SUR LES FAMILLES COMPLEXES ET LEURS APPLICATIONS.

PAR

PAUL MONTEL

à PARIS.

Table des matières.

		Pages
Introduction		115
Chapitre I.	Systèmes de fonctions admettant des combinaisons exceptionnelles	117
Chapitre II.	Sur quelques familles complexes particulières	129
Chapitre III.	Sur les couples de fonctions méromorphes vérifiant une relation algébrique	145
Chapitre IV.	Sur les involutions exceptionnelles des fonctions algébroïdes	150

Introduction.

Un certain nombre de problèmes d'Analyse conduisent à considérer simultanément un nombre fini de fonctions holomorphes ou méromorphes dans un même domaine. Par exemple, l'étude de l'uniformisation d'une relation algébrique introduit des couples de fonctions méromorphes; l'étude des fonctions algébroïdes à ν branches introduit l'ensemble des ν fonctions, coefficients de l'équation qui définit l'algébroïde. Le but du présent travail est la recherche de quelques propriétés générales appartenant aux familles composées de systèmes de ν fonctions holomorphes ou méromorphes dans un domaine et l'application de ces propriétés à différentes questions d'Analyse.

Dans le premier Chapitre, nous examinons le rôle joué par les combinaisons linéaires à coefficients constants qui sont exceptionnelles dans le domaine (D) considéré. Soit

$$\lambda_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_\nu f_\nu$$

une combinaison linéaire des fonctions holomorphes $f_1, f_2, \ldots f_\nu$ qui ne s'annule pas dans (D); c'est ce que nous appelons une combinaison exceptionnelle. Ces combinaisons jouent, vis-à-vis des systèmes de fonctions, un rôle analogue à celui des valeurs exceptionnelles pour une fonction unique $f(z)$: une telle valeur exceptionnelle correspond d'ailleurs à une combinaison exceptionnelle de la forme $\lambda_0 + \lambda_1 f$. Nous verrons que, lorsque les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ sont des fonctions entières, le nombre des combinaisons exceptionnelles ne peut dépasser $2\nu - 1$, et nous introduirons certaines familles de systèmes qui sont normales dans un domaine (D) où elles admettent 2ν combinaisons exceptionnelles.

Dans le Chapitre II sont étudiés les systèmes de trois fonctions holomorphes ou de quatre fonctions méromorphes telles que deux d'entre elles ne soient jamais égales en un point du domaine. Les propriétés de ces systèmes se traduisent par des théorèmes tout à fait analogues à ceux qui appartiennent au cycle du théorème de M. Picard sur l'indétermination d'une fonction uniforme autour d'un point essentiel isolé. Ces théorèmes ont des formes simples et symétriques et se réduisent aux propositions classiques dont nous venons de parler lorsque certaines des fonctions considérées se réduisent à des constantes.

Le Chapitre III est relatif aux couples de fonctions méromorphes dans un cercle et uniformisant une relation algébrique. Lorsque le genre de la relation est supérieur à l'unité, on doit à M. Picard un théorème fournissant une limite supérieure du rayon du cercle aussitôt que les deux premiers coefficients de l'une des fonctions uniformisantes sont fixés. Lorsque le genre est égal à un ou à zéro, il est nécessaire d'introduire un point exceptionnel de la surface de Riemann dans le premier cas, trois points exceptionnels dans le second. On obtient alors des propositions fixant une limite supérieure du rayon du cercle, ainsi que différentes extensions.

Les fonctions algébroïdes sont étudiées au Chapitre IV dans lequel on fait l'application des résultats du premier Chapitre aux systèmes formés par les coefficients des équations définissant les algébroïdes. Nous sommes ainsi conduits à la notion d'involution exceptionnelle. Bornons-nous, pour en donner une idée, aux algébroïdes à deux branches. Pour une telle fonction, il existera en général une infinité de valeurs de la variable z pour lesquelles les deux déterminations de la fonction seront conjuguées par rapport à deux nombres fixes a et b. S'il existe des couples a et b pour lesquels les valeurs correspondantes de z sont en nombre fini, nous dirons que (a, b) est un couple exceptionnel, ou encore que l'algébroïde admet une involution exceptionnelle. Lorsque les nombres a et b sont égaux, la valeur a n'est autre qu'une valeur exceptionnelle au sens habituel du mot. Nous verrons que les *involutions* exceptionnelles jouent, pour les algébroïdes, un rôle analogue à celui des valeurs exceptionnelles pour les fonctions uniformes. Les propositions relatives aux familles de fonctions uniformes admettant des valeurs exceptionnelles correspondent ainsi à des propositions concernant les familles de fonctions multiformes admettant des involutions exceptionnelles.

Les principaux résultats de ce travail ont été résumés dans différentes Notes publiées dans les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris et dont voici la liste:

Sur les relations de genre un ou zéro (Comptes-Rendus, t. 176, p. 1687, 1923). — Sur les familles complexes (Comptes-Rendus, t. 179, p. 660, 1924). — Sur les involutions exceptionnelles des fonctions algébroïdes (Comptes-Rendus, t. 179, p. 803, 1924). — Sur quelques familles complexes particulières (Comptes-Rendus, t. 179, p. 1385, 1924).

CHAPITRE I.

Systèmes de fonctions admettant des combinaisons exceptionnelles.

1. On dit que la fonction $f(z)$, holomorphe dans un domaine (D), admet une valeur exceptionnelle a dans ce domaine lorsqu'elle ne prend la valeur a pour aucune valeur de z correspondant à un point intérieur au domaine (D). Cela revient à dire que l'expression $f(z)-a$, ou encore que la combinaison linéaire à coefficients constants $\lambda_0+\lambda f(z)$ dans laquelle $\lambda_0=-a\lambda$ ne s'annule pas dans (D). Nous dirons aussi que la fonction $f(z)$ admet la combinaison exceptionnelle

$$\lambda_0+\lambda f(z) \qquad \lambda\neq 0.$$

Considérons maintenant un système (f) de ν fonctions

$$f_1(z),\, f_2(z),\, \ldots,\, f_\nu(z),$$

holomorphes dans un domaine (D), et formons une combinaison du premier degré à coefficients constants

$$F\equiv\lambda_0+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\cdots+\lambda_\nu f_\nu;$$

nous dirons que le système des ν fonctions admet la *combinaison exceptionnelle* F, si cette fonction F ne s'annule pas dans (D).

Le système f admettra ν *combinaisons exceptionnelles distinctes*

$$\begin{gathered}\lambda_0^1+\lambda_1^1 f_1+\lambda_2^1 f_2+\cdots+\lambda_\nu^1 f_\nu,\\ \lambda_0^2+\lambda_1^2 f_1+\lambda_2^2 f_2+\cdots+\lambda_\nu^2 f_\nu,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda_0^\nu+\lambda_1^\nu f_1+\lambda_2^\nu f_2+\cdots+\lambda_\nu^\nu f_\nu\end{gathered}$$

lorsque le déterminant

$$\delta=\begin{vmatrix}\lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \cdots & \lambda_\nu^1\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_\nu^2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \lambda_1^\nu & \lambda_2^\nu & \cdots & \lambda_\nu^\nu\end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

Dans le cas d'une fonction unique $f(z)$, deux combinaisons exceptionnelles:

$$\lambda_0+\lambda f(z),\quad \mu_0+\mu f(z)$$

sont distinctes lorsque le déterminant $\lambda_0\mu-\lambda\mu_0$ n'est pas nul. Nous dirons que $\nu+1$ *combinaisons exceptionnelles*

$$\begin{gathered}\lambda_0^1+\lambda_1^1 f_1+\lambda_2^1 f_2+\cdots+\lambda_\nu^1 f_\nu,\\ \lambda_0^2+\lambda_1^2 f_1+\lambda_2^2 f_2+\cdots+\lambda_\nu^2 f_\nu,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda_0^{\nu+1}+\lambda_1^{\nu+1} f_1+\lambda_2^{\nu+1} f_2+\cdots+\lambda_\nu^{\nu+1} f_\nu\end{gathered}$$

sont *distinctes* pour un système de ν fonctions, lorsque le déterminant

$$\varDelta=\begin{vmatrix}\lambda_0^1 & \lambda_1^1 & \cdots & \lambda_\nu^1\\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_\nu^2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \lambda_0^{\nu+1} & \lambda_1^{\nu+1} & \cdots & \lambda_\nu^{\nu+1}\end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

En résumé, pour que ν combinaisons exceptionnelles soient distinctes, il ne faut pas que l'une d'elles soit une combinaison linéaire des autres, à coefficients constants. Pour que $\nu+1$ combinaisons exceptionnelles soient distinctes, il faut qu'aucune d'elles ne soit une combinaison linéaire et homogène des autres. Les lettres $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ jouent ici le rôle de variables indépendantes.

2. Supposons que le domaine (D) comprenne le plan tout entier: les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ sont des fonctions entières, et il en est de même de toute combinaison linéaire de ces fonctions.

Une combinaison exceptionnelle n'admettra pas de zéro; si elle en a un nombre fini, elle sera exceptionnelle à l'extérieur d'un cercle contenant tous ses zéros: elle se réduira à un polynome $P(z)$ ou au produit d'un polynome $P(z)$ par une fonction entière dépourvue de zéros $e^{Q(z)}$, $Q(z)$ étant une fonction entière. Nous dirons que la combinaison exceptionnelle est du *premier type* lorsque c'est un polynome, et qu'elle est du *second type* lorsqu'elle est transcendante.

Si toutes les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ ne sont pas des polynomes, il existe au plus $\nu - 1$ combinaisons exceptionnelles du premier type. Car, s'il existait ν combinaisons distinctes du premier type, on aurait

$$\begin{gathered}
\lambda_0^1 + \lambda_1^1 f_1 + \cdots + \lambda_\nu^1 f_\nu = P_1(z), \\
\lambda_0^2 + \lambda_1^2 f_1 + \cdots + \lambda_\nu^2 f_\nu = P_2(z), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda_0^\nu + \lambda_1^\nu f_1 + \cdots + \lambda_\nu^\nu f_\nu = P_\nu(z),
\end{gathered}$$

$P_1(z), P_2(z), \ldots, P_\nu(z)$ étant des polynomes et le déterminant δ des coefficients de $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ n'étant pas nul. En résolvant le système des équations précédentes par rapport à $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$, on en déduirait que toutes ces fonctions sont des polynomes ce qui est contraire à l'hypothèse.

Je dis maintenant que le nombre des combinaisons exceptionnelles du second type ne peut dépasser ν. Supposons en effet qu'il existe $\nu + 1$ combinaisons exceptionnelles distinctes du second type

$$\begin{gathered}
F_1 \equiv \lambda_0^1 + \lambda_1^1 f_1 + \cdots + \lambda_\nu^1 f_\nu = P_1(z)\, e^{Q_1(z)}, \\
F_2 \equiv \lambda_0^2 + \lambda_1^2 f_1 + \cdots + \lambda_\nu^2 f_\nu = P_2(z)\, e^{Q_2(z)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F_{\nu+1} \equiv \lambda_0^{\nu+1} + \lambda_1^{\nu+1} f_1 + \cdots + \lambda_\nu^{\nu+1} f_\nu = P_{\nu+1}(z)\, e^{Q_{\nu+1}(z)},
\end{gathered}$$

$P_1(z), P_2(z), \ldots, P_{\nu+1}(z)$ étant des polynomes; $Q_1(z), \ldots, Q_{\nu+1}(z)$ étant des fonctions entières dont aucune n'est une constante. Les combinaisons étant supposées distinctes, le déterminant Δ est différent de zéro; en éliminant $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ entre les égalités précédentes, on obtient

$$\left|\begin{array}{c:c} \delta & \begin{array}{c} P_1(z)\,e^{Q_1(z)} \\ P_2(z)\,e^{Q_2(z)} \\ \cdots \\ P_\nu(z)\,e^{Q_\nu(z)} \end{array} \\ \hdashline \lambda_1^{\nu+1}\cdots\lambda_\nu^{\nu+1} & P_{\nu+1}(z)\,e^{Q_{\nu+1}(z)} \end{array}\right| = \varDelta$$

ou

$$A_1 P_1 e^{Q_1} + A_2 P_2 e^{Q_2} + \cdots + A_{\nu+1} P_{\nu+1} e^{Q_{\nu+1}} = \varDelta;$$

$A_1, A_2, \ldots, A_{\nu+1}$ étant des constantes. Comme $\varDelta$ n'est pas nul, une telle identité est impossible d'après un théorème établi par M. EMILE BOREL.[1] Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

Théorème. *Soient ν fonctions entières dont l'une au moins n'est pas un polynome: le nombre total des combinaisons exceptionnelles ne peut dépasser $2\nu-1$. Il ne peut exister plus de $\nu-1$ combinaisons du premier type, ni plus de ν combinaisons du second type.*

Supposons que les $\nu+1$ combinaisons du second type ne soient pas distinctes, c'est-à-dire que $\varDelta$ soit nul. Si les ν premières sont distinctes, c'est-à-dire si δ est différent de zéro, l'élimination de $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ conduit à l'identité $A_1 P_1 e^{Q_1} + A_2 P_2 e^{Q_2} + \cdots + A_{\nu+1} P_{\nu+1} e^{Q_{\nu+1}} \equiv 0$ et le nombre $A_{\nu+1}$, égal à $\pm\delta$, est différent de zéro. Cette identité est impossible à moins que l'une des différences $Q_i - Q_{\nu+1}$ ne soit constante, c'est-à-dire que le quotient de deux combinaisons exceptionnelles ne soit une fraction rationnelle.

Le théorème précédent comporte des extensions que l'on peut établir en suivant la même voie, lorsqu'on fixe l'ordre maximum des fonctions entières supposées d'ordre fini. Supposons que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ soient d'ordre ϱ au plus et que l'une d'elles soit effectivement d'ordre ϱ. Nous pouvons reprendre les raisonnements qui précèdent, en désignant par $P_1, P_2, \ldots, P_{\nu+1}$ des fonctions entières dont l'ordre apparent est inférieur à ϱ.

