ÜBER EINIGE LÖSUNGEN DER FUNKTIONALGLEICHUNG

$$\varphi(x) . \varphi(y) = \varphi(xy).$$

Von

ALEXANDER OSTROWSKI

in Marburg a. d. L.

1. *Einleitung.* In dieser Abhandlung sollen die Lösungen der Funktionalgleichung

$$\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(xy) \tag{I}$$

mit der Nebenbedingung

$$\varphi(x+y) \leqq \varphi(x) + \varphi(y) \tag{II}$$

untersucht werden, wo die Funktion φ nur reeller Werte fähig ist, die Argumente $x, y, \ldots$ aber sämtliche Elemente eines beliebig vorgegebenen Körpers[1] durchlaufen.

Untersucht man zuerst das System (I), (II) im Körper R der rationalen Zahlen, so können sämtliche Lösungen des Systems leicht hingeschrieben werden. Es ist dann, abgesehen von einigen trivialen Lösungen, entweder

$$\varphi(x) = |x|^{\varrho},$$

wo der Parameter ϱ sich in den Grenzen $0 < \varrho \leqq 1$ ändern kann, oder

$$\varphi(x) = C^{\alpha(p,x)}$$

wo der Parameter C eine beliebige positive Zahl < 1 ist, $\alpha(p, x)$ aber die *Ordnung* der rationalen Zahl x in bezug auf eine beliebige aber feste Primzahl p ist, d. h. die ganze Zahl von der Eigenschaft, dass $\frac{x}{p^{\alpha(p,x)}}$ in der reduzierten Form weder im Zähler noch im Nenner p enthält.

[1] Zum Körperbegriff vgl. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, Crelles Journal, B. 137.

Im Falle aber, wo die Argumente von φ alle Elemente eines *beliebigen* Körpers K durchlaufen, werden wir besonders auf den *archimedischen* Fall eingehen. Dieser Fall ist dadurch charakterisiert, dass für wenigstens eine in K enthaltene ganze rationale Zahl α $\varphi(\alpha) > 1$ ist. In diesem Fall ist K einem Unterkörper des Körpers aller gewöhnlicher komplexer Zahlen isomorph. Entspricht bei dieser isomorphen Beziehung jedem Element x von K eine Zahl x', so gibt es dann eine solche positive Zahl $\varrho \leq 1$, dass allgemein

$$\varphi(x) = |x'|^{\varrho}$$

ist. Durch diese Angaben ist der archimedische Fall vollständig erledigt. Für den dann allein noch übrig bleibenden *unarchimedischen* Fall gilt anstatt der Ungleichung (II) die schärfere

$$\varphi(x+y) \leq \text{Max}\,(\varphi(x),\ \varphi(y)),$$

durch welche die Aufstellung sämtlicher unarchimedischer Lösungen von (I) und (II) auf die Aufstellung sämtlicher *Primdivisoren* in beliebigen Körpern zurückgeführt ist. Da die Durchführung dieser letzten Aufgabe ganz verschiedene Hilfsmittel erfordert und um die vorliegende Abhandlung nicht zu gross werden zu lassen, werden wir auf die bezüglichen Untersuchungen bei einer anderen Gelegenheit eingehen.

Das System (I), (II) hat zum ersten Mal Herr KÜRSCHÁK[1] behandelt. Die Frage nach sämtlichen Lösungen dieses Systems hat er jedoch nicht berührt. Seine Arbeit beschäftigt sich mit dem Nachweis der Existenz gewisser Lösungen von (I), (II) in speziellen (besonders algebraischen) Erweiterungen vorgegebener Körper, worauf wir später (in den Nummern 5, 6) eingehen.

2. *Vorbemerkungen.* Von den trivialen Fällen, in welchen $\varphi(x)$ für alle x durchweg 0 oder durchweg 1 ist, sehen wir in der Folge ab. Dann folgt aus (I), dass stets $\varphi(0) = 0$, $\varphi(a) \neq 0$ für $a \neq 0$ ist.

Der Fall, wo $\varphi(x)$ negativer Werte fähig ist, ist leicht zu erledigen. Ist für ein a $\varphi(a) < 0$, so folgt aus (II) und (I)

$$\varphi(x+y) = \varphi(a)\,\varphi\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{a}\right) \geq \varphi(a)\,\varphi\left(\frac{x}{a}\right) + \varphi(a)\,\varphi\left(\frac{y}{a}\right) = \varphi(x)+\varphi(y).$$

Durch Vergleichung mit (II) folgt, dass in (II) in diesem Fall stets das Gleichheitszeichen gilt. Dann wird aber durch (I) und (II) eine isomorphe Beziehung des Körpers K, dessen Elemente die Argumente $x, y, \ldots$ durchlaufen, auf einen Teilkörper Ω des Körpers aller reeller Zahlen hergestellt. Wir erhalten den Satz:

[1] Crelles Journal, B. 142, S. 211—253.

Lässt sich jedem Element a eines Körpers K eine reelle Zahl $\varphi(a)$ so zuordnen, dass

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \quad (\mathrm{I}) \qquad\qquad \varphi(a+b) \leq \varphi(a) + \varphi(b) \quad (\mathrm{II})$$

ist, und ist $\varphi(a)$ für wenigstens ein a negativ, so ist K mit einem Unterkörper des Körpers der gewöhnlichen reellen Zahlen isomorph und diese isomorphe Beziehung wird durch die Funktion $\varphi(a)$ vermittelt. In (II) gilt dann stets das Gleichheitszeichen.

