SUR LA LIMITATION DU DEGRÉ DES COËFFICIENTS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES À POINTS CRITIQUES FIXES.

PAR

JEAN CHAZY

à LILLE.

Dans le premier chapitre de ce Mémoire, j'étends au champ complexe et aux équations différentielles d'ordre quelconque les résultats obtenus[1] par M. BENDIXSON et M. PICARD, relatifs à l'étude pour les petites valeurs réelles des variables x et y des intégrales de l'équation du premier ordre

$$x^n \frac{dy}{dx} = F(x, y), \tag{1}$$

où n désigne un nombre entier supérieur à 1, et $F(x, y)$ une fonction des deux variables x et y holomorphe et nulle pour le système de valeurs $x = y = 0$.

La méthode d'approximations successives employée par M. BENDIXSON est applicable encore à l'équation (1) quand le nombre n est égal à 1, et aux équations et systèmes différentiels d'ordre quelconque qui généralisent cette forme de l'équation (1); on peut retrouver ainsi les développements classiques en séries entières par rapport aux variables x, x^{n_1}, x^{n_2}, ..., les exposants n_1, n_2, ... dépendant des coëfficients des équations considérées. J'ai obtenu une application de ces développements que je me propose d'exposer dans un autre Mémoire: j'ai démontré que, dans le problème des n corps, au voisinage d'un instant où

[1] BENDIXSON, Acta Mathematica, t. 24, p. 81; PICARD, Traité d'analyse, 2ème éd., t. III, p. 258.

plus de deux corps se choquent, ou quand les corps s'éloignent indéfiniment sur certaines trajectoires qui généralisent les trajectoires paraboliques du problème des deux corps, les coordonnées des n corps admettent des développements de la forme précédente suivant des puissances du temps; l'un des exposants est $\frac{1}{3}$, les autres dépendent des rapports des masses, et sont tantôt réels, tantôt imaginaires.

Dans le second chapitre,[1] je considère des équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur, telles que l'équation

$$y''' = y y'' - 2 y'^2,$$

qui ne sont pas linéaires, et dont néanmoins les intégrales n'ont ni points critiques algébriques, ni pôles; je démontre que ces intégrales ont des singularités transcendantes et ne sont pas uniformes. J'utilise pour cette démonstration les résultats obtenus dans le premier chapitre, et notamment la représentation asymptotique dans un secteur des intégrales de l'équation (1): je suis amené ainsi, dans la théorie des équations différentielles analytiques, à considérer une équation différentielle dont un coëfficient est une série divergente.

La combinaison de la méthode précédente et de la méthode constituée par M. Painlevé permet de démontrer que, si $P(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y, x)$ désigne un polynôme par rapport aux n variables $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ à coëfficients analytiques en x, et si l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$y^{(n)} = P(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y, x)$$

est uniforme ou a ses points critiques fixes, le degré du polynôme P par rapport à chacune des n variables est limité: si l'on considère chaque dérivée $y^{(i)}$ comme de poids égal à l'indice de dérivation augmenté d'une unité, et la fonction y comme de poids 1, le poids d'un terme quelconque du polynôme P ne peut surpasser le poids de $y^{(n)}$, $n+1$. Le résultat précédent généralise le résultat classique relatif à l'équation de Riccati. Une limitation analogue est valable dans le cas où P est, non plus un polynôme, mais une fonction rationnelle, ou algébrique, à moins que l'équation différentielle proposée ne se ramène à une équation fuchsienne ou kleinéenne.

[1] Ce second chapitre est une partie d'un Mémoire auquel l'Académie des Sciences de Paris a décerné un Grand Prix des Sciences Mathématiques en décembre 1912.

CHAPITRE I.

1. Nous supposerons que dans le développement en série entière de la fonction $F(x, y)$ au voisinage du système de valeurs $x = y = 0$, le coëfficient du terme du premier degré en y est différent de zéro; dans cette hypothèse, en multipliant la variable x par une constante convenable, nous pouvons mettre l'équation (1) sous la forme

$$x^n \frac{dy}{dx} - y = f(x, y), \tag{2}$$

où $f(x, y)$ désigne une fonction des deux variables x, y holomorphe pour les valeurs $x = y = 0$, et dont le développement au voisinage de ce système de valeurs ne renferme ni terme constant ni terme du premier degré en y.

Enfin, pour simplifier les calculs, nous prendrons l'exposant n égal à 2:

$$x^2 \frac{dy}{dx} - y = f(x, y). \tag{3}$$

2. M. Bendixson a considéré les équations différentielles linéaires successives

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 \dfrac{dy_1}{dx} - y_1 = f(x, 0), \\[2ex] x^2 \dfrac{dy_2}{dx} - y_2 = f(x, y_1), \\[2ex] \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\[2ex] x^2 \dfrac{dy_n}{dx} - y_n = f(x, y_{n-1}), \\[2ex] \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right. \tag{4}$$

et les intégrales de ces équations différentielles définies par les conditions initiales

$$x = x_0, \ y_1 = y_2 = \cdots = y_n \cdots = y_0;$$

ces intégrales s'expriment par les quadratures successives:

$$
(5)\qquad \begin{cases}
y_1 = y_0 e^{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x_0}} + e^{-\frac{1}{x}} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}} f(x, 0)}{x^2}\, dx, \\
y_2 = y_0 e^{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x_0}} + e^{-\frac{1}{x}} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}} f(x, y_1)}{x^2}\, dx, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_n = y_0 e^{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x_0}} + e^{-\frac{1}{x}} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}} f(x, y_{n-1})}{x^2}\, dx, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{cases}
$$

M. Bendixson a démontré que, si les variables et les coëfficients sont réels, et si les valeurs initiales x_0, y_0 sont assez petites, x_0 étant positif, la suite de fonctions y_n est uniformément convergente et définit une intégrale de l'équation (3) continue quand la variable x tend vers l'origine sur la partie positive de l'axe réel.

Nous allons étendre le résultat précédent au cas où les variables et les coëfficients ont des valeurs complexes. Soit α un nombre quelconque compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; dans le plan de la variable x, désignons par A l'angle ayant comme sommet l'origine, comme bissectrice intérieure la partie positive de l'axe réel et comme mesure 2α. Nous allons démontrer que, si les valeurs initiales complexes x_0, y_0 sont assez petites, le point x_0 étant situé dans l'angle A, la suite de fonctions y_n est encore uniformément convergente, et définit une intégrale de l'équation (3) holomorphe quand la variable x tend vers l'origine dans l'angle A.

Si les quantités positives R et R' sont assez petites, la fonction $f(x, y)$ est holomorphe dans le domaine

$$|x| < R, \ |y| \leq R',$$

et satisfait dans ce domaine à l'inégalité de Lipschitz

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq \frac{k \cos \alpha}{1 + \beta} |y_2 - y_1|,$$

k désignant un nombre compris entre 0 et 1, et β un nombre positif arbitraire, mais fixe: car la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ est holomorphe et nulle pour $x = y = 0$. Soit encore $\frac{M \cos \alpha}{1 + \beta}$ le maximum du module de la fonction $f(x, 0)$ sur la circonférence $|x| = R$; si R est assez petit, la quantité r définie par l'égalité

$$\frac{r + M}{1 - k} = R'$$

est positive, et cette quantité est d'ailleurs inférieure à R'. Nous supposons le point x_0 intérieur au secteur déterminé dans l'angle A par la circonférence $|x| = R$, et nous supposons d'autre part $|y_0| \leq r$.

La fonction

$$y_1 = y_0 e^{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}} + e^{-\frac{1}{x}} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}} f(x, 0)}{x^2} dx$$

est holomorphe à l'intérieur du secteur déterminé dans l'angle A par la circonférence $|x| = R$. Si d'ailleurs le point x varie seulement à l'intérieur de la circonférence

$$\Re\left(\frac{1}{x}\right) = \Re\left(\frac{1}{x_0}\right),$$

passant par le point x_0 et tangente à l'origine à l'arc des quantités purement imaginaires, la foncton $e^{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}}$ est en module inférieure à 1, et le premier terme de la fonction y_1 est en module inférieur à r.

Cherchons une limite supérieure du module du second terme de la fonction y_1. ϱ et ϑ désignant le module et l'argument de la variable x, posons $x = \varrho e^{i\vartheta}$. Le second terme de la fonction y_1 est égal à

$$e^{-\frac{e^{-i\vartheta}}{\varrho}} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{e^{-i\vartheta}}{\varrho}} f(x, 0) e^{-i\vartheta}}{\varrho^2} (d\varrho + i\varrho d\vartheta),$$

et par suite, à l'intérieur du secteur déterminé dans l'angle A par la circonférence $|x| = R$, est en module inférieur à l'expression

$$\frac{M \cos \alpha}{1 + \beta} e^{-\frac{\cos \vartheta}{\varrho}} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{\cos \vartheta}{\varrho}}}{\varrho^2} \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2},$$

dont la signification est évidente. Si l'on pose

$$\frac{\cos \vartheta}{\varrho} = \frac{\text{I}}{u}, \text{ d'où } du = \frac{d\varrho + \varrho \operatorname{tg} \vartheta \, d\vartheta}{\cos \vartheta},$$

on peut remplacer l'expression précédente par

$$\frac{M}{\text{I} + \beta} e^{-\frac{1}{u}} \int\limits_{u_0}^{u} \frac{e^{\frac{1}{u}} \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2}}{u^2 (d\varrho + \varrho \operatorname{tg} \vartheta \, d\vartheta)} du.$$

