\, dx_1 \tag{15}$$

bezeichnen.

**Satz 4.** *Es strebt der Mittelwert* (15) *für* $m \to \infty$ *gegen einen festen Grenzwert* $g$, welchen wir mit

$$\underset{(x_1, x_2, \ldots\ldots)}{M}\{F(x_1, x_2, \ldots)\} \tag{16}$$

bezeichnen, *in dem Sinne, daß es zu jedem* $\varepsilon$ *ein* $M$ *derart gibt, daß für* $m > M$ *die Ungleichung*

$$\left| \underset{(x_1, \ldots, x_m)}{M}\{F(x_1, x_2, \ldots)\} - g \right| < \varepsilon$$

*im ganzen unendlich-dimensionalen Raume der Variablen* $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots$ *besteht.*

**Beweis.** Die Richtigkeit dieses Satzes folgt sofort aus seiner Gültigkeit für den Fall einer rein periodischen Funktion (Satz 1, § 1). Denn falls $P(x_1, x_2, \ldots)$ eine rein periodische (stetige) Funktion ist, welche die gegebene Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ im ganzen Raume bis auf $\varepsilon$ approximiert, gilt ja bei jedem $m$ im ganzen Raume der Variablen $x_{m+1}, \ldots$ die Ungleichung

$$\left| \underset{(x_1, \ldots, x_m)}{M}\{F(x_1, x_2, \ldots)\} - \underset{(x_1, \ldots, x_m)}{M}\{P(x_1, x_2, \ldots)\} \right| \leqq \varepsilon,$$

[1] In dem speziellen Falle, wo $F(x_1, x_2, \ldots)$ in $x_1$ reinperiodisch ist, stimmt dieser Mittelwert $\lim \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} dx_1$ mit dem in § 1 betrachteten $\frac{1}{p_1} \int_0^{p_1} dx_1$ überein.

und es gilt somit für $m_1 > M$ und $m_2 > M$, falls $M$ so groß gewählt wird, daß bei jedem $m > M$ der Mittelwert $\underset{(x_1, \ldots, x_m)}{M} \{P\}$ im ganzen Raume $x_{m+1}, \ldots$ von dem Grenzwerte $\underset{(x_1, x_2, \ldots)}{M} \{P\}$ um weniger als $\varepsilon$ abweicht, daß die beiden Mittelwerte

$$\underset{(x_1, \ldots, x_{m_1})}{M} \{F\} \quad \text{und} \quad \underset{(x_1, \ldots, x_{m_2})}{M} \{F\}$$

in zwei beliebigen Punkten $(x'_{m_1+1}, \ldots)$ und $(x''_{m_2+1}, \ldots)$ um weniger als $4\varepsilon$ von einander abweichen, womit die Existenz des Grenzwertes (16) nach dem allgemeinen Konvergenzprinzip bewiesen ist[1].

Für die folgenden Anwendungen erinnern wir an den Satz (vgl. die Schlußbemerkung in der Fußnote auf S. 150), daß das Produkt zweier grenzperiodischer Funktionen $F(x_1, x_2, \ldots)$ und $G(x_1, x_2, \ldots)$ mit demselben Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots)$ wieder eine grenzperiodische Funktion ergibt (und zwar ebenfalls mit dem Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots)$), so daß wir z. B. von dem Mittelwerte

$$\underset{(x_1, x_2, \ldots)}{M} \{F(x_1, x_2, \ldots) \cdot G(x_1, x_2, \ldots)\}$$

sprechen können.

Bevor wir unserer grenzperiodischen Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ von unendlich vielen Variabeln eine Fourierreihe zuordnen, werden wir zunächst den Begriff der Fourierreihe einer grenzperiodischen Funktion $G(x_1, \ldots, x_M)$ von nur endlich vielen Variabeln mit dem Periodensystem $(q_1, \ldots, q_M)$ einführen. Hierunter verstehen wir eine Reihe der Form

$$\sum_{r_1} \sum_{r_2} \cdots \sum_{r_M} c_{r_1, r_2, \ldots, r_M} e^{i(r_1 \beta_1 x_1 + r_2 \beta_2 x_2 + \cdots + r_M \beta_M x_M)} \qquad \left(\beta_m = \frac{2\pi}{q_m}\right), \tag{17}$$

wo $(r_1, r_2, \ldots, r_M)$ unabhängig von einander alle Systeme von rationalen

---

[1] Wir bemerken, daß bei der Bildung des Mittelwertes $\underset{(x_1, x_2, \ldots)}{M} \{F(x_1, x_2, \ldots)\}$ die Reihenfolge der Variablen gleichgültig ist. Dies ergibt sich sofort durch gleichmäßige Approximation der Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ mittels reinperiodischer Funktionen, für welche ja die Behauptung (vgl. Note S. 188) richtig ist.

Wir fügen hinzu, daß hier und im Folgenden die Möglichkeit, einen Satz über die Mittelwertbildungen grenzperiodischer Funktionen $F(x_1, x_2, \ldots)$ aus seiner Gültigkeit für reinperiodische Funktionen $P(x_1, x_2, \ldots)$ abzuleiten, einfach darauf beruht, daß, falls $P(x_1, x_2, \ldots)$ im ganzen Raume um höchstens $\varepsilon$ von $F(x_1, x_2, \ldots)$ abweicht, a fortiori auch jede auf $P$ angewandte Mittelwertbildung von der entsprechenden Mittelwertbildung für $F$ um höchstens $\varepsilon$ abweichen wird.

Zahlen durchlaufen, und wo der Koeffizient $c_{r_1, r_2, \ldots, r_M}$ durch den Mittelwert

$$c_{r_1, r_2, \ldots, r_M} = \underset{(x_1, x_2, \ldots, x_M)}{M} \left\{ G(x_1, x_2, \ldots, x_M)\, e^{-i(r_1 \beta_1 x_1 + r_2 \beta_2 x_2 + \cdots + r_M \beta_M x_M)} \right\}$$

bestimmt ist. Dieser Mittelwert existiert bei jeder Wahl der rationalen Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_M$, weil der Exponentialfaktor $e^{-i(r_1 \beta_1 x_1 + r_2 \beta_2 x_2 + \cdots + r_M \beta_M x_M)}$ offenbar eine grenzperiodische Funktion mit dem Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots, q_M)$ ist; er ist ja sogar eine rein periodische Funktion mit dem Periodensystem $(\varrho_1 q_1, \varrho_2 q_2, \ldots, \varrho_M q_M)$, wo $\varrho_l$ den Nenner der rationalen Zahl $r_l$ bezeichnet[1].