Wir nehmen daher in der Folge immer an, dass $\varphi(x)$ negativer Werte *nicht* fähig ist. Wir werden dann $\varphi(a)$ einfacher durch $|a|$ bezeichnen und die *Bewertungsfunktion* nennen. Es ist nach (I) offenbar stets $|-a| = |a|$. Die einfachste Bewertungsfunktion ist diejenige, für welche $|0| = 0$, $|a| = 1$ für alle $a \neq 0$. Sieht man vorläufig von dieser ab, so ist $|a|$ für wenigstens ein a von 0 und 1 verschieden. In diesem Falle sprechen wir mit Herrn KÜRSCHÁK von einer *Bewertung*. Ordnen wir in diesem Falle jedem Element a von K die Zahl $|a|$ zu, so soll diese Zahl die *Bewertung* von a heissen, diese Zuordnung eine *Bewertung des Körpers K*, der Körper K, wenn seine Elemente als mit ihren Bewertungen behaftet betrachtet werden, ein *bewerteter* Körper.[1] Da der Fall, wo $|a|$ nur die Werte 0 und 1 haben kann, sich als Grenzfall anderer erweisen wird, werden wir in diesem Falle von *halbbewerteten* Körpern sprechen. Endliche Körper[2] können nur halbbewertet, nicht aber bewertet sein, da alle ihre Elemente gewissen Gleichungen von der Form $x^{p^r} - x = 0$ genügen.

3. *Unarchimedische Bewertungen.* Hat die Bewertungsfunktion anstatt (II) die schärfere Eigenschaft

$$|a+b| \leq \operatorname{Max}(|a|, |b|), \tag{II'}$$

so nennen wir sowohl die so bewerteten Körper als auch diese Bewertung selbst *unarchimedisch*. Aus (II') folgt für jede ganze rationale Zahl n, wenn man sie als die Summe ihrer Einheiten ansieht, $|n| \leq 1$. Diese Eigenschaft ist für den unarchimedischen Fall *charakteristisch*. Es gilt der Satz: *Ist bei irgend einer Bewertung des Körpers K für jede ganze rationale Zahl n $|n| \leq 1$, so ist diese Bewertung unarchimedisch.* In der Tat folgt aus $0 < |b| \leq |a|$ unter der obigen Annahme die Abschätzung:

$$|a+b|^n = |(a+b)^n| \leq |a|^n + |n|\,.\,|a|^{n-1}|b| + \ldots + |b|^n \leq (n+1)|a|^n \tag{1}$$

Wäre nun $|a+b| > |a|$, so würde aus (1) folgen, wenn man beide Seiten durch $|a+b|^n$ dividiert und n ins Unendliche wachsen lässt:

$$1 \leq \lim_{n=\infty}\left[(n+1)\left(\frac{|a|}{|a+b|}\right)^n\right] = 0.$$

---

[1] KÜRSCHÁK, a. a. O., S. 211—212.

[2] Darunter verstehen wir Körper mit endlich vielen Elementen. S. STEINER, a. a. O., S. 245 ff.

Die Relation (II') kann noch weiter verschärft werden. Ist $\|a\| > \|b\|$, so ist $\|a+b\| = \|a\|$. Denn aus (II') folgt $\|a\| = \|(a+b)-b\| \leqq \text{Max}\,(\|a+b\|, \|b\|)$.

Die unarchimedischen Bewertungen des Körpers R aller rationaler Zahlen lassen sich nun leicht aufstellen. Es ist offenbar für wenigstens eine Primzahl p $\|p\| = c < 1$. Wäre nun auch für eine andere Primzahl q $\|q\| < 1$, so wäre es möglich für jedes positive ganze n solche ganze Zahlen a_n, b_n zu finden, dass

$$a_n p^n + b_n q^n = 1$$

ist. Gehen wir jedoch hier zu den Bewertungen über und lassen n unendlich werden, so kommt

$$1 \leqq \text{Max}\,(\|a_n\| \cdot \|p\|^n, \|b_n\| \cdot \|q\|^n) \leqq \|a_n\| \cdot \|p\|^n + \|b_n\| \cdot \|q\|^n \leqq \lim_{n=\infty} (\|p\|^n + \|q\|^n) = 0.$$

Also ist die Bewertung jeder zu p teilerfremden ganzen Zahl gleich 1. Daraus folgt weiter, wenn wir unter der Ordnung einer rationalen Zahl a in bezug auf eine Primzahl p die Zahl ϱ von der Eigenschaft verstehen, dass $\frac{a}{p^\varrho}$ in der reduzierten Form weder im Zähler noch im Nenner p enthält:

$$\|a\| = \|p\|^\varrho = c^\varrho,$$

wo ϱ die Ordnung von a in bezug auf p ist.

Die Wahl der positiven Zahl $c < 1$ ist offenbar ganz belanglos. Jeder Primzahl p entspricht ein besonderer Typus unarchimedischer Bewertungen von R.

Auch allgemeiner kann man jeder unarchimedischen Bewertung eines beliebigen Körpers K einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ zuordnen, indem man festsetzt, dass ein Element a von K genau durch die Potenz von $\mathfrak{p}$ mit dem Exponenten $\lg\|a\|$ teilbar ist. Dann ist, nach (I) und (II'), wenn a und b durch die α-te bzw. β-te Potenz von $\mathfrak{p}$ genau teilbar sind, ab genau durch die Potenz $\alpha+\beta$ teilbar, $a+b$ wenigstens durch die α-te, wenn $\alpha \leqq \beta$ ist, *genau* durch die α-te, wenn $\alpha < \beta$ ist. Die so definierten Divisoren lassen sich nun ebenso behandeln, wie die Primdivisoren in der HENSEL'schen Idealtheorie; es lassen sich auf sie nicht nur die HENSEL-schen Resultate übertragen, was in einem gewissen Masse bereits in den allgemeinen KÜRSCHÁK'schen Ergebnissen enthalten ist, sondern auch die wichtigen Sätze von G. DUMAS[1] über die Anwendungen des NEWTON'schen Diagramms.

