ÜBER DIE KONGRUENZ ZWEITEN GRADES UND DIE KUMMERSCHE FLÄCHE.

VON

C. JUEL

in KOPENHAGEN.

In dieser Arbeit wird man nur eine sehr kleine Zahl der vielen merkwürdigen Sätze finden, welche man über die Kongruenz zweiten Grades aufgestellt hat. Die Theorie derselben ist von dem ursprünglichen Erfinder, KUMMER, wie auch von vielen späteren reich entwickelt, sowohl von der analytischen, wie auch von der projektivgeometrischen Seite.[1]

Die Aufgabe, die ich mir hier gestellt habe, ist eine etwas andere. Die Voraussetzungen, von welchen ich ausgehe, wie auch die ganz elementaren Methoden, die zu Anwendung kommen, gehören alle der projektiven Analysis Situs an. Es zeigt sich nun, dass man — wenigstens, wenn die zur Kongruenz gehörige Brennfläche Doppelpunkte hat — auch von einem solchen Ausgangspunkt aus zur algebraischen Kongruenz zurückkommt. Insofern kann man sagen, dass diese Arbeit überhaupt nichts neues giebt. Aber es scheint mir nicht ohne Interesse ein neues Beispiel der Erkenntnis zu geben, dass man bisweilen — auch ohne das reelle Gebiet zu verlassen, — ein algebraisches Gebiet durch Stetigkeit in Verbindung mit gewissen Bedingungen, welche der Analysis Situs angehören, definieren kann.

Die Behandlung hätte ich durch eine stärkere Benutzung der bekannten LIE-schen Transformation (in projektiver Form), etwas abkürzen können, wobei

[1] KUMMER, Berliner Abh. 1866, S. 1—120; Projektivgeometrisch: TH. REYE, Crelles J. 1879, S. 84—107; F. SCHUR, Math. Ann. 1879, S. 432. Sammelwerke: JESSOP, A Treatise on the Line Complex (1903), R. STURM, Die Liniengeometrie in synthetischer Behandlung 1892—96. Bd. 1, 2, 3.

ich mich auf meine früher aufgestellte Theorie der Elementarflächen dritter Ordnung hätte stützen können. Aber selbst davon abgesehen, dass die ganze Theorie der auf einen solchen Fläche liegenden Geraden recht weitläuftig ist, sind auf diesem Wege die Beweise mehrerer der Hauptsätze nicht naheliegend.

Ein *Linienkomplex* ist eine Sammlung von Geraden oder — wie wir gewöhnlich sagen wollen — Strahlen im Raume, welche durch jeden Punkt unendlich viele Strahlen sendet, welche eine Kegelfläche bilden, und in jede Ebene unendlich viele Strahlen legt, welche eine Kurve einhüllen.

Eine *Linienkongruenz* sendet durch jeden allgemeinen Punkt und legt in jede allgemeine Ebene eine endliche Zahl von Strahlen, wobei Nul nicht ausgeschlossen ist.

In dieser Arbeit ist ausschliesslich nur von reellen Punkten und Geraden die Rede.

Die *Ordnung* einer Kongruenz wird dementsprechend definiert als die grösste endliche Zahl von Kongruenzstrahlen, welche durch einen Punkte gehen; hierbei soll es nicht ausgeschlossen sein, dass durch gewisse Punkte unendlich viele Strahlen gehen, welche eine Kegelfläche bilden. Dualistisch entsprechend wird die *Klasse* der Kongruenz definiert.

Das einfachste Beispiel ist die bekannte lineare Kongruenz. Ich beabsichtige im folgenden, man kann sagen, die nächst einfachste, Kongruenz zu betrachten. Hierbei ist die erste Voraussetzung, dass dieselbe *stetig* sein soll, d. h. wenn ein Punkt P sich stetig ändert, dann sollen die durch P gehenden Kongruenzstrahlen sich auch stetig ändern. Eine gewisse Ausnahme kommt daher, dass durch zwei Punkte nicht immer gleichviele Strahlen gehen. Wir fordern aber — und werden dies als in der Kontinuitetsforderung mit eingeschlossen betrachten — dass die Änderung so und nur so vor sich geht, dass der bewegliche Punkt einen solchen Punkt überschreitet, durch welchen zwei zusammenfallende Strahlen gehen, wobei zwei durch P gehende Strahlen gewonnen oder verloren werden. Die Punkte, durch welche zwei zusammenfallende Strahlen gehen, nennt man *Brennpunkte* und die Ebenen solcher Strahlenpaare *Brennebenen.*

Die nächste Forderung, die wir an unsere Kongruenz K^{II} stellen, ist nun die, dass sie *zweiter Ordnung und zweiter Klasse sein soll.*

Wir fordern noch, dass K^{II} in einer linearen Sammlung der nächsthöheren Dimension, also *in einem linearen Komplex, liegen soll.*

Mit jedem linearen Komplex ist wie bekannt ein Nulsystem verbunden, wo jedem Punkt P als *Pol* eine durch P gehende Ebene als *Polarplan* entspricht; die Verbindung ist involutorisch.

Die selbstentsprechenden Strahlen des Nulsystems sind die Komplexstrahlen; wenn ein Komplexstrahl eine dem Komplex nicht zugehörige Gerade schneidet, dann schneidet er auch eine andere bestimmte Gerade, die *Polargerade* der ersteren.

Wenn ein Punkt M sich auf einem Kongruenzstrahl l fortbewegt, dann dreht sich die entsprechende Ebene um l, und die zwei Gebilde sind projektivisch. Zwei getrennte Punkte auf l können nicht derselben Ebene μ_0 entsprechen, sonst würde jedem Punkt von l — mit Ausnahme eines Punktes M_0 — die Ebene μ_0 entsprechen, und die Komplexstrahlen würden aus den in μ_0 liegenden und den durch M_0 gehenden Strahlen zusammengesetzt sein. In einem solchen ausgearteten Komplex soll unsere Kongruenz nicht liegen.

Es ist möglich, dass in unserer Kongruenz gewisse Punkte P, *singuläre Punkte*, vorkommen, durch welche unendlich viele Kongruenzstrahlen gehen. Diese müssen dann in einer Ebene π liegen, nämlich in der Polarebene zu P im Nulsystem, und man nennt π eine *singulären Ebene* der Kongruenz.

Aber wir stellen endlich noch die folgende wesentlich begrenzende Forderung:

Unsere Kongruenz K^{II} *soll mit jeder im Komplex enthaltenen einfachen Regelfläche — oder Hyperboloid — entweder 4 oder 2 oder auch keine Strahlen (als Erzeuger) gemein haben, wenn denn nicht jeder Erzeuger ein Kongruenzstrahl ist.*

Aus den Voraussetzungen folgt, dass unsere Kongruenz selbstdualistisch ist im dem Sinne, dass dieselbe durch das Nulsystem des Komplexes in eine Kongruenz derselben Art transformiert wird, womit in diesem Augenblick nicht gesagt wird, dass die zwei Kongruenzen identisch sind.