Or désignons par γ la racine de l'équation

$$\frac{\sqrt{\text{I} + \operatorname{tg}^2 \gamma}}{\text{I} - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma} = \text{I} + \beta$$

comprise entre o et $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Sur les deux spirales logarithmiques admettant l'origine comme point-asymptote, passant par le point x_0, et dans lesquelles l'angle de la tangente et du rayon vecteur est égal à γ en valeur absolue, considérons les deux arcs issus du point x_0, se rapprochant de l'origine et limités aux premiers points d'intersection avec les côtés de l'angle A; et désignons par domaine D le domaine ouvert du plan de la variable x limité par les deux arcs précédents et par les deux côtés de l'angle A. Le domaine D est évidemment intérieur d'une part à la circonférence $|x| = R$, et d'autre part à la circonférence $\Re\left(\frac{\text{I}}{x}\right) = \Re\left(\frac{\text{I}}{x_0}\right)$, qui coupe tous les rayons vecteurs issus de l'origine et situés dans l'angle A sous un angle supérieur à $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Nous supposerons que le point x varie seulement dans le domaine D. On peut joindre le point x_0 à un point quelconque x du domaine D par un arc, situé tout entier dans ce domaine, d'une spirale logarithmique admettant l'origine comme point-asymptote, et dans laquelle l'angle de la tangente et du rayon vecteur est en valeur absolue inférieur à γ: nous prendrons cet arc de spirale comme chemin d'intégration joignant le point x_0 au point x dans le calcul du second terme de la fonction y_1, et des seconds termes de toutes les fonctions $y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ Sur le chemin d'intégration ainsi choisi, ϱ et u décroissent constamment, et l'on a les inégalités

$$|\operatorname{tg} \vartheta| < \operatorname{tg} \alpha. \quad \left|\varrho \frac{d\vartheta}{d\varrho}\right| < \operatorname{tg} \gamma, \text{ d'où } \frac{\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2}}{|d\varrho + \varrho \operatorname{tg} \vartheta \, d\vartheta|} < \text{I} + \beta.$$

Par suite, au point x considéré du domaine D, le second terme de la fonction y_1 est en module inférieur à

$$M e^{-\frac{1}{u}} \int_{u}^{u_0} \frac{e^{\frac{1}{u}} du}{u^2} = M\left[1 - e^{-\frac{1}{u}+\frac{1}{u_0}}\right] < M.$$

Donc, dans le domaine D, le module de la fonction y_1 est inférieur à $r + M$, et par conséquent à R'.

Il résulte immédiatement que la fonction y_2 est holomorphe dans le domaine D; cherchons une limite supérieure du module de cette fonction dans ce domaine. On déduit des équations (5)

$$y_2 - y_1 = e^{-\frac{1}{x}} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}}[f(x, y_1) - f(x, 0)]}{x^2} dx.$$

Or, dans le domaine D, $|x|$ et $|y_1|$ étant inférieurs respectivement à R et R', l'inégalité de LIPSCHITZ est valable:

$$|f(x, y_1) - f(x, 0)| \leq \frac{k \cos \alpha}{1 + \beta} |y_1|,$$

d'où

$$|f(x, y_1) - f(x, 0)| < \frac{k \cos \alpha (r + M)}{1 + \beta}.$$

On déduit comme précédemment

$$|y_2 - y_1| < k(r + M),$$

et

$$|y_2| < |y_1| + |y_2 - y_1| < r + M + k(r + M) = (r + M)(1 + k) < R'.$$

Il résulte que la fonction y_3 est holomorphe dans le domaine D, et l'on obtient de même

$$|y_3 - y_2| < k^2(r + M),$$

et

$$|y_3| < |y_2| + |y_3 - y_2| < (r + M)(1 + k) + k^2(r + M) = (r + M)(1 + k + k^2) < R'.$$

En continuant de proche en proche, on démontre que la fonction y_n est holomorphe dans le domaine D, et satisfait dans ce domaine à l'inégalité

$$|y_n - y_{n-1}| < k^{n-1}(r + M).$$

Donc, dans le domaine D, la suite de fonctions y_n est uniformément convergente, et définit une fonction holomorphe $y(x)$. Au point x_0, cette fonction-limite est encore holomorphe, et a, comme toutes les fonctions y_n, la valeur y_0. D'ailleurs, d'après l'équation

$$x^2 \frac{dy_n}{dx} - y_n = f(x, y_{n-1}),$$

et l'inégalité de Lipschitz, dans tout domaine que l'on obtient en retranchant du domaine D la partie intérieure au cercle de centre $x = 0$ et de rayon δ, la suite des dérivées $\frac{dy_n}{dx}$ est aussi uniformément convergente, et a comme limite la dérivée $y'(x)$, quelque petit que soit le rayon δ. Par suite, en tout point du domaine D, on peut remplacer dans l'équation précédente $\frac{dy_n}{dx}$, y_n et y_{n-1} par les limites $\frac{dy}{dx}$ et y, et la fonction $y(x)$ satisfait à l'équation différentielle (3). C'est l'intégrale de l'équation (3), unique d'après le théorème de Cauchy, définie par les conditions initiales $x = x_0$, $y = y_0$ et prolongée analytiquement dans le domaine D. Cette intégrale $y(x)$ dépend de la constante y_0, arbitraire pourvu qu'elle soit assez petite.

3. Dans le cas où les variables et les coëfficients sont réels, M. Bendixson a démontré que l'intégrale $y(x)$, définie et continue sur la partie positive de l'axe réel au voisinage de l'origine, tend vers zéro quand la variable x tend vers l'origine. M. Picard a obtenu un résultat plus complet: toutes les courbes intégrales obtenues, qui aboutissent ainsi à l'origine de leur plan, y sont tangentes à la courbe

$$-y = f(x, y),$$

et y ont entre elles un contact d'ordre infini. Ces résultats s'étendent aux valeurs complexes des variables et des coëfficients. Nous commencerons par démontrer que, quand la variable x tend vers l'origine dans le domaine D et par conséquent dans l'angle A, le quotient $\frac{y(x)}{x}$ tend vers $-b$, si l'on désigne par b le coëfficient de x dans le développement de la fonction $f(x, y)$: d'où il résultera que l'intégrale $y(x)$ tend vers zéro.

Considérons d'abord le quotient $\frac{y_1}{x}$. Par une intégration par parties, on peut transformer le second terme de la fonction y_1, et mettre le quotient $\frac{y_1}{x}$ sous la forme

$$\frac{y_1}{x} = \frac{y_0 e^{\frac{1}{x_0}}}{x e^{\frac{1}{x}}} - \frac{f(x,0)}{x} + \frac{e^{\frac{1}{x_0}} f(x_0, 0)}{x e^{\frac{1}{x}}} + \frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} \int_{x_0}^{x} e^{\frac{1}{x}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)\, dx.$$

Quand la variable x tend vers l'origine dans l'angle A, le premier et le troisième termes de la somme précédente tendent vers zéro; le second tend vers $-b$. Enfin le quatrième terme tend vers zéro. En effet la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)$ est holomorphe dans le cercle $|x| = R$: soit $\frac{M' \cos\alpha}{1+\beta}$ la limite supérieure de son module dans le domaine intérieur D. Dans ce domaine le quatrième terme de la somme précédente est en module inférieur à

$$\frac{M' \int_{u}^{u_0} e^{\frac{1}{u}}\, du}{u e^{\frac{1}{u}}},$$

où la variable u désigne comme précédemment l'inverse de la partie réelle de $\frac{1}{x}$, et tend vers zéro en décroissant constamment quand la variable x tend vers l'origine dans le domaine D sur les chemins d'intégration que nous avons définis. Or l'on a

$$-\frac{d}{du}\left(u^2 e^{\frac{1}{u}}\right) = e^{\frac{1}{u}}(1 - 2u),$$

et par suite, pourvu que u soit inférieur à $\frac{1}{2}$,

$$\int_{u}^{u_0} e^{\frac{1}{u}}\, du < \int_{u'}^{u_0} e^{\frac{1}{u}}\, du + \frac{u^2 e^{\frac{1}{u}} - u'^2 e^{\frac{1}{u'}}}{1 - 2u'},$$

u' désignant un nombre fixe compris entre u_0 et u et inférieur à $\frac{1}{2}$. On déduit de là

$$\frac{M' \int_{u}^{u_0} e^{\frac{1}{u}}\, du}{u e^{\frac{1}{u}}} < \frac{M' \int_{u'}^{u_0} e^{\frac{1}{u}}\, du}{u e^{\frac{1}{u}}} + \frac{M'\left(u - \frac{u'^2 e^{\frac{1}{u'}}}{u e^{\frac{1}{u}}}\right)}{1 - 2u'}.$$

Quand u tend vers zéro par valeurs positives, les deux termes du second membre tendent vers zéro.

Donc, quand la variable x tend vers l'origine dans le domaine D, le quotient $\frac{y_1}{x}$ tend vers $-b$; quel que soit le nombre positif ε, on peut déterminer un second nombre positif u_1 tel que, dans le triangle mixtiligne D_1 formé par les deux côtés de l'angle A et la circonférence $u = u_1$, l'on ait

$$\left|\frac{y_1}{x} + b\right| \leq \varepsilon.$$

Il nous sera utile, pour simplifier des calculs, de diminuer au besoin u_1, et de le supposer inférieur à $\frac{1}{5}$.