4. *Archimedische Bewertungen von R.* Wir wenden uns nun zu den archimedischen Bewertungen von R, dem Körper der rationalen Zahlen. Sie sind damit

[1] G. DUMAS, Sur quelques cas de réductibilité etc., Journal de Liouville, (6) 2, 1906; Sur les fonctions à charactère algébrique etc., Thèse, Paris, 1904.

charakterisiert, dass für wenigstens eine ganze Zahl n $\|n\| > 1$ ist. Ist uns nun eine bestimmte archimedische Bewertung von R gegeben, so nennen wir für jede ganze rationale von 0 verschiedene Zahl a die reelle aus der Gleichung

$$\|a\| = |a|^{\varrho(a)} \tag{2}$$

bestimmte Zahl $\varrho(a)$ den *Exponent* von a. Da für jede ganze Zahl $\|a\| \leq |a|$ ist, so ist $\varrho(a) \leq 1$. Für diejenige ganze Zahl n, deren Bewertung > 1 ist, ist $\varrho(n)$ positiv. Es ist endlich leicht einzusehen, dass für zwei beliebige von 0 verschiedene ganze rationale Zahlen a und b stets

$$\varrho(a) < \varrho(ab) < \varrho(b) \text{ für } \varrho(a) < \varrho(b); \; \varrho(a) = \varrho(ab) = \varrho(b) \text{ für } \varrho(a) = \varrho(b) \tag{3}$$

ist. Daraus folgt für jedes ganze p $\varrho(p) = \varrho(p^2) = \ldots$

Es sei nun ϱ die gewiss positive obere Grenze der Zahlen $\varrho(a)$. Wir behaupten, dass *für jedes ganze rationale a stets $\varrho(a) = \varrho$ ist.*

In der Tat lässt sich ϱ jedenfalls als Grenzwert einer nicht abnehmenden Folge von Zahlen

$$\varrho(a_1), \; \varrho(a_2), \ldots \tag{4}$$

darstellen. Aus (3) sieht man, dass die Zahlen a_i als Primzahlen oder Primzahlpotenzen angenommen werden können. Wir können weiter annehmen, dass für jedes i $\varrho(a_i)$ nicht kleiner ist, als die Exponenten sämtlicher positiver ganzer Zahlen, die kleiner als a_i sind, denn sonst können wir nach (3) a_i durch eine geeignete Primzahl oder Primzahlpotenz ersetzen und, indem wir dieselbe Operation bei allen a_i sukzessive vornehmen, die Folge (4) in gewünschter Weise umformen. Indem wir aus (4) gewisse a_i ganz fortlassen, können wir noch erreichen, dass auch die Zahlen a_i eine wachsende Folge bilden. Dieses Verfahren führt nur dann nicht immer zum Ziel, wenn es eine Primzahl p gibt, für welche $\varrho(p) = \varrho$ ist. In diesem letzten Fall können wir jedoch für (4) direkt die Reihe

$$\varrho(p), \; \varrho(p^2), \; \varrho(p^3), \ldots$$

nehmen.

Es genügt offenbar zu beweisen, dass für jede Primzahl q $\varrho(q) = \varrho$ ist. Nehmen wir nun an, dass für eine Primzahl q $\varrho(q) < \varrho$ ist. Wir können dann voraussetzen, dass in (4) alle $\varrho(a_i) > \varrho(q)$ sind, indem wir alle a_i, die dieser Bedingung nicht genügen, fortlassen. Dann sind, unseren Voraussetzungen über die Folge (4) zufolge, sämtliche a_i zu q relativ prim.

Wir bezeichnen jetzt den kleinsten positiven Rest von a_i modulo q durch

k_i, den ganzzahligen Quotienten $\frac{a_i - k_i}{q}$ durch A_i, den Exponenten $\varrho(a_i)$ durch ϱ_i, $\varrho_i - \varrho(q)$ durch δ_i, $\varrho - \varrho(q) = \operatorname*{Lim}_{i=\infty} \delta_i$ durch Δ. Aus (I) und (II) folgt nun

$$q \cdot A_i = a_i - k_i \geq a_i - k_i \geq a_i - q, \tag{5}$$

da $k_i \leq |k_i| \leq q$ ist. Nun folgt aus $A_i < a_i$ nach unseren Annahmen über (4), dass $\varrho(A_i) \leq \varrho_i$, d. h. $A_i \leq A_i^{\varrho_i}$ ist. Setzen wir dies und $q = q^{\varrho_i - \delta_i}$ in (5) ein, so kommt, nach Multiplikation mit q^{δ_i}:

$$a_i^{\varrho_i} > (a_i - k_i)^{\varrho_i} = q^{\varrho_i} A_i^{\varrho_i} > (a_i - q)\, q^{\delta_i} = (a_i^{\varrho_i} - q)\, q^{\delta_i}.$$

Lassen wir hier i nach Division durch $a_i^{\varrho_i}$ unendlich werden, so kommt

$$1 \geq \operatorname*{Lim}_{i=\infty} \left(1 - \frac{q}{a_i^{\varrho_i}}\right) q^{\delta_i}.$$