Wir wollen nun die Fläche (l) zu bestimmen suchen, welche von den eine gegebene Gerade l schneidenden Kongruenzstrahlen gebildet wird. Ob zu jeder Gerade l eine Kongruenzfläche (l) gehört, wissen wir nicht. Wenn aber l von *einem* Kongruenzstrahl geschnittten wird — speziell, wenn er einen Brennpunkt enthält — dann wird er der Kontinuitet zufolge von unendlich vielen Kongruenzstrahlen geschnitten, und die Fläche existiert.

Man sieht nun sogleich:

(1). *Die zu einer Geraden gehörige Kongruenzfläche ist vierter Ordnung.*

Eine beliebige von l und der Polargeraden l' zu l verschiedene Gerade p schneidet nämlich (l) in 4, 2 oder 0 Punkten, weil die Komplexstrahlen, welche l und p schneiden, eine einfache Regelfläche bilden. Weil ferner jeder Kongruenzstrahl, welcher l schneidet, auch l' schneiden muss, sind sowohl l wie auch l' doppelte Leitlinien der Fläche; diese kann also nicht zweiter sondern muss vierter Ordnung sein. Es braucht nicht l in seiner ganzen Ausdehnung auf (l) zu liegen; sondern die auf l (eventuell) liegenden Brennpunkte werden l in Stücke zerlegen, welche wechselweise auf (l) und nicht auf (l) liegen.

Ist l ein Komplexstrahl aber kein Kongruenzstrahl, dann bleibt die Fläche immer vierter Ordnung, aber l und l' fallen in eine Doppellinie der Fläche zusammen.

Ist l ein Kongruenzstrahl, dann geht durch jeden Punkt von l ausser l nur ein Strahl, und es liegt in jeder durch l gehenden Ebene auch nur ein Strahl. Es ist also l eine einfache Leitlinie der Fläche. Diese wird von einer nicht durch l gehenden Ebene μ in einer Kurve φ geschnitten, welche in $(l\mu) = A$ entweder einen einfachen oder auch einen dreifachen Punkt hat, weil eine durch A gehende und in μ liegende Gerade ausser A nur noch einen Punkt mit φ gemein haben kann. Im letztgenannten Fall hat φ in A drei Tangenten; die eine von diesen ist die Schnittlinie von μ mit der Ebene der zwei durch A gehenden Kongruenzstrahlen; die zwei anderen geben mit l verbunden zwei durch l gehende Brennebenen λ_1 und λ_2. Es hat dann l auch zwei Brennpunkte. Die Ebenen λ_1 und λ_2 können nicht von der Wahl der Ebene μ abhängig sein. Jede nicht durch A gehende Ebene muss (l) in einer Kurve schneiden, die in l einen dreifachen Punkt hat. Er muss deshalb (l) zweimal durch l gehen, und dieser Strahl muss ein doppelter *Erzeuger* von (l) sein.

Wenn aber A ein einfacher Punkt auf φ ist, dann gehen durch l keine Brennebenen. Man hat also:

(2). *Auf einem Kongruenzstrahl l liegen entweder zwei oder auch keine Brennpunkte; gleichzeitig gehen durch l zwei oder keine Brennebenen.*

Wir werden es nun als unsere Hauptaufgabe betrachten den Ort Φ der Brennpunkte und dualistisch die Einhüllungsfläche der Brennebenen zu untersuchen.

Wir bestimmen erst die Zahl der auf einer beliebigen Geraden m liegenden Brennpunkte, wo m kein Komplexstrahl ist. Durch einen Punkt A von m möge ein Kongruenzstrahl a gehen, der die Polargerade m' zu m in einem Punkt A' schneidet. Geht durch keinen Punkt von m ein Strahl, dann liegt auf m kein

Brennpunkt, und geht durch m keine Brennebene. Die im allgemeinen Fall zu m gehörige Kongruenzfläche (m) wird von einer durch a, aber nicht durch m oder m' gehenden Ebene α ausser in a noch in einer Kurve φ^3 dritter Ordnung geschnitten. Diese Kurve geht durch A und A', welche einfache Punkte auf φ^3 sind.

Um nun die durch einen Punkt M von m gehenden Strahlen zu finden, legt man durch M und m' eine Ebene μ, welche α in einer Geraden p schneiden möge. Die von A' verschiedenen Schnittpunkte von p mit φ^3 geben mit M verbunden die gesuchten Strahlen. Diese fallen zusammen, wenn p die Kurve berührt. Durch einen Punkt A' einer Kurve dritter Ordnung gehen nun 0, 2 oder 4 Tangenten, welche ausserhalb A' berühren; d. h. durch m' gehen 0, 2 oder 4 Brennebenen und in m liegen 0, 2 oder 4 Brennpunkte. Wenn durch A' keine solche Tangente an φ^3 geht, dann ist diese Kurve zweizügig, und A' liegt auf dem Oval desselben. Aber dann muss aus A entweder 0 oder 4 Tangenten an φ^3 gehen, jenachdem A auch auf dem Oval oder auf dem unpaaren Zweig der Kurve liegt. Wenn aber durch A' zwei Tangenten an φ^3 gehen, dann ist die Kurve einzügig, und aus jedem anderen Punkt der Kurve gehen dann auch zwei Tangenten.

Dieselben Schlüsse gelten auch, wenn m ein Komplexstrahl ist, wo m und m' zusammenfallen. Wenn m ein Kongruenzstrahl ist, haben wir schon oben gesehen, dass er höchstens zwei Punkte mit der Brennfläche gemein hat.

Man hat also:

(3). *Die Brennfläche Φ wird von jeder Geraden des Raumes in 0, 2 oder 4 Punkten geschnitten; wenn die Gerade zwei Punkte mit Φ gemein hat, dann gehen durch m auch zwei Brennebenen. Wenn aber m vier Punkte mit Φ gemein hat, dann gehen durch m, 0 oder 4 Brennebenen, und umgekehrt.*

Die Brennfläche ist also eine Fläche vierter Ordnung. Aus der selbstdualischen Definition unserer Kongruenz folgt, dass die Einhüllungsfläche Φ' der Brennebenen eine Fläche vierter Klasse sein muss. Man sieht aber sofort, dass die zwei Flächen zusammenfallen müssen.

