SUR LA SÉRIE DE LAMBERT ET SON APPLICATION À LA THÉORIE DES NOMBRES.

PAR

S. WIGERT

à STOCKHOLM.

Introduction.

Dans ce mémoire j'écris la série de LAMBERT sous la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nz} - 1}$$

en remplaçant dans la série originale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 - x^n}$$

la variable x à module < 1 par e^{-z}, où il faut donc supposer $R(z) > 0$. Alors la série peut encore s'écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{-nz}$$

en désignant par $\tau(n)$ le nombre des diviseurs de n, et elle représente une fonction analytique $L(z)$, dont le domaine d'existence est limité par l'axe imaginaire. M. LANDAU a démontré,[1] en effet, d'une manière élégante et fort simple, que $L(z)$ devient infinie chaque fois que la variable z s'approche d'une valeur de la forme $\frac{2m\pi i}{n}$, en suivant la droite parallèle à l'axe réel.

[1] Cf. KNOPP: Journal für Mathematik, Bd. 142. La démonstration de M. LANDAU porte sur la série originale en x.

On sait de plus que la fonction $L(z)$ peut être représentée, pour les valeurs *réelles* dans le voisinage de $z = 0$, par une formule asymptotique[1] de la forme

$$L(z) = \frac{\gamma - \log z}{z} + \frac{1}{4} - \sum_{\nu=1}^{p} \frac{B_\nu^2}{2\nu \lfloor 2\nu} z^{2\nu-1} + \vartheta_p$$

où γ est la constante d'EULER et B_ν le ν-ième nombre de BERNOULLI. Pour $p = \infty$ on aurait une série divergente, mais puisqu'on a

$$|\vartheta_p| < \frac{B_p B_{p+1} z^{2p}}{\lfloor 2p} \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{z^2}{4\pi^2}\right)$$

le développement en question est du type dit sémi-convergent.

Je me suis demandé à plusieurs reprises s'il n'était pas possible de modifier ce développement asymptotique afin qu'il fût valable aussi pour les petites valeurs complexes de z. Mais il me paraissait toujours difficile de donner une forme pratiquable au terme-reste dans le cas général, où $L(z)$ devient infinie dans chaque voisinage de $z = 0$. La réponse que je sais donner maintenant à cette question, peut être formulée ainsi:

Pour les valeurs de z dans le voisinage de l'origine la fonction $L(z)$ admet une équation fonctionnelle asymptotique de la forme

$$L(z) = \frac{\gamma - \log z}{z} + \frac{1}{4} - \sum_{\nu=1}^{p} \frac{B_\nu^2}{2\nu \lfloor 2\nu} z^{2\nu-1} \mp \frac{2\pi i}{z} L\left(\frac{4\pi^2}{z}\right) + \Theta_p$$

où les signes $\mp$ correspondent à $R\left(\frac{z}{i}\right) \gtrless 0$. Quant au terme-reste Θ_p, on a

$$|\Theta_p| < \frac{4 \lfloor 2p \sqrt{2(p+1)e}\, \zeta^2(2p+1)}{(2\pi)^{4p+2}} |z|^{2p}$$

en désignant comme à l'ordinaire par ζ la fonction connue de RIEMANN.

Il y a lieu d'en faire comparaison avec l'équation fonctionnelle *exacte* de

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{nz} - 1}$$

à savoir

$$f(z) = \frac{\pi^2}{6z^2} - \frac{1}{2z} + \frac{1}{24} - \frac{4\pi^2}{z^2} f\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)$$

[1] Voir p. ex. SCHLÖMILCH, Compendium d. h. Analysis, Bd. II, pag. 238 et suiv.

dont j'ai tiré beaucoup de parti dans un travail récent[1] que j'aurai besoin de citer dans ce qui suit.

Au résultat précédent un problème important de la théorie des nombres aussi se rattache. On obtient en effet de $L(z)$ à l'aide de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}L(z)\,dz}{z^{k+1}}, \quad \begin{cases} a > 0 \\ x \geqq 1 \end{cases}$$

la fonction arithmétique

$$\frac{1}{\lfloor k}\sum_{n\leqq x}\tau(n)(x-n)^k$$

laquelle a été étudiée surtout par M. Voronoï. Dans deux grands mémoires[2] ce savant en a fait un examen approfondi, dont je me borne ici à citer le théorème suivant:

»Pour $k \geqq 1$ la fonction arithmétique $\frac{1}{\lfloor k}\sum_{n\leqq x}\tau(n)(x-n)^k$ peut s'écrire

$$\frac{1}{\lfloor k}\int_0^x (x-t)^k(\log t + 2\gamma)\,dt + \sum_{\lambda=0}^{k}\frac{(-1)^\lambda\zeta^2(-\lambda)}{\lfloor\lambda\,\lfloor k-\lambda}x^{k-\lambda} + F_k$$

où

$$F_k = O\left(x^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}\right).»$$

L'intégrale figurant dans cette expression est égale à

$$\frac{x^{k+1}}{\lfloor k+1}\left\{\log x + \gamma - \frac{\Gamma'(k+2)}{\Gamma(k+2)}\right\}.$$

En y ajoutant le polynôme du degré k on aura précisément la somme des résidus de la fonction analytique de la variable s:

$$\frac{x^{s+k}\zeta^2(s)}{s(s+1)\ldots(s+k)},$$

et d'après une lettre[3] que M. Landau a bien voulu m'écrire, je sais que l'étude de l'intégrale

[1] Sur quelques fonctions arithmétiques, Acta Mathematica, T. 37.

[2] Annales de l'École Normale, sér. 3, T. 21 (1904).

[3] du 31 Août 1914. Les recherches de M. Landau ont été publiées plus tard dans les *Göttingische gelehrte Anzeigen*, nos 7 et 8 (1915).