Nun ist $\operatorname*{Lim}_{i=\infty} a_i = \infty$, $\operatorname*{Lim}_{i=\infty} \varrho_i$ die positive Zahl ϱ, $\operatorname*{Lim}_{i=\infty} \delta_i = \Delta$. Setzen wir dies ein, so kommt:

$$1 > q^{\Delta}.$$

Dies steht aber damit im Widerspruch, dass $\Delta = \varrho - \varrho(q)$ nach unserer Annahme positiv ist. Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Jetzt sieht man aber leicht, dass auch für jede *rationale* Zahl a $a = |a|^{\varrho}$ ist. Die Zahl ϱ werden wir den *Index* der archimedischen Bewertung von R nennen. Ist umgekehrt eine positive Zahl $\varrho \leq 1$ willkürlich gewählt, so kann die Funktion $|a|^{\varrho}$ als Bewertungsfunktion von R genommen werden und führt auf eine archimedische Bewertung von R. — Setzen wir aber ϱ gleich 0, so erhalten wir den halbbewerteten Körper R, der sich also als ein Grenzfall des archimedisch bewerteten Körpers R erweist.

Fassen wir nun die bisherigen Ergebnisse, sofern sie sich auf R beziehen, zusammen, so kommen wir zu dem Satz:

Das System der Funktionalbedingungen

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy) \quad \text{(I)} \qquad \varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{(II)},$$

wo die Argumente x, y sämtliche rationale Zahlen durchlaufen, die Funktion $\varphi(x)$ aber nur reelle Werte annimmt, hat nur folgende Lösungen

1) a) $\varphi(x) \equiv 0$; b) $\varphi(x) \equiv 1$; c) $\varphi(0) = 0$; $\varphi(x) = 1$, $(x \gtrless 0)$;

2) $\varphi(x) \equiv x$,

3) $$\varphi(x) \equiv |x|^{\varrho},$$

wo der positive Parameter ϱ nicht grösser als 1, *sonst aber beliebig ist:*

4) $$\varphi(x) \equiv c^{\alpha(p,x)},$$

wo der positive Parameter c kleiner als 1 *ist, $\alpha(p, x)$ aber die Ordnung von x in bezug auf eine beliebige Primzahl p bezeichnet. Jeder Wahl von c und p entspricht eine Funktion $\varphi(x)$ vom Typus 4.*

5. *Perfekte Körper.* Jeder archimedisch bewertete Körper K besitzt den mit irgend einem Index ϱ archimedisch bewerteten Körper R aller rationaler Zahlen als Unterkörper. Um nun zu einer Charakterisierung aller archimedisch bewerteter Körper zu gelangen, müssen wir zuerst auf einige KÜRSCHÁK'schen Sätze über besondere Erweiterungen bewerteter Körper eingehen.

Wir nennen ein Element A eines bewerteten Körpers K den *Limes* einer Folge a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ der Elemente von K, wenn $\lim\limits_{n=\infty} |a_n - A| = 0$ ist. Eine Folge a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ der Elemente von K nennen wir eine *Fundamentalreihe*, wenn $\lim\limits_{n=\infty} |a_{n+t} - a_n| = 0$ ist bei frei veränderlichem, ganze positive Werte durchlaufendem t. Besitzt eine Folge a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ den Limes A (was wir durch $\lim\limits_{n=\infty} a_n = A$ ausdrücken), so ist diese Folge, wie aus (II) leicht folgt, eine Fundamentalreihe. Und zwar kann, wie sich ebenfalls aus (II) leicht ergibt, eine Fundamentalreihe nur einen einzigen Limes haben. Man sieht endlich leicht ein, dass aus $\lim\limits_{i=\infty} a_i = A$ auch $\lim\limits_{i=\infty} |a_i| = |A|$ folgt.

Ist in K der Limes jeder aus K entnommenen Fundamentalreihe enthalten, so heisst K *perfekt.* Wie schon das Beispiel des Körpers aller rationaler Zahlen bei seiner gewöhnlichen Bewertung durch absolute Beträge zeigt, ist nicht jeder bewertete Körper perfekt.

Fassen wir nun die Gesamtheit aller K entnommenen Fundamentalreihen ins Auge und nennen wir zwei solche Reihen $A = (\ldots, a_i, \ldots)$ und $B = (\ldots, b_i, \ldots)$ äquivalent, wenn $\lim\limits_{i=\infty} |a_i - b_i| = 0$ ist, so bildet diese Gesamtheit einen Körper $\mathbf{K}$, wenn wir zwei äquivalente Fundamentalreihen als *gleich* ansehen und unter der Summe bzw. dem Produkt von $A = (\ldots, a_i, \ldots)$ und $A' = (\ldots, a'_i, \ldots)$ die Fundamentalreihe $(\ldots, a_i + a'_i, \ldots)$ bzw. $(\ldots, a_i a'_i, \ldots)$ verstehen. Bewerten wir noch jede Fundamentalreihe $A = (\ldots, a_i, \ldots)$ durch $|A| = \lim\limits_{i=\infty} |a_i|$ (dass die letzte Folge konvergiert, folgt leicht aus (II)), so wird dann $\mathbf{K}$ ein bewerteter Körper, von dem man nun leicht beweisen kann, dass er *perfekt* ist. $\mathbf{K}$ heisst der *derivierte Körper* von K.