Nous allons comparer au quotient $\frac{y_1}{x}$ successivement les quotients $\frac{y_2}{x}, \frac{y_3}{x}, \ldots, \frac{y_n}{x}$. Supposons le point x situé dans le triangle D_1, et, dans la cas le plus compliqué où le point x_0 n'est lui-même dans le triangle D_1, soit $x_1 = \varrho_1 e^{i\vartheta_1}$ le point du chemin d'intégration $x_0 x$ situé sur la circonférence $u = u_1$. On a

$$\frac{y_2 - y_1}{x} = \frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}}[f(x, y_1) - f(x, 0)]}{x^2} dx;$$

d'où, en décomposant le second membre,

$$\frac{y_2 - y_1}{x} = \frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{e^{\frac{1}{x}}[f(x, y_1) - f(x, 0)]}{x^2} dx + \frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} \int_{x_1}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}}[f(x, y_1) - f(x, 0)]}{x^2} dx.$$

On peut écrire

$$f(x, y) - f(x, 0) = y\varphi(x, y),$$

$\varphi(x, y)$ désignant une fonction holomorphe, comme la fonction $f(x, y)$, dans le domaine $|x| \leq R$, $|y| \leq R'$, et nulle pour $x = y = 0$: si en outre, en un point de ce domaine, $\frac{y}{x}$ est en module inférieur ou égal à un nombre fixe, soit $|b| + 3\varepsilon$, l'expression

$$\frac{f(x, y) - f(x, 0)}{x^2} = \frac{y}{x} \times \frac{\varphi(x, y)}{x}$$

est en module inférieure à un nombre fixe $\frac{N \cos \alpha}{1+\beta}$, qui ne dépend que des coëfficients de la fonction $f(x, y)$ et du nombre ε. Or l'on a dans le triangle D_1

$$\left|\frac{y_1}{x} + b\right| \leq \varepsilon, \quad \text{a fortiori} \quad \left|\frac{y_1}{x}\right| < |b| + 3\varepsilon;$$

d'où

$$\left|\frac{f(x, y_1) - f(x, 0)}{x^2}\right| < \frac{N \cos \alpha}{1+\beta},$$

et

$$\left|\frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} \int_{x_1}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}} [f(x, y_1) - f(x, 0)]}{x^2} dx\right| < \frac{N \int_u^{u_1} e^{\frac{1}{u}} du}{u e^{\frac{1}{u}}} < \frac{N\left(u - \frac{u_1^2 e^{\frac{1}{u_1}}}{u e^{\frac{1}{u}}}\right)}{1 - 2u_1} < \frac{N u}{1 - 2u_1} < \frac{N u_1}{1 - 2u_1}.$$

Pour être assuré que l'expression considérée est en module inférieure à ε, il suffit d'admettre que u_1 ait été diminué au besoin, et rendu inférieur, en même temps qu'à $\frac{1}{5}$, à $\frac{\varepsilon}{N + 2\varepsilon}$.

D'autre part, sur le segment $x_0 x_1$ du chemin d'intégration, qui est situé dans le domaine D, la fonction $\frac{f(x, y_1) - f(x, 0)}{x^2}$ est en module inférieure à $\frac{k \cos \alpha \times (r + M)}{(1+\beta) \varrho_1^2}$, et par suite à $\frac{k \cos \alpha \times (r + M)}{(1+\beta) u_1^2 \cos^2 \alpha}$, puisque $\varrho_1 = u_1 \cos \vartheta_1$ est supérieur à $u_1 \cos \alpha$. On a par conséquent

$$\left|\frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{e^{\frac{1}{x}} [f(x, y_1) - f(x, 0)]}{x^2} dx\right| < \frac{k(r + M)}{u_1^2 \cos^2 \alpha} \times \frac{\int_{u_1}^{u_0} e^{\frac{1}{u}} du}{u e^{\frac{1}{u}}},$$

et a fortiori

$$\left|\frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{e^{\frac{1}{x}} [f(x, y_1) - f(x, 0)]}{x^2} dx\right| < \frac{k(r + M)}{u_1^2 \cos^2 \alpha} \times \frac{e^{\frac{1}{u_1}} (u_0 - u_1)}{u e^{\frac{1}{u}}} < \frac{k R' u_0}{\cos^2 \alpha} \times \frac{e^{\frac{1}{u_1}}}{u_1^2 u e^{\frac{1}{u}}}.$$

Donc la fonction $\frac{y_2 - y_1}{x}$ est en module inférieure à 2ε, et par suite la fonction $\frac{y_2}{x} + b$ à 3ε, dans le triangle D_2 formé par les côtés de l'angle A et la circonférence $u = u_2$, si le nombre u_2 est inférieur à u_1 et satisfait à la condition

$$\frac{kR'u_0}{\cos^2\alpha} \times \frac{e^{\frac{1}{u_1}}}{u_1^2 u_2 e^{\frac{1}{u_2}}} \leq \varepsilon,$$

car, u_1 étant inférieur à $\frac{1}{5}$, la fonction $u e^{\frac{1}{u}}$, qui a comme dérivée $e^{\frac{1}{u}}\left(1 - \frac{1}{u}\right)$ croît quand u décroît de u_1 à zéro.

Supposons u_2 assez petit pour satisfaire aux deux conditions précédentes, et le point x intérieur au triangle D_2: soit $x_2 = \varrho_2 e^{i\vartheta_2}$ le point du chemin d'intégration $x_0 x$ situé sur la circonférence $u = u_2$. Limitons de même la fonction $\frac{y_3 - y_1}{x}$. On a

$$\frac{y_3 - y_1}{x} = \frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} \int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}}[f(x, y_2) - f(x, 0)]}{x^2} dx,$$

et

$$\frac{y_3 - y_1}{x} = \frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} \int_{x_0}^{x_2} \frac{e^{\frac{1}{x}}[f(x, y_2) - f(x, 0)]}{x^2} dx + \frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} \int_{x_2}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}}[f(x, y_2) - f(x, 0)]}{x^2} dx.$$

Quand le point x est situé dans le triangle D_2, $\left|\frac{y_2}{x}\right|$ est inférieur à $|b| + 3\varepsilon$; d'où

$$\left|\frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} \int_{x_2}^{x} \frac{e^{\frac{1}{x}}[f(x, y_2) - f(x, 0)]}{x^2} dx\right| < \frac{N \int_{u}^{u_2} e^{\frac{1}{u}} du}{u e^{\frac{1}{u}}} < \frac{N\left(u - \frac{u_2^2 e^{\frac{1}{u_2}}}{e^{\frac{1}{u}}}\right)}{u(1 - 2u_2)} < \frac{Nu}{1 - 2u_2} < \frac{Nu_1}{1 - 2u_1} < \varepsilon.$$

D'autre part, sur le segment $x_0 x_2$, on a comme précédemment

$$\left|\frac{f(x, y_2) - f(x, 0)}{x^2}\right| < \frac{k \cos\alpha \times (r + M)(1 + k)}{(1 + \beta)\varrho_2^2} < \frac{k \cos\alpha \times (r + M)(1 + k)}{(1 + \beta) u_2^2 \cos^2\alpha},$$

d'où

$$\left|\frac{1}{xe^{\frac{1}{x}}}\int_{x_0}^{x_2} \frac{e^{\frac{1}{x}}[f(x,y_2)-f(x,0)]}{x^2}dx\right| < \frac{k(r+M)(1+k)}{u_2^2\cos^2\alpha}\times\frac{\int_{u_2}^{u_0} e^{\frac{1}{u}}du}{u\,e^{\frac{1}{u}}} < \frac{kR'u_0}{\cos^2\alpha}\times\frac{e^{\frac{1}{u_2}}}{u_2^2\,u\,e^{\frac{1}{u}}}.$$

En continuant de proche en proche, on démontre que, dans le triangle D_n formé, par les côtés de l'angle A et la circonférence $u=u_n$, on a

$$\left|\frac{y_n-y_1}{x}\right|<2\varepsilon, \text{ et par suite } \left|\frac{y_n}{x}+b\right|<3\varepsilon,$$

si l'on a déterminé une suite de nombres positifs $u_2, u_3, \ldots u_n$, inférieurs à u_1, décroissants et satisfaisant aux inégalités successives

$$\frac{kR'u_0}{\cos^2\alpha}\times\frac{e^{\frac{1}{u_1}}}{u_1^2\,u_2\,e^{\frac{1}{u_2}}}\leq\varepsilon,\quad \frac{kR'u_0}{\cos^2\alpha}\times\frac{e^{\frac{1}{u_2}}}{u_2^2\,u_3\,e^{\frac{1}{u_3}}}\leq\varepsilon,\ldots,\quad \frac{kR'u_0}{\cos^2\alpha}\times\frac{e^{\frac{1}{u_{n-1}}}}{u_{n-1}^2\,u_n\,e^{\frac{1}{u_n}}}\leq\varepsilon.$$

Il résulte que, quand la variable x tend vers l'origine dans l'angle A, le quotient $\frac{y_n}{x}$ tend vers $-b$, quel que soit n, et que la fonction y_n et par conséquent la fonction-limite $y(x)$ tendent vers zéro, puisque la suite de fonctions y_n est uniformément convergente dans le domaine D. Mais il ne résulte pas immédiatement que la fonction $\frac{y(x)}{x}$ tende vers $-b$, car la suite de fonctions $\frac{y_n}{x}$ n'est pas uniformément convergente dans le domaine D au voisinage de l'origine, et d'autre part il est visible que les nombres u_n tendent vers zéro quand n croît indéfiniment. Pour achever la démonstration, nous devons comparer la décroissance des nombres u_n et celle de la différence $\frac{y(x)-y_n}{x}$ quand la variable x tend vers l'origine dans l'angle A.