3. Substituons aux fonctions $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_\nu(z)$ les fonctions $g_1(z), g_2(z), \ldots, g_\nu(z)$ définies par une substitution à coefficients constants

[1] E. BOREL, Sur les zéros des fonctions entières (*Acta mathematica*, t. XX, 1896—97, pp. 357—396).

$$g_1=\alpha_0^1+\alpha_1^1 f_1+\cdots+\alpha_\nu^1 f_\nu,$$
$$g_2=\alpha_0^2+\alpha_1^2 f_1+\cdots+\alpha_\nu^2 f_\nu,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_\nu=\alpha_0^\nu+\alpha_1^\nu f_1+\cdots+\alpha_\nu^\nu f_\nu,$$

dans laquelle le déterminant

$$D=\begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_\nu^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_\nu^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^\nu & \alpha_2^\nu & \cdots & \alpha_\nu^\nu \end{vmatrix}$$

est supposé différent de zéro. Nous dirons que les deux systèmes $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ et $g_1, g_2, \ldots, g_\nu$ appartiennent à la même classe. Une *classe* de systèmes de ν fonctions holomorphes dans un domaine (D) est formé par l'ensemble des systèmes déduits de l'un d'entre eux par une substitution linéaire quelconque à coefficients constants dont le déterminant n'est pas nul.

Si dans une combinaison exceptionnelle

$$\lambda_0+\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_\nu f_\nu$$

relative au système (f), on remplace $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ par leurs valeurs en fonction de $g_1, g_2, \ldots, g_\nu$ tirées des équations précédentes, on obtient une combinaison

$$\mu_0+\mu_1 g_1+\cdots+\mu_\nu g_\nu$$

relative au système (g) et qui est aussi exceptionnelle. Donc:

Le nombre des combinaisons exceptionnelles demeure le même pour tous les systèmes appartenant à une même classe.

Supposons en particulier que l'un des systèmes admette ν combinaisons exceptionnelles distinctes $F_1, F_2, \ldots, F_\nu$. Les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_\nu$ appartiennent à la même classe et n'ont pas de zéros dans le domaine considéré.

4. Un cas particulièrement important pour les applications que nous avons en vue est celui où le système admet 2ν combinaisons exceptionnelles dans le domaine (D), ces combinaisons pouvant être disposées suivant deux tableaux triangulaires. Soient:

$$\begin{array}{ll} F_1 \equiv \lambda_0^1 + \lambda_1^1 f_1, & G_1 \equiv \mu_0^1 + \mu_1^1 f_1, \\ F_2 \equiv \lambda_0^2 + \lambda_1^2 f_1 + \lambda_2^2 f_2, & G_2 \equiv \mu_0^2 + \mu_1^2 f_1 + \mu_2^2 f_2, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ F_\nu \equiv \lambda_0^\nu + \lambda_1^\nu f_1 + \lambda_2^\nu f_2 + \cdots + \lambda_\nu^\nu f_\nu, & G_\nu \equiv \mu_0^\nu + \mu_1^\nu f_1 + \mu_2^\nu f_2 + \cdots + \mu_\nu^\nu f_\nu, \end{array}$$

ces 2ν combinaisons. Nous supposons que les ν combinaisons de chaque tableau triangulaire soient distinctes: il en résulte qu'aucun des nombres $\lambda_1^1, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_\nu^\nu$; $\mu_1^1, \mu_2^2, \ldots, \mu_\nu^\nu$ n'est nul: on peut les supposer tous égaux à l'unité. Nous supposons aussi que deux combinaisons situées sur la même ligne horizontale ne sont pas identiques, à un facteur constant près. Dans ces conditions, nous conviendrons de dire que le système (f) admet 2ν combinaisons exceptionnelles formant *deux tableaux triangulaires distincts.*

Nous écrirons désormais les combinaisons de ces tableaux en affectant du coefficient *un* la dernière fonction qui figure dans chaque combinaison. Dans ces conditions, pour chaque valeur de z, nous appellerons *écart* des deux tableaux le plus petit des modules des nombres

$$F_1 - G_1,\ F_2 - G_2, \ldots, F_\nu - G_\nu.$$

Si nous effectuons sur les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ une substitution linéaire réversible à coefficients constants et de forme triangulaire

$$\begin{aligned} g_1 &= \alpha_0^1 + f_1, \\ g_2 &= \alpha_0^2 + \alpha_1^2 f_1 + f_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ g_\nu &= \alpha_0^\nu + \alpha_1^\nu f_1 + \alpha_2^\nu f_2 + \cdots + \alpha_{\nu-1}^\nu f_{\nu-1} + f_\nu \end{aligned}$$

le système (g) ainsi obtenu admettra 2ν combinaisons exceptionnelles formant aussi deux tableaux triangulaires distincts.

En particulier, la substitution qui fait passer de $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ à $F_1, F_2, \ldots, F_\nu$ conduit à un système (F) dont les fonctions n'ont pas des zéros dans (D) et admettent ν combinaisons exceptionnelles formant un tableau triangulaire. Dans ce cas, tous les coefficients λ dont les indices sont différents sont égaux à zéro.

5. Considérons une famille comprenant une infinité de systèmes (f) de ν fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$, holomorphes dans un domaine (D). On dira que cette famille de systèmes (f) est *normale dans le domaine* (D) lorsque la famille des fonctions f_μ qui correspondent à un indice fixe $(\mu=1, 2, \ldots, \nu)$ est normale dans ce domaine. Nous dirons aussi que cette famille normale de systèmes est une *famille complexe normale dans le domaine.*

Soit (g) le système déduit de (f) par une substitution linéaire réversible à coefficients constants: à la famille des systèmes (f) correspond ainsi une famille de systèmes (g). Comme les systèmes (f) et (g) appartiennent à la même classe, on dira que les familles de systèmes (f) et (g) sont des familles de systèmes appartenant à la même classe: ces familles sont évidemment normales en même temps lorsque les fonctions de l'une de ces familles sont bornées. Mais il n'en est plus de même lorsque certaines des fonctions f_μ augmentent indéfiniment. Prenons par exemple le système des deux fonctions

$$f_1=z^n+2^n, \qquad f_2=-2^n;$$

lorsque n prend toutes les valeurs entières et positives, nous avons une famille de systèmes qui est normale pour $|z|<2$ puisque chacune des suites des fonctions f_1 ou f_2 augmente indéfiniment.

Si nous formons la combinaison

$$g=f_1+f_2=z^n,$$

la famille des fonctions g n'est pas normale pour $|z|<2$ car z^n tend vers zéro pour $|z|<1$ et augmente indéfiniment pour $|z|>1$.

Lorsque $\nu=1$, la notion de famille complexe normale se confond avec la notion habituelle de famille normale. Dans ce cas particulier, toute famille de fonctions f qui admettent, dans le domaine (D), deux combinaisons exceptionnelles distinctes, c'est-à-dire deux valeurs exceptionnelles, est une famille normale. Lorsque ν est supérieur à 1, l'existence d'un nombre quelconque ou même d'une infinité de combinaisons exceptionnelles ne permet pas toujours de conclure que la famille des systèmes est une famille normale. Il suffit de le montrer sur un exemple.

Prenons $\nu=2$, et la famille complexe définie par $f_1=z^n, f_2=2^n$, dans le domaine $|z|\leq\frac{3}{2}$, pour toutes les valeurs de l'entier positif n. Cette famille n'est pas normale dans le domaine considéré. Cependant, il existe une infinité de combinaisons exceptionnelles de la forme

$$\lambda_0 + \lambda_1 z^n + 2^n .$$

Cherchons en effet les racines de l'équation

$$\lambda_0 + \lambda_1 z^n + 2^n = 0$$

en supposant

$$|\lambda_0| < \frac{1}{2}, \qquad 0 < |\lambda_1| < 1;$$

on a

$$z^n = -\frac{2^n + \lambda_0}{\lambda_1}, \qquad |z^n| = \frac{|2^n + \lambda_0|}{|\lambda_1|} > |2^n + \lambda_0| = 2^n \left| 1 + \frac{\lambda_0}{2^n} \right|;$$

or,

$$\left| 1 + \frac{\lambda_0}{2^n} \right| > 1 - \frac{1}{2^{n+1}} > \frac{3}{4} > \left(\frac{3}{4}\right)^n, \qquad \text{et} \qquad |z^n| > \left(\frac{3}{2}\right)^n, \ |z| > \frac{3}{2}.$$

Mais nous pouvons énoncer un théorème permettant d'affirmer que la famille complexe est normale lorsqu'il existe 2ν combinaisons exceptionnelles d'un type particulier.

6. Théorème. *Une famille de systèmes (f) de ν fonctions holomorphes dans un domaine (D) est normale dans ce domaine lorsqu'elle admet 2ν combinaisons exceptionnelles formant deux tableaux triangulaires distincts si*

1°) les fonctions sont bornées en un point de (D);

2°) l'écart des tableaux en un point de (D) reste supérieur à un nombre positif.

Supposons $\nu = 3$ pour simplifier l'écriture et soient

$$\begin{array}{ll} \lambda_0 + f_1, & \mu_0 + f_1, \\ \lambda'_0 + \lambda'_1 f_1 + f_2, & \mu'_0 + \mu'_1 f_1 + f_2, \\ \lambda''_0 + \lambda''_1 f_1 + \lambda''_2 f_2 + f_3, & \mu''_0 + \mu''_1 f_1 + \mu''_2 f_2 + f_3, \end{array}$$

les combinaisons exceptionnelles. Posons

$$\begin{array}{lll} \lambda_0 = \varphi_1, & \lambda'_0 + \lambda'_1 f_1 = \varphi_2, & \lambda''_0 + \lambda''_1 f_1 + \lambda''_2 f_2 = \varphi_3, \\ \mu_0 = \psi_1, & \mu'_0 + \mu'_1 f_1 = \psi_2, & \mu''_0 + \mu''_1 f_1 + \mu''_2 f_2 = \psi_3. \end{array}$$

Les combinaisons peuvent s'écrire:

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 + f_1, & \psi_1 + f_1, \\ \varphi_2 + f_2, & \psi_2 + f_2, \\ \varphi_3 + f_3, & \psi_3 + f_3. \end{array}$$

L'écart est le plus petit des modules des différences: $\varphi_1-\psi_1$, $\varphi_2-\psi_2$, $\varphi_3-\psi_3$ dont aucune n'est identiquement nulle puisque, au point fixe z_0 cet écart est supérieur à un nombre positif α.

Les fonctions f_1 forment une famille normale puisqu'elles admettent les valeurs exceptionnelles φ_1 et ψ_1 qui sont distinctes puisque $|\varphi_1-\psi_1|>\alpha$. Donnons-nous une suite infinie de systèmes (f); de la suite correspondante des f_1, on peut extraire une suite partielle

$$f_1^{n_1}, f_1^{n_2}, \ldots, f_1^{n_k}, \ldots$$

convergeant uniformément, dans l'intérieur de (D), vers une fonction limite finie f_1^*. Cette fonction est bornée puisque toutes les fonctions sont bornées en un point fixe de (D). Posons

$$\varphi_2^*=\lambda_0'+\lambda_1' f_1^*, \qquad \psi_2^*=\mu_0'+\mu_1' f_1^*;$$

la fonction $\varphi_2^*-\psi_2^*$ est la limite de la suite des fonctions $\varphi_2^{n_k}-\psi_2^{n_k}$ correspondant aux fonctions $f_1^{n_k}$; elle n'est pas identiquement nulle puisque sa valeur en z_0 a un module supérieur à α. Elle a donc un nombre fini de zéros dans tout domaine (D') intérieur à (D). Les fonctions

$$g=\frac{f_2+\psi_2}{f_2+\varphi_2}$$

sont holomorphes dans (D') et ne prennent pas la valeur zéro. Elles ne prennent qu'un nombre limité de fois la valeur *un*: en effet, les zéros de $\varphi_2-\psi_2$ ont pour limite les zéros de $\varphi_2^*-\psi_2^*$ et, lorsque k est assez grand, la fonction $\varphi_2^{n_k}-\psi_2^{n_k}$ a exactement autant de zéros que $\varphi_2^*-\psi_2^*$ dans l'intérieur de (D'). Il résulte de ce qui précède que les g forment une famille normale dans (D'), et par conséquent, dans (D); les fonctions f_2 forment donc aussi une famille normale dans (D) et cette famille est bornée à l'intérieur de (D) puisque les valeurs de f_2 ont des modules bornés en un point fixe de (D). De la suite

$$f_2^{n_1}, f_2^{n_2}, \ldots, f_2^{n_k}, \ldots,$$

on peut extraire une suite partielle

$$f_2^{n_1'}, f_2^{n_2'}, \ldots, f_2^{n_k'}, \ldots$$

convergeant uniformément à l'intérieur de (D) vers une fonction finie f_2^*. Posons

$$\varphi_3^* = \lambda_0'' + \lambda_1'' f_1^* + \lambda_2'' f_2^*, \qquad \psi_3^* = \mu_0'' + \mu_1'' f_1^* + \mu_2'' f_2^*;$$

on verrait comme précédemment que la fonction $\varphi_3^* - \psi_3^*$ n'a qu'un nombre fini de zéros dans (D') et qu'il en est de même pour les fonctions $\varphi_3^{n'k} - \psi_3^{n'k}$. Les fonctions

$$h = \frac{f_3 + \psi_3}{f_3 + \varphi_3}$$

forment alors une famille normale dans (D); il en est de même des fonctions f_3 qui forment une famille normale et bornée, puisqu'elles ont des valeurs dont le module est borné en un point fixe de (D). De la suite $f_3^{n'k}$, on peut extraire une suite partielle $f_3^{n''k}$ convergeant uniformément dans (D) vers une fonction limite f_3^*. Comme les suites $f_1^{n''k}$ et $f_2^{n''k}$ convergent nécessairement vers les fonctions f_1^* et f_2^*, on voit que la suite donnée des systèmes (f) a donné naissance à une suite partielle de systèmes $(f^{n''k})$ de trois fonctions $f_1^{n''k}$, $f_2^{n''k}$, $f_3^{n''k}$ convergeant uniformément vers le système (f^*) des trois fonctions f_1^*, f_2^*, f_3^*. La proposition est donc établie.