In ganz ähnlicher Weise ordnen wir unserer grenzperiodischen Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ von unendlich vielen Variablen eine *Fourierreihe* zu, nämlich die *Reihe*

$$\begin{aligned} &\sum_{(r_1, \ldots, r_m)} c_{r_1, \ldots, r_m} e^{i(r_1 \beta_1 x_1 + \cdots + r_m \beta_m x_m)} \\ (18) \qquad &= c + \sum_{r_1}{}' c_{r_1} e^{i r_1 \beta_1 x_1} + \sum_{r_1} \sum_{r_2}{}' c_{r_1, r_2} e^{i(r_1 \beta_1 x_1 + r_2 \beta_2 x_2)} + \cdots\cdots [2], \end{aligned}$$

*wo* $\frac{2\pi}{q_m}$ *durch* $\beta_m$ *bezeichnet ist, und der Koeffizient* $c_{r_1, r_2, \ldots, r_m}$ *durch die Mittelwertbildung*

$$(19) \qquad c_{r_1, \ldots, r_m} = \underset{(x_1, x_2, \ldots\ldots)}{M} \left\{ F(x_1, x_2, \ldots)\, e^{-i(r_1 \beta_1 x_1 + \cdots + r_m \beta_m x_m)} \right\}$$

*bestimmt ist.* Auch hier existiert bei jeder Wahl der rationalen Zahlen $r_1, \ldots, r_m$ der Mittelwert (19), weil ja der Faktor $e^{-i(r_1 \beta_1 x_1 + \cdots + r_m \beta_m x_m)}$ eine grenzperiodische Funktion mit dem Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots)$ ist[3].

Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis des folgenden Satzes, welcher

---

[1] Falls $G(x_1, \ldots, x_M)$ speziell reinperiodisch mit dem Periodensystem $(q_1, \ldots, q_M)$ ist, fällt die Fourierreihe (17) mit der „gewöhnlichen" Fourierreihe von $G(x_1, \ldots, x_M)$ zusammen, denn es verschwindet alsdann (wie durch Approximation von $G(x_1, \ldots, x_M)$ durch endliche trigometrische Summen leicht zu sehen) jeder Koeffizient $c_{r_1, \ldots, r_M}$, für welchen mindestens eine der Zahlen $r_1, \ldots, r_M$ nicht ganz ist. Eine ähnliche Bemerkung gilt für die nunmehr einzuführende Fourierreihe einer Funktion von unendlich vielen Variablen.

[2] $\sum\limits_{r}{}'$ bedeutet, daß bei der Summation über alle rationalen Zahlen $r$ die Zahl 0 zu überspringen ist.

[3] In dem speziellen Falle, wo $F(x_1, x_2, \ldots)$ in den Variablen $x_{M+1}, x_{M+2}, \ldots$ konstant ist, also tatsächlich eine grenzperiodische Funktion $G(x_1, \ldots, x_M)$ von nur endlich vielen Variablen $x_1, \ldots, x_M$ mit dem Periodensystem $(q_1, \ldots, q_M)$ ist, geht die Fourierreihe (18) in die Fourierreihe (17) über, was mit Hülfe der Gleichung $M\left\{e^{i\mu x}\right\} = 0$ für $\mu \neq 0$ unmittelbar zu sehen ist.

das genaue Analogon (oder vielmehr die natürliche Verallgemeinerung) des in § 1 bewiesenen Satzes 2 über rein periodische Funktionen bildet.

**Satz 5.** *Die beliebig gegebene grenzperiodische Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ läßt sich im ganzen unendlich-dimensionalen Raume mit einer vorgegebenen Genauigkeit $\varepsilon$ durch eine endliche Summe der Form*

$$\sum a_{r_1,\ldots,r_m} e^{i(r_1\beta_1 x_1 + \cdots + r_m\beta_m x_m)}$$

*annähern, wobei nur solche Exponentialausdrücke $e^{i(r_1\beta_1 x_1 + \cdots + r_m\beta_m x_m)}$ auftreten, welche tatsächlich in der Fourierreihe der Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ vorkommen, d. h. für welche die entsprechenden Fourierkoeffizienten $c_{r_1,\ldots,r_m}$ nicht gleich 0 sind.*

Bevor wir aber zu dem Beweis dieses allgemeinen Satzes übergehen, werden wir zunächst den Spezialfall erledigen, wo die betrachtete grenzperiodische Funktion nur von endlich vielen Variablen abhängt. Dies geschieht durch den folgenden Hilfssatz, welcher das Analogon zu dem „verschärften Weierstraßschen Approximationssatze" über reinperiodische Funktionen von endlich vielen Variablen bildet.

**Hilfssatz.** *Es sei $G(x_1, \ldots, x_M)$ eine grenzperiodische Funktion von $M$ Variablen mit dem Periodensystem $(q_1, \ldots, q_M)$. Dann läßt sich zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Summe der Form*

$$\sum a_{r_1,\ldots,r_M} e^{i(r_1\beta_1 x_1 + \cdots + r_M\beta_M x_M)} \qquad \left(\beta_m = \frac{2\pi}{q_m}\right)$$

*finden, welche im ganzen $M$-dimensionalen Raume die Funktion $G(x_1, \ldots, x_M)$ bis auf $\varepsilon$ approximiert, derart, daß in dieser Summe nur solche Kombinationen $r_1, \ldots, r_M$ auftreten, für welche die entsprechenden Fourierkoeffizienten $c_{r_1,\ldots,r_M}$ der Funktion $G(x_1, \ldots, x_M)$ von 0 verschieden sind.*

**Beweis.** Der Beweis verläuft so, daß wir den Satz auf den oben genannten verschärften Weierstraßschen Approximationssatz zurückführen. Dies geschieht dadurch, daß eine besondere „Glättung" der grenzperiodischen Funktion $G(x_1, \ldots, x_M)$ zu einer rein periodischen Funktion $P(x_1, \ldots, x_M)$ vorgenommen wird; hierbei müssen wir aber dafür Sorge tragen, daß die Fourierreihe der geglätteten Funktion $P(x_1, \ldots, x_M)$ nur aus solchen Gliedern besteht, welche schon in der Fourierreihe der grenzperiodischen Funktion $G(x_1, \ldots, x_M)$ vorkommen (damit bei der Glättung keine „neuen" Exponenten auftauchen können)[1].

---

[1] Den Ausgangspunkt der verwendeten „Glättungsmethode" bildet die folgende einfache Bemerkung: *Falls aus einer endlichen Summe der Form $S(x) = \sum a_n e^{i\alpha_n x}$ diejenigen (eventuellen)*

Wir bestimmen zunächst (nach dem Corollar des Hilfssatzes 9 auf S. 150) die rationale Zahl $R \neq 0$ so, daß die Werte der grenzperiodischen Funktion $G(x_1, \ldots, x_M)$ in zwei beliebigen Punkten $(x_1', \ldots, x_M')$ und $(x_1'', \ldots, x_M'')$, welche in bezug auf eine parallelepipedische Raumteilung mit den Seitenlängen $(p_1, \ldots, p_M) = (Rq_1, \ldots, Rq_M)$ äquivalent liegen, um weniger als $\frac{\varepsilon}{2}$ von einander abweichen. Danach bilden wir bei festem ganzen positiven $L$ den Mittelwert

$$(20) \qquad \Psi_L(x_1, x_2, \ldots, x_M) = \frac{1}{L^M} \sum_{l_1=1}^{L} \sum_{l_2=1}^{L} \cdots \sum_{l_M=1}^{L} G(x_1+p_1 l_1, x_2+p_2 l_2, \ldots, x_M+p_M l_M)$$

und bilden schließlich den Grenzwert

$$(21) \qquad \lim_{L \to \infty} \Psi_L(x_1, x_2, \ldots, x_M) = P(x_1, x_2, \ldots, x_M).$$