En un point x du domaine D, l'on a

$$|y_{n+1}-y_n|<k^n(r+M),$$

$$|y_{n+2}-y_{n+1}|<k^{n+1}(r+M),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|y_{n+p}-y_{n+p-1}|<k^{n+p-1}(r+M),$$

et par conséquent

$$|y_{n+p} - y_n| < k^n (r + M)(1 + k^2 + \cdots + k^{p-1}) < \frac{k^n (r + M)}{1 - k} = k^n R';$$

d'où, en faisant croître p indéfiniment,

$$|y(x) - y_n| \leq k^n R',$$

et

$$\left|\frac{y(x)}{x} + b\right| \leq \left|\frac{y(x) - y_n}{x}\right| + \left|\frac{y_n}{x} + b\right| \leq \frac{k^n R'}{|x|} + \left|\frac{y_n}{x} + b\right|.$$

Si le point x est situé dans le triangle D_n, défini par les conditions énoncées, et où l'on a par suite

$$\left|\frac{y_n}{x} + b\right| < 3\varepsilon,$$

et si le point x satisfait d'autre part à la condition

$$\frac{k^n R'}{\varrho} \leq \varepsilon, \text{ ou } \varrho \geq \frac{k^n R'}{\varepsilon},$$

on aura en ce point

$$\left|\frac{y(x)}{x} + b\right| < 4\varepsilon:$$

pour qu'il existe des points x satisfaisant aux deux conditions précédentes, il faut et il suffit que l'on ait

$$u_n > \frac{k^n R'}{\varepsilon}.$$

Or posons $u_2 = \frac{u_1}{1 + v_1}$: v_1 est positif puisque u_1, u_2 sont positifs et u_2 inférieur à u_1; il vient

$$\frac{k R' u_0}{\cos^2 \alpha} \times \frac{e^{\frac{1}{u_1}}}{u_1^2 u_2 e^{\frac{1}{u_2}}} = \frac{k R' u_0}{\cos^2 \alpha} \times \frac{1 + v_1}{u_1^3 e^{\frac{v_1}{u_1}}}.$$

Pour que le quotient précédent soit inférieur à ε, il suffit que l'expression que l'on obtient en remplaçant au dénominateur l'exponentielle par la somme des deux termes d'exposants 4 et 5 de son développement en série soit elle-même inférieure à ε:

$$\frac{kR'u_0}{\cos^2\alpha}\times\frac{24\,(1+v_1)\,u_1}{v_1^4\left(1+\dfrac{v_1}{5\,u_1}\right)}<\varepsilon;$$

ou, puisque u_1 est inférieur à $\frac{1}{5}$, il suffit que l'on ait

$$\frac{24\,k\,R'\,u_0}{\cos^2\alpha}\times\frac{u_1}{v_1^4}=\varepsilon,\ \text{ou}\ v_1=C\,u_1^{\frac{1}{4}},\ \text{et}\ u_2=\frac{u_1}{1+C\,u_1^{\frac{1}{4}}},$$

en posant

$$C=\left(\frac{24\,k\,R'\,u_0}{\varepsilon\cos^2\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Il suffira de même que l'on ait

$$u_3=\frac{u_2}{1+C\,u_2^{\frac{1}{4}}},\quad u_4=\frac{u_3}{1+C\,u_3^{\frac{1}{4}}},\ldots,\quad u_n=\frac{u_{n-1}}{1+C\,u_{n-1}^{\frac{1}{4}}}.$$

Si l'on fait croître n indéfiniment, les termes de la suite infinie obtenue $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots,$ sont positifs et décroissent; ils ont donc une limite positive ou nulle.

Cette limite ne peut être positive. En effet l'on déduit des équations précédentes

$$u_n=\frac{u_1}{\left(1+C\,u_1^{\frac{1}{4}}\right)\left(1+C\,u_2^{\frac{1}{4}}\right),\ldots,\left(1+C\,u_{n-1}^{\frac{1}{4}}\right)},$$

et par suite

$$u_n<\frac{u_1}{1+C\left(u_1^{\frac{1}{4}}+u_2^{\frac{1}{4}}+\cdots+u_{n-1}^{\frac{1}{4}}\right)}.$$

Si la limite des nombres de la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots,$ était positive, la somme qui figure en facteur de C au dénominateur de l'expression précédente, croîtrait indéfiniment avec n, et u_n devrait tendre vers zéro. Donc l'hypothèse considérée conduit à une contradiction. La limite des nombres u_n est zéro.

Il résulte que, quand n croît indéfiniment, le rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ tend vers 1; par conséquent le nombre u_n finit par être supérieur au nombre $\frac{k^n R'}{\varepsilon}$, qui est le terme de rang n d'une progression géométrique de raison inférieure à 1. Donc, si n est assez grand, il existe dans le triangle D_n des points où l'inégalité

$$\left|\frac{y(x)}{x} + b\right| < 4\varepsilon,$$

est vérifiée.

En outre, si n est assez grand, le nombre u_{n+1} est supérieur aussi au nombre $\frac{k^n R'}{\varepsilon \cos\alpha}$; de sorte que l'inégalité précédente est vérifiée dans toute la partie du triangle D_n extérieure au triangle D_{n+1}. De même le nombre u_{n+2} est supérieur au nombre $\frac{k^{n+1} R'}{\varepsilon \cos\alpha}$, et la même inégalité est vérifiée encore dans la partie du triangle D_{n+1} extérieure au triangle D_{n+2}. Et ainsi de suite: l'inégalité considérée est vérifiée dans tout le triangle D_n.

En définitive, si petit que soit le nombre positif ε donné à l'avance, on peut déterminer une circonférence $u = u_n$, tangente à l'origine à l'axe des quantités purement imaginaires telle que dans le triangle formé par cette circonférence et par les côtés de l'angle A, l'on ait

$$\left|\frac{y(x)}{x} + b\right| < 4\varepsilon.$$

Donc la fonction $\frac{y(x)}{x}$ tend vers $-b$, quand la variable x tend vers l'origine dans l'angle A.

4. Si l'on substitue dans l'équation (3) une série entière en x sans terme constant

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdot \tag{6}$$

et qu'on applique les règles ordinaires du calcul des séries convergentes, on trouve que l'équation (3) est vérifiée par une série unique de la forme (6): le coëfficient a_1 est égal au coëfficient que nous avons désigné précédemment par $-b$, et de proche en proche tous les coëfficients $a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ se déterminent successivement. Toutes les intégrales $y(x)$ que nous avons obtenues, et qui dépendent de la constante y_0, arbitraire pourvu qu'elle soit assez petite, admettent comme développement asymptotique, quand la variable x tend vers l'origine dans l'angle A, cette série de la forme (6) unique qui vérifie formellement l'équation (3).

En effet faisons dans l'équation (3) la transformation

$$y = a_1 x + zx, \qquad (a_1 = -b);$$

l'équation transformée en z a la même forme que l'équation (3). A l'une des intégrales $y(x)$ de l'équation (3), correspond une intégrale de cette seconde équation, $z(x)$, qui, d'après les résultats précédents, est holomorphe et tend vers zéro quand la variable x tend vers l'origine dans l'angle A. Donc, dans cet angle, pour des valeurs de x suffisamment petites, l'intégrale $z(x)$ peut être représentée comme limite d'une suite de fonctions analogue à la suite de fonctions y_n; par suite, quand la variable x tend vers l'origine dans l'angle A, le quotient $\frac{z(x)}{x}$ tend vers une limite. Cette limite est égale au coëfficient de x dans la série entière en x sans terme constant qui vérifie formellement l'équation différentielle en z, et par conséquent est égale aussi au coëfficient de x^2 dans la série de la forme (6) qui vérifie formellement l'équation en y. On obtient ainsi

$$\frac{z}{x} = a_2 + z_2,$$

et

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + z_2 x^2,$$

la fonction z_2 tendant vers zéro avec x. En continuant de proche en proche, on voit que les intégrales $y(x)$ se mettent sous la forme

$$y(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + z_n x^n,$$

la fonction z_n tendant vers zéro avec x dans l'angle A.

D'après l'équation différentielle (3), les dérivées $y'(x)$ ont nécessairement un développement asymptotique dans l'angle A puisque les fonctions $y(x)$ en ont un: ce développement ne peut être que le développement des fonctions $y(x)$ dérivé terme à terme.

5. On démontre par des calculs analogues que la suite des fonctions

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} y_1 &= e^{-\frac{1}{x}} \int_0^x \frac{e^{\frac{1}{x}} f(x, 0)}{x^2}\, dx, \\ y_2 &= e^{-\frac{1}{x}} \int_0^x \frac{e^{\frac{1}{x}} f(x, y_1)}{x^2}\, dx, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= e^{-\frac{1}{x}} \int_0^x \frac{e^{\frac{1}{x}} f(x, y_{n-1})}{x^2}\, dx, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

qui sont aussi des intégrales des équations linéaires (4), définit une intégrale $y(x)$ de l'équation (3) holomorphe et tendant vers zéro quand la variable x tend vers l'origine à gauche de l'axe des quantités purement imaginaires.[1] Cette intégrale $y(x)$ admet aussi comme développement asymptotique à gauche de l'axe des quantités purement imaginaires la série entière en x (6) qui vérifie formellement l'équation (3).

D'ailleurs l'équation (3) ne peut admettre plusieurs intégrales holomorphes et tendant vers zéro quand la variable x tend vers l'origine à gauche de l'axe des quantités purement imaginaires. Soient en effet $y(x)$, $z(x)$ deux telles intégrales, et y_0, z_0 les valeurs de ces intégrales, supposées différentes, au point x_0. Faisons varier x à partir du point x_0 à gauche de l'axe des quantités purement imaginaires, dans le domaine où $y(x)$ et $z(x)$ sont holomorphes; on a

$$x^2 y' = y + f(x, y),$$

$$x^2 z' = z + f(x, z),$$

d'où

$$x^2 (y' - z') = y - z + f(x, y) - f(x, z),$$

et

$$y - z = (y_0 - z_0)\, e^{\int_{x_0}^{x}\left[1 + \frac{f(x, y) - f(x, z)}{y - z}\right]\frac{dx}{x^2}}.$$

La différence $y - z$ tend vers zéro quand la variable x tend vers le point $x = 0$: nous allons montrer qu'au contraire l'exponentielle du second membre croît indéfiniment.

Le quotient $\dfrac{f(x, y) - f(x, z)}{y - z}$ peut être supposé aussi petit que l'on veut,

---

[1] L'intégrale $y(x)$ tend uniformément vers zéro, et dans le développement

$$y(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + z_n x^n,$$

la fonction z_n tend uniformément vers zéro, dans tout angle ayant son sommet à l'origine et dont les deux côtés sont à gauche de l'axe des quantités purement imaginaires. L'intégrale $y(x)$ tend vers zéro et le développement asymptotique est valable, à gauche de l'axe des quantités purement imaginaires, sur tout chemin aboutissant à l'origine ou admettant l'origine comme point-asymptote et non tangent à cet axe, ou même sur certains chemins tangents à cet axe, mais dont l'origine n'est pas un point ordinaire. Tel est le cas des fonctions $e^{\frac{1}{x}}$, $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$.