7. Soit une famille (g) déduite de la famille complexe (f) au moyen d'une substitution linéaire réversible à coefficients constants. La famille (f) étant normale et bornée, il en est de même de la famille (g). Ainsi, toutes les familles complexes de la même classe que la famille (f) sont des familles normales et bornées: elles admettent d'ailleurs 2ν combinaisons exceptionnelles variables avec la famille et se répartissant en deux tableaux dont l'écart reste supérieur à un nombre positif fixe.

Etant donnée une famille complexe de systèmes (g) qui admet 2ν combinaisons exceptionnelles comment pourra-t-on reconnaître qu'il existe dans la même classe une famille particulière (f) pour laquelle les 2ν combinaisons exceptionnelles correspondantes se répartiront en deux tableaux triangulaires?

Nous allons voir qu'il est aisé de répondre à cette question. Si alors les fonctions de la famille des systèmes (g) ont leurs modules bornés en un point fixe du domaine et si l'écart de leurs deux tableaux de combinaisons exceptionnelles reste, en un point fixe, supérieur à un nombre positif, il en sera de même pour la famille des systèmes (f) et la famille complexe (g) sera normale.

Pour simplifier l'écriture, supposons encore $\nu = 3$ et soient

$$\begin{array}{ll}\lambda_0+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\lambda_3 g_3, & \mu_0+\mu_1 g_1+\mu_2 g_2+\mu_3 g_3,\\ \lambda'_0+\lambda'_1 g_1+\lambda'_2 g_2+\lambda'_3 g_3, & \mu'_0+\mu'_1 g_1+\mu'_2 g_2+\mu'_3 g_3,\\ \lambda''_0+\lambda''_1 g_1+\lambda''_2 g_2+\lambda''_3 g_3, & \mu''_0+\mu''_1 g_1+\mu''_2 g_2+\mu''_3 g_3,\end{array}$$

les deux tableaux de ν combinaisons exceptionnelles relatives au système g_1, g_2, g_3 des fonctions de la famille (g). Il s'agit de voir s'il existe une transformation de la forme

$$g_1=\alpha_0+\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\alpha_3 f_3,$$
$$g_2=\beta_0+\beta_1 f_1+\beta_2 f_2+\beta_3 f_3,$$
$$g_3=\gamma_0+\gamma_1 f_1+\gamma_2 f_2+\gamma_3 f_3,$$

pour laquelle

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}\neq 0,$$

telle que les combinaisons exceptionnelles relatives au système f_1, f_2, f_3 forment deux tableaux triangulaires.

Considérons g_1, g_2, g_3 comme les coordonnées d'un point de l'espace; f_1, f_2, f_3 comme les coordonnées du point qui lui correspond par la transformation précédente. Cette substitution est une transformation homographique conservant le plan de l'infini. Or, nous devons obtenir deux combinaisons de la forme

$$\bar{\lambda}_0+\bar{\lambda}_1 f_1, \qquad \bar{\mu}_0+\bar{\mu}_1 f_1,$$

en appliquant la substitution à deux des combinaisons données. Ces dernières combinaisons égalées à zéro représentent deux plans parallèles; donc, dans les premiers tableaux, il doit y avoir les premiers membres des équations de deux plans parallèles. Supposons que ce soient les combinaisons de la première ligne. Le tableau

$$\begin{Vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3\end{Vmatrix}$$

est alors d'ordre *un*. Supposons par exemple $\lambda_0\mu_1-\lambda_1\mu_0\neq 0$, nous prendrons

$$f_1=\lambda_0+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\lambda_3 g_3.$$

La substitution doit ensuite nous donner deux combinaisons

$$\overline{\lambda'_0}+\overline{\lambda'_1}f_1+\overline{\lambda'_2}f_2, \qquad \overline{\mu'_0}+\overline{\mu'_1}f_1+\overline{\mu'_2}f_2$$

correspondant à deux plans dont l'intersection est parallèle à $f_1=0$. Donc, dans les premiers tableaux doivent figurer les premiers membres des équations de deux plans dont l'intersection est parallèle aux plans de la première ligne. Par exemple, les plans

$$\lambda_0+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\lambda_3 g_3=0,$$
$$\lambda'_0+\lambda'_1 g_1+\lambda'_2 g_2+\lambda'_3 g_3=0,$$
$$\mu'_0+\mu'_1 g_1+\mu'_2 g_2+\mu'_3 g_3=0,$$

seront parallèles à une même droite, ce qui entraîne la condition

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda'_3 \\ \mu'_1 & \mu'_2 & \mu'_3 \end{vmatrix}=0.$$

Si alors le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda'_3 \\ \lambda''_1 & \lambda''_2 & \lambda''_3 \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, c'est-à-dire si les combinaisons du premier tableau sont distinctes on pourra poser

$$f_2=\lambda'_0+\lambda'_1 g_1+\lambda'_2 g_2+\lambda'_3 g_3,$$
$$f_3=\lambda''_0+\lambda''_1 g_1+\lambda''_2 g_2+\lambda''_3 g_3.$$

Ainsi, en faisant la transformation homographique définie au moyen de trois combinaisons convenablement choisies, on obtiendra pour les fonctions transformées deux tableaux triangulaires de combinaisons exceptionnelles.

8. Dans ce qui précède, nous avons supposé que les fonctions f étaient holomorphes. On peut reprendre les mêmes questions dans le cas de fonctions méromorphes dans le domaine (D). La notion de combinaison exceptionnelle pour un système (f) de ν fonctions méromorphes $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ n'est pas modifiée. Une classe de systèmes sera formée par l'ensemble des systèmes que l'on déduit de l'un d'entre eux par une transformation homographique générale réversible à coefficients constants. La notion de la famille complexe normale s'étend aussi immédiatement.

Dans le cas de $\nu=1$, on sait qu'une famille de fonctions méromorphes admettant trois combinaisons exceptionnelles distinctes, c'est-à-dire trois valeurs exceptionnelles, est une famille normale. Lorsque ν est supérieur à un, on peut démontrer qu'une famille de systèmes de ν fonctions méromorphes est normale lorsqu'elle admet 3ν combinaisons exceptionnelles formant trois tableaux triangulaires distincts. Il faut en outre supposer que les modules des valeurs des fonctions en un point fixe du domaine demeurent bornés et que les écarts des tableaux, prix deux à deux, demeurent en un point fixe du domaine, supérieurs à un nombre positif donné. La marche de la démonstration ne diffère pas de celle qui a été suivie au paragraphe 6 pour la démonstration du théorème correspondant relatif aux fonctions holomorphes.

CHAPITRE II.

Sur quelques familles complexes particulières.

9. Considérons deux fonctions $f_1(z)$, $f_2(z)$, holomorphes dans un domaine. Si ces fonctions admettent deux combinaisons exceptionnelles distinctes

$$F_1=\lambda_0+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2, \qquad F_2=\mu_0+\mu_1 f_1+\mu_2 f_2,$$

nous pouvons substituer aux fonctions f_1 et f_2, les fonctions F_1 et F_2 qui sont de la même classe. Si les fonctions f_1 et f_2 admettent une troisième combinaison exceptionnelle, nous en déduirons pour F_1 et F_2 une combinaison exceptionnelle $\nu_0+\nu_1 F_1+\nu_2 F_2$; et, comme on peut remplacer F_1 par $\nu_1 F_1=g_1$ et F_2 par $\nu_2 F_2=g_2$, nous aurons finalement un système de fonctions g_1, g_2 admettant les combinaisons exceptionnelles

$$g_1, \qquad g_2, \qquad g_1+g_2+\nu_0;$$

elles seraient distinctes si $\nu_0\neq 0$. Dans ce cas, les fonctions g_1 et g_2 ne peuvent être des fonctions entières. Pour chaque couple de fonctions g_1, g_2, il existe un cercle de centre origine tel que, à l'intérieur de ce cercle, ou bien l'une des fonctions g_1 et g_2 cesse d'être holomorphe ou une des fonctions $g_1, g_2, g_1+g_2+\nu_0$ admet un zéro.

Si ν_0 est nul, les trois combinaisons ne sont pas distinctes, mais nous avons vu que les fonctions g_1 et g_2 ne peuvent être entières à moins que le rapport $\frac{g_2}{g_1}$ ne soit une constante. Il est évident en effet qu'en prenant $g_1 = e^x, g_2 = 2e^x$, on obtient un système admettant les trois combinaisons exceptionnelles $g_1, g_2, g_1 + g_2$.

Lorsque le rapport $\frac{g_2}{g_1}$ n'est pas une constante, c'est-à-dire, en posant

$$g_1 = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots, \qquad g_2 = \beta_0 + \beta_1 z + \cdots,$$

lorsque $\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0 \neq 0$, il existe un nombre R tel que, à l'intérieur d'un cercle de rayon supérieur à R, ou bien l'une des fonctions cesse d'être holomorphe, ou bien l'une des combinaisons cesse d'être exceptionnelle. Nous allons voir que R ne dépend que des quatre coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$.

Pour plus de symétrie, déterminons trois fonctions holomorphes autour de $z = 0$,

$$f = a_0 + a_1 z + \cdots, \qquad g = b_0 + b_1 z + \cdots, \qquad h = c_0 + c_1 z + \cdots$$

par les conditions $g_1 = g - h$, $g_2 = h - f$; on voit que l'une des trois fonctions peut être choisie arbitrairement. Les combinaisons $g_1, g_2, g_1 + g_2$ s'écrivent alors $g - h$, $h - f, g - f$; dire que ces combinaisons sont exceptionnelles, c'est dire que deux des trois fonctions f, g, h ne deviennent jamais égales, ou que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & g & h \\ f^2 & g^2 & h^2 \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas dans le domaine considéré. Posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_0 & b_0 & c_0 \\ a_0^2 & b_0^2 & c_0^2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_0 & b_0 & c_0 \\ a_n & b_n & c_n \end{vmatrix} \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

le déterminant Δ n'est pas nul par hypothèse. Quant aux déterminants Δ_n, ou bien l'un d'eux n'est pas nul, ou bien tous ces déterminants sont nuls. Dans ce dernier cas, on a l'identité

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_0 & b_0 & c_0 \\ f & g & h \end{vmatrix} \equiv 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{h-f}{g-h} = \frac{c_0-a_0}{b_0-c_0}.$$

Le rapport $\frac{g_2}{g_1}$ est alors constant, c'est-à-dire que le rapport anharmonique (f, g, h, ∞) est constant.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et considérons le premier déterminant Δ_n qui est différent de zéro. Examinons d'abord le cas où $n=1$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

La fonction

$$\varphi(z) = \frac{f-h}{g-h} = \frac{(a_0-c_0)+(a_1-c_1)z+\cdots}{(b_0-c_0)+(b_1-c_1)z+\cdots} = \frac{-(\beta_0+\beta_1 z+\cdots)}{\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots}$$

est holomorphe et ne prend ni la valeur zéro ni la valeur *un* tant que les différences $f-g$, $g-h$, $h-f$ ne s'annulent pas. Ecrivons

$$\varphi(z) = \gamma_0+\gamma_1 z+\cdots = -\frac{\beta_0+\beta_1 z+\cdots}{\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots};$$

on a

$$\begin{aligned} \alpha_0\gamma_0+\beta_0&=0, \\ \alpha_0\gamma_1+\alpha_1\gamma_0+\beta_1&=0, \\ \alpha_0\gamma_2+\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_0+\beta_2&=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots& \\ \alpha_0\gamma_n+\alpha_1\gamma_{n-1}+\cdots+\alpha_n\gamma_0+\beta_n&=0. \end{aligned}$$

On déduit de ces équations, puisque $\alpha_0 \neq 0$,

$$\gamma_0 = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\alpha_0^2}\begin{vmatrix} \beta_0 & \alpha_0 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\alpha_0^2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_0-c_0 & b_0-c_0 & c_0 \\ a_1-c_1 & b_1-c_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

ou

$$\gamma_1 = -\frac{\Delta_1}{\alpha_0^2}.$$

On sait que, étant donnée la fonction

$$\varphi(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots, \qquad (\gamma_1 \neq 0)$$

si l'on calcule R par la formule

$$R = \frac{2\,Q}{\pi} \left| e_1 - e_2 \right| \left| \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right|$$

dans laquelle e_1, e_2, e_3 désignent trois nombres dont la somme est nulle et tels que

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \gamma_0,$$

Q désignant la surface du parallélogramme des périodes d'une fonction elliptique $\wp u$ définie au moyen d'un polynome du troisième degré dont les racines sont e_1, e_2, e_3, le nombre R ainsi obtenu est tel que, à l'intérieur d'un cercle de centre origine et de rayon supérieur à R, la fonction $\varphi(z)$ ou bien cesse d'être holomorphe, ou bien prend l'une des valeurs zéro ou un.[1] Comme nous avons ici $\gamma_0 = -\frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{a_0 - c_0}{b_0 - c_0}$ et que nous pouvons supposer $a_0 + b_0 + c_0 = 0$, car on peut ajouter une même constante aux trois fonctions f, g, h sans changer Δ ni Δ_n, nous prendrons

$$e_1 = b_0, \qquad e_2 = a_0, \qquad e_3 = c_0,$$

et nous aurons

$$R = \frac{2\,Q}{\pi} \left| b_0 - a_0 \right| \left| \frac{a_0 - c_0}{b_0 - c_0} \right| \frac{\left| b_0 - c_0 \right|^2}{\left| \Delta_1 \right|},$$

ou encore

$$R = \frac{2\,Q}{\pi} \left| \frac{\Delta}{\Delta_1} \right|.$$

Lorsque Δ_1 est nul, il en est de même de γ_1. Désignons par Δ_n le premier déterminant différent de zéro. Les équations qui déterminent $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ montrent que $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ sont nuls et que γ_n est donné par les équations

$$\alpha_0 \gamma_0 + \beta_0 = 0,$$

$$\alpha_0 \gamma_n + \alpha_n \gamma_0 + \beta_n = 0,$$

on en déduit

[1] Cette expression est due à M. Hartogs; voir Ed. Landau, Ueber den Picardschen Satz (*Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 1906, p. 273).

$$\gamma_n = \frac{1}{\alpha_0^2}\begin{vmatrix} \beta_0 & \alpha_0 \\ \beta_n & \alpha_n \end{vmatrix} = -\frac{1}{\alpha_0^2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_0-c_0 & b_0-c_0 & c_0 \\ a_n-c_n & b_n-c_n & c_n \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \gamma_n = -\frac{\Delta_n}{\alpha_0^2}.$$

Dans ce cas, le rayon R est fourni par l'égalité

$$R^n = \frac{2\,Q}{\pi}\,|e_1-e_2|\left|\frac{\gamma_0}{\gamma_n}\right| = \frac{2\,Q}{\pi}\left|\frac{\Delta}{\Delta_n}\right|$$

ou

$$R = \sqrt[n]{\frac{2\,Q}{\pi}\left|\frac{\Delta}{\Delta_n}\right|}\,.$$

Nous avons donc établi la proposition suivante:

Soient

$$f = a_0 + a_1 z + \cdots,$$
$$g = b_0 + b_1 z + \cdots, \qquad \Delta_1 \neq 0$$
$$h = c_0 + c_1 z + \cdots$$

trois fonctions holomorphes autour de l'origine; à l'intérieur d'un cercle de rayon supérieur à

$$R = \frac{2\,Q}{\pi}\left|\frac{\Delta}{\Delta_1}\right|,$$

ou l'une des fonctions cesse d'être holomorphe, ou deux des fonctions prennent la même valeur en un point.