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^{s+k}\zeta^2(s)\,ds}{s(s+1)\ldots(s+k)}$$

lui a donné le moyen de retrouver par un calcul plus simple le résultat cité de M. Voronoï. Je prends ici l'occasion d'exprimer à M. Landau ma reconnaissance vive de l'intérêt qu'il a pris à mes recherches antérieures et des renseignements précieux sur diverses questions, dont il m'a fourni.

Maintenant il me semble assez intéressant *qu'on peut obtenir aussi à l'aide de l'équation asymptotique de $L(z)$ le résultat précédent, du moins pour $k \geqq 3$.* En effet, l'expression de M. Voronoï, moins F_k, n'est autre chose que le résultat de l'opération $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}}{z^{k+1}}(\ )\,dz$, exécutée sur les termes précédant $\mp \frac{2\pi i}{z} L\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)$ dans l'équation en question. Quant à la fonction F_k, elle est représentée par une série infinie de la forme

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{(-1)^{k+1}\xi_{k+1}(4\pi^2 nx)+\eta_{k+1}(4\pi^2 nx)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}$$

ξ et η étant deux fonctions qui satisfont aux équations différentielles

$$\begin{cases} x\dfrac{d^2\xi_k}{dx^2}-(k-1)\dfrac{d\xi_k}{dx}-\xi_k=0 \\ x\dfrac{d^2\eta_k}{dx^2}-(k-1)\dfrac{d\eta_k}{dx}+\eta_k=0. \end{cases}$$

Par mes recherches j'en ai obtenu une série tout à fait analogue

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\frac{c\varphi_{k+1}(4\pi^2 nx)+c'\psi_{k+1}(4\pi^2 nx)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}$$

où

$$\begin{cases} x\varphi''_k-(k-1)\varphi'_k+\varphi_k=0 \\ x\psi''_k-(k-1)\psi'_k+\psi_k=-x^k e^{-x} \end{cases}$$

et cette série est aussi $= O\left(x^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}\right)$. Or, il faut ici ajouter un terme-reste, dont l'ordre de grandeur ne dépasse pas x^2 ou x, selon que l'entier k est pair ou impair. Pour $k \geqq 3$ l'ordre du reste est donc inférieur à celui de la série. Si, au contraire, $k=2$ ou 1, certes la série est encore valable, mais la discussion du reste exige d'autres méthodes.

Première Partie.

L'équation fonctionnelle asymptotique de L(z).

§ 1. *Transformation de la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nz} - 1}.$$

Partons de la formule d'EULER-MACLAURIN[1]

$$\sum_{n=0}^{p} F(n) = \int_0^p F(v)dv + \frac{1}{2}[F(p) + F(0)] + P_2(0)[F'(p) - F'(0)] - \int_0^p P_2(v)F'''(v)dv$$

où

$$P_2(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n v}{2\pi^2 n^2}.$$

En y posant

$$F(v) = \frac{1}{e^{zv} - 1} - \frac{1}{zv}, \quad (R(z) > 0) \tag{1}$$

on aura

$$F(+\infty) = F'(+\infty) = 0, \quad F(v) = -\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1} B_\nu (zv)^{2\nu-1}}{\lfloor 2\nu}, \quad (|vz| < 2\pi)$$

et par suite

$$-\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{e^{nz} - 1} - \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} = \lim_{\varepsilon=0}\left\{\int_\varepsilon^p \frac{dv}{e^{zv} - 1} - \frac{1}{z}\log\frac{p}{\varepsilon}\right\} + \frac{1}{2}F(p) - \frac{1}{4} +$$

$$+ \frac{1}{12}\left[F'(p) - \frac{z}{12}\right] - \int_0^p P_2(v)F'''(v)dv = \frac{1}{z}\log(1 - e^{-pz}) + \frac{1}{z}\lim_{\varepsilon=0}\log\frac{\varepsilon}{1 - e^{-\varepsilon z}} +$$

$$-\frac{\log p}{z} + \frac{1}{2}F(p) - \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left[F'(p) - \frac{z}{12}\right] - \int_0^p P_2(v)F'''(v)dv$$

ce qui nous donne pour $p = \infty$

[1] WIRTINGER: Acta Mathematica, T. 26, p. 259.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{nz}-1}=\frac{\gamma-\log z}{z}+\frac{1}{4}-\frac{z}{144}-\int_0^{\infty}P_2(v)F'''(v)dv.$$

Or, l'intégrale $\int_0^{\infty}|F'''(v)|dv$ étant convergente, on a

$$\left|\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nv}{2\pi^2n^2}\right)F'''(v)dv\right|<\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\infty}|F'''(v)|dv<\frac{1}{2\pi^2q}\int_0^{\infty}|F'''(v)|dv$$

d'où il suit

$$\int_0^{\infty}P_2(v)F'''(v)dv=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi^2n^2}\int_0^{\infty}F'''(v)\cos 2\pi nvdv$$

et enfin, en observant que

$$\int_0^{\infty}F'''(v)\cos 2\pi nvdv=-\frac{z}{12}-4\pi^2n^2\int_0^{\infty}F(v)\cos 2\pi nvdv$$

le résultat suivant

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{nz}-1}=\frac{\gamma-\log z}{z}+\frac{1}{4}+2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}F(v)\cos 2\pi nvdv. \tag{2}$$

Nous allons maintenant donner à la série figurant dans le membre droit de (2) une forme plus pratiquable, et pour cela nous calculons d'abord la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}\right)\cos atdt$$

en y supposant a réel et >0. Elle peut donc s'écrire

$$\lim_{\substack{p=\infty\\ \varepsilon=0}}\left[\int_{\varepsilon}^{p}\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}\right)dt-\int_{\varepsilon}^{p}\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}\right)(1-\cos at)dt\right]=$$

$$=-\int_0^{\infty}\frac{1-\cos at}{e^t-1}dt+\lim_{\varepsilon=0}\left[\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dt}{e^t-1}-\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\cos atdt}{t}\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon=0}\left[\log\frac{1}{1-e^{-\varepsilon}}+ci(a\varepsilon)\right]-\int_0^{\infty}\frac{1-\cos at}{e^t-1}dt$$

en employant la notation connue

$$ci(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t\,dt}{t} \quad (x > 0).$$