Certains des énoncés suivants peuvent être précisés d'une manière analogue.

puisque y et z tendent vers zéro avec x, et que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ est holomorphe et nulle pour $x = y = 0$. D'autre part, si l'on pose $x = \varrho e^{i\vartheta}$, d'où

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{\cos\vartheta\, d\varrho + \varrho \sin\vartheta\, d\vartheta + i(\varrho\cos\vartheta\, d\vartheta - \sin\vartheta\, d\varrho)}{\varrho^2},$$

on voit que la partie réelle de $\frac{dx}{x^2}$ a un signe constant, et que le quotient par cette partie réelle de la partie imaginaire

$$\frac{\varrho\frac{d\vartheta}{d\varrho} - \operatorname{tg}\vartheta}{1 + \varrho\frac{d\vartheta}{d\varrho}\operatorname{tg}\vartheta},$$

est borné, pourvu qu'on choisisse comme chemin d'intégration joignant le point x_0 au point x, un arc de spirale logarithmique admettant l'origine comme point-asymptote et symétrique par rapport à l'axe des quantités purement imaginaires de l'un des arcs définis précédemment.

Il résulte que sur un tel chemin d'intégration la partie réelle de l'exposant figurant dans l'expression de $y - z$ tend vers $+\infty$, comme la partie réelle de

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0},$$

quand la variable x tend vers l'origine à gauche de l'axe des quantités purement imaginaires. Donc l'hypothèse considérée conduit à une contradiction.

6. D'une façon générale considérons l'équation

$$x^n \frac{dy}{dx} - y = f(x, y), \tag{2}$$

où n désigne un nombre entier[1] supérieur à 1, et $f(x, y)$ une fonction des deux variables x, y holomorphe pour les valeurs $x = y = 0$, et dont le développement au voisinage de ce système de valeurs ne renferme ni terme constant ni terme du premier degré en y. Au voisinage du point $x = 0$, dans chacun des angles où $\Re(x^{n-1})$

[1] Si l'exposant n est non plus un nombre entier, mais un nombre réel supérieur à 1, ou même un nombre imaginaire dont la partie réelle est supérieure à 1, les résultats relatifs

est positif, les suites de fonctions analogues à la suite (5) définissent une infinité d'intégrales dépendant d'une constante arbitraire, holomorphes et tendant vers zéro quand la variable x tend vers le point $x=0$ dans l'angle considéré; dans chacun des angles où $\Re(x^{n-1})$ est négatif, les suites de fonctions analogues à la suite (7) définissent l'intégrale unique, holomorphe et tendant vers zéro quand la variable x tend vers le point $x=0$ dans l'angle considéré. Toutes les intégrales obtenues admettent comme développement asymptotique dans l'angle correspondant la série entière en x unique

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots. \tag{6}$$

qui vérifie formellement l'équation (2).

La série de la forme (6) qui vérifie formellement l'équation (2) peut être convergente pour toute valeur de x ou pour les valeurs de x suffisamment petites, ou n'être convergente pour aucune autre valeur de x que $x=0$, c'est-à-dire être une série divergente. On se trouve dans le premier cas quand la série (6) se réduit à $y=0$: il faut et il suffit pour cela que dans l'équation (2) la fonction $f(x, 0)$ soit identiquement nulle; d'ailleurs, quand la série (6) est convergente, et a pour somme $S(x)$, on peut toujours par la transformation $[y, S(x)+y]$, être ramené au cas où cette série se réduit à $y=0$. Il y a des exemples classiques du second cas: ainsi l'équation

$$x^2 \frac{dy}{dx} - y = bx$$

est vérifiée formellement par la série divergente

$$y = -b[x + x^2 + 1.2x^3 + \cdots + 1.2\ldots(n-1)x^n + \cdots].$$

On a dit que le second des deux cas précédents est plus fréquent que le premier, et que la série entière en x sans terme constant qui vérifie formellement l'équation (2) est en général divergente. Comme il est arrivé dans des circonstances analogues, il faut préciser le procédé que l'on adopte pour dénombrer les cas considérés.

à l'existence des intégrales sont encore valables. Dans le cas où l'exposant n est de la forme $\frac{p}{q}$, p et q désignant deux entiers supérieurs à 1 $(p>q)$, ces intégrales admettent comme développement asymptotique une série entière en $x^{\frac{1}{q}}$: ce cas se ramène au cas où l'exposant n est entier par le changement de variable $\left(x^{\frac{1}{q}}, x\right)$

Ainsi Briot et Bouquet ont considéré l'équation[1]

$$x^2 \frac{dy}{dx} - a y = x f(x), \tag{8}$$

où a désigne une constante différente de zéro, et $f(x)$ une fonction de x holomorphe pour $x = 0$. Et ils ont démontré que la série entière qui vérifie formellement cette équation est convergente ou divergente suivant que la quantité a est ou n'est pas l'affixe d'un zéro de la fonction entière que M. Borel a appelée depuis fonction entière associée[2] à la série entière $f(x)$. Donc le cas où l'équation (8) est vérifiée par une série entière convergente apparaît comme exceptionnel.

Mais à un autre point de vue les équations (2) vérifiées par une série de la forme (6) convergente sont au moins aussi nombreuses que celles qui sont vérifiées par une série de la forme (6) divergente: car à toute équation

$$x^n \frac{dy}{dx} - y = f(x, y)$$

appartenant à la seconde catégorie on peut faire correspondre l'équation

$$x^n \frac{dy}{dx} - y = y f(x, y),$$

[1] Journal de l'Ecole Polytechnique, t. XXI, cah. 36, p. 182.

[2] La fonction entière associée à la série entière

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \ldots,$$

dont le rayon de convergence n'est pas nul, est la fonction entière définie par la série

$$b_0 + \frac{b_1 x}{1} + \frac{b_2 x^2}{1 . 2} + \cdots + \frac{b_n x^n}{n!} + \cdots$$

De même la série entière en x qui vérifie l'équation

$$x^3 \frac{dy}{dx} - a y = x(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots),$$

est convergente ou divergente suivant que la quantité a est ou n'est pas l'affixe d'un zéro de chacune des deux fonctions entières

$$b_0 + \frac{b_2 x}{1} + \frac{b_4 x^2}{1 . 3} + \frac{b_6 x^3}{1 . 3 . 5} + \cdots,$$

$$b_1 + \frac{b_3 x}{2} + \frac{b_5 x^2}{2 . 4} + \frac{b_7 x^3}{2 . 4 . 6} + \cdots$$

Et ainsi de suite.

qui est vérifiée par la série convergente $y = 0$, et qui appartient à la première catégorie.

Quand la série entière en x sans terme constant qui vérifie formellement l'équation (2) est convergente, la somme de cette série $y = S(x)$ représente une intégrale holomorphe et nulle au point $x = 0$. C'est nécessairement cette intégrale que définissent les suites de fonctions (7) dans les angles où $\Re(x^{n-1})$ est négatif: le résultat obtenu se réduit dans ce cas à une représentation dans les angles où $\Re(x^{n-1})$ est négatif de l'intégrale holomorphe et nulle à l'origine. Au contraire, parmi l'infinité d'intégrales obtenues dans chacun des angles où $\Re(x^{n-1})$ est positif, l'intég ale holomorphe et nulle à l'origine $y = S(x)$ correspond à la valeur particulière $S(x_0)$ de la constante arbitraire y_0: la différence $y(x) - S(x)$ de l'intégrale $S(x)$ et d'une autre intégrale $y(x)$ correspondant à une valeur différente de la constante y_0 tend vers zéro avec x, et a un développement asymptotique suivant les puissances entières de x identiquement nul; ce qui correspond au résultat énoncé par M. Boutroux: la croissance de la fonction $y(x) - S(x)$ est du type exponentiel.[1]

7. Relativement à l'allure des intégrales de l'équation

$$x^n \frac{dy}{dx} - y = f(x, y), \tag{2}$$

dans le plan de la variable complexe au voisinage du point $x = 0$, on peut ajouter les indications suivantes. Les intégrales de l'équation (2) qui tendent vers zéro dans les angles où $\Re(x^{n-1})$ est positif, tendent vers d'autres valeurs-limites dans les angles où $\Re(x^{n-1})$ est négatif, et sont indéterminées dans les directions où $\Re(x^{n-1})$ est nul: tel est le cas dans l'équation simple

$$x^2 \frac{dy}{dx} = y(1 - y), \text{ d'où } \frac{y}{y-1} = Ce^{\frac{1}{x}}.$$

Dans le cas général où le second membre de l'équation (2) n'est pas un polynôme du second degré en y, M. Boutroux a montré que les points critiques des intégrales s'accumulent au voisinage du point $x = 0$ dans les directions où $\Re(x^{n-1})$ est nul. Dans un angle où $\Re(x^{n-1})$ est positif, soit $y(x)$ une intégrale holomorphe au voisinage du sommet $x = 0$ dans un certain domaine D, et qui tend vers une valeur-limite quand la variable x tend vers le point $x = 0$ dans

[1] Journal de Liouville. 6e série, t. VI, p. 185—186.

le domaine D. Suivons cette intégrale le long d'un chemin issu du domaine D, qui tourne autour d'un point critique situé au voisinage d'un côté de l'angle considéré et qui revient au voisinage du sommet. L'intégrale $y(x)$, ainsi prolongée analytiquement, est holomorphe dans le même angle au voisinage du sommet $x = 0$, dans un nouveau domaine D', et elle tend, quand la variable x tend vers le point $x = 0$ dans le domaine D', vers une nouvelle valeur-limite. Cette nouvelle valeur-limite est en général différente de la valeur-limite primitive. Soit par exemple l'équation

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{2y}, \quad \text{d'où} \quad y^2 - 1 = C e^{-\frac{1}{x}};$$

à droite de l'axe des quantités purement imaginaires les intégrales $y(x)$ ont deux valeurs-limites $+1$ et -1, qui se permutent autour des points critiques définis par l'équation $e^{\frac{1}{x}} = -C$.