Man braucht nämlich nur nachzuweisen, dass jede Gerade m, welche Φ berührt, auch Tangente an Φ' ist, d. h. dass durch m zwei zusammenfallende Brennebenen gehen. Denken wir uns erst, dass m kein Komplexstrahl ist. Indem wir die oben beschriebene Konstruktion und dieselben Bezeichnungen beibehalten, muss, wenn m Tangente an Φ ist, durch den Punkt A' zwei zusammenfallende

Tangenten an φ^3 gehen. Das ist nur möglich, wenn φ^3 einen Doppelpunkt O hat, wo dann $A'O$ als eine von A' ausgehende doppelt zu rechnende Tangente ist. Aber dann geht auch aus A zwei in AO zusammenfallende Tangenten an φ^3, und damit ist das verlangte erwiesen, wenn m kein Kongruenzstrahl ist. Weil aber die Kongruenz stetig vorausgesetzt wird, werden auch die Sammlungen von Brennpunkten und Brennebenen stetig, und weil jeder Komplexstrahl in einer überall dichten Sammlung von Geraden liegt, welche nicht Kongruenzstrahlen sind, folgt dass jede Tangente an Φ auch Tangente an Φ' sein muss, d. h.:

(4). *Der Ort der Brennpunkt fällt mit der Einhüllungsfläche der Brennebenen zusammen.*

Wenn m ein Kongruenzstrahl ist, dann wird, wie schon oben bemerkt, m entweder eine einfache oder auch eine dreifache Gerade von (m) sein, und die oben bestimmte Kurve φ wird dementsprechend entweder nicht durch den Punkt A gehen, oder auch A als einen Doppelpunkt haben. Das letztere muss der Fall sein, wenn man ausdrücklich voraussetzt, dass m zwei Brennpunkte hat. Die zugehörigen Brennebenen gehen durch m und die Tangenten an φ in A. Als Tangenten aus A an φ sind sie aber doppel zu rechnen, und durch m gehen also zweimal zwei zusammenfallende Berührungsebenen an Φ, d. h.:

(5). *Ein Kongruenzstrahl mit zwei Brennpunkten berührt in diesen Punkten die Brennfläche.*

Es seien M_1 und M_2 die zwei Punkte, in welchen ein Kongruenzstrahl m die Brennfläche berührt. Die zwei durch M_1 gehenden zusammenfallenden Kongruenzstrahlen liegen in der Polarebene μ_1 zu M_1. Diese Ebene muss den zwei vorigen Sätzen zufolge die Fläche Φ berühren, und zwar entweder in M_1 oder M_2. Aber man sieht leicht, dass M_2 der Berührungspunkt sein muss. Es sei nämlich M ein Punkt, der auf einer die Fläche in M_1 berührenden, aber nicht mit m zusammenfallenden Tangente t gegen M konvergiert. Die Polarebene μ zu M dreht sich um die Polargerade t' zu t, und diese Gerade t und t' liegen als Polargerade nicht in einer Ebene mit m. Also kann $\mu_1 = (mt')$ nicht mit (mt) zusammenfallen, d. h. μ_1 muss in M_2 berühren. Man hat also:

(6). *Wenn ein Kongruenzstrahl die Brennfläche in M_1 und M_2 berührt, dann berührt die zu M_1 gehörige Brennebene die Fläche in M_2 und umgekehrt.*

Hieraus sieht man ausdrücklich:

(7). *Die Brennfläche entspricht im Nulsystems sich selbst.*

Es ist selbstverständlich nicht jede Doppeltangente der Brennfläche ein Kongruenzstrahl. Aber ein Kongruenzstrahl, der überhaupt Punkte mit der Brennfläche gemein hat, muss eine Doppeltangente derselben sein. Deshalb kann eine Gerade, welche Φ dreimal in einem Punkt A und einmal in einem anderen Punkt B schneidet, kein Kongruenzstrahl sein; dagegen ist es möglich, dass ein Kongruenzstrahl in vier zusammenfallenden Punkten schneiden kann.

Wir werden jetzt ein paar selbstverständliche aber wichtige Sätze nennen.

(8). *Der Kegel, welcher die Fläche aus einem Punkt der Fläche projiziert, kann nur in den Verbindungslinien des Punktes mit eventuellen Doppelpunkten der Fläche Doppellinien haben.*

Die Fläche ist nämlich vierter Ordnung.

Dualistisch erhält man, indem eine Doppelebene als das dualistische zu einem Doppelpunkte definiert wird:

(9). *Die Schnittkurve der Fläche mit einer ihrer Tangentialebenen kann nur in den Schnittlinien mit eventuellen Doppelebenen Doppeltangenten haben.*

Denken wir uns jetzt M sei ein parabolischer Punkt der Fläche; dann schneidet die Tangentialebene μ in M die Fläche in einer Kurve, welche in M eine gewöhnliche Spitze hat. Durch M wie durch jeden anderen Punkt der Fläche geht ein Kongruenzstrahl. Diese kann einer obigen Bemerkung zufolge nicht die Spitztangente sein; deshalb muss durch M eine in μ liegende Tangente t gehen, welche die Fläche in einem von M verschiedenen Punkt M_1 berührt. Aber betrachten wir eine μ naheliegende Tangentialebene, wird diese die Fläche in einer Kurve schneiden, welche in der Nähe von M eine kleine Schleife oder auch zwei Inflexionstangenten haben wird. Eine t nachliegende Gerade t_1 muss dann die

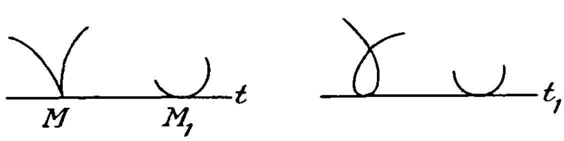

Fig. a.

Schnittkurve von Φ mit μ in zwei Punkten berühren, der eine in der Nähe von M, der andere in der Nähe von M_1. (Siehe Figur.) Das ist aber des vorigen Satzes wegen unstatthaft. Man hat also:

(10). *Die Brennfläche kann keine eigentliche parabolische Kurve haben.*

Dagegen wohl eine Kurve M, deren Tangenten alle vierpunktig berühren (nämlich die später zu nennenden singulären Kurven).

Dualistisch hat man auch:

(11). *Die Brennfläche hat keine Spitzkurve.*

Man hat ferner

(12). *Eine Brennfläche, welche keine Gerade enthält, kann keine doppelt berührende Devellopable haben.*

Es sei nämlich π eine Ebene, welche in zwei Punkten A und B berührt. Wenn nun AB ein Kongruenzstrahl wäre, dann würde in dem linearen Komplex den zwei Punkten A und B dieselbe Ebene entsprechen, was, wie schon früher bemerkt, unmöglich ist. Wenn aber AB kein Kongruenzstrahl ist, dann geht durch A ein Kongruenzstrahl, der in einem von A verschiedenen Punkt C die Fläche berührt. Bildet man nun den Umriss ω der Fläche aus einem von A und C verschiedenen Punkt von AC, dann hat dieser im Bilde A_1 von A einen Doppelpunkt, und die eine der Tangenten in A_1 berührt ω im Bilde von B. Das ist aber unmöglich weil ω vierter Klasse ist.

Dualistisch erhält man den für das folgende wichtigen Satz:

(13). *Die Brennfläche hat keine Doppelkurve.*

Wir haben hier die *neue Voraussetzung* gemacht, dass die Brennfläche keine Gerade enthält, und an diese Voraussetzung werden wir festhalten, nicht aus einem principiellen Grund sondern um die Aufgabe zu begrenzen.