Dieser Grenzwert existiert in jedem festgehaltenen Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_M)$, und sogar **gleichmäßig im ganzen Raume.** Dies folgt daraus, daß 1) die grenzperiodische Funktion $G(x_1, \ldots, x_M)$ durch eine endliche Summe von Gliedern der Form $a e^{i(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_M x_M)}$ bis auf eine beliebig vorgegebene Genauigkeit approximiert werden kann, und daß 2) der betreffende Grenzwert (21) offenbar gleichmäßig existiert für den Fall einer einfachen „Schwingung" $e^{i(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_M x_M)}$; in der Tat können wir hier die iterierte Summe (20) direkt ausrechnen, da sie sich in das Produkt von $M$ geometrischen Progressionen auflöst:

$$e^{i(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_M x_M)} \cdot \left(\frac{1}{L} \sum_{l_1=1}^{L} e^{i\lambda_1 p_1 l_1}\right) \cdot \left(\frac{1}{L} \sum_{l_2=1}^{L} e^{i\lambda_2 p_2 l_2}\right) \cdots \left(\frac{1}{L} \sum_{l_M=1}^{L} e^{i\lambda_M p_M l_M}\right),$$

und wir finden als (gleichmäßigen) Grenzwert entweder die Schwingung $e^{i(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_M x_M)}$ selbst oder identisch 0, je nachdem die sämtlichen Zahlen $\lambda_1 p_1, \ldots, \lambda_M p_M$ ganze Multipla von $2\pi$ sind oder nicht.

---

*Glieder herausgegriffen werden sollen, deren Exponenten $\alpha_n$ ganze Multipla einer gegebenen reellen Zahl $\frac{2\pi}{k}$ sind, hat man nur den Mittelwert*

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} S(x + lk)$$

*zu bilden.* In der Tat gilt bei festem $\alpha$, daß der Mittelwert

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} e^{i\alpha(x+lk)} = e^{i\alpha x} \cdot \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} e^{i\alpha l k}$$

gleich $e^{i\alpha x}$ bezw. 0 ist, je nachdem $\alpha k$ ein ganzes Multiplum bezw. kein ganzes Multiplum von $2\pi$ ist.

Da bei jedem $L$ die Funktion $\Psi_L(x_1, \ldots, x_M)$ stetig ist, und der Grenzübergang (21) gleichmäßig stattfindet, ist die Grenzfunktion $P(x_1, \ldots, x_M)$ im ganzen Raume stetig. Ferner ist sie rein periodisch mit dem Periodensystem $(p_1, \ldots, p_M)$, da unter den $L^M$ Gliedern in der Summe in (20) nur $L^{M-1}$ geändert werden, wenn $x_m$ durch $x_m + p_m$ ersetzt wird (also eine Anzahl, welche für $L \to \infty$ von geringerer Ordnung ist als $L^M$), und die Funktion $G$ beschränkt ist. Weiter gilt, daß die Funktion $P(x_1, \ldots, x_M)$ von der gegebenen Funktion $G(x_1, \ldots, x_M)$ um höchstens $\frac{\varepsilon}{2}$ abweicht, d. h. es gilt im ganzen Raume die Ungleichung

$$|G(x_1, \ldots, x_M) - P(x_1, \ldots, x_M)| \leqq \frac{\varepsilon}{2}; \tag{22}$$

denn es kann ja die Differenz $G(x_1, \ldots, x_M) - P(x_1, \ldots, x_M)$ in der Form

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{L^M} \sum_{l_1 = 1}^{L} \sum_{l_2 = 1}^{L} \cdots \sum_{l_M = 1}^{L} (G(x_1, \ldots, x_M) - G(x_1 + p_1 l_1, \ldots, x_M + p_M l_M))$$

geschrieben werden, wo jedes der $L^M$ Glieder $< \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Und schließlich entsteht die Fourierreihe von $P(x_1, \ldots, x_M)$ aus der Fourierreihe von $G(x_1, \ldots, x_M)$ einfach dadurch, daß in dieser letzteren Reihe alle Glieder $c_{r_1, \ldots, r_M} e^{i(r_1 \beta_1 x_1 + \cdots + r_M \beta_M x_M)}$ gestrichen werden, für welche die $M$ rationalen Zahlen $r_m$ nicht sämtlich die Form $\frac{n_m}{R}$ mit ganzem $n_m$ haben, d. h. es werden einfach alle Glieder gestrichen, von welchen von vornherein klar ist, daß sie nicht zur Fourierreihe einer rein periodischen Funktion mit dem Periodensystem $(p_1, \ldots, p_M) = (R q_1, \ldots, R q_M)$ gehören können, weil der Exponentialfaktor $e^{i(r_1 \beta_1 x_1 + \cdots + r_M \beta_M x_M)}$ nicht die Form $e^{i(n_1 \gamma_1 x_1 + \cdots + n_M \gamma_M x_M)}$ mit $\gamma_m = \frac{2\pi}{p_m}$ besitzt. Die Behauptung lautet, daß bei jedem System ganzer Zahlen $n_1, \ldots, n_M$ die Gleichung

$$\begin{aligned} & \underset{(x_1, \ldots, x_M)}{M} \left\{ P(x_1, \ldots, x_M) e^{-i(n_1 \gamma_1 x_1 + \cdots + n_M \gamma_M x_M)} \right\} \\ = & \underset{(x_1, \ldots, x_M)}{M} \left\{ G(x_1, \ldots, x_M) e^{-i(n_1 \gamma_1 x_1 + \cdots + n_M \gamma_M x_M)} \right\} \end{aligned}$$

besteht. Hierbei können wir uns offenbar auf den Fall beschränken, wo $n_1 = n_2 = \cdots = n_M = 0$ ist, d. h. wo von der Gleichung

$$\underset{(x_1, \ldots, x_M)}{M} \{ P(x_1, \ldots, x_M) \} = \underset{(x_1, \ldots, x_M)}{M} \{ G(x_1, \ldots, x_M) \} \tag{23}$$

die Rede ist[1]. Die Richtigkeit dieser Gleichung (23) folgt aber sofort daraus, daß einerseits (bei jedem $L$)

$$\underset{(x_1,\ldots,x_M)}{M}\{\Psi_L(x_1,\ldots,x_M)\} = \frac{1}{L^M}\sum_{l_1=1}^{L}\cdots\sum_{l_M=1}^{L}\underset{(x_1,\ldots,x_M)}{M}\{G(x_1+l_1p_1,\ldots,x_M+l_Mp_M)\}$$
$$= \underset{(x_1,\ldots,x_M)}{M}\{G(x_1,\ldots,x_M)\}$$

ist (da natürlich bei jeden festen $l_1,\ldots,l_M$

$$\underset{(x_1,\ldots,x_M)}{M}\{G(x_1+l_1p_1,\ldots,x_M+l_Mp_M)\} = \underset{(x_1,\ldots,x_M)}{M}\{G(x_1,\ldots,x_M)\}$$

gilt) und daß andererseits

$$\underset{(x_1,\ldots,x_M)}{M}\{P(x_1,\ldots,x_M)\} = \lim_{L\to\infty}\underset{(x_1,\ldots,x_M)}{M}\{\Psi_L(x_1,\ldots,x_M)\}$$

ist, weil $\Psi_L(x_1,\ldots,x_M)$ für $L\to\infty$ gleichmäßig gegen $P(x_1,\ldots,x_M)$ strebt.