Nennen wir zwei isomorphe bewertete Körper *analytisch isomorph*, wenn die entsprechenden Elemente dieselben Bewertungen haben, so können wir weiter den Satz aussprechen, dass K einen mit K analytisch isomorphen Unterkörper besitzt. Und zwar besteht dieser Unterkörper aus allen Fundamentalreihen von der Form $(a, a, a, a, \ldots)$ und allen mit ihnen äquivalenten Fundamentalreihen, wo a sämtliche Elemente von K durchläuft. Weiter folgt aus der Bildungsweise von K, dass wenn der *bewertete* Körper K ein Unterkörper eines *perfekten* Körpers $\bar{K}$ ist, $\bar{K}$ eine Eweiterung von K als Unterkörper besitzt, die mit dem derivierten Körper K von K analytisch isomorph ist. — In diesem Sinne kann man den derivierten Körper K von K als die *kleinste* perfekte Erweiterung von K betrachten.

Ist der bewertete Körper K ein Unterkörper eines bewerteten Körpers K', so ist offenbar der derivierte Körper K von K ein Unterkörper des derivierten Körpers K' von K'.[1]

6. *Erweiterungen 2-ten Grades.* Wir werden in der Folge noch den Hilfssatz brauchen:

Es sei W ein perfekter bewerteter Körper und Z eine derartige Erweiterung von W, dass jedes in Z aber nicht in W vorhandene Element α einer in W irreduziblen Gleichung 2-ten Grades mit Koeffizienten aus W

$$x^2 + bx + c = 0 \tag{6}$$

genügt. Ordnet man jedem solchen Element α die positive Zahl $\sqrt{|c|}$ und jedem in W enthaltenen Element von Z seine ursprüngliche Bewertung zu, so erhält man eine Bewertung des Körpers Z.

Diese Bewertung ist die einzige Bewertung von Z, bei der die Elemente von W ihre ursprünglichen Bewertungen behalten.

Dass die definierte Zuordnung die Forderung (I) erfüllt, folgt aus den einfachsten algebraischen Tatsachen ohne Weiteres. Schwieriger ist der Nachweis, das die Ungleichung (II) oder die damit äquivalente

$$|1+\alpha| \leqq 1+|\alpha| \tag{7}$$

erfüllt ist. Es genügt anzunehmen, dass α der in W irreduziblen Gleichung (6) genügt. Dann ist (7) mit $|1-b+c|^{1/2} \leqq 1+|c|^{1/2}$ oder $|1-b+c| \leqq 1+2|c|^{1/2}+|c|$ äquivalent. Da aber die letzte Ungleichung nach (II) aus $|b| \leqq 2|c|^{1/2}$ folgt, so brauchen wir nur zu beweisen, dass, wenn $|b|^2-4|c| > 0$ ist, die Gleichung (6) in W eine Wurzel besitzt, also nicht irreduzibel ist.

[1] Für die ausführlichere Darstellung des Inhalts dieser Nummer vergleiche man Kürschák, a. a. O., S. 214—216, 222—228

Definieren wir unter der Annahme $|b|^2 > 4|c|$ die unendliche Folge der Elemente v_n aus $W: v_0 = 2,\ v_1 = -b, \dots$ durch die Rekursionsformel

$$v_n = -b\,v_{n-1} - c\,v_{n-2}, \tag{8}$$

so lässt sich dann für jedes $n > 0$ die Relation nachweisen

$$2|v_n| \geq |b| \cdot |v_{n-1}|. \tag{9}$$

Da sie für $n = 1$ gilt, wegen $2|v_1| = 2|b| \geq |2| \cdot |b|$ (da ja $|2| \leq 2$ ist), so kann man sie für $n - 1$ als bewiesen annehmen. Dann folgt aus (8) wegen $|b|^2 \geq 4|c|$:

$$2|v_n| \geq 2|b v_{n-1}| - 2|c| \cdot |v_{n-2}| = |b v_{n-1}| + \frac{|b|}{2}\Big\{2|v_{n-1}| - 4\frac{|c|}{|b|^2} \cdot |b| \cdot |v_{n-2}|\Big\} \geq |b| \cdot |v_{n-1}|,$$

d. h. (9). Aus (9) kann nun gefolgert werden, dass die Folge der Elemente aus W

$$\dots, w_n = \frac{v_n}{v_{n-1}}, \dots (n = 2, 3, \dots) \tag{10}$$

eine Fundamentalreihe ist. — Die Voraussetzung, unter welcher (10) gebildet werden kann, nämlich dass für $n > 0$ kein $v_n = 0$ ist, ist immer für $|b| > 0$ erfüllt, denn nach (9) folgt aus $v_n = 0$, dass auch alle vorhergehende v verschwinden, dies ist aber für $v_1 = -b$ nicht der Fall. Ist aber $|b| = 0$, so ist wegen $|b|^2 \geq 4|c|$ auch $|c| = 0$, dann reduziert sich aber (6) auf $x^2 = 0$, ist also jedenfalls reduzibel. — Aus (8) und (9) folgt

$$|w_n| = \left|\frac{v_n}{v_{n-1}}\right| \leq |b| + |c|\left|\frac{v_{n-2}}{v_{n-1}}\right| \leq |b| + \frac{2|c|}{|b|} < \frac{M}{2}, \tag{11}$$

wo M eine feste positive Zahl ist. Weiter folgt aus (8) da alle w von 0 verschieden sind,

$$w_{n+t} - w_n = -c\left(\frac{1}{w_{n+t-1}} - \frac{1}{w_{n-1}}\right), \quad w_{n+t} - w_n = c\,\frac{w_{n+t-1} - w_{n-1}}{w_{n+t-1} \cdot w_{n-1}}$$

oder, wenn wir die positive Zahl $\frac{4|c|}{|b|^2} < 1$ durch q bezeichnen,

$$|w_{n+t} - w_n| = q \cdot \frac{|b|}{2|w_{n+t-1}|} \cdot \frac{|b|}{2|w_{n-1}|} \cdot |w_{n+t-1} - w_{n-1}|,$$

oder, wenn wir (9) und (11) berücksichtigen,

$$|w_{n+t} - w_n| \leq q\,|w_{n+t-1} - w_{n-1}| \leq q^2\,|w_{n+t-2} - w_{n-2}| \leq \cdots \leq q^n\,|w_t - w_0| \leq$$
$$\leq q^n(|w_t| + |w_0|) < q^n M.$$