Or, on a[1]

$$\lim_{\varepsilon=0}\left[ci(\varepsilon) - \log\varepsilon\right] = \gamma$$

et de plus, pour $a < 1$

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos at}{e^t - 1}\,dt = \sum_{\mu=1}^\infty \frac{(-1)^{\mu-1}a^{2\mu}}{\underline{|2\mu}} \int_0^\infty \frac{t^{2\mu}\,dt}{e^t-1} = \sum_{\mu=1}^\infty (-1)^{\mu-1}\zeta(2\mu+1)a^{2\mu}.$$

Cette série représente la fonction

$$\gamma + \frac{\Gamma'(1+ai)}{\Gamma(1+ai)} + \frac{\Gamma'(1-ai)}{\Gamma(1-ai)} = \gamma + \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'(ai)}{\Gamma(ai)} + \frac{\Gamma'(-ai)}{\Gamma(-ai)}\right]$$

comme il est bien connu, et nous avons ainsi

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right)\cos at\,dt = \log a - \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'(ai)}{\Gamma(ai)} + \frac{\Gamma'(-ai)}{\Gamma(-ai)}\right] = \varphi(a). \tag{3}$$

La série de puissances $\sum\limits_{\mu=1}^\infty (-1)^{\mu-1}\zeta(2\mu+1)a^{2\mu}$ ne converge que pour $a < 1$, mais la formule (3) est valable pour toutes les valeurs réelles et positives de a. En substituant dans (3): $t = zv$ et $az = \lambda$, où z aussi est supposé provisoirement réel et > 0, nous avons finalement

$$\int_0^\infty F(v)\cos\lambda v\,dv = \frac{1}{z}\varphi\left(\frac{\lambda}{z}\right), \quad (\lambda \text{ réel et } > 0). \tag{4}$$

Ici l'intégrale converge tant que $R(z) > 0$, et la formule (4) reste vraie sous cette hypothèse. Nous avons par là démontré la formule importante

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{e^{nz}-1} = \frac{\gamma - \log z}{z} + \frac{1}{4} + \frac{2}{z}\sum_{n=1}^\infty \varphi\left(\frac{2\pi n}{z}\right). \tag{A}$$

---

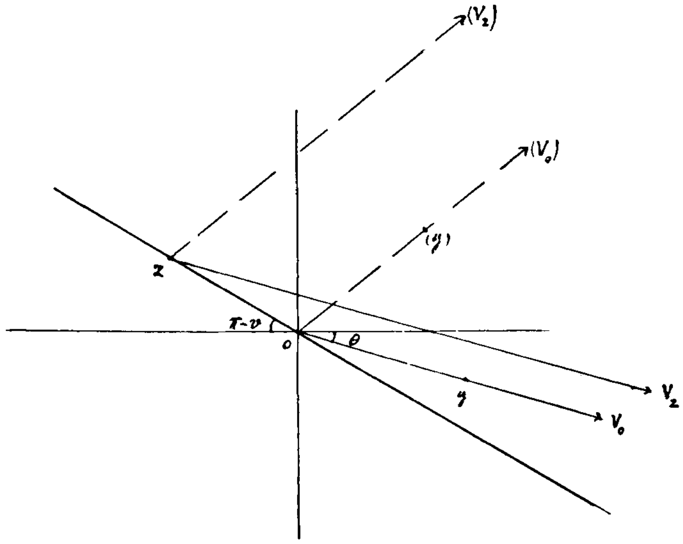
[1] Cf. Nielsen: Theorie des Integrallogarithmus (Leipzig 1906), §§ 3 et 8.

§ 2. *Les fonctions J et Ω.*

Considérons l'intégrale

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{-ty}\,dt}{t + \frac{z}{y}}, \quad (R(y) > 0) \tag{5}$$

laquelle a toujours un sens, pourvu que le quotient $\frac{z}{y}$ ne soit pas réel et négatif ou zéro. On aura alors (voir la figure!)



$$J = \int_{V_0} \frac{e^{-t}dt}{t+z} = e^z \int_{V_z} \frac{e^{-t}dt}{t}.$$

En ayant soin de faire varier y seulement d'une telle manière que le vecteur V_z, parallèle à V_0, ne passe point par l'origine, on voit donc que J représentera la fonction analytique $-e^z\, li e^{-z}$, rendue monodrome en pratiquant la coupure $0 \ldots -\infty$ dans le plan de la variable z. La valeur de $J(z)$ au point $-\xi$ de l'axe réel négatif sera par conséquent

$$J(-\xi) = -e^{-\xi} l i_1 e^{\xi} \mp \pi i e^{-\xi}$$

selon que $-\xi$ est considéré comme appartenant au bord supérieur ou inférieur de la coupure. Ici j'ai adopté la notation de M. Nielsen[1]

[1]) Loc. cit. § 1.

$$li_1 e^{\xi} = -v.p.\int_{-\xi}^{\infty}\frac{e^{-t}dt}{t}.$$

Dans ce qui suit nous aurons surtout besoin de la propriété suivante de $J(z)$:

La fonction $J(z)$ *reste finie dans tout le plan, sauf pour* $z = 0$, *et elle admet le développement asymptotique*

$$J(z) = \sum_{\mu=0}^{p-1}\frac{(-1)^{\mu}\,\underline{|\mu}}{z^{\mu+1}} + R_p \tag{6}$$

où

$$|R_p| < \frac{\underline{|p}\,\sqrt{(p+2)e}}{|z|^{p+1}}. \tag{7}$$

En effet, l'identité

$$\frac{1}{t+\frac{z}{y}} = \sum_{\mu=0}^{p-1}\frac{(-1)^{\mu}y^{\mu+1}}{z^{\mu+1}}t^{\mu} + (-1)^{p}\frac{y^{p}}{z^{p}}\,\frac{t^{p}}{t+\frac{z}{y}}$$

nous donne précisément ce développement avec

$$R_p = (-1)^{p}\frac{y^{p}}{z^{p}}\int_{0}^{\infty}\frac{t^{p}e^{-ty}dt}{t+\frac{z}{y}}.$$