Si Δ_1 est nul et si Δ_n est le premier déterminant non nul, il faut remplacer l'expression précédente par

$$\left[\frac{2\,Q}{\pi}\left|\frac{\Delta}{\Delta_n}\right|\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Dans le premier cas, le rayon ne dépend que des différences a_0-b_0, a_0-c_0, a_1-b_1, a_1-c_1, dans le second, il ne dépend que des différences a_0-b_0, a_0-c_0, a_n-b_n, a_n-c_n.

Ce théorème n'est qu'une extension du théorème de M. Landau sous la forme que lui a donnée M. Hartogs. Il se réduit à ce théorème si l'on suppose que les fonction g et h se réduisent aux constantes 0 et 1.

10. Il comporte une série de généralisations comme le théorème de M. Landau lui-même. On voit que le rayon R est déterminé lorsqu'on a fixé les valeurs $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1$ ou plutôt leurs différences, de manière que Δ_1 soit différent de zéro. Au lieu de se donner ces six nombres, on peut se donner les valeurs de f, g, h en deux points déterminés du plan, par exemple

$$\begin{array}{llll} & f(0)=a_0, & g(0)=b_0, & h(0)=c_0, \\ (z_0 \neq 0) & f(z_0)=a_0', & g(z_0)=b_0', & h(z_0)=c_0'; \end{array}$$

alors, il existe un nombre R ne dépendant que des valeurs $a_0, b_0, c_0, a_0', b_0', c_0'$ et possédant la propriété précédente à moins que l'on n'ait

$$(a_0, b_0, c_0, \infty)=(a_0', b_0', c_0', \infty).$$

En effet, la fonction $\varphi(z)$ considérée plus haut prend pour $z=0$ et $z=z_0$ des valeurs

$$\varphi(0)=\frac{a_0-c_0}{b_0-c_0}, \qquad \varphi(z_0)=\frac{a_0'-c_0'}{b_0'-c_0'},$$

et ces valeurs sont différentes, par hypothèse; on sait que, dans ces conditions, il existe une valeur pour R qui ne dépend que des nombres $z_0, \varphi(0), \varphi(z_0)$.[1] Donc:

Etant données trois fonctions holomorphes dans un domaine contenant deux points P et Q et prenant en ces points des valeurs déterminées, il existe un nombre R qui ne dépend que de la différence des affixes des points et des différences des valeurs données en chaque point tel que, à l'intérieur d'un cercle de centre origine et de rayon supérieur à R, ou l'une des fonctions n'est pas holomorphe ou deux des fonctions deviennent égales, à moins que les trois valeurs des fonctions au point Q ne se déduisent par une même transformation linéaire des trois valeurs prises au point P.

Remarquons encore que la condition que doivent vérifier les valeurs données aux points P et Q peut aussi s'écrire

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_0 & b_0 & c_0 \\ a_0' & b_0' & c_0' \end{vmatrix} \neq 0;$$

c'est une condition que nous retrouverons bientôt. Géométriquement, cette inégalité peut s'interpréter de la manière suivante: les deux triangles dont les som-

[1] Voir P. LÉVY, Remarques sur le théorème de M. Picard (*Bulletin de la S. M. de France*, t. XL, 1912, pp. 25—39).

mets ont pour affixes les valeurs des trois fonctions en P et en Q ne doivent pas être semblables.

11. Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse où les nombres des zéros des fonctions $g-h, h-f, f-g$ demeurent inférieurs à des nombres fixes. Nous supposons par exemple que $g-h$ n'a pas plus de p zéros; que $h-f$ n'a pas plus de q zéros; que $f-g$ n'a pas plus de r zéros, avec la condition $p \leq q \leq r$ que l'on peut toujours réaliser en changeant au besoin les noms des fonctions f, g, h. Dans ces conditions, la fonction

$$\varphi(z) = \frac{f-h}{g-h}$$

est une fonction méromorphe dont les nombres des pôles, des zéros, et des points où cette fonction est égale à *un* ne dépassent pas, respectivement, les entiers p, q, r. On sait que, si l'on assujettit $\varphi(z)$ à $p+q+2$ conditions telles qu'il n'existe pas de fonction rationnelle ayant p pôles et q zéros au plus et remplissant ces conditions, il existe un nombre R tel que, à l'intérieur d'un cercle de rayon supérieur à R, ou la fonction $\varphi(z)$ cesse d'être méromorphe, ou elle a plus de p pôles, ou plus de q zéros, ou plus de r points-unités.[1] Par exemple, si l'on fixe les $p+q+2$ premiers coefficients $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{p+q+1}$ du développement de $\varphi(z)$ en série de Taylor, il existera un nombre R, fonction de p, q, r et des γ_i, à moins que ce développement ne puisse convenir à une fonction rationnelle du type indiqué. S'il en était ainsi, les γ_i devraient vérifier une relation linéaire de récurrence à $p+1$ termes et le déterminant

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \gamma_{q-p+1} & \gamma_{q-p+2} & \cdots & \gamma_{q+1} \\ \gamma_{q-p+2} & \gamma_{q-p+3} & \cdots & \gamma_{q+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{q+1} & \gamma_{q+2} & \cdots & \gamma_{q+p+1} \end{vmatrix}$$

d'ordre $p+1$, serait nul. Donc, si $\varDelta \neq 0$, le nombre R existe. Comme les γ_i peuvent être calculés au moyen des coefficients a_j, b_j, c_j, à l'aide des équations écrites au § 9, on peut remplacer la condition $\varDelta \neq 0$ par son expression au moyen des $p+q+2$ premiers coefficients des développements de Taylor relatifs à f, g, h. On peut obtenir plus simplement le résultat en opérant de la manière suivante: lorsque $\varphi(z)$ est une fonction rationnelle du type indiqué, on a

$$\frac{f-h}{g-h} = -\frac{Q}{P},$$

[1] Paul Montel, Sur les familles quasi-normales de fonctions analytiques (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. LII, 1924, p. 85—114).

P désignant un polynome de degré p et Q un polynome de degré q. Cette identité s'écrit

$$Pf + Qg + Rh \equiv 0,$$

avec

$$P + Q + R \equiv 0.$$

Ainsi, dans le cas d'exception, on peut déterminer trois polynomes P, Q, R de degrés inférieurs ou égaux à p, q, r et vérifiant les deux identités précédentes. En écrivant ces polynomes avec des coefficients indéterminés, les $p+q+2$ premières équations d'identification relatives à la première identité et les $q+1$ premières équations d'identification relatives à la seconde permettront de calculer ces coefficients indéterminés lorsque le déterminant des inconnues, qui est ici d'ordre $p+2q+3$, sera égal à zéro. Ce déterminant, facile à former, contient les coefficients a_j, b_j, c_j dont les indices varient de 0 à $p+q+1$.

Prenons par exemple le cas de $p=q=r=1$. On a ici

$$P = \lambda + \lambda' z, \quad Q = \mu + \mu' z, \quad R = \nu + \nu' z$$

et les identités

$$P + Q + R \equiv 0, \quad Pf + Qg + Rh \equiv 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
&\lambda + \mu + \nu = 0,\\
&\lambda' + \mu' + \nu' = 0,\\
&\lambda a_0 + \mu b_0 + \nu c_0 = 0,\\
&\lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 + \lambda' a_0 + \mu' b_0 + \nu' c_0 = 0,\\
&\lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 + \lambda' a_1 + \mu' b_1 + \nu' c_1 = 0,\\
&\lambda a_3 + \mu b_3 + \nu c_3 + \lambda' a_2 + \mu' b_2 + \nu' c_2 = 0.
\end{aligned}$$

Le déterminant des inconnues est

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a_0 & b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_0 & b_0 & c_0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Lorsque $D \neq 0$, la fonction $\varphi(z)$ ne peut être une fraction rationnelle du type indiqué. Donc:

Soient les fonctions

$$f = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{p+q+1} z^{p+q+1} + \cdots,$$
$$g = b_0 + b_1 z + \cdots + b_{p+q+1} z^{p+q+1} + \cdots,$$
$$h = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{p+q+1} z^{p+q+1} + \cdots,$$

holomorphes autour de l'origine et telles que les équations

$$g - h = 0, \qquad h - f = 0, \qquad f - g = 0$$

n'aient pas, respectivement, plus de p, q, r racines. Il existe, en général, un nombre positif

$$R(a_0, b_0, c_0, \ldots, a_{p+q+1}, b_{p+q+1}, c_{p+q+1}, p, q, r)$$

tel que, à l'intérieur d'un cercle de rayon supérieur à R, ou bien l'une des fonctions f, g, h n'est pas holomorphe, ou bien l'une des équations précédentes a plus de p, de q, ou de r racines. Pour que le nombre R existe, il suffit qu'un déterminant D, formé avec les $p+q+2$ premiers coefficients de chaque développement soit différent de zéro.

Bien entendu, si l'on fixe d'autres coefficients que les $p+q+2$ premiers, il sera facile de former le déterminant correspondant à ces nouveaux coefficients en suivant la marche indiquée dans ce paragraphe.

12. Admettons maintenant que l'on donne les valeurs de f, g, h en $p+q+2$ points du plan; les valeurs de φ seront déterminées en ces points, et il existera une limite R, sauf dans le cas exceptionnel où une fraction rationnelle du type indiqué pourra prendre les valeurs attribuées à φ aux points considérés.[1] En suivant la même marche que précédemment, on obtiendra aisement la condition d'existence sous la forme $D \neq 0$, D étant un déterminant facile à former.

Examinons encore le cas particulier où $p = q = r = 1$; et supposons données les valeurs f_1, f_2, f_3, f_4; g_1, g_2, g_3, g_4; h_1, h_2, h_3, h_4 des fonctions considérées aux points z_1, z_2, z_3, z_4. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ les valeurs correspondantes pour φ. Le nombre R existe à moins qu'une fraction rationnelle du premier degré, c'est-à-dire une fonction homographique de z ne prenne les valeurs φ_j aux points z_j. Or, pour qu'il en soit ainsi, il faut que les deux rapports anharmoniques (z_1, z_2, z_3, z_4) et $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ soient égaux. Pour que R existe, il suffit que

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) \neq (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

[1] Loc. cit. page 135, en note.

Un calcul facile, que nous omettons, permet d'exprimer le rapport anharmonique des valeurs de φ au moyen des valeurs attribuées aux fonctions f, g, h. Posons

$$d_i^j = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f_i & g_i & h_i \\ f_j & g_j & h_j \end{vmatrix};$$

on a alors

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = \frac{d_3^1}{d_3^2} : \frac{d_4^1}{d_4^2},$$

et la condition devient

$$\frac{d_3^1}{d_3^2} : \frac{d_4^1}{d_4^2} \neq (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

13. Nous allons maintenant nous occuper des familles complexes de fonctions, obtenues en fixant certains coefficients a_j, b_j, c_j. Considérons d'abord la famille complexe des fonctions f, g, h holomorphes dans le cercle $|z| < R$, prenant au centre les valeurs fixes a_0, b_0, c_0, et telles que l'on ait, dans le cercle

$$(f-g)(g-h)(h-f) \neq 0.$$

Cette famille complexe n'est pas toujours normale: prenons, par exemple,

$$f_n = 0, \qquad g_n = e^{nz}, \qquad h_n = 2\,e^{nz},$$

n étant un entier positif arbitraire; la famille des $g_n(z)$ et la famille des $h_n(z)$ ne sont pas normales dans un cercle quelconque $|z| < R$.