Lassen wir hier nun n unendlich werden, so folgt aus $q < 1$

$$\lim_{n=\infty} |w_{n+t} - w_n| = 0,$$

w. z. b. w. Der im *perfekten* Körper W enthaltene Limes von (10) ist aber wegen (8) und (10) eine Wurzel von (6), und (6) ist in W reduzibel. Damit ist der erste Teil unseres Hilfssatzes bewiesen. — Dieser Teil ist ein spezieller Fall des allgemeinen KÜRSCHÁK'schen Satzes über algebraische Erweiterungen perfekter Körper. Auch der hier gegebene Beweis steht mit dem KÜRSCHÁK'schen insofern im Zusammenhang, als die vom Herrn KÜRSCHÁK benutzte HADAMARD'sche Untersuchung eine Verallgemeinerung des BERNOULLI'schen Wurzelapproximationsverfahrens ist, während unser Beweis eine Ausbildung desselben Verfahrens darstellt. Es wird sich übrigens weiter ergeben, dass die in unserem Hilfssatz betrachteten algebraischen Erweiterungen perfekter Körper die einzig möglichen im *archimedischen* Fall sind, so dass damit in diesem Fall auch der allgemeine KÜRSCHÁK'sche Satz erledigt ist. Im unarchimedischen Fall aber lassen sich zum Beweise des KÜRSCHÁK'schen Satzes viel elementarere, von HENSEL herrührende Methoden anwenden[1].

Um den zweiten Teil[2] unseres Hilfssatzes zu beweisen, nehmen wir an, es sei bei einer der in Frage kommenden Bewertungen von Z $|\alpha| \gtrless |c|^{1/2}$, wo α eine Wurzel der in W irreduzibeln Gleichung (6). Ist dann $\bar{\alpha}$ die andere Wurzel, so ist $|\bar{\alpha}| \gtrless |\alpha|$ wegen $|\alpha\,.\,\bar{\alpha}| = |c|$. Es sei etwa $|\alpha| > |\bar{\alpha}|$. Dann hat die Folge der in W enthaltenen Elemente

$$\frac{\alpha^n + \bar{\alpha}^n}{\alpha^{n-1} + \bar{\alpha}^{n-1}} = \alpha\,\frac{1 + \left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\right)^n}{1 + \left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\right)^{n-1}}$$

für $n = \infty$ α zum Limes, α wäre also im *perfekten* Körper W enthalten, während die Gleichung (6) ja als irreduzibel angenommen ist.

7. *Der Vollständigkeitssatz.* Ist der Körper R aller rationaler Zahlen archimedisch mit dem Index ϱ bewertet, und ist $a_i (i = 1, 2 \ldots)$ irgend eine ihm entnommene Fundamentalreihe, so bleibt $a_i (i = 1, 2 \ldots)$ auch dann eine Fundamentalreihe, wenn

---

[1] Vgl. KÜRSCHÁK, a. a. O., S. 218.

[2] der sich auch auf den allgemeinen von KÜRSCHÁK a. a. O. behandelten Fall ausdehnen lässt. Vgl. A. OSTROWSKI, Über sogenannte perfekte Körper, Crelles Journal, B. 147.

R mit irgend einem anderen zulässigen Wert von ϱ archimedisch bewertet wird, denn aus $\lim\limits_{n=\infty} |a_{n+t} - a_n|^{\varrho} = 0$ folgt $\lim\limits_{n=\infty} |a_{n+t} - a_n|^{\varrho'} = 0$ und umgekehrt $(0 < \varrho \leq 1;\ 0 < \varrho' \leq 1)$. Betrachten wir also den Körper W aller reeller Zahlen, der den derivierten Körper von R bei $\varrho = 1$ darstellt, und ordnen wir jeder Zahl a von W die positive Zahl $|a|^{\varrho}$ zu, so wird der sich so ergebende bewertete Körper W_{ϱ} als der derivierte Körper von R bei der Bewertung mit dem Index ϱ betrachtet werden können. Im Körper W gibt es nur irreduzible Funktionen *zweiten Grades* von einer Unbestimmten und es genügt eine Wurzel einer von ihnen, etwa von $x^2 + 1$, zu adjungieren, um den Körper Z aller komplexen Zahlen zu erhalten, in dem es schon keine nichtlineare irreduzible Funktionen von einer Unbestimmten mehr gibt. Ordnet man jeder Zahl α von Z die positive Zahl $|\alpha|^{\varrho}$ zu, so stellt der so entstehende bewertete Körper Z_{ϱ} zugleich einen perfekten Körper dar, weil Z_1 es ist. Von Z_{ϱ} gilt nun der wichtige Satz: *der Vollständigkeitssatz. Es gibt keinen archimedisch bewerteten Körper K, der einen Körper Z_{ϱ} zum Unterkörper hat, ohne mit ihm identisch zu sein.*