Die Fläche kann aber Doppelpunkte und Doppelebenen haben, und alle diese stehen mit den singulären Elementen der Kongruenz in Verbindung. Man hat nämlich:

(14). *Jede Doppelebene der Brennfläche ist eine singuläre Ebene und jeder Doppelpunkt derselben ist ein singulärer Punkt der Kongruenz.*

Es berühre eine Ebene π die Fläche einer Kurve k zweiter Ordnung entlang, und es sei P der zu π im Nulsystem adjungierte Punkt. P liegt in π und zugleich in Φ — weil diese Fläche im Nulsystem sich selbst entspricht — und muss also in k liegen, weil Φ vierter Ordnung ist. Es muss P noch ein Doppelpunkt der Fläche sein, weil diese in P von allen jenen Ebenen berührt wird, welche den Punkten von k entsprechen. Der Kongruenzstrahl, der durch einen beliebigen

Punkt M von k geht, ist nun die Schnittlinie der in M berührenden Ebene mit der zu M adjungierten Ebene, also die Gerade MP. Durch P gehen also unendlich viele Kongruenzstrahlen, und ist deshalb ein singulärer Punkt.

Umgekehrt hat man, dass jede singuläre Ebene π, welche überhaupt Punkte mit der Brennfläche gemein hat, eine Doppelebene derselben sein muss — und dualistisch; jeder in π liegende Kongruenzstrahl, der mit Φ Punkte gemein hat, muss nämlich die Fläche zweimal berühren, so dass π eine Doppelebene sein muss.

In einer Doppelebene π können mehrere Doppelpunkte liegen, wenn auch nur einer von diesen π adjungiert sein kann.

Ebenso können durch einen Doppelpunkt P mehrere Doppelebenen gehen, als die zu P adjungierte. Man muss aber erinnern, dass jede durch P gehende Tangentialebene — auch eine Doppelebene — einem Punkt von k adjungiert ist, und deshalb die Kegelfläche (P) berührt, welche aus den Tangenten in P gebildet wird.

Man sieht sogleich aus (7):

(15). *In einer Doppelebene liegen ebensoviele Doppelpunkte als durch den adjungierten Doppelpunkt Doppelebenen gehen.*

Man hat ferner als einen Hauptsatz:

(16). *Durch einen Doppelpunkt P können keine anderen ausserhalb P berührende Ebenen gehen als Doppelebenen.*

Es sei nämlich μ eine durch P gehende und ausserhalb P in einem Punkt Q berührende Ebene; diese muss aber den obigen Bemerkungen zufolge auch (P) berühren. Bildet man also den Umriss ψ_1 der Fläche aus einem Punkt von μ, wird dieser im Bilde P_1 von P einen Doppelpunkt haben, aus welchem eine ausserhalb P_1 berührende Tangente geht, nämlich die Spur von μ (siehe (12)). Dies ist aber, weil ψ_1 vierter Klasse ist, nur möglich, wenn μ eine Doppelebene ist; denn dann wird durch die Spur von μ dem Umriss ψ_1 nur eine Gerade hinzugefügt, welche durch P_1 gehend die Kurve ausserhalb P_1 berührt, und das ändert nicht die Klasse der Kurve.

Durch einen Doppelpunkt P geht jedenfalls eine Doppelebene, nämlich die zu P adjungierte Ebene π; aber es muss wenigstens noch eine durch P gehen. Eine beliebige durch P gehende Ebene μ schneidet nämlich Φ in einer Kurve φ, welche in P einen eigentlichen oder uneigentlichen Doppelpunkt hat[1], und π in einer Tangente p an φ. Aus einen Doppelpunkt P einer Kurve vierter Ordnung gehen aber offenbar eine paare Zahl von Tangenten, welche ausserhalb P berühren, indem φ (wenigstens ausserhalb P) keine Spitzen hat (11). Ausser P geht also wenigstens noch eine Tangente, welche in einem Punkt Q berühren möge. Die Tangentenebene in Q geht nun durch P_1 und muss also dem vorigen Satz zufolge eine Doppelebene sein.

Man hat also:

(17). *Durch jeden Doppelpunkt gehen wenigstens zwei Doppelebenen, und in jeder Doppelebene liegen wenigstens zwei Doppelpunkte.*

Man kann nun ferner den weitergehenden Satz nachweisen:

(18). *Wenn durch einen Doppelpunkt s Doppelebenen gehen, dann gehen durch jeden Doppelpunkt s Doppelebenen, und liegen in jeder Doppelebene s Doppelpunkte, wo $s = 2, 4, 6, \ldots$*

Es genügt nachzuweisen, dass durch zwei beliebige Doppelpunkte P_1 und P_2 gleichviele Doppelebenen gehen. Durch die Gerade P_1P_2 legen wir eine keinen neuen Doppelpunkt enthaltende Ebene μ, welche Φ in einer Kurve φ vierter Ordnung schneidet, für welche infolge (17) P_1 und P_2 eigentliche oder uneigentliche Doppelpunkte sind. Es kommt nun dem vorigen zufolge nur darauf an nachzuweisen, dass durch P_1 und P_2 gleichviele Tangenten an φ gehen.

Diese Kurve kann aus mehreren getrennten Zweigen zusammengesetzt sein, welche, wie aus (17) zu sehen, alle paar sein müssen. Betrachten wir erst einen Zweig α, der durch keinen der Doppelpunkte geht. Dieser Zweig ist zweiter oder vierter Ordnung und kann keine Punkte mit der Geraden P_1P_2 gemein haben. Mittels der (1—1)deutigen Korrespondenz der Punkte, in welchen α von einer durch P_1 — oder P_2 — gehenden Geraden geschnitten wird, sieht man sogleich, dass aus P_1 sowie aus P_2 zwei Tangenten an α gehen. Denken wir uns ferner β sei ein Zweig, für welche P_1 ein eigentlicher, P_2 ein uneigentlicher Doppelpunkt ist. Aus dem oben gesagten folgt, dass aus P_2 zwei Tangenten an β gehen. Aber auch aus P_1 gehen zwei Tangenten an β (mehrere als zwei sind jedenfalls nicht möglich). Wenn nämlich nicht, dann müste jede durch P_1 ge-

[1] Ein uneigentlicher Doppelpunkt P einer Kurve φ^4 ist in dieser Verbindung ein ausserhalb φ^4 liegender Punkt von der Art, dass jede durch P gehende Gerade höchstens zwei Punkte mit der Kurve gemein hat.

hende und in μ liegende Gerade ausser P_1 noch zwei Punkte mit β gemein haben, auch die Gerade $P_1 P_2$; das ist aber unmöglich, weil diese Gerade mit φ ausser P_1 keine weitere Punkte gemein haben kann.

Denken mir uns endlich γ sei ein Zweig, der P_1 und P_2 als eigentliche Doppelpunkte hat, und dass aus P_1 zwei Tangenten, aus P_2 aber keine Tangenten an γ gehen. Ist nun M ein beliebiger Punkt von γ, und schneiden die Gerade $P_1 M$ und $P_2 M$ nochmals bzw. in M_1 und M_2, dann werden auf γ die Punkte M und M_1 im entgegengesetzten Sinn, M und M_2 aber in demselben Sinn laufen. Es werden also M_1 und M_2 in entgegengesetzten Sinn laufen, aber das fordert, dass γ einen dritten Doppelpunkt haben muss. Das ist aber ausgeschlossen, weil Φ keine Doppelkurve hat. Damit ist der Satz bewiesen.