Soit maintenant

$$\begin{cases} z = re^{iv} \\ y = \varrho e^{i\theta} \end{cases}$$

où $\cos\theta > 0$. Pour $R(z) \geqq 0$ cela suffit, mais si $R(z) < 0$, il faut encore supposer:

$$\begin{cases} \theta > -(\pi - v) & \text{pour } \frac{\pi}{2} < v \leqq \pi \\ \theta < \pi + v & \quad » \quad -\pi \leqq v < -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Il s'ensuit

$$\left|t+\frac{z}{y}\right|^{2} = t^{2} + 2\frac{r}{\varrho}t\cos(v-\theta) + \frac{r^{2}}{\varrho^{2}} \geqq \frac{r^{2}}{\varrho^{2}}\sin^{2}(v-\theta)$$

et par conséquent

$$|R_p| < \frac{\varrho^p}{r^p} \frac{\varrho}{r|\sin(v-\theta)|} \frac{\underline{|p}}{\varrho^{p+1}\cos^{p+1}\theta} = \frac{\underline{|p}}{r^{p+1}\cos^{p+1}\theta|\sin(v-\theta)|}.$$

En désignant par β l'angle positif $< \frac{\pi}{2}$, dont le sinus est égal à $\frac{1}{\sqrt{p+2}}$, la fonction $\sin u \cos^{p+1} u$ aura pour $u = \beta$ son maximum $= \frac{1}{\sqrt{p+2}} \left(\frac{p+1}{p+2}\right)^{\frac{p+1}{2}} > \frac{1}{\sqrt{(p+2)e}}$, et en faisant

$$\begin{cases} \theta = -\beta \text{ pour } 0 \leqq v \leqq \frac{\pi}{2} \text{ et } -\pi \leqq v < -\frac{\pi}{2} \\ \theta = \beta \quad \text{»} -\frac{\pi}{2} \leqq v < 0 \quad \text{»} \quad \frac{\pi}{2} < v \leqq \pi \end{cases}$$

on aura toujours

$$\cos\theta > 0, \ |\sin(v-\theta)|\cos^{p+1}\theta \geqq \sin\beta\cos^{p+1}\beta$$

d'où enfin

$$|R_p| < \frac{\underline{|p}\sqrt{(p+2)e}}{|z|^{p+1}}.$$

C. q. f. d.

Le résultat trouvé tout à l'heure nous permet d'établir des formules asymptotiques analogues pour les fonctions

$$\Omega(z) = J(z) + J(-z)^{1} \tag{8}$$

et $\sum_{m=1}^{\infty} \Omega(2m\pi z)$, dont nous aurons besoin plus tard. On trouve en effet sans la moindre difficulté

$$\Omega(z) = -2\sum_{\mu=1}^{p} \frac{\underline{|2\mu-1}}{z^{2\mu}} + S_p(z), \ |S_p(z)| < \frac{2\underline{|2p}\sqrt{2(p+1)e}}{|z|^{2p+1}} \tag{9}$$

et finalement

---

[1] Il sera bon d'observer les formules suivantes

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\eta=0} \Omega(\xi + i\eta) = -[e^{\xi} li\, e^{-\xi} + e^{-\xi} li_1\, e^{\xi}] \pm \pi i e^{-\xi} \\ &\lim_{\eta=0} \Omega(-\xi + i\eta) = -[e^{\xi} li\, e^{-\xi} + e^{-\xi} li_1\, e^{\xi}] \mp \pi i e^{-\xi} \end{aligned}\right\} (\xi > 0, \ \eta \gtrless 0)$$

$$\Omega(\pm \alpha i) = -2(\sin\alpha \operatorname{si}\alpha + \cos\alpha \operatorname{ci}\alpha), \ (\alpha > 0).$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\Omega(2m\pi z) = -\sum_{\mu=1}^{p}\frac{2\zeta(2\mu)\lfloor 2\mu-1}{(2\pi z)^{2\mu}} + \sum_{m=1}^{\infty}S_p(2m\pi z) = -\sum_{\mu=1}^{p}\frac{B_\mu}{2\mu z^{2\mu}} + T_p(z)\\ |T_p(z)| < \frac{2\lfloor 2p\sqrt{2(p+1)e}\,\zeta(2p+1)}{(2\pi|z|)^{2p+1}}\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

---

§ 3. *La relation entre φ et Ω. Application à $L(z)$.*

Il nous reste à montrer comment la fonction φ de la formule (A) s'exprime à l'aide de Ω. En nous servant du développement connu

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right)$$

nous pouvons écrire

$$\varphi(z) = \log z + \gamma - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n(z^2+n^2)} = \log z + \gamma - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{i}{2}\frac{1}{z+in} + \frac{i}{2}\frac{1}{z-in}\right). \quad (11)$$

D'autre part nous avons

$$\frac{\pi i}{e^{2\pi z}-1} = -\frac{\pi i}{2} + \frac{i}{2z} + \frac{i}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+in} + \frac{1}{z-in}\right)$$

d'où

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}\varphi(z) + \frac{\pi i}{e^{2\pi z}-1} &= \log z + \gamma - \frac{\pi i}{2} + \frac{i}{2z} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-iz}\right) =\\ &= \log z - \frac{\pi i}{2} - \frac{i}{2z} - \frac{\Gamma'(-iz)}{\Gamma(-iz)}\\ \varphi(z) - \frac{\pi i}{e^{2\pi z}-1} &= \log z + \gamma + \frac{\pi i}{2} - \frac{i}{2z} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+iz}\right) =\\ &= \log z + \frac{\pi i}{2} + \frac{i}{2z} - \frac{\Gamma'(iz)}{\Gamma(iz)}.\end{aligned}\right.$$