8. Enfin, comme l'a indiqué M. Bendixson, la méthode des approximations successives, dirigée de même, peut être appliquée à l'équation

$$(9) \qquad x \frac{dy}{dx} - ay = f(x, y),$$

où a désigne une constante différente de zéro, et $f(x, y)$ une fonction des deux variables x, y holomorphe pour le système de valeurs $x = y = 0$, et dont le développement au voisinage de ce système de valeurs ne renferme ni terme constant ni terme du premier degré en y. On retrouve ainsi les résultats dont la démonstration classique est fondée sur l'emploi des fonctions majorantes. Il importe toutefois de développer en quelques mots l'application à l'équation (9) de la méthode des approximations successives:[1] il sera évident ensuite que la même méthode est applicable aux équations et aux systèmes différentiels d'ordre supérieur au premier qui généralisent à la fois l'équation (2) pour $n > 1$ et l'équation (9).

Dans le plan de la variable x, au voisinage du point $x = 0$, nous considérons des domaines A où x^a tend uniformément vers zéro, et des domaines A' où x^a

---

[1] M. Goursat a appliqué à l'équation (9) un procédé analogue (Cours d'analyse, 2ème éd., t. II, p. 504).

M. Boutroux a retrouvé les résultats classiques relatifs à l'équation (9) par une méthode voisine, en introduisant un paramètre dans cette équation, et en développant les intégrales suivant les puissances de ce paramètre; M. Boutroux a appliqué cette même méthode à l'équation (2) (Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre, p. 114, 125; Journal de Liouville, 6e série, t. VI, p. 194).

tend uniformément vers l'infini. Mais nous devons ajouter ici une condition supplémentaire à la définition des domaines A et A': la condition analogue relative à l'équation (3) se trouvait remplie d'elle-même par le choix d'un angle à côtés rectilignes comme domaine A. Il faut que deux points quelconques d'un domaine A ou A' puissent être joints par un arc situé tout entier dans le domaine d'une spirale logarithmique admettant le point $x = 0$ comme point-asymptote, et dans laquelle l'angle de la tangente avec le rayon vecteur soit compris en valeur algébrique entre deux angles γ_1 et γ_2, fixes et tels que sur les spirales logarithmiques correspondantes x^a tende vers zéro dans un domaine A, et vers l'infini dans un domaine A'.

Considérons au voisinage du point $x = 0$ un domaine A et la suite de fonctions

$$y_1 = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^a + x^a \int_{x_0}^{x} \frac{f(x,\, 0)}{x^{a+1}} dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^a + x^a \int_{x_0}^{x} \frac{f(x,\, y_{n-1})}{x^{a+1}} dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si le point x_0 est dans le domaine A assez voisin du point $x = 0$, et si la valeur y_0 est assez petite, les fonctions $y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots$ sont holomorphes et forment une suite uniformément convergente dans un domaine D limité d'une part au voisinage du point $x = 0$ par la frontière du domaine A, et d'autre part par les deux arcs de spirale logarithmique admettant le point $x = 0$ comme point-asymptote, issus du point x_0 et dans lesquels les angles des tangentes avec le rayon vecteur sont respectivement γ_1 et γ_2. Les calculs sont entièrement analogues aux calculs relatifs à l'équation (3), si l'on prend comme nouvelle variable $u = -\frac{1}{\log |x^a|}$. Il résulte que la suite de fonctions y_n définit une intégrale $y(x)$ de l'équation (9) holomorphe dans le domaine D; et l'on démontre encore que cette intégrale $y(x)$ tend vers zéro quand la variable x tend vers le point $x = 0$ dans le domaine D et par conséquent dans le domaine A. On obtient ainsi une infinité d'intégrales $y(x)$ dépendant de la constante y_0, arbitraire pourvu qu'elle soit assez petite.

Si le coëfficient a n'est pas un nombre entier positif, l'équation (9) admet une intégrale holomorphe et nulle pour $x = 0$, $y = S(x)$, et l'on est ramené par la transformation $[y, S(x) + y]$ au cas où cette intégrale est $y = 0$. Dans ce cas $f(x, 0)$ est identiquement nul, et la fonction y_1 se réduit à $y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^a$; il est visible que successivement les fonctions $y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ sont des séries entières par rapport aux quatre variables $x, y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^a, x_0, y_0$ convergentes si ces quatre variables sont assez petites, et d'ailleurs identiquement nulles pour $y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^a = 0$. Donc la fonction-limite $y(x)$ est une fonction holomorphe des deux variables x et $y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^a$, considérées comme indépendantes, holomorphe pour $x = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^a = 0$, et nulle pour $y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^a = 0$. Si l'on revient de l'équation transformée à l'équation primitive (9), on obtient pour les intégrales $y(x)$ de cette équation les développements classiques en série double par rapport aux deux variables x et Cx^a, C désignant une constante arbitraire.

Remarquons d'ailleurs que, quel que soit a, toute série entière en x sans terme constant qui vérifie formellement l'équation (9) est convergente: les intégrales $y(x)$ de cette équation nulles et non holomorphes pour $x = 0$ ne peuvent sur aucun chemin tendant vers le point $x = 0$ admettre comme développement asymptotique une série entière en x divergente.

Si a est un entier positif, des logarithmes peuvent s'introduire dans les seconds termes des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$; ces fonctions, et l'intégrale $y(x)$, sont de même des fonctions des trois variables $x, Cx^a, x^a \log x$, considérées comme indépendantes, holomorphes et nulles pour $x = Cx^a = x^a \log x = 0$. Pour qu'une intégrale $y(x)$ de l'équation (9) soit une fonction holomorphe et nulle pour $x = 0$, il est nécessaire que les coëfficients de la fonction $f(x, y)$ vérifient une certaine égalité algébrique; et réciproquement, si cette égalité est vérifiée, l'équation (9) admet une infinité d'intégrales holomorphes et nulles pour $x = 0$. Pour $a = 1$, la condition nécessaire est que le coëfficient du terme du premier degré en x dans la fonction $f(x, y)$ soit nul: alors aucune des fonctions $y_1, y_2, \ldots$ $y_n, \ldots$, ne renferme de logarithme. Mais pour $a \geq 2$, il se peut que ces fonctions contiennent des logarithmes, et que néanmoins la fonction-limite soit holomorphe en x pour $x = 0$.

Considérons maintenant au voisinage du point $x = 0$ un domaine A' et la suite de fonctions

$$y_1 = x^a \int_0^x \frac{f(x, 0)}{x^{a+1}} dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = x^a \int_0^x \frac{f(x, y_{n-1})}{x^{a+1}} dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Cette suite de fonctions définit une intégrale de l'équation (9) holomorphe et tendant vers zéro quand la variable x tend vers le point $x = 0$ dans le domaine A'. Mais cette intégrale n'est autre que l'intégrale holomorphe et nulle pour $x = 0$, qui existe car le coëfficient a ne peut être positif. En effet, comme nous l'avons fait dans le cas de l'équation (3), on démontre que l'équation (9) ne peut admettre deux intégrales holomorphes et tendant vers zéro quand la variable x tend vers le point $x = 0$ dans un domaine A'.

Briot et Bouquet ont obtenu une proposition[1] analogue: si la partie réelle du coëfficient a est négative ou nulle, l'équation (9) n'admet pas d'autre intégrale tendant vers zéro que l'intégrale holomorphe et nulle pour $x = 0$, sur un chemin dont la longueur et l'argument restent finis. Le résultat que nous venons d'énoncer est plus général. D'ailleurs la proposition de Briot et Bouquet n'est pas susceptible d'une extension indéfinie. M. Dulac a formé l'équation différentielle[2]

$$x \frac{dy}{dx} + y = -xy^2,$$

dont l'intégrale générale $y(x)$ est définie par l'équation

$$1 + xy \log x = Cxy:$$

quelle que soit la constante C, l'intégrale $y(x)$ tend vers zéro quand la variable x tend vers le point $x = 0$ dans un domaine où $x \log x$ tend vers l'infini. Sur un chemin situé dans un tel domaine, il y a nécessairement des points où l'angle de la tangente et du rayon vecteur est arbitrairement voisin de $\frac{\pi}{2}$: en quoi le domaine considéré ne satisfait pas à la restriction imposée aux domaines A'.

[1] Journal de l'Ecole Polytechnique, t. XXI, 36e cahier, p. 175.
[2] Journal de l'Ecole Polytechnique, 2ème série, 9e cahier, p. 49.

9. Les divers résultats précédents s'étendent aux équations et aux systèmes différentiels d'ordre quelconque qui généralisent l'équation (1). Considérons par exemple l'équation du second ordre

$$x^{m+n}\frac{d^2y}{dx^2} - a\,x^m\frac{dy}{dx} + y = f\left(x,\, y,\, x^k\frac{dy}{dx}\right), \tag{10}$$

où m et n désignent deux entiers positifs, k le plus petit de ces deux entiers, a une constante, et $f\left(x, y, x^k\frac{dy}{dx}\right)$ une fonction des trois variables $x, y, x^k\frac{dy}{dx}$ holomorphe pour les valeurs $x = y = x^k\frac{dy}{dx} = 0$, et dont le développement au voisinage de ce système de valeurs ne renferme ni terme constant ni termes du premier degré en y et $x^k\frac{dy}{dx}$.

Si l'on a $n > m > 1$, on peut transformer l'équation (10) de façon que l'équation qu'on obtient en égalant à zéro le premier membre de l'équation transformée ait deux intégrales particulières de la forme $e^{\frac{r}{x^{m-1}}}$, $e^{\frac{s}{x^{n-1}}}$, r et s désignant deux constantes, sans que le second membre cesse de satisfaire aux conditions énoncées. On peut alors appliquer à l'équation transformée la même méthode d'approximations successives que M. Bendixson a appliquée à l'équation (2); les équations différentielles successives s'intègrent de même par la méthode de la variation des constantes, et les expressions obtenues se limitent de même dans des hypothèses analogues. Au voisinage du point $x = 0$, dans chacun des angles où $\Re\left(\frac{r}{x^{m-1}}\right)$ et $\Re\left(\frac{s}{x^{n-1}}\right)$ sont négatifs, on obtient des intégrales de l'équation (10) holomorphes, tendant vers zéro quand la variable x tend vers le point $x = 0$, et dépendant de deux constantes arbitraires. Dans chacun des angles où ces deux parties réelles sont de signes contraires, on obtient des intégrales dépendant d'une seule constante. Enfin, dans chacun des angles où ces deux parties réelles sont positives, on obtient une seule intégrale.