Durch jeden Doppelpunkt gehen wie oben bemerkt wenigstens zwei Doppelebenen. Es ist aber möglich, dass die Fläche keine Doppelpunkte hat; sie hat dann auch keine Doppelebenen. Über eine solche Fläche lässt sich noch etwas sagen. In allen Fällen kann ein Übergang von einem konvexen zu einem unkonvexen Flächenteil, weil die Fläche keine egentliche parabolische Kurve hat, nur durch eine Berührungskurve mit einer Doppelebene geschehen. Wenn solche Ebenen nicht vorhanden sind, dann muss die Fläche, oder jedes getrenntes Netz derselben, entweder überall konvex oder überall unkonvex sein.

Denken wie uns erst, dass die Fläche ein überall konvexes Netz Φ_1 enthält; dieses ist ein Ovaloid, d. h. eine projektiv aufgefasste Eifläche]. Die Brennfläche Φ muss in diesem Fall noch wenigstens ein anderes Netz Φ_2 enthalten. Durch jeden Punkt von Φ soll nämlich ein Kongruenzstrahl gehen, der in M und noch einem Punkt die Fläche berührt; das ist aber nicht möglich, wenn M ein Punkt von Φ_1 ist, und Φ keine andere Netze enthält. Das Flächennetz Φ_2 muss aber auch ein Ovaloid sein. Es wird erstens nämlich von jeder Φ_1 berührenden Ebene in einer Kurve ohne Doppelpunkte, Doppeltangenten und Spitzen, d. h. in einer Kurve zweiter Ordnung geschnitten. Aber wir können leicht sehen, dass es dann auch von jeder Ebene μ in einer Kurve zweiter Ordnung geschnitten wird. Es sei nämlich l eine in μ liegende Gerade. Wenn diese Φ_1 schneidet, dann wird sie nur zwei Punkte mit Φ_2 gemein haben können, weil $\Phi_1 + \Phi_2$ vierter Ordnung ist. Wenn sie aber Φ_1 nicht schneidet, dann geht durch l wenigstens eine Φ_1 berührende Ebene, so dass l auch dann nur zwei Punkte mit Φ_2 gemein haben kann. Es ist Φ_2 also eine Fläche zweiter Ordnung, welche ein Ovaloid sein muss, wenn wir uns die Einschränkung auflegen nur Brennflächen ohne Gerade in Betracht zu ziehen. Die Brennfläche Φ

kann kein drittes Ovaloid Φ_3 enthalten, denn eine Φ_1 und Φ_2 berührende Geraden (und eine solche geht ja durch jeden Punkt von Φ_1) kann nicht Φ_3 schneiden, weil Φ vierter Ordnung ist, und wenn sie nicht schneidet, dann würde durch l zwei Φ_3 berührende Ebenen gehen, was auch nicht angeht, weil Φ vierter Klasse ist.

Die zwei Ovaloids, aus welchen Φ zusammengesetzt ist, liegen so, dass sie keine Schnittkurve und keine doppelt berührende Developpable haben, und noch so, dass jede das eine Netz berührende Ebene das andere schneidet, sonst würden auf Φ Punkte liegen, durch welche keine Brennstrahlen gehen. Man sieht hieraus leicht, dass die zwei Netze einander in zwei Punkte berühren müssen, und dass, wenn das eine ins Endliche projiziert wird, dann das andere ins Unendliche gehen muss.

Es kann Φ aber auch ein überall unkonvexes Netz enthalten. Eine dieses Netz in einem Punkt M berührende Ebene schneidet dasselbe in einer Kurve vierter Ordnung mit einem und nur einem Doppelpunkt (in M), und ohne Doppeltangenten und Spitzen. Ein Zweig vierter Ordnung ohne Doppeltangenten hat aber wenigstens zwei Doppelpunkte.[1] Deshalb muss die Schnittkurve zwei Zweige a_1 und a_2 dritter Ordnung enthalten, welche sich in M treffen. Ausser diesen kann die Fläche noch einen Zweig zweiter Ordnung enthalten, welche mit den zwei erstgenannten eine vollständige Kurve vierter Ordnung ausmachen. Man hat also

(19). *Eine Brennfläche ohne Geraden ist, wenn sie keine Doppelpunkte und keine Doppelebenen hat, entweder aus zwei Ovaloiden gebildet, oder aus — im Allgemeinen — zwei unkonvexen Netzen, welche von einer beliebigen ihrer Tangentialebenen in zwei Zweigen dritter Ordnung und einem Oval geschnitten wird.*

Um nun die Zahl der singulären Ebenen der Kongruenz zu bestimmen, kann man auf die von Lie entwickelte aber projektiv aufgefasste Transformation zurückgreifen. Diese ermöglicht, wie in den Lehrbüchern der Liniengeometrie gelernt wird, die Strahlen eines linearen Komplexes auf die Punkte des gewöhnlichen Raumes durchgängig eindeutig abzubilden.[2] Den Strahlen einer im Komplex enthaltenen Kongruenz entsprechen die Punkte einer Fläche F. Man kann die Abbildung so einrichten, dass den Strahlen eines beliebigen durch eine

[1] Siehe: Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven 3. und 4. Ordnung. Det Kgl. danske Vidensk. Selsk. Skrifter (7. R. 11, 2) 1914.

[2] Siehe z. B. Sturm, Liniengeometri, Bd. II, S. 146 u. f. und Cremona, Accademia dei Lincei 1875—76, S. 285—302

gewisse feste Gerade gehenden Hyperboloids die Punkte einer Gerade im Raume entsprechen. Wenn die feste Gerade auf F liegt, wird also die zu unserer Kongruenz K^{II} gehörige Fläche F dritter Ordnung sein. Ferner entsprechen jenen Geraden der Fläche, welche einen festen auf der Fläche liegenden Kegelschnitt $\varkappa$ treffen, im *Linienraum* die Strahlen eines Büschels. Man weiss in unserer Verbindung nicht, dass die Fläche algebraisch ist, aber, wie ich in einer früheren Arbeit entwickelt habe, ist die Theorie der auf einer Fläche dritter Ordnung liegenden Geraden von dem algebraischen Charakter derselben unabhängig.[1] Es gibt deshalb auf der Fläche dritter Ordnung jedenfalls 0, 4, 8 oder auch 16 Gerade, welche $\varkappa$ treffen — oder eine bestimmte Gerade der Fläche nicht treffen. Ebenso viele Doppelpunkte und Doppelebenen wird die Brennfläche haben.