Les équations (12) se prêtent bien à l'application de la formule suivante,[1] valable pour $R(u) > 0$

---

[1] LINDELÖF: Calcul des résidus (Paris 1905), pag. 87 et suiv.

$$\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} = \log u - \frac{1}{2u} - \psi(u), \quad \psi(u) = \int\limits_0^\infty \frac{2v}{v^2+u^2}\frac{dv}{e^{2\pi v}-1}.$$

On en tire

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{\pi i}{e^{2\pi z}-1} + \psi(-iz) \text{ pour } R\left(\frac{z}{i}\right) > 0 \\ \varphi(z) &= +\frac{\pi i}{e^{2\pi z}-1} + \psi(iz) \quad\quad \text{»} \quad R\left(\frac{z}{i}\right) < 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ce qu'on pourrait voir d'ailleurs d'une formule[1] établie par M. LINDELÖF d'une manière différente. En écrivant maintenant

$$\psi(iz) = \psi(-iz) = \int\limits_0^\infty \frac{2v}{v^2-z^2}\frac{dv}{e^{2\pi v}-1}$$

l'intégrale certes n'a pas de sens pour les valeurs réelles de z, mais dans (13) la fonction ψ s'approche évidemment d'une valeur finie et déterminée, quand z devient réelle. Du reste on aura pour $R\left(\frac{z}{i}\right) \neq 0$

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-2\pi m v}dv}{v \pm z} = J(\pm 2m\pi z), \quad \int\limits_0^\infty \frac{2v}{v^2-z^2}e^{-2\pi m v}dv = \Omega(2\pi m z)$$

ce qui nous donne

$$\psi(iz) = \psi(-iz) = \sum_{m=1}^\infty \Omega(2m\pi z)$$

et par suite la relation cherchée entre φ et Ω

$$\varphi(z) = \mp\frac{\pi i}{e^{2\pi z}-1} + \sum_{m=1}^\infty \Omega(2m\pi z), \quad \left(R\left(\frac{z}{i}\right) \gtrless 0\right). \tag{14}$$

A l'aide de cette formule importante le développement (A) prendra une forme nouvelle. Car on a d'après (10)

[1] Loc. cit., n:o 10, p. 92.

$$\frac{2}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Omega\left(\frac{4\pi^2 mn}{z}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{p}\frac{B_\mu z^{2\mu-1}}{\mu(2\pi n)^{2\mu}} + \frac{2}{z}\sum_{n=1}^{\infty}T_p\left(\frac{2\pi n}{z}\right) = -\sum_{\mu=1}^{p}\frac{B_\mu^2 z^{2\mu-1}}{2\mu\lfloor 2\mu} + \Theta_p$$

où

$$|\Theta_p| < \frac{4\lfloor 2p\sqrt{2(p+1)}e\zeta^2(2p+1)}{(2\pi)^{4p+2}}|z|^{2p} \tag{15}$$

et par là le résultat final

$$L(z) = \frac{\gamma - \log z}{z} + \frac{1}{4} \mp \frac{2\pi i}{z} L\left(\frac{4\pi^2}{z}\right) - \sum_{\mu=1}^{p}\frac{B_\mu^2 z^{2\mu-1}}{2\mu\lfloor 2\mu} + \Theta_p, \quad \left(R\left(\frac{z}{i}\right) \gtrless 0\right). \tag{B}$$

C'est l'équation fonctionnelle asymptotique de $L(z)$ que j'avais signalé dans l'introduction.

Avant de terminer ce paragraphe je voudrais dire un mot sur deux formules concernant la fonction $L(z)$, dont il est question dans l'ouvrage de M. G. Torelli: *Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato* (*Napoli 1901*). Ces formules, qu'on retrouve pag. 188, s'écrivent en employant la variable z comme il suit

$$\begin{cases} L(z) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{e^z - 1} + \dfrac{1}{z}\log\dfrac{1}{1-e^{-z}} + 2\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{e^{-z}\sin zt}{1 - 2e^{-z}\cos zt + e^{-2z}}\cdot\dfrac{dt}{e^{2\pi t}-1} \\[2ex] L(z) = \dfrac{\gamma - \log z}{z} + \dfrac{1}{4} + \displaystyle\int_0^\infty\left(\cot\dfrac{zt}{2} - \dfrac{2}{zt}\right)\dfrac{dt}{e^{2\pi t}-1}. \end{cases}$$

La première de ces deux formules est vraie, mais seulement pour les valeurs réelles (et positives) de z, ce qui ne doit pas étonner du reste, la variable z ne pouvant pas quitter le domaine réel sans traverser une infinité de lignes singulières de l'intégrale, à savoir les cercles

$$\xi^2 + \eta^2 \pm 2k\pi\eta = 0 \qquad (z = \xi + i\eta,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Dans la seconde équation, au contraire, l'intégrale n'a un sens que pour les valeurs de z situées hors de l'axe réel, mais dans ce cas *l'équation n'est pas exacte*. Supposons en effet que z ne soit pas réelle, et posons $z = re^{iv}$. On trouve alors

$$\int_0^\infty \left(\cot\frac{zt}{2} - \frac{2}{zt}\right)\frac{dt}{e^{2\pi t}-1} = \int_0^\infty \left\{\sum_{n=1}^{p}\frac{4zt}{z^2t^2-4\pi^2n^2} + \sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{4zt}{z^2t^2-4\pi^2n^2}\right\}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}$$

et de plus (cf. pag. 208)

$$\int_0^\infty \frac{4zt}{z^2t^2-4\pi^2n^2}\cdot\frac{dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{2}{z}\int_0^\infty \frac{1}{t^2-\frac{4\pi^2n^2}{z^2}}\cdot\frac{2t\,dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{2}{z}\,\psi\left(\frac{2\pi n i}{z}\right)$$

d'où

$$\int_0^\infty \left(\cot\frac{zt}{2} - \frac{2}{zt}\right)\frac{dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{2}{z}\sum_{n=1}^{p}\psi\left(\frac{2\pi n i}{z}\right) + \int_0^\infty \left(\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{4zt}{z^2t^2-4\pi^2n^2}\right)\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}.$$