Nous sommes conduits à supposer normales les familles formées par deux des trois fonctions: supposons par exemple, que la famille des g et celle des h soient l'une et l'autre normales. La famille des f est alors une famille normale. En effet, considérons une suite infinie de fonctions f,

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

auxquelles correspondent les fonctions

$$g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots,$$

$$h_1, h_2, \ldots . h_n, \ldots .$$

Posons

$$\varphi_n = \frac{f_n - h_n}{g_n - h_n};$$

les fonctions φ_n, holomorphes pour $|z|<R$, ne prennent dans ce cercle (C), ni la valeur zéro, ni la valeur *un*. Au centre, leur valeur est

$$\varphi_n(0)=\frac{a_0-c_0}{b_0-c_0};$$

ces fonctions forment une famille normale et bornée: de la suite φ_n, on peut extraire une suite partielle convergeant uniformément vers une limite holomorphe φ^*; soit

$$\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots, \varphi_{n_k}, \ldots,$$

cette suite. Les familles g et h étant normales, on peut extraire de la suite g_{n_k} une suite partielle $g_{n'_k}$ convergeant uniformément vers une limite g^*; et de la suite $h_{n'_k}$ on peut extraire une suite partielle h_{ν_k} convergeant vers une limite h^*; alors les suites

$$\varphi_{\nu_1}, \varphi_{\nu_2}, \ldots, \varphi_{\nu_k}, \ldots,$$

$$g_{\nu_1}, g_{\nu_2}, \ldots, g_{\nu_k}, \ldots,$$

$$h_{\nu_1}, h_{\nu_2}, \ldots, h_{\nu_k}, \ldots$$

convergent respectivement vers les limites φ^*, g^*, h^* et la suite

$$f_{\nu_k}=h_{\nu_k}+\varphi_{\nu_k}(g_{\nu_k}-h_{\nu_k})$$

converge uniformément vers la limite $f^*=h^*+\varphi^*(g^*-h^*)$.

Les fonctions f forment une famille normale. Cette famille est bornée, puisque toutes ces fonctions prennent à l'origine la valeur fixe a_0: dans tout cercle (C') de rayon $\theta R\,(0<\theta<1)$ concentrique au cercle (C), le module de f ne dépasse pas une limite fixe.

On peut obtenir les mêmes résultats par une autre voie qui nous permettra d'avoir quelques précisions sûr cette limite. Les fonctions g et h forment des familles normales et bornées dans l'intérieur de (C). On a donc, pour $|z|\leq\theta R$,

$$|g|\leq\Omega_1(b_0,\theta,R), \qquad |h|\leq\Omega_2(c_0,\theta,R),$$

les nombres Ω_1 et Ω_2 dépendant des arguments indiqués et des caractères qui rendent normales les deux familles. De même, les fonctions φ forment une famille normale et bornée et l'on a, pour $|z|\leq\theta R$,

$$|\varphi|\leq\Omega_3\left(\frac{a_0-c_0}{b_0-c_0},\theta\right);$$

donc $|f|\leq\Omega_2+\Omega_3(\Omega_1+\Omega_2)=\Omega(a_0,b_0,c_0,\theta,R)$.

Ainsi, les fonctions f ont leurs modules bornés dans l'intérieur de (C) par un nombre qui ne dépend que de a_0, b_0, c_0, θ, R et des caractères rendant normales les familles g et h. Les résultats précédents demeurent exacts si l'on supprime l'hypothèse que $g-h$ n'a pas de racine dans (C) pourvu que b_0-c_0 ne soit pas nul. En d'autres termes: si, à chaque fonction f, on peut associer des fonctions g et h telles que $f-g$ et $f-h$ n'aient pas de zéro dans (C) et si $g(0)-h(0)$ n'est pas nul, la famille f est normale lorsque les familles g et h le sont.

En effet, la famille des fonctions $g-h$ est normale dans (C); aucune des fonctions limites n'est la constante zéro, puisque $g(0)-h(0)=b_0-c_0$ n'est pas nul. Donc, dans le cercle (C'') défini par $|z|<\frac{1+\theta}{2}R$, ces fonctions ont un nombre fini de zéros.[1] Dans ces conditions, la famille des fonctions $\psi=\frac{1}{\varphi}=\frac{g-h}{f-h}$ est composée de fonctions holomorphes dans (C''), ne prenant jamais la valeur *un*, et ne prenant qu'un nombre fini de fois la valeur zéro. Cette famille est normale.[2] D'ailleurs, aucune fonction limite n'est égale à la constante zéro. Considérons alors une suite infinie f_n de fonctions f: nous pouvons choisir une suite d'indices ν_k tels que les valeurs g_{ν_k}, h_{ν_k} et ψ_{ν_k} convergent dans (C') uniformément vers g^*, h^* et ψ^*. La différence g^*-h^* n'a qu'un nombre fini de zéros dans (C'); traçons un cercle (C_1') concentrique et intérieur à (C') et dont la circonférence ne contienne aucun de ces zéros. Sur cette circonférence, la suite

$$f_{\nu_k}=h_{\nu_k}+\frac{1}{\psi_{\nu_k}}(g_{\nu_k}-h_{\nu_k})$$

converge uniformément vers la limite

$$f^*=h^*+\frac{1}{\psi^*}(g^*-h^*);$$

donc, la même suite converge uniformément à l'intérieur de (C_1') vers la fonction f^*. La famille des fonctions f est, dans ce cas encore, normale et bornée. Examinons quelques hypothèses particulières. Supposons d'abord que les fonctions g et h aient leurs modules bornés dans (C): $|g|\leq M$, $|h|\leq M$.

Ces fonctions forment des familles normales: donc les fonctions f forment une famille normale et bornée. Dans le cercle (C'), le module de f est borné par un nombre qui peut dépendre de $a_0, b_0, c_0, \theta, M, R$. Mais R ne peut figurer dans

[1] Paul Montel, Sur les familles normales de fonctions analytiques (*Annales Sc. de l'Ecole Normale Supérieure,* 3e s. t. 33, 1916, p. 232).

[2] Paul Montel, Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine (*Annales Sc. de l'Ecole Normale Supérieure,* 3e s. t. 29, 1912, p. 506).

ce nombre, car en remplaçant z par $\frac{z}{R}$ on obtient des fonctions possédant les mêmes valeurs et les mêmes propriétés dans le cercle $|z| \leq 1$. D'autre part, en remplaçant f, g, h pas $f-c_0, g-c_0, h-c_0$ on voit que le module de $f-c_0$ est borné par un nombre dépendant de $a_0-c_0, b_0-c_0, \theta, M$, et, comme $|c_0| \leq M$ on a

$$|f| \leq \Omega(a_0-c_0, b_0-c_0, \theta, M).$$

Donc:

Soient

$$f=a_0+a_1 z+\cdots, \quad g=b_0+b_1 z+\cdots, \quad h=c_0+c_1 z+\cdots,$$

trois fonctions holomorphes dans le cercle $|z|<R$. *Supposons*

$$|g| \leq M, \quad |h| \leq M, \quad b_0-c_0 \neq 0$$

et que les équations

$$f-g=0, \quad f-h=0$$

n'aient pas de racine dans le cercle $|z|<R$. *Alors, dans le cercle* $|z|<\theta R$, $(0<\theta<1)$, on a

$$|f| < \Omega\ (a_0-c_0, b_0-c_0, \theta, M).$$

Si on suppose que la fonction h est la constante zéro, on retrouve un théorème dû à M. Valiron.[1]

On obtient un théorème analogue en supposant que les fonctions g et h ne prennent pas plus de p fois la valeur zéro, ni plus de q fois la valeur *un* dans le cercle (C) et que l'on ait fixé, si $p \leq q$, les valeurs des coefficients

$$b_0, b_1, \ldots, b_p; \quad c_0, c_1, \ldots, c_p,$$

avec $b_0-c_0 \neq 0$. Plus généralement, supposons que les fonctions g et h forment des familles normales et que les équations

$$f-g=0, \quad f-h=0$$

aient respectivement, p ou q racines au plus, dans le cercle (C). Dans le cercle (C'') les fonctions $g-h$ ont r zéros au plus, en supposant toujours $b_0-c_0 \neq 0$. Les fonctions

[1] Compléments aux théorèmes de Picard-Borel. (*Comptes-Rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris,* t. 179, p. 740, 1924.)

$$\varphi = \frac{f-h}{g-h}$$

sont méromorphes dans ce cercle: elles ne prennent pas plus de p fois la valeur *un*, ni plus de q fois la valeur zéro, ni plus de r fois la valeur infinie. Elles forment donc une famille quasi-normale dont l'ordre est égal au nombre moyen de la suite p, q, r.[1] Si $p \leq q$, cet ordre est toujours inférieur ou égal à q. Par conséquent, en fixant les $q+1$ premiers coefficients $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q$ du développement de φ, les fonctions limites seront toutes des fonctions méromorphes, distinctes de la constante infinie.[2] Ces coefficients seront fixés, si l'on fixe les différences $a_0-b_0, a_1-b_1, \ldots, a_q-b_q$; $a_0-c_0, a_1-c_1, \ldots, a_q-c_q$. En reprenant le raisonnement précédent et en l'appliquant à une suite d'entiers ν_k telle que les suites $g_{\nu_k}, h_{\nu_k}, \varphi_{\nu_k}$ convergent vers les fonctions g^*, h^*, φ^*, les deux premières holomorphes et la troisième méromorphe dans le cercle (C'), on démontrera que la suite f_{ν_k} converge uniformément dans (C''). Il suffit, en effet, de choisir un cercle (C'_1) dont la circonférence ne contienne aucun zéro de g^*-h^* ni aucun point irrégulier de la suite quasi-normale φ_{ν_k}. La suite f_{ν_k} converge uniformément sur la circonférence de (C'_1), donc aussi à l'intérieur; comme (C'_1) est aussi voisin qu'on le veut de (C') et que (C') est aussi voisin qu'on le veut de (C), la famille des fonctions f est normale et bornée dans (C). Par exemple, si $|g| \leq M$, $|h| \leq M$, on aura

$$|f| \leq \Omega(a_0-c_0, a_1-c_1, \ldots, a_q-c_q;\ b_0-c_0, b_1-c_1, \ldots, b_q-c_q, M, \theta, R)$$

lorsque $|z| \leq \theta R$.

14. Voici maintenant une extension aux fonctions méromorphes des résultats obtenus au paragraphe 9. Soient

$$f = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots,$$
$$g = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n + \cdots,$$
$$h = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots,$$
$$k = d_0 + d_1 z + \cdots + d_n z^n + \cdots,$$

quatre fonctions méromorphes dans le cercle (C) $[|z| < R]$ et telles que les équations

---

[1] P. Montel, Sur les familles quasi-normales de fonctions analytiques (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. LII, 1924, p. 107).

[2] Loc. cit. à la note précédente, p. 109.

$$f-g=0,\ f-h=0,\ f-k=0,\ g-h=0,\ g-k=0,\ h-k=0,$$

n'aient aucune racine dans (C); en d'autres termes, le déterminant de Van der Monde

$$\varDelta(f, g, h, k)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ f & g & h & k \\ f^2 & g^2 & h^2 & k^2 \\ f^3 & g^3 & h^3 & k^3 \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas dans (C). Nous allons montrer que R a une limite supérieure ne dépendant que des deux premiers coefficients des fonctions, sauf dans un cas exceptionnel. Dans ce cas, la limite R pourra dépendre d'autres coefficients des développements jusqu'à un rang déterminé. Le seul cas où les quatre fonctions méromorphes peuvent exister dans tout le plan sans que deux d'entre elles deviennent égales est celui où le rapport anharmonique de ces quatre fonctions est constant. Considérons en effet la fonction

$$\varphi(z)=(f, g, h, k)=\frac{f-h}{g-h}:\frac{f-k}{g-k};$$

cette fonction est holomorphe dans le cercle (C) où elle ne prend ni la valeur zéro, ni la valeur *un*. Il faut remarquer que deux des fonctions ne peuvent admettre le même pôle, sinon elles seraient égales en ce point. On a donc, dans le cercle (C),

$$\varphi(z)=\gamma_0+\gamma_1 z+\cdots.$$

On sait que le rayon R ne peut dépasser la limite

$$\frac{2Q}{\pi}|e_1-e_2|\left|\frac{\gamma_0}{\gamma_1}\right|,$$

dans laquelle les lettres ont la même signification qu'au paragraphe 9. Or,

$$\gamma_0=\varphi(0)=(a_0, b_0, c_0, d_0)=\frac{a_0-c_0}{a_0-d_0}:\frac{b_0-c_0}{b_0-d_0},\quad \gamma_1=\varphi'(0).$$

Un calcul facile donne

$$\varphi'(z)=\frac{D}{(g-h)^2(f-k)^2}$$

avec

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ f & g & h & k \\ f^2 & g^2 & h^2 & k^2 \\ f' & g' & h' & k' \end{vmatrix},$$

donc

$$\varphi'(0)=\frac{\Delta_1}{(b_0-c_0)^2(a_0-d_0)^2},$$

en posant

$$\Delta_1=D(0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_0^2 & b_0^2 & c_0^2 & d_0^2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{vmatrix};$$

d'autre part, on peut prendre

$$e_2-e_3=(a_0-b_0)(c_0-d_0),$$
$$e_3-e_1=(b_0-c_0)(a_0-d_0),$$
$$e_1-e_2=(c_0-a_0)(b_0-d_0),$$

alors

$$R=\frac{2Q}{\pi}\frac{|(a_0-b_0)(a_0-c_0)(a_0-d_0)(b_0-c_0)(b_0-d_0)(c_0-d_0)|}{|\Delta_1|}$$

ou, en écrivant

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_0^2 & b_0^2 & c_0^2 & d_0^2 \\ a_0^3 & b_0^3 & c_0^3 & d_0^3 \end{vmatrix},$$

$$R=\frac{2Q}{\pi}\left|\frac{\Delta}{\Delta_1}\right|,$$

d'où le théorème:

Etant données quatre fonctions:

$$\begin{aligned} f&=a_0+a_1z+\cdots,\\ g&=b_0+b_1z+\cdots,\\ h&=c_0+c_1z+\cdots,\\ k&=d_0+d_1z+\cdots. \end{aligned}\qquad \Delta_1\neq 0,$$

il existe un nombre R ne dépendant que des différences des nombres a_0, b_0, c_0, d_0 *et des différences des nombres* a_1, b_1, c_1, d_1, *tel que, à l'intérieur d'un cercle de centre origine et de rayon supérieur à* $\frac{2Q}{\pi}\left|\frac{\Delta_1}{\Delta}\right|$, *ou bien l'une des fonctions cesse d'être méromorphe, ou bien deux des quatre fonctions au moins sont égales en un point.*

Si les fonctions g, h, k sont des constantes différentes b_0, c_0, d_0, on retrouve un théorème classique correspondant à l'hypothèse $a_1 \neq 0$.