Wenn $s=2$, wenn also durch einen Doppelpunkt P_1 nur zwei Doppelebenen gehen, dann hat man sicher noch einen Doppelpunkt P_2 also auch zwei Doppelebenen π_1 und π_2. Die Doppelpunkte müssen also in Paaren auftreten. Mehr als drei Paare sind nicht möglich; wenn nämlich $P_1 P_2$, $P_3 P_4$, $P_5 P_6$ drei Paare wären, dann würde die Ebene $P_1 P_3 P_5$ drei Kongruenzstrahlen enthalten, so dass durch P_1 eine dritte Doppelebene gehen würde. Dass aber immer zwei auftreten, entnehme ich der Kürze wegen meiner oben erwähnten Arbeit.[2]

Wenn $s > 2$, führt aber eine direkte sich dem obigen anschliessende Betrachtung kürzer zum Resultat.

Denken wir uns also eine Doppelebene π_1, welche ausser ihrem Pol P_1 noch wenigstens drei andere Doppelpunkte P_2, P_3, P_4 enthält. Die Kongruenzstrahlen, welche die Gerade $P_2 P_3$ treffen, erzeugen eine Fläche vierter Ordnung. Aber diese löst sich hier in vier Ebenen auf, nämlich die folgenden: die durch $P_1 P_2$ gehende zu P_2 konjugierte Ebene π_2, die durch $P_1 P_3$ gehende Ebene π_3, die Ebene π_1, und deshalb noch eine Ebene, welche durch $P_2 P_3$ gehen muss, weil diese Gerade eine Doppellinie der Kongruenzfläche sein soll. Die neue Ebene π_{23} ist auch eine Doppelebene, weil sie unbegrenzt viele $P_2 P_3$ schneidende Kongruenzstrahlen enthält, und ihr Pol liegt in der Schnittlinie $(\pi_2 \pi_3)$, weil diese die Polargerade zu $(P_2 P_3)$ ist. Aber ein in $(\pi_2 \pi_3)$ liegender Doppelpunkt muss ein Schnittpunkt der in π_2 und π_3 liegenden singulären Kurven sein. In den Seitenflächen der Tetraeder $P_1 P_2 P_3 P_{23}$ müssen alle singulären Punkte der Kon-

[1] C. Juel, Elementarflächen dritter Ordnung, Math. Ann., Bd. 76, 1915. S. 548.

[2] Man braucht aus der im Allgemeinen recht weitläuftigen Theorie der Geraden auf einer Elementarfläche dritter Ordnung nur der Satz, dass wenn eine Gerade der Fläche von mehr als von einem Paar von Geraden der Fläche geschnitten wird, dann wenigstens von drei Paaren; der Beweis lässt sich transformieren, aber ich unterlasse es.

gruenz liegen; ist nämlich P ein beliebiger ausserhalb π_1, π_2 und π_3 liegender singulärer Punkt, und π dessen Polarebene, dann schneiden π die Gerade $P_2 P_3$ in einem von P_2 und P_3 verschiedenen Punkt Q, so dass PQ eine $P_2 P_3$ schneidender Kongruenzstrahl ist.

Wenn man sich nun denkt, dass in jeder singulären Ebene s singuläre Punkte liegen, findet man in π_1 s singuläre Punkte, und in π_2, π_3 π_{23} bzw. $s-2$, $s-3$ und $s-3$ neue singuläre Punkte, so dass man als Zahl x der Doppelpunkte der Brennfläche erhält:

$$x = 4s - 8.$$

Aber man kann eine höhere Begrenzung für x finden, wenn man auch die zu $P_3 P_4$ gehörige Kongruenzfläche $(P_3 P_4)$ in Betracht zieht. Diese besteht aus den Ebenen π_1, π_3, π_4 und noch eine durch $P_3 P_4$ gehende singuläre Ebene π_{34}. Alle Doppelpunkte müssen auch in dieser degenerierten Fläche liegen, also teils in den Ebenen π_1, π_3, teils in den vier Schnittlinien $(\pi_2 \pi_4)$, $(\pi_{23} \pi_{34})$, $(\pi_2 \pi_{34})$ und $(\pi_4 \pi_{23})$. Die Schnittpunkte dieser vier Geraden mit Φ *können* Doppelpunkte sein, und andere ausserhalb π_1 und π_3 liegende kann es jedenfalls nicht geben. Die zwei erstgenannten Gerade gehen bzw. durch P_1 und P_3; jede von dieser kann also ausserhalb π_1 und π_3 *höchstens* einen Doppelpunkt enthalten. Die zwei letztgenannten schneiden nicht Φ in Punkten von π_1 oder π_3 und können deshalb möglicherweise jede zwei neue Doppelpunkte enthalten. Man findet so:

$$x < s + (s-2) + 2 + 4 = 2s + 4.$$

Aus

$$2s + 4 \geqq 4s - 8$$

folgt

$$s \leqq 6,$$

d. h.

$$s = 6 \quad \text{oder} \quad s = 4.$$

(20). *Wenn $s=6$, dann hat die Fläche $2s+4=16$ Doppelpunkte, wenn $s=4$, dann hat sie 8 Doppelpunkte.*

Wir sind jetzt hinreichend vorbereitet um den Nachweis führen zu können, dass unsere Kongruenz, dem Satz von Caporali entsprechend, in einem tetraedalen Komplex enthalten ist, und demnach algebraisch sein muss.[1]

Man wähle zwei Paare von *verbundenen* Doppelpunkten $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$ mit den konjugierten Ebene $\pi_1 \pi_2$ und $\pi_3 \pi_4$. Darunter verstehen wir, dass π_1

[1] Caporali, Sui complessi e sulle congruenze de 2° grada, Acc. dei Lincei 1878, S. 749.

und π_2 durch P_1 und P_2, π_3 und π_4 durch P_3 und P_4 gehen, aber weder π_3 noch π_4 durch P_1 und P_2 geht. Solche zwei Paare lassen sich finden sowohl für $s=6$ wie für $s=4$ und $s=2$.