Wir können nunmehr den Beweis des aufgestellten Hilfssatzes in wenigen Worten zu Ende führen. In der Tat haben wir nur, nach dem verschärften Weierstraßschen Satze, eine endliche Summe $\sum a_{n_1,\ldots,n_M} e^{i(n_1\gamma_1x_1+\cdots+n_M\gamma_Mx_M)}$ zu bestimmen, welche die rein periodische Funktion $P(x_1,\ldots,x_M)$ bis auf $\frac{\varepsilon}{2}$ approximiert und nur solche Exponentialausdrücke enthält, welche tatsächlich in der Fourierreihe von $P(x_1,\ldots,x_M)$ auftreten. Denn diese Summe wird ja dann von der gewünschten Art sein; in der Tat approximiert sie, wegen (22), die Funktion $G(x_1,\ldots,x_M)$ bis auf $\varepsilon$, und enthält nur Exponentialausdrücke, welche in der Fourierreihe von $G(x_1,\ldots,x_M)$ tatsächlich vorkommen, da jedes Glied, das in der Fourierreihe von $P(x_1,\ldots,x_M)$ vorkommt, auch in der Fourierreihe von $G(x_1,\ldots,x_M)$ auftritt.

[1] In der Tat steht die Funktion $P^*(x_1,\ldots,x_M) = P(x_1,\ldots,x_M)\,e^{-i(n_1\gamma_1x_1+\cdots+n_M\gamma_Mx_M)}$ in ganz derselben Beziehung zu der Funktion $G^*(x_1,\ldots,x_M) = G(x_1,\ldots,x_M)\,e^{-i(n_1\gamma_1x_1+\cdots+n_M\gamma_Mx_M)}$ wie die Funktion $P(x_1,\ldots,x_M)$ zu $G(x_1,\ldots,x_M)$. Denn es ist $P^*(x_1,\ldots,x_M)$ eine stetige rein periodische Funktion mit dem Periodensystem $(p_1,\ldots,p_M)$, welche $G^*(x_1,\ldots,x_M)$ bis auf $\frac{\varepsilon}{2}$ approximiert, und es gilt die Limesgleichung

$$P^*(x_1,\ldots,x_M) = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^M}\sum_{l_1=1}^{L}\cdots\sum_{l_M=1}^{L}G^*(x_1+p_1l_1,\ldots,x_M+p_Ml_M),$$

weil der Exponentialfaktor $e^{-i(n_1\gamma_1x_1+\cdots+n_M\gamma_Mx_M)}$ periodisch mit dem Periodensystem $(p_1,\ldots,p_M)$ ist und daher einfach aus den Summationszeichen (und dem Limeszeichen) herausgezogen werden kann.

**Beweis des Satzes 5.** Wir approximieren zunächst die gegebene grenzperiodische Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ durch Funktionen von endlich vielen Variablen, indem wir (ganz wie in § 1) bei einem festen $m$ den Mittelwert

$$\underset{(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots\ldots)}{M} \{F(x_1, x_2, \ldots)\} = \varphi_m(x_1, \ldots, x_m)$$

bilden. Durch Approximation von $F(x_1, x_2, \ldots)$ mittels rein periodischer Funktionen von unendlich vielen Variablen schließt man sofort aus den entsprechenden Resultaten in § 1 (unter Berücksichtigung der Bemerkung in Note 1 Seite 198), erstens daß $\varphi_m(x_1, \ldots, x_m)$ grenzperiodisch mit dem Periodensystem $(q_1, \ldots, q_m)$ ist, und zweitens daß die Funktionenfolge

$$\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_1, x_2), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_m), \ldots$$

für $m \to \infty$ gleichmäßig im ganzen unendlich-dimensionalen Raume gegen $F(x_1, x_2, \ldots)$ konvergiert. Wir können also ein $M$ so wählen, daß im ganzen unendlich-dimensionalen Raume die Ungleichung

$$|F(x_1, x_2, \ldots) - \varphi_M(x_1, \ldots, x_M)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

besteht. Danach wählen wir, nach dem obigen Hilfssatze, eine Summe

$$\sum a_{r_1, \ldots, r_M} e^{i(r_1 \beta_1 x_1 + \cdots + r_M \beta_M x_M)},$$

welche $\varphi_M(x_1, \ldots, x_M)$ bis auf $\frac{\varepsilon}{2}$ approximiert, also die Ungleichung

$$\left| F(x_1, x_2, \ldots) - \sum a_{r_1, \ldots, r_M} e^{i(r_1 \beta_1 x_1 + \cdots + r_M \beta_M x_M)} \right| < \varepsilon$$

erfüllt und von solcher Art ist, daß nur solche Kombinationen $(r_1, \ldots, r_M)$ verwendet werden, für welche der entsprechende Fourierkoeffizient der grenzperiodischen Funktion $\varphi_M(x_1, \ldots, x_M)$ von 0 verschieden ist. Es ist somit (wie in § 1) der Satz 5 bewiesen, wenn wir zeigen können, daß die Fourierreihe der Funktion $\varphi_M(x_1, \ldots, x_M)$ einfach aus der Fourierreihe der Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ durch Weglassung derjenigen Glieder entsteht, welche mindestens eine der Variablen $x_{M+1}, \ldots$ enthält. Wir haben also zu beweisen, daß bei jeder Wahl der $M$ rationalen Zahlen $r_1, \ldots, r_M$ der Fourierkoeffizient

$$\underset{(x_1, x_2, \ldots\ldots)}{M} \left\{F(x_1, x_2, \ldots) e^{-i(r_1 \beta_1 x_1 + \cdots + r_M \beta_M x_M)}\right\}$$

mit dem Fourierkoeffizienten

$$\underset{(x_1,\ldots,x_M)}{M}\left\{\varphi_M(x_1,\ldots,x_M)\,e^{-i(r_1\beta_1x_1+\cdots+r_M\beta_Mx_M)}\right\}$$