Or, on a

$$\left|\frac{4zt}{z^2t^2-4\pi^2n^2}\right| < \frac{rt}{n^2\,.\,\pi^2\sin^2 v}$$

de sorte que

$$\left|\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{4zt}{z^2t^2-4\pi^2n^2}\right| < \frac{rt}{\pi^2\sin^2 v}\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \frac{rt}{\pi^2\sin^2 v\,.\,p}$$

et par suite

$$\left|\int_0^\infty \left(\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{4zt}{z^2t^2-4\pi^2n^2}\right)\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\right| < \frac{r}{\pi^2\sin^2 v\,.\,p}\int_0^\infty \frac{t\,dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{r}{24\pi^2\sin^2 v}\cdot\frac{1}{p}$$

donc, en faisant $p=\infty$

$$\int_0^\infty \left(\cot\frac{zt}{2} - \frac{2}{zt}\right)\frac{dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{2}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\psi\left(\frac{2\pi n i}{z}\right) = \frac{2}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Omega\left(\frac{4\pi^2 mn}{z}\right) =$$

$$= L(z) - \frac{\gamma-\log z}{z} - \frac{1}{4} \pm \frac{2\pi i}{z}L\left(\frac{4\pi^2}{z}\right) \qquad \left(R\left(\frac{z}{i}\right) \gtrless 0\right).$$

Il faut donc, pour rendre exacte l'équation en question, ajouter au membre droit le terme fonctionnel $\mp \frac{2\pi i}{z} L\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)$.

Seconde partie.

Application de L(z) à la théorie des nombres.

§ 1. *Calcul de la partie réelle de l'intégrale* $\int\limits_a^{a+i\infty} \frac{e^{xz}dz}{z^{n+1}}$.

Il ne sera pas sans intérêt d'examiner l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xz}L(z)dz}{z^{k+1}}, \quad (a > 0,\ x \geqq 1)$$

en faisant usage de l'équation fonctionnelle de $L(z)$ trouvée auparavant. Comme il est bien connu, la valeur de cette intégrale n'est autre chose que la fonction arithmétique

$$\frac{1}{\underline{|k}} \sum_{n \leqq x} \tau(n)(x-n)^k$$

et on en obtient de cette manière une représentation asymptotique, dont nous allons nous occuper dans ce qui suit.

Quant à cela, il ne nous suffit plus de connaître l'intégrale

$$\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xz}dz}{z^{n+1}} = \frac{2\pi i x^n}{\underline{|n}}$$

mais le signe double dans la formule (B) nécessite encore le calcul de

$$\left(\int\limits_a^{a+i\infty} - \int\limits_{a-i\infty}^{a}\right) \frac{e^{xz}dz}{z^{n+1}}$$

c'est-à-dire la partie *réelle* (multipliée par 2) de l'intégrale $\int\limits_a^{a+i\infty} \frac{e^{xz}dz}{z^{n+1}}$. Faisons ce calcul. En partant de la formule[1]

[1] Nielsen: § 10.

$$\int_0^\infty \frac{e^{ixt}\,dt}{a+it} = \pi e^{-ax} + ie^{-ax}\,li_1\,e^{ax}$$

on trouve en dérivant n fois par rapport à a

$$(-1)^n \lfloor n \int_0^\infty \frac{e^{ixt}\,dt}{(a+it)^{n+1}} = (-1)^n \pi x^n e^{-ax} + ix^n \Big/^{v=ax} \frac{d^n}{dv^n} e^{-v}\,li_1\,e^v.$$

Or, nous avons

$$\frac{d^n}{dv^n} e^{-v}\,li_1\,e^v = (-1)^n \left(e^{-v}\,li_1\,e^v - \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{\lfloor \mu}{v^{\mu+1}}\right)$$

de sorte que

$$\int_0^\infty \frac{e^{ixt}\,dt}{(a+it)^{n+1}} = \frac{x^n}{\lfloor n} \left\{\pi e^{-ax} + i\left(e^{-ax}\,li_1\,e^{ax} - \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{\lfloor \mu}{(ax)^{\mu+1}}\right)\right\}$$

et pour $z = a + it$

$$\int_a^{a+i\infty} \frac{e^{xz}\,dz}{z^{n+1}} = \frac{x^n}{\lfloor n} \left\{e^{ax} \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{\lfloor \mu}{(ax)^{\mu+1}} - li_1\,e^{ax} + \pi i\right\}. \tag{16}$$

On en tire finalement

$$\left(\int_a^{a+i\infty} - \int_{a-i\infty}^{a}\right) \frac{e^{xz}\,dz}{z^{n+1}} = 2\,\frac{x^n}{\lfloor n} \left(e^{ax} \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{\lfloor \mu}{(ax)^{\mu+1}} - li_1\,e^{ax}\right). \tag{17}$$

---

§ 2. *Représentation asymptotique de*

$$\frac{1}{\lfloor k} \sum_{n \leqq x} \tau(n)(x-n)^k.$$

Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour le calcul de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xz}\,L(z)\,dz}{z^{k+1}}.$$