Dans le cas où Δ_1 est nul, γ_1 est nul; soit alors γ_n le premier coefficient qui n'est pas nul: on obtient pour R, comme au § 9, une limite supérieure dont l'expression contient les $n+1$ premiers coefficients de chaque fonction.

Il n'y a pas de limite pour R lorsque tous les coefficients γ_n sont nuls. Dans ce cas, $\varphi(z)$ est une constante. *Le cas d'exception correspond aux systèmes de quatre fonctions méromorphes dont le rapport anharmonique est constant.* Dans les autres cas, on vérifie aisément que la limite supérieure de R peut être atteinte pour certains systèmes de quatre fonctions.

15. On peut varier de bien des manières les hypothèses qui entraînent l'existence du nombre R. Donnons-nous par exemple les valeurs a_0, b_0, c_0, d_0 des fonctions au point $z=0$, et leurs valeurs a_0', b_0', c_0', d_0' en un autre point z_0. Si les rapports anharmoniques (a_0, b_0, c_0, d_0) et (a_0', b_0', c_0', d_0') sont différents, il existe une limite R ne dépendant que des nombres z_0, $a_0, b_0, c_0, d_0, a_0', b_0', c_0', d_0'$. En effet, la fonction $\varphi(z)$ prend des valeurs différentes aux points 0 et z_0. On sait que, dans ce cas, il existe une limite supérieure pour le rayon du cercle dans lequel cette fonction est holomorphe et différente de zéro et de *un*. Donc: *Etant données quatre fonctions prenant des valeurs fixes en deux points P et Q telles que le rapport anharmonique des valeurs en P soit différent du rapport anharmonique des valeurs en Q, il existe un nombre R ne dépendant que de la différence des affixes des points P et Q et des différences des valeurs données en chaque point, tel que, dans tout cercle de centre origine et de rayon supérieur à R, ou bien une des fonctions cesse d'être méromorphe, ou bien deux fonctions deviennent égales.*

CHAPITRE III.

Sur les couples de fonctions méromorphes vérifiant une relation algébrique.

16. Considérons une relation algébrique

$$F(x, y)=0$$

de genre p, et soit (a_0, b_0) un point ordinaire de la surface de Riemann correspondante. Supposons que l'on ait résolu la relation au moyen des deux fonctions

$$x = f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots,$$
$$y = g(z) = b_0 + b_1 z + \cdots$$

méromorphes dans le cercle (C), $|z| < R$, on a

$$F(a_0, b_0) = 0, \quad b_1 = -a_1 \frac{F'_{a_0}}{F'_{b_0}};$$

nous dirons que les deux fonctions $f(z)$, $g(z)$ uniformisent la relation pour le cercle (C) ou encore qu'elles forment un couple uniformisant pour le cercle (C).

M. E. Picard a démontré au sujet des couples d'uniformisation une proposition fondamentale relative au cas où le genre p est supérieur à l'unité[1]: il existe alors un nombre R, ne dépendant que de a_0 et a_1 tel que, à l'intérieur de tout cercle de rayon supérieur à R, une des deux fonctions x et y au moins cesse d'être méromorphe.

Rappelons brièvement la démonstration. Lorsque le genre est plus grand que *un*, on peut exprimer x et y comme fonctions méromorphes d'un paramètre u dont le module ne dépasse pas l'unité. Un domaine limité par des arcs de cercles et contenu tout entier dans le cercle $|u| \leq 1$ correspond point par point à la surface de Riemann définie par la relation algébrique. La fonction $u(x, y)$ est holomorphe en chaque point x, y de cette surface et ses différentes déterminations se déduisent de l'une d'elles par des transformations homographiques. Si, dans la fonction $u(x, y)$, nous remplaçons x et y par les fonctions $f(z)$ et $g(z)$, nous obtenons une fonction

$$u(z) = u[f(z), g(z)]$$

holomorphe autour de chaque point du cercle (C). Cette fonction est donc uniforme et holomorphe dans ce cercle et son module reste inférieur à l'unité. La famille des fonctions $u(z)$ est une famille normale dans le cercle (C). Si l'on fixe la valeur a_0, il en est de même de la valeur

$$u(0) = u(a_0, b_0) = u_0;$$

---

[1] Sur les couples de fonctions uniformes d'une variable correspondant aux points d'une courbe algébrique de genre supérieur à l'unité. (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* t. XXXIII, 1912, pp. 1—5.) Sur les systèmes de deux fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique. (*Bulletin de la Société Mathématique de France,* t. XL, 1912, pp. 201—205. *Comptes-Rendus des Séances de l'Ac. des Sc. de Paris,* 15 janvier 1912).

les fonctions u correspondantes forment une famille normale et bornée. Si l'on fixe aussi la valeur a_1 supposé non nulle, on a

$$u_1 = u'(0) = \frac{a_1}{F'_{b_0}} \frac{D(u, F)}{D(a_0, b_0)} \neq 0.$$

On en déduit, par un raisonnement classique, que le rayon R ne peut dépasser la limite $\frac{1}{|u_1|} = \frac{\Omega(a_0)}{|a_1|}$, Ω étant un nombre positif fonction de a_0 seul. On peut aussi remarquer que les fonctions $u(z)$ formant une famille normale, il en est de même des fonctions

$$x[u(z)] = f(z), \quad y[u(z)] = g(z)$$

qui forment un système de fonctions méromorphes. Si l'on fixe a_0 et $a_1 \neq 0$, la famille normale des fonctions $f(z)$ correspondantes montre que le rayon R est borné par une limite de la forme $\frac{\Omega(a_0)}{|a_1|}$.[1]

On peut assujettir les fonctions $f(z)$, $g(z)$ à d'autres conditions: supposons par exemple que ces fonctions fassent correspondre à deux valeurs fixes de z, 0 et $z_0 \neq 0$, deux points distincts (a_0, b_0) et (a_0', b_0') de la surface de Riemann. Nous supposons que ce sont des points ordinaires. La fonction $u(z)$ prendra ici pour $z=0$, et $z=z_0$ deux valeurs différentes $u(a_0, b_0)$ et $u(a_0', b_0')$; comme la famille des $u(z)$ est une famille normale dans (C), on en déduit que R a une limite supérieure ne dépendant que de z_0, a_0, a_0'.

Lorsque les coefficients de $f(z)$ et de $g(z)$ sont arbitraires, les couples uniformisants pour un cercle (C) forment toujours une famille normale complexe de fonctions méromorphes. On en déduit, comme l'a montré M. Picard, que le théorème de M. Vitali[2] s'applique à cette famille complexe: la convergence d'une suite infinie de systèmes f_n, g_n en une infinité de points ayant au moins un point limite à l'intérieur de (C) entraîne la convergence uniforme de cette suite dans l'intérieur de (C). On pourrait aussi étendre à cette famille complexe le théorème de M. Blaschke[3] relatif au cas où les points limites des points de

---

[1] P. Montel, Sur les familles normales de fonctions analytiques (*Ann. sc. de l'Ecole Normale Supérieure*, t. 33, s. 3, 1916, p. 295).

[2] Sopra le serie di funzioni analitiche (*Rendiconti del R. Ist. Lombardo*, s. 2, t. XXXVI, 1903, p. 772); (*Annali di Mate. pura ed Applicata*, s. 3, t. X, 1904, p. 73).

[3] Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen (*Berichte der Math. Phys. Klasse der Sächsischen Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig*, Bd. LXVII, pp. 194—200, 1915).

convergence sont tous sur la circonférence (C). Il suffit de remarquer que la suite correspondante des fonctions holomorphes et bornées $u_n(z)$ converge uniformément dans ce cercle, c'est-à-dire dans le domaine fermé formé par un cercle concentrique quelconque, intérieur au premier.

Les résultats précédents supposent essentiellement que le genre de la relation algébrique soit supérieur à l'unité. Lorsque le genre est égal à *un*, x et y peuvent être représentés par des fonctions d'un paramètre u, méromorphes dans tout le plan ponctué, c'est-à-dire en tout point à distance finie: x et y sont des fonctions doublement périodiques de u. Lorsque le genre est égal à zéro, x et y peuvent être représentés par des fonctions de u, méromorphes dans le plan non ponctué, c'est-à-dire par des fonctions rationnelles. Nous allons voir qu'il est alors nécessaire d'introduire des couples de valeurs exceptionnelles pour les couples de fonctions uniformisantes si l'on veut obtenir des résultats correspondant aux théorèmes établis lorsque le genre est plus grand que *un*.

17. Supposons d'abord que la relation soit de genre *un*. Les fonctions

$$x=f(z)=a_0+a_1 z+\cdots$$
$$y=g(z)=b_0+b_1 z+\cdots$$

vérifient la relation algébrique lorsque z est intérieur au cercle (C), $|z|<R$. Nous supposons en outre que, lorsque z est intérieur à (C), le point (x, y) ne coïncide jamais avec un point déterminé (a, b) de la surface de Riemann. Nous dirons que (a, b) est un point exceptionnel pour le couple.

La relation peut être résolue au moyen de fonctions doublement périodiques d'un paramètre u de telle sorte qu'un parallélogramme des périodes corresponde point par point à la surface de Riemann. Soit u_0 une valeur de u correspondant au point (a, b); les autres s'en déduisent par l'addition d'une période. $u(x, y)$ est holomorphe en tout point de la surface de Riemann; la fonction

$$u(z)=u[f(z), g(z)]$$

est holomorphe dans le cercle (C) où elle ne prend ni la valeur u_0, ni une valeur u_1 différant de la première par une période. La famille des fonctions $u(z)$ est une famille normale; il en est de même des familles des fonctions $f(z)$, $g(z)$ qui forment une famille complexe normale dans (C). Si l'on fixe a_0 et $a_1 \neq 0$, on en déduit comme précédemment une limite supérieure pour R, ne dépendant que de a_0, a_1, a, b.

Il existe un nombre R_0 ne dépendant que de a_0, a_1, a, b, tel que, dans tout cercle de centre origine et de rayon supérieur à R_0, ou bien l'une des fonctions x et y cesse d'être méromorphe, ou bien le point (x, y) coïncide avec le point (a, b).

En particulier, on peut faire l'hypothèse que $f(z)$ ne prenne jamais une valeur particulière fixe a que l'on peut, en effectuant au besoin une transformation homographique sur x, supposer être la valeur infinie; la fonction $f(z)$ est alors holomorphe dans le cercle (C): *Il existe un nombre R'_0 ne dépendant que de a_0 et de a_1 tel que, dans tout cercle de centre origine et de rayon supérieur à R'_0, ou bien x cesse d'être holomorphe, ou bien y cesse d'être méromorphe.*

18. Supposons maintenant que le point (x, y) puisse coïncider un nombre fini de fois avec un point déterminé (a, b) de la surface de Riemann mais que cela ne puisse pas se produire plus de k fois. Soient

$$u_0, u_1, u_2, \dots u_k, u_{k+1},$$

$k+2$ valeurs de u, différant deux à deux par des périodes, et correspondant à ce point (a, b). Aucune fonction $u(z)$ ne peut prendre plus de k de ces valeurs lorsque z est dans le cercle (C). Il y a au moins deux valeurs de la suite que la fonction ne prend pas. Soit alors une suite infinie de fonctions $u(z)$; il y a deux valeurs particulières de la suite u' et u'' qui sont exceptionnelles pour une suite infinie $u_n(z)$ extraite de la première puisque le nombre des couples de valeurs choisies dans la suite $u_0, u_1, \dots u_{k+1}$ est fini. La suite $u_n(z)$ est alors normale. Donc, la famille des $u(z)$ est normale et les résultats du paragraphe précédent sont applicables.

Il existe un nombre R_k, ne dépendant que de a_0, a_1, a, b, tel que, à l'intérieur de tout cercle de centre origine et de rayon supérieur à R_k, ou bien l'une des fonctions x et y cesse d'être méromorphe, ou bien le point (x, y) passe plus de k fois par le point (a, b).

Il existe un nombre R'_k, ne dépendant que de a_0 et a_1, tel que, à l'intérieur de tout cercle de centre origine et de rayon supérieur à R'_k, ou bien la fonction x a plus de k pôles, ou bien la fonction y cesse d'être méromorphe.

Bien entendu, au lieu de fixer les valeurs a_0 et a_1, on peut assujettir les fonctions $f(z)$ et $g(z)$ à la condition que le point (x, y) coïncide, pour $z=0$, avec le point (a_0, b_0) et, pour $z=z_0+0$ avec un autre point (a_0', b_0') de la surface de Riemann.

Enfin, dans les conditions précédentes, la famille complexe $f(z), g(z)$ étant normale, on peut étendre les théorèmes de M. Vitali et de M. Blaschke aux suites infinies de ces systèmes.

19. Supposons maintenant que la relation algébrique soit de genre zéro. On peut exprimer x et y en fonctions rationnelles d'un paramètre u et le plan des u tout entier correspond point par point à la surface de Riemann. La fonction $u(x, y)$ est rationnelle, la fonction $u(z)$ méromorphe dans le cercle (C). Il faut introduire ici trois points exceptionnels (a, b), (a', b'), (a'', b''); alors, la fonction $u(z)$ ne prend aucune des valeurs u_0, u'_0, u''_0 qui correspondent à ces points et on obtient une limite supérieure pour le rayon R.