d. h. mit der Zahl

$$\underset{(x_1,\ldots,x_M)}{M}\left\{e^{-i(r_1\beta_1x_1+\cdots+r_M\beta_Mx_M)}\underset{(x_{M+1},x_{M+2},\ldots\ldots)}{M}\left\{F(x_1,x_2,\ldots)\right\}\right\}=$$
$$\underset{(x_1,\ldots,x_M)}{M}\left\{\underset{(x_{M+1},x_{M+2},\ldots\ldots)}{M}\left\{F(x_1,x_2,\ldots)e^{-i(r_1\beta_1x_1+\cdots+r_M\beta_Mx_M)}\right\}\right\}$$

zusammenfällt. Hierbei können wir uns offenbar auf den Fall beschränken, wo der Exponentialfaktor fehlt, d. h. wo es sich um die konstanten Glieder der beiden Fourierentwickelungen handelt, also um die Gleichung

$$\underset{(x_1,\ldots,x_M)}{M}\left\{\underset{(x_{M+1},x_{M+2},\ldots\ldots)}{M}\left\{F(x_1,x_2,\ldots)\right\}\right\}=\underset{(x_1,x_2,\ldots\ldots)}{M}\left\{F(x_1,x_2,\ldots)\right\}.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung ergibt sich aber sofort aus ihrer (in § 1 bewiesenen) Gültigkeit für rein periodische Funktionen, wenn $F(x_1,x_2,\ldots)$ durch solche Funktionen gleichmäßig angenähert wird.

## § 4.

### Beweis des verschärften Approximationssatzes bei einer beliebigen Basis.

**Satz 6.** *Es sei* $f(x)\sim\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ *eine beliebige fastperiodische Funktion mit der Basis* $\{\beta_1,\beta_2,\ldots\}$, *und* $F(x_1,x_2,\ldots)$ *die zugehörige grenzperiodische Funktion mit dem Periodensystem* $(q_1,q_2,\ldots)=\left(\frac{2\pi}{\beta_1},\frac{2\pi}{\beta_2},\ldots\right)$, *deren Fourierreihe wir mit*

$$\sum c_{r_1,\ldots,r_m}e^{i(r_1\beta_1x_1+\cdots+r_m\beta_mx_m)} \tag{24}$$

*bezeichnen. Dann entsteht die Fourierreihe* $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ *aus der Fourierreihe* (24) *einfach dadurch, daß* $x_1=x_2=\cdots=x$ *gesetzt wird.* Hierbei können, wegen der linearen Unabhängigkeit der $\beta$, keine zwei Glieder nach der Einsetzung von $x_1=x_2=\cdots=x$ zusammengezogen werden.

**Beweis.** Es ist $f(x)=F(x,x,\ldots)$, und es handelt sich also — da jeder Fourierexponent $\Lambda_n$ gewiß in der Form $r_1\beta_1+\cdots+r_m\beta_m$ darstellbar ist — darum zu beweisen, daß bei jeder Wahl der rationalen Zahlen $r_1, \ldots, r_m$ die Gleichung

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(x, x, \ldots)\, e^{-i(r_1\beta_1+\cdots+r_m\beta_m)x}\, dx$$
$$= \underset{(x_1, x_2, \ldots)}{M} \left\{F(x_1, x_2, \ldots)\, e^{-i(r_1\beta_1 x_1+\cdots+r_m\beta_m x_m)}\right\}$$

besteht. Wie immer genügt es den Fall zu betrachten, wo es sich um die konstanten Glieder der Entwickelungen handelt, also um die Gleichung

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(x, x, \ldots)\, dx = \underset{(x_1, x_2, \ldots)}{M} \left\{F(x_1, x_2, \ldots)\right\}. \tag{25}$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung folgt aber sofort daraus, daß $F(x_1, x_2, \ldots)$ gleichmäßig im ganzen Raume durch rein periodische (stetige) Funktionen angenähert werden kann, für welche die reziproken Werte der Perioden linear unabhängig sind, und daß ja die Gleichung für solche Funktionen nach § 2 richtig ist.

**Beweis des verschärften Approximationssatzes** (für den Fall einer beliebigen Basis). Der Beweis verläuft ganz wie im Falle einer ganzen Basis in § 2. Wir approximieren, nach dem Satze 5 in § 3, die zu der gegebenen fastperiodischen Funktion $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ gehörige grenzperiodische Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ mit einer Genauigkeit $\varepsilon$ durch eine endliche Summe der Form

$$\sum a_{r_1, \ldots, r_m} e^{i(r_1\beta_1 x_1+\cdots+r_m\beta_m x_m)}, \tag{26}$$

in welcher nur solche Kombinationen $(r_1, \ldots, r_m)$ vorkommen, für welche der Fourierkoeffizient $c_{r_1,\ldots,r_m}$ der Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ von 0 verschieden ist. Wir haben danach nur die Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ und ihre Annäherungssumme auf der Hauptdiagonalen $x_1 = x_2 = \cdots = x$ zu betrachten. Dann erhalten wir die Ungleichung

$$\left| f(x) - \sum a_{r_1,\ldots,r_m} e^{i(r_1\beta_1+\cdots+r_m\beta_m)x}\right| < \varepsilon,$$

welche die gewünschte Form

$$\left| f(x) - \sum_{\nu=1}^{q} a_\nu e^{i\Lambda_{n_\nu} x}\right| < \varepsilon$$

besitzt, weil ja jede Summe der Form $r_1\beta_1+\cdots+r_m\beta_m$, für welche der Fourierkoeffizient $c_{r_1,\ldots,r_m} \neq 0$ ist, nach dem Satze 6 gewiß einen der Fourierexponenten $\Lambda_n$ ergibt.

## § 5.

### Gleichzeitige Approximation mehrerer fastperiodischer Funktionen.

In diesem letzten Paragraphen werden wir — mit Hinblick auf die spätere Übertragung der Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Funktionen einer komplexen Variablen — eine an sich nicht sehr interessante Verallgemeinerung des verschärften Approximationssatzes von § 4 beweisen, welche die Möglichkeit einer „gleichartig" gleichmäßigen Approximation mehrerer (durch gewisse gemeinsame Eigenschaften verbundenen) fastperiodischen Funktionen besagt.

Es bezeichne im Folgenden $\mathsf{M}$ eine Menge von fastperiodischen Funktionen $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$, welche alle zur selben Exponentenfolge $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ gehören, und außerdem die folgenden Eigenschaften besitzen:

1. Die Menge $\mathsf{M}$ ist eine „ausgezeichnete" Funktionenmenge (vgl S. 107), d. h. die Funktionen $f(x)$ der Menge sind gleichartig gleichmäßig stetig und gleichartig fastperiodisch.

2. Die zu den einzelnen Funktionen $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ gehörigen konvergenten Reihen $\sum |A_n|^2$ besitzen eine konvergente Majorantenreihe, d. h. es gibt eine (nur von der Menge $\mathsf{M}$ abhängige) Folge von positiven Zahlen $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots$ mit konvergenter Quadratsumme $\sum \mathsf{A}_n^2$, derart, daß für eine beliebige Funktion $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ unserer Menge und jedes $n = 1, 2, \ldots$ die Ungleichung $|A_n| \leqq \mathsf{A}_n$ besteht.