Si l'on a $m \geq n > 1$, ou $m > 1$, $n = 1$, ou encore $m > 2$, $n = 0$, on peut écrire l'équation (10) sous la forme

$$x^{2p}\frac{d^2y}{dx^2} - a\,x^p\frac{dy}{dx} + y = f\left(x,\, y,\, x^p\frac{dy}{dx}\right), \tag{11}$$

p désignant un nombre plus grand que 1, qu'on peut supposer entier: s'il ne l'est pas, il le devient par le changement de variable[1] (x, x^2). On peut transformer l'équation (11) de façon que l'équation qu'on obtient en égalant à zéro le premier membre de l'équation transformée ait deux intégrales particulières de la forme $e^{\frac{r}{x^{p-1}}}$, $e^{\frac{s}{x^{p-1}}}$, ou de la forme $e^{\frac{r}{x^{p-1}}}$, $\frac{e^{\frac{r}{x^{p-1}}}}{x^{p-1}}$, r et s désignant des constantes. Dans le premier cas, les conclusions sont les mêmes que précédemment. Dans le second cas, l'on obtient dans les angles où $\Re\left(\frac{r}{x^{p-1}}\right)$ est négatif des intégrales dépendant de deux constantes, et dans les autres une seule intégrale.

D'ailleurs les équations (10) et (11) n'admettent dans chacun des angles considérés d'autre intégrale holomorphe et tendant vers zéro que celles qui sont ainsi obtenues. Et toutes ces intégrales admettent comme développement asymptotique dans l'angle correspondant la série entière en x sans terme constant

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

qui vérifie formellement l'équation (10) ou l'équation (11), et qui peut être convergente ou divergente.

Si l'on a dans l'équation (10) $m = 1$, $n > 1$, on peut transformer cette équation de façon que l'équation qu'on obtient en égalant à zéro le premier membre de l'équation transformée ait deux intégrales particulières de la forme $e^{\frac{r}{x^{n-1}}}$, $x^{\frac{1}{a}}$, r désignant une constante. Au voisinage du point $x = 0$, dans les angles où $\Re\left(\frac{r}{x^{n-1}}\right)$ est négatif, on obtient des intégrales dépendant de deux constantes si $\Re(a)$ est positif, et d'une constante si $\Re(a)$ est négatif. Dans les angles où $\Re\left(\frac{r}{x^{n-1}}\right)$ est positif, on obtient des intégrales dépendant d'une constante si $\Re(a)$ est positif, et une seule intégrale si $\Re(a)$ est négatif. Dans chacun des angles considérés, l'équation (10) n'admet pas d'autre intégrale holomorphe et tendant vers zéro que celles qui sont ainsi obtenues. D'ailleurs, pourvu que le coëfficient a ne soit pas l'inverse d'un nombre entier positif, l'équation (10) est vérifiée par une série entière en x sans terme constant, unique et qui peut être convergente ou divergente. Cette série entière est le développement asymptotique, parmi les intégrales obtenues, d'intégrales dépendant d'une constante dans les

---

[1] Cf. supra, p. 47, note 1.

angles où $\Re\left(\frac{r}{x^{n-1}}\right)$ est négatif, et d'une seule intégrale dans les angles où $\Re\left(\frac{r}{x^{n-1}}\right)$ est positif.[1]

Soit enfin l'équation

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - a\,x\frac{dy}{dx} + b\,y = f\left(x,\, y,\, x\frac{dy}{dx}\right), \tag{12}$$

---

[1] Une méthode d'approximations successives analogue à celle que nous indiquons a été appliquée par M. Picard (Traité d'analyse, 2ème éd., t. III, p. 413) à l'équation linéaire du second ordre

$$y'' + \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots\right)y' + \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots\right)y = 0, \tag{a}$$

où les deux expressions entre parenthèses sont des fonctions de x holomorphes pour $x = \infty$, à coëfficients réels. Dans le cas où l'équation en λ $\lambda^2 + a_0\lambda + b_0 = 0$ a ses racines réelles et distinctes, M. Picard a obtenu, quand la variable x croît indéfiniment sur la partie positive de l'axe réel, une intégrale $y(x)$ de l'équation (a), dépendant d'une constante, c_0, et admettant un développement asymptotique de la forme

$$y = e^{\lambda x}x^{\mu}\left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \cdots\right),$$

où λ désigne la plus petite racine de l'équation $\lambda^2 + a_0\lambda + b_0 = 0$, et μ et les coëfficients c_i des constantes. Par les transformations $\left[y,\, e^{\lambda x}x^{\mu}\left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{y}{x}\right)\right]$ et $\left(x,\, \frac{c}{x}\right)$, c désignant une constante positive, l'équation (a) devient

$$x^2y'' + x[1 + f(x)]y' + [1 + \varphi(x)]y = \psi(x), \tag{β}$$

où $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ désignent des fonctions de x holomorphes et nulles pour $x = 0$: l'équation (β) est de la forme considérée dans le texte avec $n = 2$, $r = +1$, $a = -1$. L'intégrale de l'équation (a) et le développement asymptotique obtenus par M. Picard correspondent à l'intégrale unique de l'équation (β) et au développement asymptotique que nous obtenons au voisinage du point $x = 0$ sur la partie positive de l'axe réel $\left[\Re\left(\frac{r}{x^{n-1}}\right)\right.$ étant positif et $\left.\Re(a) \text{ négatif}\right]$. D'ailleurs le procédé d'intégration par parties par lequel M. Picard met en évidence le développement asymptotique de l'intégrale $y(x)$ pourrait être adapté à l'équation (9) et aux équations qui la généralisent, même dans des angles, pour les valeurs complexes des variables.

M. Picard a considéré aussi le cas où l'équation $\lambda^2 + a_0\lambda + b_0 = 0$ a ses racines imaginaires (loc. cit., p. 418). A l'axe réel correspond alors dans la transformation l'axe des quantités purement imaginaires: de sorte que le résultat obtenu par M. Picard est relatif dans l'équation (β) à une direction sur laquelle $\Re\left(\frac{r}{x^{n-1}}\right)$ est nul. Nous avons écarté ces directions de notre discussion.

Enfin M. Cotton a appliqué la même méthode d'approximations successives à l'étude sur l'axe réel des intégrales de systèmes différentiels d'ordre quelconque auxquels peuvent se ramener l'équation (9) et les équations que nous considérons pour généraliser l'équation (9) (Annales de l'Ecole Normale, 1911, p. 473).

où b désigne une constante différente de zéro. L'équation linéaire qu'on obtient en égalant à zéro le premier membre de l'équation (12) admet deux intégrales particulières de la forme x^r, x^s, ou x^r, $x^r \log x$, r et s désignant des constantes différentes de zéro. Nous devons imposer aux domaines que nous considérons dans le plan de la variable x au voisinage du point $x = 0$ une restriction semblable à celle que nous avons imposée dans le cas de d'équation (9) aux domaines A et A', et double s'il y a deux exposants r et s. Alors, dans les domaines où x^r et x^s, ou x^r, tendent vers zéro, on obtient des intégrales de l'équation (12) holomorphes et tendant vers zéro, et dépendant de deux constantes; dans le premier cas, et pourvu qu'aucun des exposants r et s ne soit un entier positif, les intégrales obtenues sont des fonctions des trois variables x, $C_1 x^r$, $C_2 x^s$, C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires, holomorphes et nulles pour $x = C_1 x^r = C_2 x^s = 0$: et les développements relatifs aux autres cas peuvent être obtenus par dégénérescence du développement précédent. Dans les domaines où x^r tend vers zéro et x^s vers l'infini, on obtient des intégrales dépendant d'une constante, et qui sont des fonctions des deux variables x et Cx^r holomorphes et nulles pour $x = Cx^r = 0$, pourvu que r ne soit pas un entier positif. Enfin, dans les domaines où x^r et x^s, ou x^r, tendent vers l'infini, on obtient une seule intégrale, l'intégrale de l'équation (12) holomorphe et nulle pour $x = 0$.

CHAPITRE II.

10. Nous démontrerons d'abord le théorème suivant.

Théorème. *Soit l'équation différentielle*

$$\frac{y''}{y'^2} = \frac{1 + \varepsilon(y)}{y^n}, \tag{13}$$

où n désigne un nombre supérieur à 1, et $\varepsilon(y)$ une fonction de y holomorphe et tendant vers zéro quand la variable y tend vers le point $y = 0$ de son plan dans un angle A ayant son sommet en ce point; l'intégrale générale $y(x)$ n'est pas uniforme.

M. Painlevé a démontré le théorème précédent dans le cas où la fonction $\varepsilon(y)$ est holomorphe et nulle au point $y = 0$. Mais nous aurons à appliquer ce théorème dans des cas plus généraux auxquels ne s'étend pas la démonstration[1] de M. Painlevé: par exemple quand la fonction $\varepsilon(y)$ n'est pas holomorphe

[1] Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XXVIII, p. 214.

au point $y=0$, mais admet dans l'angle A une série entière en y comme développement asymptotique, ou quand la fonction $\varepsilon(y)$ est de la forme $y\log y$.

Nous supposerons pour simplifier les calculs l'exposant n égal à 2.

L'équation (13) ne change pas par la transformation $(x, \alpha x+\beta)$, quelles que soient les constantes α et β, et s'intègre par deux quadratures: on a successivement

$$\frac{dx}{dy}=Ce^{-\int\limits_{y_0}^{y}\frac{1+\varepsilon(y)}{y^2}dy}, \quad x-x_0=C\int\limits_{y_0}^{y}dy\, e^{-\int\limits_{y_0}^{y}\frac{1+\varepsilon(y)}{y^2}dy},$$

y_0, C et x_0 désignant trois constantes. La fonction $\varepsilon(y)$ est holomorphe dans l'angle A au voisinage du point $y=0$, dans un domaine que nous désignerons par domaine D; soit y_0 un point du domaine D. Quand y varie à partir du point y_0 dans le domaine D, les fonctions $\dfrac{dx}{dy}$ et $x(y)$ définies par les expressions précédentes sont holomorphes, et la fonction $\dfrac{dx}{dy}$ est différente de zéro. Nous allons montrer qu'on peut déterminer dans le domaine D un chemin ouvert auquel correspond dans le plan de la variable x un chemin fermé.