Nehmen wir in der Tat an, es gebe eine bewertete Erweiterung K von Z_{ϱ}, und es sei x ein in K aber nicht in Z_{ϱ} enthaltenes Element. Es sei die untere Grenze der Zahlen $\|x - \alpha\|$, wo α alle Grössen von Z_{ϱ} durchläuft, gleich m. Dann gibt es eine Grösse A aus Z_{ϱ}, so dass $\|x - A\| = m$ ist. Denn sonst müsste es eine Folge der komplexen Zahlen $\alpha_i\ (i = 1, 2, \ldots)$ geben, so dass $\lim\limits_{n=\infty} \|x - \alpha_n\| = m$ ist. Die komplexen Zahlen α_i müssten aber dann eine Häufungsstelle A haben mit $\|x - A\| = m$, denn die absoluten Beträge der Zahlen α_i sind begrenzt, wegen $\|\alpha_i\| \leq \|x\| + \|x - \alpha_i\|$. Das Element $x - A$ von K, das wir durch y bezeichnen, hat dann die Eigenschaft, dass für alle Grössen α aus Z_{ϱ} $\|y - \alpha\| \geq \|y\| = m$ ist.

Wir schalten nun den Beweis folgender Tatsache ein: *Hat ein nicht in Z_{ϱ} enthaltenes Element z von K die Eigenschaft, dass für alle Elemente α von Z_{ϱ} $\|z - \alpha\| \geq \|z\|$ ist, so ist $\|z - \alpha\| = \|z\|$ für alle Elemente α von Z_{ϱ}, für welche $\|\alpha\| < \|z\|$ ist.* Denn es sei a ein Element von Z_{ϱ} mit $\|a\| < \|z\|$ und $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ die sämtlichen n-ten Einheitswurzeln für eine beliebige natürliche Zahl n. Durch Multiplikation der Relationen $\|z - \varepsilon_i a\| \geq \|z\|$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ erhalten wir

$$\left\| \frac{z^n - a^n}{z - a} \right\| \geq \|z\|^{n-1}.$$

Daraus folgt

$$\|z - a\| \cdot \|z\|^{n-1} \leq \|z^n - a^n\| \leq \|z\|^n + \|a\|^n$$

Dies ergibt aber nach Division durch $\|z\|^n$ für $n = \infty$

$$\frac{\|z-a\|}{\|z\|} \leq \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left[1+\left(\frac{\|a\|}{\|z\|}\right)^n\right]=1.$$

Aus $\|z-a\| \leq \|z\|$ und $\|z-a\| \geq \|z\|$ folgt aber $\|z-a\|=\|z\|$, w. z. b. w.

Ist also für ein Element α von Z_ϱ $0<\|\alpha\|<m=\|y\|$, so ist $\|y-\alpha\|=\|y\|$. Andererseits besitzt auch $y-\alpha$ die Eigenschaft, dass für kein Element a von Z_ϱ $\|y-\alpha-a\|<\|y-\alpha\|=m$ sein kann. Also ist, immer wegen $\|\alpha\|<m$, $\|y-\alpha-\alpha\|=$ $=\|y\|$, $\|y-2\alpha\|=\|y\|$. Daher besitzt auch $y-2\alpha$ jene Eigenschaft, dass für kein Element a von Z_ϱ $\|y-2\alpha-a\|<\|y-2\alpha\|=m$ sein kann. Daraus folgt wieder $\|y-3\alpha\|=m$ u. s. w. So kommen wir zum Resultat, dass für jede natürliche Zahl n $\|y-n\alpha\|=\|y\|=m$ ist. Dies ist aber unmöglich. Denn aus (II) folgt dann

$$2m=\|y-n\alpha\|+\|y\|\geq\|n\alpha\|=n^\varrho\|\alpha\|,$$

wo die rechte Seite mit n unendlich gross wird, während $2m$ konstant ist, w. z. b. w.

8. *Beliebige archimedische Bewertungen.* Es sei nun K ein beliebiger archimedisch bewerteter Körper und ϱ der Index der Bewertung des in ihm enthaltenen bewerteten Körpers R. Dann enthält der derivierte Körper K von K den bewerteten Körper W_ϱ (oder einen zu ihm analytisch isomorphen). Enthält nun K eine Wurzel i der Gleichung $x^2+1=0$, so ist in K eine bewertete algebraische Erweiterung von W_ϱ (oder von einem zu W_ϱ analytisch isomorphen Unterkörper von K) enthalten, welche nach dem zweiten Teil des Hilfssatzes in 6. mit Z_ϱ analytisch isomorph ist. Ist aber x^2+1 in K irreduzibel, so adjungieren wir zu K eine Wurzel von x^2+1 und bewerten den so entstandenen Körper $\overline{\mathrm{K}}$ nach dem Hilfssatz von 6. Dann muss $\overline{\mathrm{K}}$ einen mit Z_ϱ analytisch isomorphen Unterkörper $\overline{Z}_\varrho$ enthalten. Nach dem Vollständigkeitssatz fällt aber $\overline{\mathrm{K}}$ mit $\overline{Z}_\varrho$ zusammen. Denn sonst könnten wir aus $\overline{\mathrm{K}}$, indem wir in ihm alle Elemente von $\overline{Z}_\varrho$ durch die entsprechenden von Z_ϱ ersetzen und eine entsprechende Modifikation in seinen Kompositionsgleichungen ausführen, eine bewertete Erweiterung von Z_ϱ erhalten. Also *ist K mit einem Unterkörper von Z_ϱ analytisch isomorph.* Ist umgekehrt K mit einem Unterkörper von Z isomorph, und ordnen wir jedem Element von K die Bewertung zu, die das ihm entsprechende Element in Z_ϱ hat, so entsteht eine archimedische Bewertung von K. Wir wollen auf diesen Zusammenhang zwischen den archimedischen Bewertungen von K und den isomorphen Beziehungen von K und den Unterkörpern von Z näher eingehen. Eine isomorphe Beziehung ψ zwischen K und einem Unterkörper von Z sei eine *Permutation* von K in Z genannt. Das dabei einem Element a von K entsprechende Element $\psi(a)$ von Z sei das *Bild von a* genannt. Zwei Permutationen ψ und $\overline{\psi}$ von K in Z seien *konjugiert komplex* genannt, wenn die Bilder $\psi(a)$ und $\overline{\psi}(a)$