Es lautet alsdann der zu beweisende Satz:

**Gleichzeitiger Approximationssatz.** *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es unter den Exponenten $\Lambda_n$ der Menge $\mathsf{M}$ eine endliche Teilmenge*

$$\Lambda_{n_1}, \Lambda_{n_2}, \ldots \Lambda_{n_Q}$$

*und zugehörige reelle Zahlen*

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_Q$$

*derart, daß für jede Funktion $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ der Menge $\mathsf{M}$ die Ungleichung*

$$\left| f(x) - \sum_{\nu=1}^{Q} \mu_\nu A_{n_\nu} e^{i\Lambda_{n_\nu} x} \right| < \varepsilon$$

*für alle $x$ besteht.*

Beim Beweise dieses Satzes kommt kein eigentlich neuer Gedanke hinzu; wir haben nur den früheren Beweis des verschärften Approximationssatzes wieder vorzunehmen und ihm eine leichte Erweiterung in bezug auf „Gleichartigkeit" der Approximation zu geben. Bevor wir aber zum Beweise dieses gleichzeitigen Approximationssatzes übergehen, werden wir zunächst der Übersicht halber die dabei benötigte gleichartige Approximation von grenzperiodischen Funktionen von unendlich vielen Variablen als besonderen Hilfssatz formulieren.

Wir bezeichnen mit $\Gamma$ eine Menge von grenzperiodischen Funktionen $F(x_1, x_2, \ldots)$ von unendlich vielen Variablen, welche alle dasselbe Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots)$ besitzen und überdies den folgenden Bedingungen genügen:

1. Sie sind gleichartig gleichmäßig stetig, d. h. zu jedem $\varepsilon$ gibt es eine Anzahl $M$ und ein $\delta > 0$ derart, daß für jedes Punktepaar $(x_1', x_2', \ldots)$, $(x_1'', x_2'', \ldots)$, welches den $M$ Ungleichungen

$$|x_m' - x_m''| < \delta \qquad (m = 1, 2, \ldots, M)$$

genügt, und jede Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ der Menge $\Gamma$ die Ungleichung

$$|F(x_1', x_2', \ldots) - F(x_1'', x_2'', \ldots)| < \varepsilon$$

erfüllt ist.

2. Sie sind gleichartig grenzperiodisch mit dem Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots)$, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Anzahl $M$ und eine rationale Zahl $R \neq 0$ derart, daß jede Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ der Menge $\Gamma$ in zwei beliebigen Punkten $(x_1', x_2', \ldots)$ und $(x_1'', x_2'', \ldots)$, deren Projektionen $(x_1', \ldots, x_M')$ und $(x_1'', \ldots, x_M'')$ auf den $M$-dimensionalen Unterraum bezüglich einer parallelepipedischen Raumteilung der Seitenlängen $Rq_1, Rq_2, \ldots, Rq_M$ äquivalent liegen, Werte annimmt, die um weniger als $\varepsilon$ von einander abweichen.

Es lautet dann der betreffende

**Hilfssatz.** *Es sei $\Gamma$ eine Menge von grenzperiodischen Funktionen der obigen Art. Dann gibt es zu jedem festen $\varepsilon > 0$ eine endliche Anzahl $Q$ von Kombinationen von (je endlich vielen) rationalen Zahlen*

$$(r_1', r_2', \ldots, r_{m'}'), \; (r_1'', r_2'', \ldots, r_{m''}''), \; \ldots, \; (r_1^{(Q)}, r_2^{(Q)}, \ldots, r_{m^{(Q)}}^{(Q)})$$

*und zugehörigen reellen Faktoren*

$$\mu_1, \qquad \mu_2, \qquad \ldots, \qquad \mu_Q$$

*derart, daß für jede Funktion*

$$F(x_1, x_2, \ldots) \sim \sum c_{r_1, r_2, \ldots, r_m} e^{i(r_1\beta_1 x_1 + r_2\beta_2 x_2 + \cdots + r_m\beta_m x_m)}$$

*unserer Menge* $\Gamma$ *die Ungleichung*

$$\left| F(x_1, x_2, \ldots) - \sum^* \mu \cdot c_{r_1, r_2, \ldots, r_m} e^{i(r_1\beta_1 x_1 + r_2\beta_2 x_2 + \cdots + r_m\beta_m x_m)} \right| < \varepsilon$$

*im ganzen unendlich-dimensionalen Raume besteht, wobei* $\sum^*$ *bedeutet, daß nur über die obigen* $Q$ *Kombinationen* $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ *summiert wird, und der angeheftete Faktor* $\mu$ *jedesmal den „entsprechenden" Faktor aus der obigen Reihe* $\mu_1, \ldots, \mu_Q$ *bedeutet.*

**Beweis.** Wir gehen schrittweise vor, indem wir mit der Betrachtung rein periodischer Funktionen von nur endlich vielen Variabeln anfangen, und dann über grenzperiodische Funktionen von nur endlich vielen Variablen zu den im Hilfssatze behandelten grenzperiodischen Funktionen von unendlich vielen Variablen aufsteigen.

I. Es sei $\Gamma_1$ eine Menge von rein periodischen (stetigen) Funktionen $P(x_1, \ldots, x_M)$ von endlich vielen Variablen $x_1, \ldots, x_M$ mit demselben Periodensystem $(p_1, \ldots, p_M)$, welche gleichartig gleichmäßig stetig sind. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Anzahl $Q$ von Kombinationen von $M$ ganzen Zahlen

$$(n_1', n_2', \ldots, n_M'),\ (n_1'', n_2'', \ldots, n_M''),\ \ldots,\ (n_1^{(Q)}, n_2^{(Q)}, \ldots, n_M^{(Q)})$$

und zugehörigen reellen Faktoren

$$\mu_1, \qquad \mu_2, \qquad \ldots, \qquad \mu_Q$$

derart, daß für jede Funktion

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_M) \sim \sum c_{n_1, n_2, \ldots, n_M} e^{i(n_1\beta_1 x_1 + n_2\beta_2 x_2 + \cdots + n_M\beta_M x_M)}$$

unserer Menge $\Gamma_1$ die Ungleichung

$$\left| F(x_1, x_2, \ldots, x_M) - \sum^* \mu \cdot c_{n_1, n_2, \ldots, n_M} e^{i(n_1\beta_1 x_1 + n_2\beta_2 x_2 + \cdots + n_M\beta_M x_M)} \right| < \varepsilon$$

im ganzen $M$-dimensionalen Raume besteht, wo $\sum^*$ bedeutet, daß nur über die obigen $Q$ Kombinationen $(n_1, n_2, \ldots, n_M)$ summiert werden soll (und $\mu$ jedesmal den entsprechenden Faktor aus $\mu_1, \ldots, \mu_Q$ angibt).

Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt unmittelbar durch Betrachtung des Beweises des Fejérschen Satzes über die gleichmäßige Cesàro-Summabilität einer rein periodischen Funktion von $M$ Variablen; in der Tat verlaufen alle hierbei zu verwendeten Abschätzungen gleichartig für Funktionen mit demselben Periodensystem, welche gleichartig gleichmäßig stetig sind.

II. Aus I ergibt sich weiter, daß, falls $\Gamma_2$ eine Menge von grenzperiodischen Funktionen $G(x_1, x_2, \ldots, x_M)$ von $M$ Variablen ist, welche alle dasselbe Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots, q_M)$ besitzen und außerdem gleichartig gleichmäßig stetig und gleichartig grenzperiodisch sind, zu jedem $\varepsilon$ eine endliche Anzahl $Q$ von Kombinationen von $M$ rationalen Zahlen

$$(r_1', r_2', \ldots, r_M'),\ (r_1'', r_2'', \ldots, r_M''),\ \ldots,\ (r_1^{(Q)}, r_2^{(Q)}, \ldots, r_M^{(Q)})$$

und zugehörigen reellen Faktoren

$$\mu_1, \qquad \mu_2, \qquad \ldots, \qquad \mu_Q$$

derart existiert, daß für jede Funktion

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_M) \sim \sum c_{r_1, r_2, \ldots, r_M} e^{i(r_1\beta_1 x_1 + r_2\beta_2 x_2 + \cdots + r_M\beta_M x_M)}$$

unserer Menge $\Gamma_2$ die Ungleichung

$$\left| G(x_1, x_2, \ldots, x_M) - \sum\nolimits^* \mu \cdot c_{r_1, r_2, \ldots, r_M} e^{i(r_1\beta_1 x_1 + r_2\beta_2 x_2 + \cdots + r_M\beta_M x_M)} \right| < \varepsilon$$

im ganzen $M$-dimensionalen Raume besteht, wobei $\sum^*$ bedeutet, daß nur über die obigen $Q$ festen Kombinationen $(r_1, r_2, \ldots, r_M)$ zu summieren ist (und $\mu$ wie immer den entsprechenden Faktor bedeutet).

In der Tat können wir nach der gleichartigen Grenzperiodizität der Funktionen $G(x_1, \ldots, x_M)$ zu dem gegebenen $\varepsilon$ ein rationales $R \neq 0$ so bestimmen, daß für jede Funktion $G$ der Menge $\Gamma_2$ gilt, daß ihre Werte in zwei beliebigen Punkten $(x_1', \ldots, x_M')$ und $(x_1'', \ldots, x_M'')$, welche in bezug auf eine parallelepipedische Raumteilung mit den Seitenlängen $(p_1, \ldots, p_M) = (Rq_1, \ldots, Rq_M)$ äquivalent liegen, um weniger als $\frac{\varepsilon}{2}$ von einander abweichen. Bilden wir dann den auf S. 201 betrachteten Mittelwert über das $M$-dimensionale Raumgitter mit den Seitenlängen $p_1, \ldots, p_M$

$$P(x_1, \ldots, x_M) = \lim_{L=\infty} \frac{1}{L^M} \sum_{l_1=1}^{L} \cdots \sum_{l_M=1}^{L} G(x_1 + p_1 l_1, \ldots, x_M + p_M l_M),$$

so erhalten wir zu jeder Funktion $G(x_1, \ldots, x_M)$ der Menge $\Gamma_2$ eine rein periodische Funktion $P(x_2, \ldots, x_M)$ mit dem Periodensystem $(p_1, \ldots, p_M)$, welche von $G(x_1, \ldots, x_M)$ um weniger als $\frac{\varepsilon}{2}$ abweicht, und deren Fourierreihe aus der Fourierreihe von $G$ einfach dadurch entsteht, daß diejenigen Glieder, welche Kombinationen $(r_1, \ldots, r_M)$ entsprechen, für welche die $M$ Zahlen $r_m$ nicht sämtlich von der Form $\frac{n_m}{R}$ mit ganzen $n_m$ sind, gestrichen werden. Diese rein periodischen Funktionen $P(x_1, \ldots, x_M)$ bilden ferner eine Menge $\Gamma_1$ der in I betrachteten Art, weil sie ja alle dasselbe Periodensystem $(p_1, \ldots, p_M)$ besitzen und offenbar (als Mittelwerte von gleichartig gleichmäßig stetigen Funktionen) gleichartig gleichmäßig stetig sind. Wir haben jetzt nur den Satz in I auf diese Funktionen $P(x_1, \ldots, x_M)$ $\left(\text{mit } \frac{\varepsilon}{2} \text{ statt } \varepsilon\right)$ anzuwenden, um die erwünschte gleichartige Approximation der Funktionen $G(x_1, \ldots, x_M)$ zu erhalten.

III. Um nun schließlich die Behauptung des Hilfssatzes selbst zu beweisen, haben wir nur die Mittelwertbildung von S. 204 auf die grenzperiodischen Funktionen von unendlich vielen Variablen $F(x_1, x_2, \ldots)$ der Menge $\Gamma$ anzuwenden. Nach der gleichartig gleichmäßigen Stetigkeit der Funktionen der Menge $\Gamma$ folgt zunächst, daß es zu dem gegebenen $\varepsilon$ eine (nur von der Menge, d. h. nicht von den einzelnen Funktionen abhängige) ganze Zahl $M$ so gibt, daß für jede Funktion $F$ der Menge $\Gamma$ der Mittelwert

$$G(x_1, \ldots, x_M) = \underset{(x_{M+1},\, x_{M+2},\, \ldots)}{M} F(x_1, x_2, \ldots)$$

von der Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ selbst um weniger als $\frac{\varepsilon}{2}$ abweicht. Diese Funktionen $G(x_1, \ldots, x_M)$ von nur endlich vielen Variablen sind alle grenzperiodisch mit dem Periodensystem $(q_1, \ldots, q_M)$, und ihre Fourierentwicklungen entstehen aus den Fourierentwicklungen der entsprechenden Funktionen $F(x_1, x_2, \ldots)$ einfach dadurch, daß alle Glieder, welche mindestens eine der Variablen $x_{M+1}$, $x_{M+2}, \ldots$ enthalten, gestrichen werden. Ferner bilden diese Funktionen $G(x_1, \ldots, x_M)$ eine Menge $\Gamma_2$ der in II betrachteten Art; denn weil sie durch Mittelwertbildung von gleichartig gleichmäßig stetigen und gleichartig grenzperiodischen Funktionen hervorgegangen sind, werden sie offenbar a fortiori selbst gleichartig gleichmäßig stetig und gleichartig grenzperiodisch sein. Hiermit sind wir aber mit dem Beweise des Hilfssatzes zu Ende; in der Tat haben wir ja nur den Satz in II auf die Funktionen $G(x_1, \ldots, x_M)$ der Menge $\Gamma_2$ anzuwenden $\left(\text{mit } \frac{\varepsilon}{2} \text{ statt } \varepsilon\right)$ um Approximationssummen der gewünschten Art für die gegebenen Funktionen $F(x_1, x_2, \ldots)$ zu bekommen.