En observant que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}\log z\,dz}{z^{k+1}}=\frac{x^k}{\lfloor k}\left\{\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}-\log x\right\}$$

on obtient pour $p\leqq\frac{k+1}{2}$

$$\frac{1}{\lfloor k}\sum_{n\leqq x}\tau(n)(x-n)^k=\frac{x^{k+1}}{\lfloor k+1}\left\{\log x+\gamma-\frac{\Gamma'(k+2)}{\Gamma(k+2)}\right\}+\frac{1}{4}\frac{x^k}{\lfloor k}-\sum_{\nu=1}^{p}\frac{B_\nu^2}{2\nu\lfloor 2\nu}\frac{x^{k+1-2\nu}}{\lfloor k+1-2\nu}-$$

$$-\left(\int_a^{a+i\infty}-\int_{a-i\infty}^{a}\right)\frac{e^{xz}}{z^{k+2}}L\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}\Theta_p dz}{z^{k+1}}. \quad (18)$$

Comme $|\Theta_p|<H_p|z|^{2p}$, où H_p ne dépend pas de z, il s'ensuit

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}\Theta_p dz}{z^{k+1}}\right|<\frac{H_p e^{ax}}{2\pi a^{k-2p}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dv}{(1+v^2)^{\frac{k+1}{2}-p}}.$$

Donc, en posant

$$a=\frac{1}{x},\quad p=\begin{cases}\frac{k}{2}-1 & \text{pour } k \text{ pair}\\ \frac{k-1}{2} & \text{» } k \text{ impair}\end{cases}$$

on voit que la valeur de l'intégrale sera, en sens absolu, inférieure à $\frac{H_{\frac{k}{2}-1}e}{\pi}x^2$ ou $\frac{H_{\frac{k-1}{2}}e}{2}x$, selon que k est pair ou impair. Il faut pourtant supposer $k\geqq 3$, puisque le nombre p doit être >0.

Celà étant, passons à l'intégrale

$$\left(\int_a^{a+i\infty}-\int_{a-i\infty}^{a}\right)\frac{e^{xz}}{z^{k+2}}L\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)dz.$$

Par une démonstration identique à celle, dont je me suis servi à une autre occasion,[1] on trouve d'abord pour $k\geqq 4$

[1] Acta Mathematica: T. 37, § 4.

$$\left(\int\limits_{a}^{a+i\infty} - \int\limits_{a-i\infty}^{a}\right) \frac{e^{xz}}{z^{k+2}} L\left(\frac{4\pi^2}{z}\right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \left(\int\limits_{a}^{a+i\infty} - \int\limits_{a-i\infty}^{a}\right) \frac{e^{xz - \frac{4\pi^2 n}{z}}}{z^{k+2}} dz =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\lfloor\nu} (4\pi^2 n)^\nu \left(\int\limits_{a}^{a+i\infty} - \int\limits_{a-i\infty}^{a}\right) \frac{e^{xz} dz}{z^{k+\nu+2}} =$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\lfloor\nu} (4\pi^2 n)^\nu \frac{x^{k+\nu+1}}{\lfloor k+\nu+1} \left(e^{ax} \sum_{\mu=0}^{k+\nu} \frac{\lfloor\mu}{(ax)^{\mu+1}} - li_1 e^{ax} \right). \tag{19}$$

Après avoir fait $a = \frac{1}{x}$, on aura un résultat valable encore pour $k \geqq 1$,[1] bien que pour $k < 3$ on ne sache rien de l'ordre de grandeur du terme-reste.

La série de (19) devient pour $a = \frac{1}{x}$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu (4\pi^2 n)^\nu x^{k+\nu+1}}{\lfloor\nu \lfloor k+\nu+1} (e A_{k+\nu+1} - li_1 e)$$

en posant pour abréger

$$A_n = \sum_{\mu=0}^{n-1} \lfloor\mu \tag{20}$$

et cela peut encore s'écrire

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \left\{ \frac{e}{(4\pi^2 n)^{k+1}} \psi_{k+1}(4\pi^2 n x) - li_1 e \left(\frac{x}{4\pi^2 n}\right)^{\frac{k+1}{2}} I_{k+1}(4\pi \sqrt{nx}) \right\}$$

où

$$\psi_k(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu A_{k+\nu}}{\lfloor\nu \lfloor k+\nu} x^{k+\nu} \tag{21}$$

$I_k(x)$ étant la fonction de Bessel[2]

$$I_k(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\lfloor\nu \lfloor k+\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2\nu}. \tag{22}$$

---

[1] Voir l'appendice.

[2] Pour ce qui concerne les fonctions de Bessel et de Neumann, on consultera p. ex. le grand traité de M. Nielsen: Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen (Leipzig 1904).

En écrivant

$$x^{\frac{k}{2}} I_k(2\sqrt{x}) = \varphi_k(x)$$

la fonction φ_k satisfait à l'équation différentielle:

$$x\varphi''_k - (k-1)\varphi'_k + \varphi_k = 0.$$

Quant à ψ_k, on vérifie sans peine en observant la relation $A_{n+1} = A_n + \lfloor n$ qu'elle est une intégrale de l'équation non homogène

$$x\psi''_k - (k-1)\psi'_k + \psi_k = -x^k e^{-x}.$$

Cela nous détermine à introduire une nouvelle fonction $\bar{I}_k$ par la définition

$$x^{\frac{k}{2}} \bar{I}_k(2\sqrt{x}) = \psi_k(x) \tag{23}$$

d'où

$$\bar{I}_k(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu A_{k+\nu}}{\lfloor \nu \lfloor k+\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2\nu}. \tag{24}$$

La fonction $\bar{I}_k$ satisfait alors à *l'équation de* BESSEL *à membre droit différent de zéro*, savoir

$$x^2\bar{I}''_k + x\bar{I}'_k + (x^2 - k^2)\bar{I}_k = -\frac{x^{k+2}}{2^k} e^{-\frac{x^2}{4}} = xf(x). \tag{25}$$

Par conséquent elle peut s'exprimer à l'aide des deux intégrales fondamentales de l'équation homogène, I_k et Y_k, en désignant avec M. NIELSEN par Y_k la fonction dite de NEUMANN

$$Y_k(x) = \frac{2}{\pi} I_k(x) \log\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\lfloor \nu \lfloor k+\nu}\left[\frac{\Gamma'(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\Gamma'(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+k+1)}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2\nu} + \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{\lfloor k-\nu-1}{\lfloor \nu}\left(\frac{2}{x}\right)^{k-2\nu}\right\}. \tag{26}$$