Il existe un nombre R_0 ne dépendant que de $a, b, a', b', a'', b'', a_0, a_1$ tel que, à l'intérieur de tout cercle de centre origine et de rayon supérieur à R_0, ou bien l'une des fonctions x ou y cesse d'être méromorphe, ou bien le point (x, y) coïncide avec l'un des points (a, b), (a', b'), (a'', b'').

On peut aussi supposer que, dans le cercle (C), le point (x, y) ne passe pas plus de p fois par le point (a, b), ni plus de q fois par le point (a', b'), ni plus de r fois par le point (a'', b'') avec $p \leq q \leq r$. Dans ce cas, la famille des fonctions $u(z)$ est quasi-normale dans le cercle (C) et il faut fixer ses $p+q+2$ premiers coefficients pour que R ait une limite supérieure. Cela revient à fixer les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_{p+q+1}$ de $x=f(z)$; et le nombre R dépend ici de p, q, k et de ces $p+q+2$ coefficients. Il est nécessaire en outre que ces coefficients n'appartiennent pas à une fraction rationnelle de z, afin que $u(z)$ ne puisse être une fraction rationnelle. Cela exige qu'un déterminant Δ formé avec les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{p+q+1}$ soit différent de zéro.[1]

Ici encore, on peut modifier beaucoup la nature des conditions imposées à $f(z)$ et étendre les théorèmes relatifs aux suites convergentes.

CHAPITRE IV.

Les involutions exceptionnelles des fonctions algébroïdes.

20. Etant données deux équations du second degré

$$u^2+f_1 u+f_2=0,$$

$$\lambda_2 u^2-2\lambda_1 u+\lambda_0=0,$$

[1] Paul Montel, Sur les familles quasi-normales de fonctions analytiques (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. LII, 1924, p. 112).

on sait que les racines u_1 et u_2 de la première sont conjuguées par rapport aux racines a, b de la seconde lorsque

$$\lambda_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0;$$

les racines vérifient alors la relation $(u_1, u_2, a, b) = -1$ ou

$$(u_1 - a)(u_2 - b) + (u_1 - b)(u_2 - a) = 0,$$

que nous écrivons

$$\sum (u_1 - a)(u_2 - b) = 0,$$

étant entendu que la somme est relative aux deux permutations a, b et b, a des racines de la 2^e équation ou aux deux permutations des racines de la première. On dit aussi que les nombres u_1, u_2 appartiennent à l'involution dont les nombres doubles sont a, b ou encore que le couple (u_1, u_2) est en involution avec le couple (a, b). La disposition des quatre points du plan dont les affixes sont u_1, u_2, a, b est bien connue. En particulier, tout cercle contenant les deux points d'un couple contient au moins un point de l'autre couple.

Plus généralement, considérons deux équations de degré ν

$$F(u) = u^\nu + f_1 u^{\nu-1} + f_2 u^{\nu-2} + \cdots + f_\nu = 0,$$

$$\lambda_\nu u^\nu - C_\nu^1 \lambda_{\nu-1} u^{\nu-1} + C_\nu^2 \lambda_{\nu-2} u^{\nu-2} + \cdots + (-1)^\nu \lambda_0 = 0,$$

les nombres C_ν^i étant les coefficients du développement de la puissance $\nu^{\text{ième}}$ d'un binome. Nous dirons que les racines $u_1, u_2, \ldots u_\nu$ de la première et les racines $a, b, c, \ldots l$ de la seconde sont en involution lorsque

$$\sum (u_1 - a)(u_2 - b) \ldots (u_\nu - l) = 0,$$

la somme étant étendue aux $\nu!$ permutations des nombres $a, b, \ldots, l$ ou aux $\nu!$ permutations des nombres $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$. Cette condition s'exprime aisément au moyen des coefficients des équations, puisque le premier membre est une fonction symétrique des racines de chaque équation, on obtient ainsi

$$\lambda_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_\nu f_\nu = 0.$$

Si l'on marque les points du plan dont les affixes sont les racines des deux équations, une des propriétés géométriques d'un système de quatre points en involution est encore vraie: tout domaine circulaire contenant les points de l'un des groupes contient au moins un point de l'autre groupe.[1]

On retrouve la même condition lorsqu'on veut exprimer que le polynome $F(u)$ peut se mettre sous la forme d'une somme de puissances $\nu^{\text{èmes}}$ des binomes relatifs aux racines $a, b, \ldots, l$ du second polynome.

$$F(u) \equiv A(u-a)^\nu + B(u-b)^\nu + \cdots + L(u-l)^\nu,$$

$A, B, \ldots, L$ étant des constantes. Pour que cette identité soit possible, il faut que les systèmes de racines soient en involution, c'est-à-dire que l'on ait

$$\lambda_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_\nu f_\nu = 0.$$

Nous avons supposé dans ce qui précède que les nombre $a, b, \ldots, l$ étaient distincts. Dans le cas des racines multiples, il faut, dans la somme $\sum$, répéter les termes égaux autant de fois qu'ils se présentaient quand les racines étaient distinctes. Si a est racine d'ordre de multiplicité α, le terme

$$(u_1-a)(u_2-a)\ldots(u_\alpha-a)(u_{\alpha+1}-b)\ldots(u_\nu-l)$$

doit être répété $\alpha!$ fois.

De même, la représentation de $F(u)$ au moyen d'une somme de puissances de binomes doit être modifiée; il faut écrire

$$F(u) \equiv A(u-a)^\nu + B(u-a)^{\nu-1} + \cdots + H(u-a)^{\nu-\alpha+1} + K(u-b)^\nu + \cdots + L(u-l)^\nu,$$

lorsque la racine a a l'ordre de multiplicité α.

En particulier, si tous les nombres $a, b, c, \ldots, l$ sont égaux, la relation d'involution devient

$$\nu!\ (u_1-a)(u_2-a)\ldots(u_\nu-a) = 0,$$

elle exprime que a est racine de $F(u)$; d'ailleurs dans ce cas, ce polynome se met sous la forme

$$F(u) \equiv A(u-a)^\nu + B(u-a)^{\nu-1} + \cdots + L(u-a).$$

Enfin, il peut arriver que certains des nombres $a, b, c, \ldots, l$ soient infinis. Il sufit de supprimer les binomes correspondants dans la somme $\sum$ ou dans la représentation de $F(u)$ au moyen de puissances $\nu^{\text{èmes}}$. La condition

[1] G. Szegö, Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace (*Mathematische Zeitschrift*, 1922, p. 29).

$$\lambda_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_\nu f_\nu = 0$$

donnera la nouvelle condition en supposant nuls les derniers coefficients λ_i. On vérifie aisément ce résultat soit par un passage à la limite, soit par un calcul direct.

21. On dit qu'une fonction multiforme $u(z)$ à ν déterminations est algébroïde entière dans un domaine (D) lorsque les ν déterminations $u_1, u_2, \ldots u_\nu$ de cette fonction correspondant à un point z de ce domaine vérifient une équation

$$F(z, u) \equiv u^\nu + f_1(z) u^{\nu-1} + \cdots + f_\nu(z) = 0$$

dont les coefficients $f_i(z)$ sont holomorphes dans le domaine ouvert (D). Si ce domaine comprend le plan tout entier, on dit que $u(z)$ est une fonction algébroïde entière. Soit une équation de degré ν à coefficients constants

$$\lambda_0 u^\nu - C_\nu^1 \lambda_1 u^{\nu-1} + C_\nu^2 \lambda_2 u^{\nu-2} + \cdots + (-1)^\nu \lambda_\nu = 0,$$

dont les racines, distinctes ou non, sont $a, b, \ldots, l$. Les valeurs de z pour lesquelles les déterminations $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ de la fonction $u(z)$ sont en involution par rapport aux nombres $a, b, \ldots, l$ sont données par l'équation

$$\lambda_0 + \lambda_1 f_1(z) + \cdots + \lambda_\nu f_\nu(z) = 0.$$

Lorsque cette équation n'a qu'un nombre fini de racines dans le domaine (D), nous dirons que l'involution est exceptionnelle dans ce domaine ou que *le système* $(a, b, \ldots, l)$ *est exceptionnel dans le domaine.* En particulier, dire que $(a, a, \ldots, a)$ est un système exceptionnel dans le domaine (D) revient à dire que a est une valeur exceptionnelle pour $u(z)$ dans ce domaine. On voit que, à toute involution exceptionnelle pour l'algébroïde $u(z)$ correspond une combinaison exceptionnelle pour le système des ν fonctions holomorphes $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_\nu(z)$. Si on remplace le système $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ par un système $g_1, g_2, \ldots, g_\nu$ de la même classe, nous savons que le nombre des combinaisons exceptionnelles demeure le même.[1] Nous dirons que deux algébroïdes définies dans le domaine (D) sont de la même classe lorsque les systèmes des coefficients des équations qui les définissent sont deux systèmes de même classe. *Une classe d'algébroïdes* à ν déterminations est obtenue à partir de l'une d'elles, en faisant sur les coefficients de l'équation qui

[1] Pour les combinaisons exceptionnelles du premier type, on doit supposer que ce sont des formes linéaires indépendantes, car toute combinaison du premier degré de plusieurs combinaisons exceptionnelles du premier type est encore une combinaison exceptionnelle du même type.

la définit une substitution linéaire réversible quelconque à coefficients constants. Nous allons voir que les involutions exceptionnelles jouent, par rapport aux fonctions multiformes, un rôle semblable à celui que jouent les valeurs exceptionnelles par rapport aux fonctions uniformes.

22. Supposons que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ soient des fonctions entières de z et que le domaine (D) comprenne tout le plan. Nous supposons aussi que ces fonctions ne soient pas toutes des polynomes, c'est-à-dire que $u(z)$ n'est pas une fonction algébrique.

Puisque, à chaque involution exceptionnelle correspond une combinaison exceptionnelle pour le système $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$, il suffit de nous reporter aux résultats du § 2 pour obtenir la proposition suivante dans laquelle l'expression »involutions exceptionnelles distinctes» signifie »involutions correspondant à des combinaisons distinctes».

Théorème. *Le nombre des involutions exceptionnelles d'une fonction algébroïde entière ne peut dépasser* $2\nu-1$, ν *désignant le nombre des déterminations de cette fonction. Il ne peut exister plus de* $\nu-1$ *involutions exceptionnelles distinctes du premier type, ni plus de* ν *involutions exceptionnelles distinctes du second type.*

En particulier, il peut arriver que certaines de ces involutions correspondent à des groupes $(a, b, \ldots, l)$ dont tout les termes sont égaux; dans ce cas, la valeur a est une valeur exceptionnelle au sens habituel de ce mot. On voit que le nombre maximum des valeurs exceptionnelles est $2\nu-h-1$, en désignant par h le nombre des involutions exceptionnelles.[1] S'il n y a pas d'involutions ordinaires, le nombre maximum des valeurs exceptionnelles est $2\nu-1$: il n'y a pas besoin d'ajouter dans ce cas que les involutions soient distinctes, car tous les déterminants sont des déterminants de Van der Monde différents de zéro. Nous retrouvons ainsi un théorème démontré par M. Rémoundos.[2] Mais on voit en même temps qu'il n'y a pas lieu de distinguer entre les valeurs exceptionnelles et les involutions exceptionnelles. *Pour toutes les algébroïdes d'une même classe, le nombre des involutions exceptionnelles distinctes est le même.* Si pour l'une d'elles se présentent des

---

[1] La valeur infinie n'est pas comptée comme valeur exceptionnelle.

[2] Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* 2e s. t. VIII, 1903). Récemment, M. Varopoulos a complété ce théorème en montrant que le nombre maximum de valeurs exceptionnelles est $\nu+h$, h désignant le nombre des relations linéaires distinctes à coefficients constants entre les fonctions f_i: *Sur le nombre des valeurs exceptionnelles des fonctions multiformes* (*Comptes Rendus* t. 177, p. 306, 1923; *Bulletin de la Société Math. de France* t. LIII, 1925, p. 23—34).

valeurs exceptionnelles proprement dites, ces valeurs ne sont plus exceptionnelles, en général, pour une autre algébroïde de la classe et donnent lieu à des involutions exceptionnelles ordinaires.

Le nombre maximum $2\nu-1$ peut être atteint, comme le montre l'équation

$$P_\nu(u)+e^z Q_{\nu-1}(u)=0,$$

dans laquelle P_ν et $Q_{\nu-1}$ sont des polynomes de degré ν et $\nu-1$ dont toutes les racines sont distinctes et n'ayant aucune racine commune. Dans ce cas particulier, toutes les algébroïdes de la classe définie par l'algébroïde précédente ont $2\nu-1$ valeurs exceptionnelles.

23. Nous allons maintenant définir l'ordre d'une valeur exceptionnelle. Nous dirons qu'un nombre a *est une valeur exceptionnelle d'ordre* α lorsque cette valeur a est exceptionnelle pour les algébroïdes définies au moyen de

$$F(z,u),\ F'_u(z,u),\ F''_{u^2}(z,u),\ldots,\ F^{(\alpha-1)}_{u^{\alpha-1}}(z,u).$$

On peut dire encore que le polynome $F(z,u)$ est en involution avec les polynomes

$$(u-a)^\nu,\ (u-a)^{\nu-1},\ldots,\ (u-a)^{\nu-\alpha+1};$$

ou encore que le système $(u_1, u_2,\ldots,u_\nu)$ est en involution avec les α systèmes

$$(a,a,a,\ldots,a),\ (\infty,a,a,\ldots,a),\ (\infty,\infty,a,\ldots,a),\ldots.$$

En particulier, une valeur exceptionnelle d'ordre ν se traduit par ν combinaisons exceptionnelles entre les fonctions $f_1, f_2,\ldots,f_\nu$ formant un tableau triangulaire.