für jedes a aus K konjugiert komplex sind. Endlich nennen wir eine Permutation ψ von K in Z reell, wenn die Bilder sämtlicher Elemente von K reell sind.

Aus jeder Permutation ψ von K in Z kann man nun nach dem Obigen eine archimedische Bewertung von K herleiten durch die Festsetzung $\|a\|=|\psi(a)|^\varrho$. Ergeben auf diese Weise zwei Permutationen ψ und ψ' von K in Z eine und dieselbe Bewertung von K, so muss für alle a aus K $|\psi(a)|^\varrho=|\psi'(a)|^\varrho$, $|\psi(a)|=$ $=|\psi'(a)|$ sein. Sind hier ψ und ψ' zwei werschiedene Permutationen, und ist etwa für ein a aus K $\psi(a)=\alpha+\beta i$, $\psi'(a)=\gamma+\delta i \neq \alpha+\beta i$, so muss für jede rationale Zahl m $|m+\alpha+\beta i|=|m+\gamma+\delta i|$ sein, woraus $\alpha=\gamma$, $\beta=-\delta$ folgt. Ist für ein beliebiges anderes Element b von K $\psi(b)=w+bi$, $\psi'(b)=r+\vartheta i$, so folgt für zwei beliebige rationale Zahlen m und n $|m\psi(a)+n\psi(b)|=|m\psi'(a)+n\psi'(b)|$, $(m\alpha+nw)^2+(m\beta+nb)^2=(ma+nr)^2+(-m\beta+n\vartheta)^2$. Berücksichtigen wir noch, dass jedenfalls $w=r$, $b=\pm\vartheta$ und dass wegen $\psi(a)\neq\psi'(a)$ $\beta\gtrless 0$ ist, so folgt endlich $b=-\vartheta$, d. h. die Permutationen ψ und ψ' sind konjugiert komplex.

Zusammenfassend erhalten wir folgende Sätze, durch welche die Theorie der archimedischen Bewertungen erledigt wird:

Jede archimedische Bewertung eines Körpers K, bei welcher der in K enthaltene Unterkörper R aller reeller Zahlen mit einem Index ϱ bewertet wird, entsteht aus einer Permutation ψ von K in den Körper Z aller komplexer Zahlen, indem für jedes Element a von K festgesetzt wird:

$$\|a\|=|\psi(a)|^\varrho,$$

und umgekehrt entsteht auf diese Weise aus jeder Permutation von K in Z eine archimedische Bewertung von K. Zwei verschiedene Permutationen von K in Z ergeben dann und nur dann eine und dieselbe Bewertung von K, wenn sie konjugiert komplex sind. Die Anzahl (bzw. die Mächtigkeit) aller solcher Bewertungen von K ist gleich der Anzahl (bzw. der Mächtigkeit) seiner reellen und der Paare seiner konjugiert komplexen Permutationen in Z.

Ist z. B. $K=R(\alpha)$, wo α eine algebraische Zahl ist, so ist die Anzahl aller einem bestimmten Index ϱ entsprechenden Bewertungen von K der Anzahl der reellen und der Paare konjugiert komplexer Wurzeln der in R irreduziblen Gleichung, der α genügt, gleich. Jeder archimedischen Bewertung von K entspricht eine mit jener irreduziblen Gleichung verträgliche Festsetzung des absoluten Betrages von α und von allen aus α rational ableitbaren Zahlen.

Die spezielle Wahl von ϱ ist offenbar unwesentlich, denn jede algebraische und Limes-Relation zwischen den Elementen von K, die für irgend ein ϱ gilt, bleibt gültig auch für jedes andere zulässige ϱ. Aus unseren Resultaten ergibt sich daher die Folgerung:

Jeder archimedisch bewertete Körper lässt sich auf einen Unterkörper des Körpers aller komplexen Zahlen so abbilden, dass dabei sowohl alle algebraischen als auch alle Limesrelationen bestehen bleiben.

Nennen wir nach Steinitz einen Körper *algebraisch abgeschlossen*, wenn in ihm jede algebraische Gleichung mit einer Unbekannten eine Lösung hat, so folgt insbesondere aus dem Vollständigkeitssatz:

Jeder archimedisch bewertete perfekte und algebraisch abgeschlossene Körper lässt sich auf den Körper aller komplexer Zahlen so abbilden, dass dabei sowohl alle algebraischen als auch alle Limesrelationen bestehen bleiben.

Damit ist eine merkwürdige Charakterisierung des Körpers aller komplexer Zahlen gewonnen.

Marburg a. d. L. April 1916.