Wir nehmen nun eine durch P_1 gehende und in π_2 liegende Gerade p. Diese wird von den in π_1 und in π_2 liegenden Kongruenzstrahlen geschnitten und deshalb noch von den Erzeugern m eines Hyperboloid (p). Alle diese Erzeuger schneiden auch die Polargerade q zu p, wo q eine in π_1 liegende und durch P_2 gehende Gerade ist; die zwei von p und von q gebildeten Büschel sind projektiv. Die Hyperboloide (p) gehen alle durch die Gerade $P_1 P_2=a$, berühren in P_1 und P_2 die Ebenen π_2 und π_1, und gehen auch durch die Punkte P_3 und P_4, weil die konjugierten Ebenen π_3 und π_4 nicht durch P_1 oder P_2 gehen. Aber die Hyperboloide (p) bilden einen Büschel. Durch $P_3 P_4=b$ lege man nämlich eine beliebige feste Ebene π. Diese schneidet ein Hyperboloid (p) in einem Kegelschnitt k, welche durch P_3, P_4 und den Punkt $(\pi a)=A$ geht. Alle Kurven k schneiden die festen Geraden $(\pi \pi_1)=r_1$, und $(\pi \pi_2)=r_2$ ausser in A noch in prejektiven Punktreihen, nämlich in den Reihen von Punkten, in welchen r_1 und r_2 von entsprechenden Geraden p und q geschnitten werden. Die Kurven müssen deshalb einen Büschel bilden, wenn die Gerade $P_3 P_4$ die festen Geraden r_1 und r_2 in entsprechenden Punkten der projektiven Verbindung schneiden. Das ist aber der Fall, denn weil $P_3 P_4$ ein Kongruenzstrahl ist, wird diese Gerade von entsprechenden Geraden p und q geschnitten. Wenn aber die Kurven k einen Büschel bilden, dann werden auch die Hyperboloide (p) einen Büschel bilden. Zwei entsprechende Gerade p und q schneiden π_3 in Punkten, dessen Verbindungsgerade s ein Komplexstrahl und also ein Kongruenzstrahl sein muss, weil π_3 eine singuläre Ebene ist. Die Gerade s gehen alle durch P_3 und bilden ein mit dem Büschel der Geraden p projektives Büschel. Aber jede Fläche (p) muss ausser in s die Ebene π_3 noch in einer Geraden t schneiden, welche durch P_4 geht, weil alle Flächen (p) durch P_4 gehen. Entsprechende Gerade (s) und (t) bilden auch projektive Büschel, weil die Linie $(s \,.\, t)$ von einen beliebigen in π_3 liegenden festen Geraden in Punktpaaren einer Involution geschnitten wird.

Alle Strahlen unserer Kongruenz schneiden also entsprechende Strahlen p und t in zwei projektiven Büscheln, welche *nicht* perspektivisch liegen, weil die Gerade $P_1 P_4$ kein Kongruenzstrahl ist. Die Strahlen gehören deshalb einem tetraedalen Komplex an. Der Schnitt eines linearen und eines tetraedalen Komplexes muss aber algebraisch sein. Man hat also:

(21). *Eine stetige in einem linearen Komplex enthaltene Kongruenz zweiter Ordnung und zweiter Klasse, welche mit einer einfachen Regelfläche* 0, 2 *oder* 4 *oder auch unendlich viele Strahlen gemein hat, muss notwendigerweise algebraisch sein, wenigstens, wenn die Brennfläche Doppelpunkte hat.*

Wie es sich verhält, wenn die Brennfläche keine Doppelpunkte hat, oder wenn diese Fläche überhaupt nicht existiert, muss ich dahinstehen lassen.[1]

Ich werde nur noch die folgende kleine Betrachtung anstellen, welche in der vorliegenden Verbindung naheliegend ist. Man kann nämlich fragen, wie viele Doppeltangenten der Brennfläche Φ durch einen Punkt gehen (die Verbindungslinien mit den Doppelpunkten nicht mitgerechnet).[2]

Es ist anschaulicher das dualistische Problem zu betrachten. Wir nehmen dementsprechend erst eine Tangentialebene μ, welche in M berühren und Φ in einer Kurve φ schneiden möge. Hier kann, wenn M seine Lage ändert, keine Änderung in der Zahl der aus M an φ gehenden Tangenten geschehen, weil Φ keine Doppeltangentialebenen hat (eigentliche Doppeltangenten an φ liegen in Doppelebenen). Dies bleibt auch richtig, wenn M einen Doppelpunkt überschreitet, und andere Überschreitungen von singulären Kurven sind nicht nöthig um von einem Punkt der Fläche zu einem beliebigen anderen zu kommen. Wenn aber μ in einem Doppelpunkt P_1 berührt, dann gehen aus P_1 s Tangenten an φ, nämlich die s Schnittlinien von μ mit den s durch P_1 gehenden Doppelebenen. Wenn nun M ein P_1 naheliegender Punkt ist, dann müssen durch M s Tangenten gehen, welche den s genannten naheliegend sind, und keine von den erstgenannten liegt in einer Doppelebene. Man hat also:

(22). *Durch jeden Punkt der Brennfläche gehen* 6, 4 *oder* 2 *Tangenten, welche auch anderswo berühren, jenachdem die Fläche* 16, 8 *oder* 4 *Doppelpunkte hat.*

Nehmen wir nun den Fall $s=6$.

In einer Tangentialebene liegen, wie oben gesagt, Doppeltangenten, welche Schnittlinien mit den Doppelebenen sind. Es sei nun erstens M ein hyperbolischer Punkt. In diesem Fall gehen aus M zwei Tangenten an jenem Zweig φ_1 von φ, der in M einen Doppelpunkt hat; sonst könnte aus M keine weitere Tangenten an φ gehen, weil eine solche mehr als 4 Punkte mit φ gemein haben wür-

[1] Etwas weiter kann man kommen, wenn man zur Stetigkeit noch den analytischen Charakter der Kongruenz hinzufügt. Das ist aber in dieser Verbindung eine etwas fremdartige Forderung, und ich gehe hierauf nicht ein.

[2] Die folgenden ganz einfachen Sätze stehen mit der bekannten 6fachen Erzeugung der Brennfläche in Verbindung, aber hier dreht es sich nur um Realitätsfragen.

de. Die 4 übrigen aus M gehenden Tangenten zeigen, dass φ ausser φ_1 noch zwei andere Zweige haben muss. Je zwei der drei Zweige müssen 4 Tangenten mit einander gemein haben; erstens haben sie nämlich keinen Punkt mit einander gemein, und zweitens kann kein Zweig innerhalb eines anderen liegen, weil φ vierter Ordnung und M ein Doppelpunkt der Kurve ist. Der Zweig φ_1 hat noch wenigstens zwei Doppeltangenten[1]; in μ liegen also wenigstens 14 Doppeltangenten.[1] Wenn M ein elliptischer Punkt ist, dann weiss man nichts sicheres über die letztgenannten zwei, und φ hat wenigstens 12 Doppeltangenten. Dualistisch hat man also:

(23). *Der geometrische Umriss der Fläche mit* 16 *Doppelpunkten aus einem elliptischen Punkt hat wenigstens* 12 *Doppelpunkte, aus einem hyperbolischen wenigstens* 14.

Hat die Fläche 8 Doppelpunkte, dann sind die entsprechenden Zahlen 6 oder 4.

Das absolute Maximum der Zahl der Doppeltangenten der oben genannten Kurve φ ist jedenfalls 16 für $s=6$. Von diesen sind 12 die Tangenten, welche zwei Zweige berühren; es bleiben also höchstens 4, welche denselben Zweig zweimal berühren. Wenn nun der Berührungspunkt M ein hyperbolischer Punkt ist, dann hat der durch M gehende Zweig zwei Doppeltangenten und zwei Wendetangenten. Es können also höchstens zwei »Einbuchtungen» auf den Zweigen vorkommen, im Ganzen daher höchstens 6 Wendetangenten auf φ. Wenn M ein elliptischer Punkt ist, dann erhält man nur die schon ohnehin bekannte höhere Grenze, nämlich 8. Für die Fälle $s=4$ und $s=2$ erhält man dieselben Resultate.