Wir gelangen nunmehr zum

**Beweis des gleichzeitigen Approximationssatzes.** Zu der gegebenen Menge M von fastperiodischen Funktionen $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ bilden wir mit Hilfe einer Basis $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ der (gemeinsamen) Exponentenfolge $\Lambda_n$ die Menge der zugehörigen grenzperiodischen Funktionen von abzählbar vielen Variablen $F(x_1, x_2, \ldots)$ mit dem gemeinsamen Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots) = \left(\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots\right)$.

Der Beweis wird offenbar geführt sein, wenn es gelingt zu zeigen, daß diese letzte Menge eine Menge $\Gamma$ im Sinne des obigen Hilfssatzes bildet; denn wir brauchen ja alsdann nur diesen Hilfssatz auf die Funktionen $F(x_1, x_2, \ldots)$ anzuwenden und danach $x_1 = x_2 = \cdots = x$ zu setzen, um trigonometrische Approximationssummen der gewünschten Art zu erhalten.

Hierzu müssen wir das Verfahren näher betrachten, durch welches wir in Kapitel II von einer fastperiodischen Funktion $f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ zu der zugehörigen grenzperiodischen Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ gelangten. Wir gingen von der formal gebildeten Reihe

$$\sum A_n e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1 + r_{n,2}\beta_2 x_2 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n})} \tag{27}$$

aus, und „summierten" diese Reihe dadurch, daß wir Faktoren $e^{i\Lambda_n x}$ anhängten; die so entstandene Reihe

$$\sum A_n e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1 + r_{n,2}\beta_2 x_2 + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n})} \cdot e^{i\Lambda_n x}$$

ergab sich als die Fourierreihe einer gewissen fastperiodischen Funktion $\varphi(x) = \varphi(x; x_1, x_2, \ldots)$ (die übrigens zur abgeschlossenen Hülle $\mathsf{H}(f(x+k))$ gehört), und wir definierten die „Summe" $F(x_1, x_2, \ldots)$ der obigen Reihe (27) als den Wert dieser Funktion $\varphi$ im Punkte $x = 0$. Wir bemerken nun zunächst, daß die Menge $\Omega$ sämtlich hierbei verwendeter Funktionen $\varphi(x)$ (wo also $f(x)$ die ganze Funktionenmenge $\mathsf{M}$ und $(x_1, x_2, \ldots)$ den ganzen Raum durchläuft) eine ausgezeichnete Menge von fastperiodischen Funktionen bildet; in der Tat ist nach Voraussetzung die aus den Funktionen $f(x)$ bestehende Menge $\mathsf{M}$ eine ausgezeichnete Menge, und da die Menge $\Omega$ eine Teilmenge der aus den sämtlichen abgeschlossenen Hüllen $\mathsf{H}(f(x+k))$ zusammengesetzten Menge bildet, muß offenbar $\Omega$ ebenfalls ausgezeichnet sein. Hieraus folgt (vgl. S. 131—132), daß es zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ ein (nur von $\varepsilon$ und der Menge $\Omega$ abhängiges) $\gamma > 0$ so gibt, daß für jede unserer Funktionen $F(x_1, x_2, \ldots)$ die Ungleichung

$$|F(x_1', x_2', \ldots) - F(x_1'', x_2'', \ldots)| < \varepsilon \tag{28}$$

für jedes Punktepaar $(x_1', x_2', \ldots)$, $(x_1'', x_2'', \ldots)$ besteht, welches die Ungleichung

$$\sum |A_n|^2 \left| e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1' + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n}')} - e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1'' + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n}'')} \right|^2 < \gamma$$

erfüllt. Wir benutzen nunmehr die Voraussetzung der Existenz der Majoranten $\mathsf{A}_n$ und bestimmen (indem wir uns wieder dem Gedankengang auf S. 132 an-schließen) das $N$ so groß, daß

$$\sum_{n > N} 4 |A_n|^2 < \frac{\gamma}{2}$$

ist, und daß somit die Ungleichung (28) für jede der Funktionen $F(x_1, x_2, \ldots)$ erfüllt ist, wenn nur die Punkte $(x_1', x_2', \ldots)$ und $(x_1'', x_2'', \ldots)$ der Ungleichung

$$(29) \qquad \sum_1^N |A_n|^2 \left| e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1' + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n}')} - e^{i(r_{n,1}\beta_1 x_1'' + \cdots + r_{n,q_n}\beta_{q_n} x_{q_n}'')} \right|^2 < \frac{\gamma}{2}$$

genügen. Aus dieser letzten (für das Erfülltsein der Ungleichung (28) hinreichenden) Ungleichung (29), wo alle vorkommenden Buchstaben nur von der Menge der Funktionen $F(x_1, x_2, \ldots)$ und nicht von den einzelnen Funktionen abhängen, folgt aber unmittelbar, daß diese Menge sowohl gleichartig gleichmäßig stetig als auch gleichartig grenzperiodisch mit dem Periodensystem $(q_1, q_2, \ldots)$ ist, also daß sie tatsächlich eine Menge $\Gamma$ im Sinne des obigen Hilfssatzes ist.

## Verzeichnis der zitierten Literatur.

P. BOHL [1] Über die Darstellung von Funktionen einer Variablen durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variablen proportionalen Argumenten. Magisterdissertation, Dorpat 1893.

[2] Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie, Crelles Journal, Bd. 131 (1906), S. 268—321.

H. BOHR [1] Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln in der Theorie der Dirichletschen Reihen $\sum \frac{a_n}{n^s}$. Göttinger Nachrichten 1913, S. 441—488.

[2] Zur Theorie der allgemeinen Dirichletschen Reihen. Math. Annalen, Bd. 79 (1919), S. 136—156.

[3] Zur Theorie der fast periodischen Funktionen I. Acta Math., Bd. 45 (1924), S. 29—127

[4] Neuer Beweis eines allgemeinen Kroneckerschen Approximationssatzes. Danske Vidensk. Selsk., math.-phys. Medd., Bd. 6, Nr. 8, 1924.

[5] Unendlich viele lineare Kongruenzen mit unendlich vielen Unbekannten. Danske Vidensk. Selsk., math.-phys. Medd., Bd. 7, Nr. 1, 1925.

E. ESCLANGON [1] Les fonctions quasi-périodiques. Thèse, Paris 1904.

[2] Nouvelles recherches sur les fonctions quasi-périodiques. Annales de l'Observ. de Bordeau, 1919.

L. FEJÉR [1] Untersuchungen über Fouriersche Reihen. Math. Annalen, Bd. 58 (1904), S. 51—69.

O. TOEPLITZ [1] Über die Auflösung unendlich vieler Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. Palermo Rendiconti, Bd. 28 (1909), S. 88—96.

K. WEIERSTRASS [1] Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente. Werke, Bd. 3, S. 1—37.

S. WENNBERG [1] Zur Theorie der Dirichletschen Reihen. Dissertation, Upsala 1920.