Lorsqu'une algébroïde admet des valeurs exceptionnelles $a, b,\ldots,l$ d'ordres respectifs $\alpha,\beta,\ldots,\lambda$ avec la condition $\alpha+\beta+\cdots+\lambda=\nu$, les ν combinaisons exceptionnelles sont distinctes, car le déterminant des coefficients est égal à un produit de puissances des différences $a-b, a-c,\ldots,k-l$. Lorsque la somme des ordres de multiplicité dépasse ν, ν combinaisons exceptionnelles ne sont pas nécessairement toujours distinctes quand les nombres $a, b,\ldots,l$ vérifient des relations particulières. Considérons par exemple l'algébroïde définie par l'équation

$$u^2+f_1(z)u+f_2(z)=0$$

et supposons qu'elle admette a comme valeur exceptionnelle d'ordre 2, b et c comme valeurs exceptionnelles d'ordre *un*; nous aurons les combinaisons exceptionnelles

$$a^2+f_1 a+f_2,$$
$$2a+f_1,$$
$$b^2+f_1 b+f_2,$$
$$c^2+f_1 c+f_2;$$

les trois dernières seront distinctes si $2a-b-c$ n'est pas nul; elles ne seront pas distinctes lorsque $a=\frac{b+c}{2}$; par exemple, l'algébroïde $u^2+ue^x-1=0$ admet 0 comme valeur exceptionnelle d'ordre deux, 1 et -1 comme valeurs exceptionnelles d'ordre *un*. Dans le cas où les valeurs exceptionnelles d'ordre de multiplicité supérieurs à *un* donnent lieu à des combinaisons exceptionnelles distinctes lorsqu'on prend ν ou $\nu+1$ d'entre elles, on peut dire que *la somme des ordres de multiplicité des valeurs exceptionnelles ne peut dépasser* $2\nu-1$.

24. Lorsque l'on a une famille de fonctions algébroïdes d'ordre ν, les coefficients forment une famille de systèmes de ν fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$. Si la famille des systèmes est normale et bornée dans le domaine (D) considéré, de toute suite infinie de systèmes, on peut extraire une suite partielle convergeant uniformément vers un système de ν fonctions

$$f_1^*, f_2^*, \ldots, f_\nu^*$$

bornées dans le domaine (D); considérons la fonction algébroïde u^* d'ordre ν définie par l'équation:

$$u^{*\nu}+f_1^* u^{*\nu-1}+\cdots+f_\nu^*=0.$$

Pour une valeur déterminée de z, cette fonction a ν valeurs $u_1^*, u_2^*, \ldots, u_\nu^*$ et ces valeurs sont les limites des valeurs prises au même point z par les algébroïdes dont la suite correspond à la suite convergente des systèmes $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$: c'est une conséquence immédiate du théorème sur la continuité des racines d'une équation algébrique. La convergence est d'ailleurs uniforme autour de chaque point z, et par conséquent dans tout domaine complètement intérieur à (D). Nous dirons dans ce cas, avec M. Rémoundos[1], que la famille des algébroïdes est normale dans le domaine (D). Par exemple, si les diverses déterminations de $u(z)$ sont bornées dans le domaine, la famille est normale.

Lorsque la famille complexe n'est pas bornée, elle peut être normale sans

[1] Sur les familles de fonctions multiformes admettant des valeurs exceptionnelles dans un domaine (*Acta Math.*, t. 37, 1914 p. 241—300); Sur les familles et les séries de fonctions multiformes dans un domaine (*Annali di Matematica*, s. 3, t. XXIII, p. 1—24).

que les algébroïdes aient une algébroïde limite; et réciproquement, les algébroïdes peuvent avoir une limite sans que la famille complexe soit normale.

Prenons, par exemple, les algébroïdes définies par

$$u^2 + 2^n z^n u + 2^n = 0,$$

n étant un entier positif; la famille complexe

$$f_1 = 2^n z^n, \; f_2 = 2^n$$

est normale dans le cercle $|z - 1| < \frac{1}{2}$. Or, l'algébroïde n'a pas de limite, comme on le voit sur l'équation aux inverses $v = \frac{1}{u}$,

$$v^2 + z^n v + \frac{1}{2^n} = 0.$$

De même, les algébroïdes

$$u^2 + 2^n z^n u + 2^n = 0$$

ont pour limite l'infini lorsque $|z| < 1$; or, dans ce domaine, la famille complexe f_1, f_2 n'est pas normale.

Nous nous bornerons donc à l'étude des familles d'algébroïdes qui demeurent bornées. Nous avons vu, au § 6, qu'une famille complexe $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ est normale lorsqu'elle admet 2ν combinaisons exceptionnelles formant deux tableaux triangulaires dont l'écart demeure supérieur à un nombre positif fixe. Or, l'existence d'une valeur exceptionnelle d'ordre ν pour l'algébroïde

$$u^\nu + f_1 u^{\nu-1} + \cdots + f_\nu = 0$$

entraîne l'existence de ν combinaisons exceptionnelles formant un tableau triangulaire. S'il y a deux valeurs exceptionnelles a et b d'ordre de multiplicité ν, l'écart des deux tableaux triangulaires correspondant sera, pour chaque point z, le plus petit module des différences

$$F(z, b) - F(z, a), \; F'_u(z, b) - F'_u(z, a),$$

$$\frac{1}{2}\left[F''_{u^2}(z, b) - F''_{u^2}(z, a)\right], \ldots, \frac{1}{(\nu-2)!}\left[F^{(\nu-2)}_{u^{\nu-2}}(z, b) - F^{(\nu-2)}_{u^{\nu-2}}(z, a)\right].$$

Fixons, par exemple, les valeurs de $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ pour $z = 0$; soient

$$f_1 = a_0 + a_1 z + \cdots,$$
$$f_2 = b_0 + b_1 z + \cdots,$$
$$\cdots\cdots$$
$$f_\nu = l_0 + l_1 z + \cdots;$$

nous supposerons donc fixes les nombres $a_0, b_0, \ldots, l_0$. Supposons encore qu'aucune des différences

$$F(0, b) - F(0, a) = b^\nu - a^\nu + a_0(b^{\nu-1} - a^{\nu-1}) + b_0(b^{\nu-2} - a^{\nu-2}) + \cdots + k_0(b-a),$$
$$F'_u(0, b) - F'_u(0, a) = \nu(b^{\nu-1} - a^{\nu-1}) + (\nu-1)a_0(b^{\nu-2} - a^{\nu-2}) + \cdots + 2h_0(b-a),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{(\nu-2)!}\left[F^{(\nu-2)}_{u^{\nu-2}}(0, b) - F^{(\nu-2)}_{u^{\nu-2}}(0, a)\right] = \frac{\nu(\nu-1)}{1 \cdot 2}(b^2 - a^2) + (\nu-1)a_0(b-a)$$

ne soit nulle, alors, l'écart des deux tableaux reste supérieur à un nombre fixe. On obtient ainsi le théorème suivant.

Théorème. *On considère la famille des algébroïdes*

$$F(z, u) \equiv u^\nu + f_1 u^{\nu-1} + \cdots + f_\nu = 0,$$

définies dans un cercle (C), $|z| < R$ et telles que les ν déterminations de u à l'origine soient fixes. Si chaque algébroïde admet les deux valeurs 0 *et* 1 *comme valeurs exceptionnelles d'ordre ν, et si l'écart à l'origine des tableaux correspondants n'est pas nul, cette famille est normale et bornée. Dans le cercle $|z| \leq \theta R$, on a*

$$|u(z)| < \Omega(a_0, b_0, \ldots, l_0, \theta)$$

$a_0, b_0, \ldots, l_0$ *étant les valeurs de $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$* pour $z = 0$.

Ce théorème constitue une extension aux algébroïdes du théorème de M. Schottky sur les fonctions uniformes admettant deux valeurs exceptionnelles. Pours $\nu = 1$, on retrouve d'ailleurs le théorème de M. Schottky. La condition que l'écart en un point particulier reste supérieur à un nombre positif est indispensable. Par exemple, les algébroïdes définies par $P(u) = e^{nz}$, où $P(u)$ est un polynome de degré ν à coefficients constants dont les racines sont distinctes, ne forment pas une famille normale dans tout domaine comprenant l'origine: elles admettent ν valeurs exceptionnelles d'ordre ν.

Toute famille d'algébroïdes de la même classe que la famille F est une famille normale et bornée. Mais, pour une famille arbitraire de cette classe, il n y aura pas en général deux valeurs exceptionnelles d'ordre ν, mais 2ν combinaisons exceptionnelles pouvant se ramener, par une substitution linéaire, à deux tableaux triangulaires.

On peut toujours supposer que les valeurs exceptionnelles soient 0 et 1 en effectuant au besoin sur u une substitution linéaire.

Le théorème précédent conduit à une proposition formant une extension, aux familles d'algébroïdes, du théorème de M. Landau sur les fonctions uniformes admettant deux valeurs exceptionnelles.

Supposons en effet que l'un des nombres $a_1, b_1, \ldots, l_1$ soit fixe et non nul: soit, par exemple, a_1. Les fonctions $f_1(z)$ forment une famille normale et bornée dans le cercle (C) et l'on a

$$|f_1(z)| < \nu\,\Omega;$$

donc

$$R \leq \frac{\nu\,\Omega}{|a_1|}.$$

Dans les conditions énoncées au théorème précédent, il existe un nombre R_0 ne dépendant que de $a_0, b_0, \ldots, l_0$ et de $a_1 \neq 0$ tel que, à l'intérieur d'un cercle de centre origine et de rayon supérieur à R_0, ou bien la fonction $u(z)$ cesse d'être algébroïde à ν branches, ou bien l'une des valeurs 0 ou 1 cesse d'être exceptionnelle d'ordre ν.

On peut remarquer que, fixer les valeurs de $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ à l'origine, revient à fixer les ν déterminations de l'algébroïde pour $z=0$.

On peut aussi, au lieu de se donner a_1, fixer la valeur de $f_1(z)$ en un point $z_0 \neq 0$; ou encore se donner une des fonctions symétriques élémentaires des valeurs de u en z_0: par exemple, on pourra se donner la somme de ces valeurs pourvu qu'elle soit différente de $-a_0$.

25. Les résultats précédents comportent des extensions diverses. Il est clair que toutes les circonstances permettant d'affirmer l'existence, pour une algébroïde, de deux tableaux triangulaires distincts formés par des combinaisons exceptionnelles des coefficients de l'équation qui définit cette algébroïde, conduisent à des énoncés du même type que ceux du paragraphe précédent.

Par exemple, au lieu de supposer qu'une valeur a est exceptionnelle d'ordre α, on peut supposer qu'elle est exceptionnelle pour les algébroïdes définies par les polynomes en u:

$$F(z, u), \quad \Delta F(z, u), \quad \Delta^2 F(z, u), \quad \ldots, \quad \Delta^{\alpha-1} F(z, u);$$

$\Delta, \Delta^2, \ldots, \Delta^{\alpha-1}$ étant les différences d'ordre $1, 2, \ldots, (\alpha-1)$, de la suite

$$F(z, u),\ F(z, u+h),\ F(z, u+2h),\ \ldots,\ F(z, u+(\alpha-1)h).$$

On peut aussi supposer qu'il existe des valeurs $a, b, \ldots, l$ respectivement exceptionnelles pour les algébroïdes définies par

$$F(u, z),\ F'(u, z),\ \ldots,\ F^{(\alpha-1)}(u, z).$$

Remarquons enfin que, dès qu'une algébroïde admet ν combinaisons exceptionnelles, il existe dans la même classe une algébroïde admettant une valeur exceptionnelle d'ordre ν.

Supposons en effet que l'algébroïde

$$u^\nu + f_1 u^{\nu-1} + \cdots + f_\nu = 0$$

admette les ν conbinaisons exceptionnelles distinctes

$$\begin{aligned} g_1 &= \lambda_0^1 + \lambda_1^1 f_1 + \cdots + \lambda_\nu^1 f_\nu, \\ g_2 &= \lambda_0^2 + \lambda_1^2 f_1 + \cdots + \lambda_\nu^2 f_\nu, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_\nu &= \lambda_0^\nu + \lambda_1^\nu f_1 + \cdots + \lambda_\nu^\nu f_\nu; \end{aligned}$$

l'algébroïde

$$u^\nu + g_1 u^{\nu-1} + \cdots + g_\nu = 0$$

est de la même classe et elle admet la valeur zéro comme valeur exceptionnelle d'ordre ν.

On peut aussi, dans ce qui précède, supposer que les involutions soient relatives à des équations algébriques ou même à des algébroïdes. Il suffit de supposer que les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ soient des polynomes ou des fonctions entières croissant moins vite que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$. En particulier, si l'équation

$$\lambda_\nu u^\nu - C_\nu^1 \lambda_{\nu-1} u^{\nu-1} + \cdots + (-1)^\nu \lambda_0 = 0$$

a ses racines égales nous aurons un polynome exceptionnel, ou une fonction entière exceptionnelle.

26. Nous avons étudié dans les paragraphes précédents des algébroïdes entières. Si le coefficient de u^ν est une fonction holomorphe $f_0(z)$ qui peut s'annuler dans (D), nous aurons une algébroïde non entière définie par

$$f_0 u^{\nu} + f_1 u^{\nu-1} + \cdots + f_{\nu} = 0.$$

S'il existe une combinaison exceptionnelle

$$g_0 = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_{\nu} f_{\nu},$$

nous aurons dans la même classe une algébroïde entière. Supposons en effet que l'un des coefficients non nuls soit λ_k. La substitution

$$f_i = g_i \qquad (i \neq k), \qquad f_0 = g_k,$$

$$f_k = \frac{1}{\lambda_k} [g_0 - \lambda_0 g_k - \lambda_1 g_1 - \cdots - \lambda_{\nu} g_{\nu}]$$

conduit à une algébroïde v définie par l'équation

$$g_0 v^{\nu} + g_1 v^{\nu-1} + g_2 v^{\nu-2} + \cdots + g_k v^{\nu-k} + \cdots + g_{\nu} = 0,$$

qui est une algébroïde entière, et à laquelle on peut appliquer les résultats précédents. En particulier, si la première algébroïde admet une valeur exceptionnelle a, la substitution $v = \frac{1}{u-a}$ conduira aussi à une algébroïde entière.