Indem wir wieder den dualischen Satz vorziehen, hat man:

(24) *Der Umriss der Brennfläche aus einem hyperbolischen Punkt der Fläche hat mindestens zwei und höchstens* 6 *Spitzen.*

Wir wollen nun die Schnittkurven der Fläche Φ mit einer beliebigen Ebene betrachten, und nehmen eine Ebene μ, welche einer in einem Punkt M' berührenden Ebene μ' nahe liegt. Es möge Φ von μ' in einer Kurve φ', von μ in einer Kurve φ geschnitten werden. Wenn nun M ein elliptischer Punkt ist, dann können wir uns erst denken, dass Φ in der Nähe von M' keine Punkte mit μ gemein hat. In dem Fall verschwinden die aus M' an φ' gehenden Tan-

[1] Siehe: Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven 3. und 4. Ordnung, Det Kgl. danske Vidensk. Selsk. Skrifter (7. R. 11, 2) 1914.

genten, und φ hat keine andere Doppeltangenten als die Schnittlinien mit den Doppelebenen. Wenn aber μ die Fläche in der Nähe von M' schneidet, dann wird M', der in μ' ein isolierter Punkt für φ' war, durch ein kleiner Oval ersetzt, so dass jede aus M' an φ' gehende Tangente zu zwei Doppeltangenten an φ Anlass giebt. Die Schnittkurve hat also hier $2s$ Doppeltangenten, welche nicht in den Doppelebenen liegen.

Denken wir uns nun, dass M' ein hyperbolischer Punkt ist. Jede μ' naheliegende Ebene μ schneidet in diesem Fall die Fläche Φ in zwei M' naheliegenden Bögen. Wenn $s > 2$, dann hat, wie oben bemerkt, φ' ausser den durch M' gehenden Zweig φ', noch zwei andere Zweige, welche nicht verschwinden, wenn μ' in μ übergeht. Diese neuen Zweige liegen, weil φ' vierter Ordnung ist, in

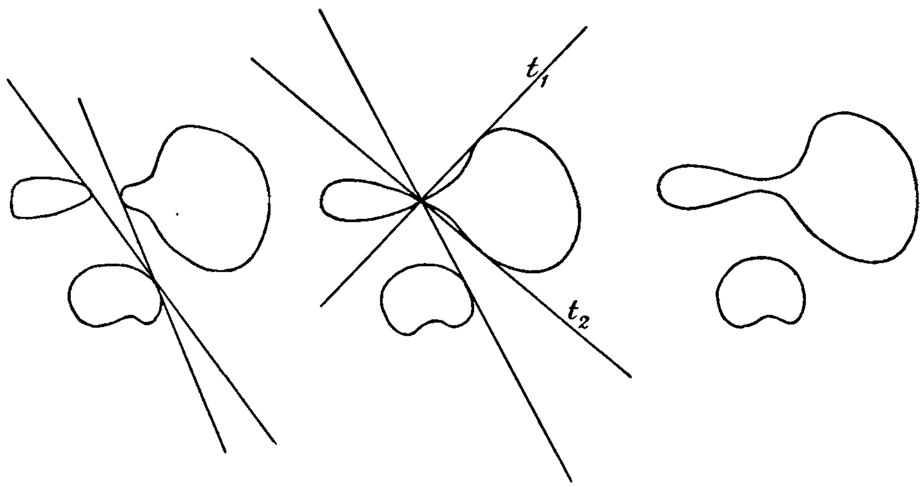

Fig. b.

einem bestimmten durch zwei Gerade t_1 und t_2 begrenzten Winkelraum und zwar in dem, in welchem der Zweig φ'_1 nicht liegt (siehe Figur). Der Zweig φ'_1 hat in M' einen Doppelpunkt. Wenn nun μ' in die naheliegende Lage μ übergeht, dann wird der Doppelpunkt M aufgehoben, und die in M' endenden Bögen von φ'_1 gehen in Bogen von φ_1 über, welche in zweifacher Weise verbunden werden, jenachdem μ' *in der Nähe von M* auf der einen oder auf der anderen Seite von μ liegt. In dem einen Fall werden sie so verbunden, dass φ'_1 wieder in einen einzelnen Zweig übergeht, wo dann alle aus M' an φ' gehenden Tangenten verschwinden. Im zweiten Fall löst φ'_1 sich in zwei Zweige auf, und jede der aus M' an φ' gehenden Tangenten geben zu zwei Doppeltangenten an φ Anlass, welche nicht in Doppelebenen liegen.

Man hat also:

(25). *Durch einen Punkt, welcher in der Nähe der Brennfläche liegt, gehen auf der einen Seite der Fläche* $2s$ *Doppeltangenten, auf der anderen Seite keine.*

Hier ist, wie immer, $s=2$, 4, 6, jenachdem die Fläche 4, 8 oder 16 Doppelpunkte hat.

Wenn ein Punkt P sich von der Fläche entfernt, dann können Änderungen in der Zahl der Doppeltangenten, weil Φ keine berührende Developpable hat, nur dadurch geschehen, dass P entweder eine Doppelebene oder auch eine vierdoppelt berührende Tangente überschreitet. Bei dem ersteren Übergang wird entweder keine Änderung hervorgerufen oder auch werden 12 durch P gehende Doppeltangenten verschwinden oder auftreten, wie man durch eine Betrachtung, welche der obigen ganz analog ist, erkennen wird. Bei dem zweiten Übergang wird jedesmal eine Doppeltangente gewonnen oder verloren.

Wir haben gesehen, dass die Forderung, die wir an unsere Kongruenz gestellt haben, nämlich, dass sie im Allgemeinen 0, 2 oder 4 Strahlen mit einer einfachen Regelfläche gemein haben soll, eine recht starke ist, nämlich so stark, dass sie das Gebilde in das algebraische Gebiet hineinzwingt. Es möge doch zum Schluss bemerkt werden, dass nicht-analytische Kongruenzen zweiter Ordnung und Klasse wirklich existieren. Das einfachste Beispiel ist die Sammlung von jenen Strahlen in einem linearen Komplex, welche eine nicht analytische Eifläche Φ_1 berühren. Die Brennfläche ist auch hier vierter Ordnung, und wird aus Φ_1 und der Polarfläche Φ_2 zu Φ_1 in dem mit dem Komplex verbundenen Nulsystem gebildet. Wenn Φ_1 eine Regelfläche ist, dann hat man hier die bekannte Kongruenz von Hirst. Auch im dem allgemeinen Fall bilden die Strahlen, welche Φ und Φ_2 zugleich berühren, eine Kongruenz vierter Ordnung und vierter Klasse; es ist nicht uninteressant, dass diese auch im einem nicht-analytischen Fall sich in zwei getrennte auflösen kann.

Als Fläche Φ_1 kann man ein beliebiges konvexes Polyeder nehmen; man erhält so eine nicht analytische Kongruenz, welche von »Stücken» von linearen Kongruenzen gebildet ist. Als einfachtes Beispiel hat man zwei Möbiussche Tetraeder.