Le déterminant $I_k Y'_k - I'_k Y_k$ étant nécessairement de la forme $\frac{c}{x}$, on trouve immédiatemant la valeur de $c = \frac{2}{\pi}$, ce qui nous fait voir que la fonction $\bar{I}_k$ doit être de la forme

$$\overline{I}_k = B I_k + B' Y_k + \frac{\pi}{2}\left(Y_k \int_0^x I_k f dx - I_k \int_0^x Y_k f dx\right). \tag{27}$$

D'ailleurs la constante B' ne peut être que zéro, parce que Y_k devient infinie pour $x = 0$, tandis que $\overline{I}_k(0) = 0$. L'intégrale $\int_0^x I_k f dx$ est divisible par x^{2k+2}; on a donc:

$$\lim_{x=0} Y_k x^{-k} \int_0^x I_k f dx = 0.$$

D'autre part la valeur de $I_k x^{-k}$ pour $x = 0$ est égale à $\frac{1}{2^k \underline{|k}}$, d'où nous voyons que l'on a aussi

$$\lim_{x=0} I_k x^{-k} \int_0^x Y_k f dx = 0.$$

Il en résulte:

$$\lim_{x=0} \overline{I}_k x^{-k} = \frac{A_k}{2^k \underline{|k}} = \frac{B}{2^k \underline{|k}}$$

c'est-à-dire:

$$B = A_k = \sum_{\mu=0}^{k-1} \underline{|\mu}. \tag{28}$$

Il suffit maintenant de se rappeler la propriété importante des fonctions I_k et Y_k, la valeur de x étant grande et positive, savoir

$$I_k(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad Y_k(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

pour reconnaître que les intégrales $\int_0^x I_k f dx$ et $\int_0^x Y_k f dx$ sont bornées et que la fonction $\overline{I}_k$ est par conséquent aussi $= O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Nous sommes ainsi parvenus au résultat final

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\lfloor k}\sum_{n\leq x}\tau(n)(x-n)^k = \frac{x^{k+1}}{\lfloor k+1}\left\{\log x+\gamma-\frac{\Gamma'(k+2)}{\Gamma(k+2)}\right\}+\frac{1}{4}\frac{x^k}{\lfloor k}-\sum_{\nu\leq\frac{k-1}{2}}\frac{B_\nu^2}{2\nu\lfloor 2\nu}\frac{x^{k+1-2\nu}}{\lfloor k+1-2\nu}+\\ +2x^{\frac{k+1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+1}{2}}}\{li_1 e I_{k+1}(4\pi\sqrt{nx})-eI_{k+1}(4\pi\sqrt{nx})\}+r_k(x)\end{aligned}\right\}\ (C)$$

où la série infinie $= O\left(x^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}\right)$ pour $k\geqq 1$. Quant à $r_k(x)$, on n'en sait rien dans le cas où $k<3$, mais pour $k\geqq 3$ nous avons vu que $r_k(x)=O(x^2)$ ou $O(x)$, selon que k est pair ou impair.

Appendice.

Il faut dire encore quelques mots pour expliquer comment on parvient jusqu'à la valeur 3 de la constante k. En effet, dans la série infinie de (C), laquelle s'écrit aussi sous la forme: $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(4\pi^2 n)^{k+1}}\{li_1 e\varphi_{k+1}(4\pi^2 nx)-e\psi_{k+1}(4\pi^2 nx)\}$ on peut abaisser le nombre k de 4 jusqu'à 1, la convergence restant toujours uniforme et absolue. Or, on a: $\varphi'_{k+1}(x)=\varphi_k(x)$, $\psi'_{k+1}(x)=\psi_k(x)+x^k e^{-x}$ de sorte que la dérivation donne naissance, outre la série correspondant à k, à un terme: $-2ex^k L(4\pi^2 x)$, qui s'annule pour $x=\infty$, puisque $L(x)<\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$. D'autre part on trouve, en désignant par $\overline{\Theta}_1$ et $\overline{\overline{\Theta}}_1$ les valeurs de Θ_1 pour $R\left(\frac{z}{i}\right)\gtrless 0$, à cause de la convergence uniforme et absolue des intégrales

$$2\pi i\frac{\partial}{\partial x}r_1(x)=\frac{\partial}{\partial x}\lim_{\tau=\infty}\left\{\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x}+i\tau}\frac{e^{xz}\overline{\Theta}_1 dz}{z^5}+\int_{\frac{1}{x}-i\tau}^{\frac{1}{x}}\frac{e^{xz}\overline{\overline{\Theta}}_1 dz}{z^5}\right\}=$$

$$=\lim_{\tau=\infty}\left\{\int_{\frac{1}{x}-i\tau}^{\frac{1}{x}+i\tau}\frac{e^{xz}\Theta_1 dz}{z^4}-\frac{1}{x^2}\left[\frac{e^{1+ix\tau}\overline{\Theta}_1\left(\frac{1}{x}+i\tau\right)}{\left(\frac{1}{x}+i\tau\right)^5}-ex^5\overline{\Theta}_1\left(\frac{1}{x}\right)+ex^5\overline{\overline{\Theta}}_1\left(\frac{1}{x}\right)+\right.\right.$$

$$-\frac{e^{1-ix\tau}\bar{\bar{\Theta}}_1\left(\frac{1}{x}-i\tau\right)}{\left(\frac{1}{x}-i\tau\right)^5}\Bigg]\Bigg\}=\int\limits_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty}\frac{e^{xz}\Theta_1\,dz}{z^4}+ex^3\left[\bar{\Theta}_1\left(\frac{1}{x}\right)-\bar{\bar{\Theta}}_1\left(\frac{1}{x}\right)\right]=O(x).$$

Stockholm, Novembre 1914.