En premier lieu posons

$$\frac{1}{y}=\xi+i\eta,$$

ξ et η désignant des quantités réelles, et faisons varier y à partir du point y_0 sur la circonférence $\xi=\xi_0$, tangente à l'origine à l'axe des quantités purement imaginaires (nous supposons que le point y_0 n'est pas situé sur cet axe). On a sur cette circonférence

$$-\frac{dy}{y^2}=i\,d\eta,$$

d'où

$$\frac{dx}{dy}=Ce^{i\int\limits_{\eta_0}^{\eta}(1+\varepsilon)d\eta}=Ce^{i(\eta-\eta_0)+i\int\limits_{\eta_0}^{\eta}\varepsilon\, d\eta},$$

et

$$x-x_0=-Ci\int\limits_{\eta_0}^{\eta}y^2e^{i(\eta-\eta_0)+i\int\limits_{\eta_0}^{\eta}\varepsilon\, d\eta}\,d\eta.$$

Or, quand η varie à partir de η_0 d'une quantité finie, soit de η_0 à $\eta_0 + 2\pi + \frac{\pi}{2}$, le quotient

$$\frac{y}{y_0} = \frac{\xi_0 + i\eta_0}{\xi_0 + i\eta},$$

est arbitrairement voisin de 1, et le point y ne sort ni de l'angle A ni du domaine D, si le point y_0 est dans l'angle A assez voisin de l'origine; l'intégrale $\int_{\eta_0}^{\eta} \varepsilon d\eta$ est arbitrairement petite, et l'on a

$$x - x_0 = -Ciy_0^2 \int_{\eta_0}^{\eta} e^{i(\eta-\eta_0)}(1+\varepsilon')d\eta,$$

ε' désignant une fonction de η holomorphe et arbitrairement petite. Si la fonction ε' était identiquement nulle, l'expression précédente serait

$$x - x_0 = -Cy_0^2[e^{i(\eta-\eta_0)} - 1]:$$

quand la variable η croît de η_0 à $\eta_0 + 2\pi$, le point x décrirait la circonférence de centre $x_0 + Cy_0^2$ et de rayon $|Cy_0^2|$, partant du point x_0 et revenant en ce point. ε' étant arbitrairement petit, la courbe décrite par le point x, issue du point x_0, diffère aussi peu que l'on veut de la circonférence précédente; le point correspondant à la valeur $\eta_0 + 2\pi$ de la variable est aussi voisin que l'on veut du point x_0, et la courbe décrite par le point x continue à être voisine de la circonférence précédente quand la variable η croît au-delà de $\eta_0 + 2\pi$.

Posons en second lieu

$$\frac{1}{y} = \varrho e^{i\vartheta},$$

ϱ et ϑ désignant des quantités réelles, et faisons varier y à partir du point y_0 sur le rayon vecteur $\vartheta = \vartheta_0$. On a sur ce rayon vecteur

$$-\frac{dy}{y^2} = d\varrho\, e^{i\vartheta_0},$$

d'où

$$\frac{dx}{dy} = Ce^{e^{i\vartheta_0}\int_{\varrho_0}^{\varrho}(1+\varepsilon)d\varrho} = Ce^{e^{i\vartheta_0}(\varrho-\varrho_0)+e^{i\vartheta_0}\int_{\varrho_0}^{\varrho}\varepsilon d\varrho},$$

et

$$x - x_0 = -C e^{i\vartheta_0} \int_{\varrho_0}^{\varrho} y^2 e^{e^{i\vartheta_0}(\varrho-\varrho_0)+e^{i\vartheta_0}\int_{\varrho_0}^{\varrho}\varepsilon\, d\varrho} d\varrho.$$

Or, si ϱ_0 est assez grand, quand ϱ varie à partir de ϱ_0 d'une quantité finie, le quotient $\frac{y}{y_0} = \frac{\varrho_0}{\varrho}$ est arbitrairement voisin de 1, le point y ne sort ni de l'angle A ni du domaine D, et l'intégrale $\int_{\varrho_0}^{\varrho} \varepsilon d\varrho$ est arbitrairement petite. On a donc

$$x - x_0 = -C e^{i\vartheta_0} y_0^2 \int_{\varrho_0}^{\varrho} e^{e^{i\vartheta_0}(\varrho-\varrho_0)} (1 + \varepsilon'') d\varrho,$$

ε'' désignant une fonction de ϱ holomorphe et arbitrairement petite. Si la fonction ε'' était identiquement nulle, l'expression précédente serait

$$x - x_0 = -C y_0^2 \left[e^{e^{i\vartheta_0}(\varrho-\varrho_0)} - 1 \right],$$

le point x décrirait dans son plan la spirale logarithmique admettant le point $x_0 + C y_0^2$ comme point-asymptote, passant au point x_0, et dans laquelle l'angle de la tangente et du rayon vecteur est égal à ϑ_0. ε'' étant arbitrairement petit, la courbe décrite par le point x, issue du point x_0, diffère aussi peu qu'on veut de la spirale logarithmique précédente. D'ailleurs le rapport des variations de ϱ et de x, $\frac{x - x_0}{\varrho - \varrho_0}$, est de l'ordre de grandeur de $C y_0^2$.

Il résulte que, si l'on fait varier ϱ de part et d'autre de ϱ_0 d'une quantité finie, l'arc de courbe décrit par le point x coupe nécessairement l'arc de courbe correspondant à la circonférence $\xi = \xi_0$ en un point x_1 correspondant à une valeur de η voisine de $\eta_0 + 2\pi$, et situé au voisinage du point x_0. On obtient ainsi dans le plan de la variable x un chemin fermé. Inversement, quand la variable x décrit de x_0 en x_1 l'un puis l'autre des deux arcs de ce chemin fermé, la fonction $y(x)$ est holomorphe, puisque $x(y)$ est holomorphe et $\frac{dx}{dy}$ différent de zéro; en outre la fonction $y(x)$ part de la même valeur initiale y_0, mais acquiert au point x_1 des valeurs finales différentes, puisque le second point d'intersection de la circonférence $\xi = \xi_0$ et du rayon vecteur $\vartheta = \vartheta_0$ est le point $y = 0$. Donc l'intégrale générale $y(x)$ de l'équation (13) n'est pas une fonction uniforme.

Le théorème est encore valable si dans l'hypothèse de l'énoncé l'angle A est remplacé par un domaine aboutissant au point $y = 0$ et dans lequel on peut inscrire à la distance δ du point $y = 0$ un cercle de rayon infiniment petit par rapport à δ d'ordre inférieur à n; ce domaine peut s'enrouler autour du point $y = 0$, ou encore ne satisfaire à la condition précédente que pour des valeurs de δ discontinues, mais aussi petites que l'on veut.

11. On sait depuis longtemps que, si $R(y, x)$ désigne une fraction rationnelle en y dont les coëfficients sont des fonctions analytiques de x, et si les intégrales de l'équation différentielle

$$y' = R(y, x),$$

ont leurs points critiques fixes, c'est-à-dire indépendants des constantes d'intégration, la fraction rationnelle R est un polynôme du second degré en y: l'équation considérée est une équation de RICCATI. De même, si $R[y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y, x]$ désigne une fraction rationnelle en $y^{(n-1)}$ dont les coëfficients sont algébriques ou analytiques en $y^{(n-2)}, \ldots, y', y, x$, et si les intégrales de l'équation différentielle d'ordre n

$$y^{(n)} = R[y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y, x],$$

ont leurs points critiques fixes, la fraction rationnelle R est un polynôme du second degré en $y^{(n-1)}$. Proposons-nous de généraliser ces résultats.

Considérons d'abord une équation différentielle d'ordre n de la forme

$$y^{(n)} = P[y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y, x], \tag{14}$$

où P désigne un polynôme en $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ à coëfficients analytiques en x. Nous allons montrer que si les intégrales de l'équation (14) ont leurs points critiques fixes, le degré du polynôme P par rapport à chacune des variables $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ est limité.

M. PAINLEVÉ a constitué une méthode qui fournit des conditions nécessaires pour que les intégrales d'une équation différentielle donnée aient leurs points critiques fixes, et par cette méthode a obtenu entre autres les résultats suivants: le polynôme P est du premier degré au plus, non du second, par rapport à $y^{(n-1)}$; dans l'équation du second ordre

$$y'' = P_1(y, x)y' + P_2(y, x), \tag{15}$$

les degrés en y des polynômes P_1 et P_2 sont au plus 1 et 3. Insistons sur cette dernière circonstance qui ne se présente pas aussi simplement dans les équations d'ordre supérieur. Si x_0 désigne un point arbitraire, et si dans l'équation (15) on substitue une expression de la forme $y=\frac{h}{(x-x_0)^r}$, on voit que, pour des valeurs convenables des constantes r et h, rationnelles et positives de l'exposant r, on peut établir une compensation entre y'' et le ou les termes prépondérants du second membre, pourvu que l'équation (15) ne soit pas linéaire. r et h étant ainsi choisis, l'équation (15) est vérifiée formellement par un développement ordonné suivant des puissances croissantes et rationnelles de $x-x_0$, dont le premier terme est $\frac{h}{(x-x_0)^r}$, et qui converge si $|x-x_0|$ est assez petit. Or si le degré de y surpasse 1 dans le polynôme P_1 ou 3 dans le polynôme P_2, l'exposant r est inférieur à 1, et par suite l'intégrale obtenue de l'équation (15) a un point critique algébrique $x=x_0$.

12. Quand on passe aux équations d'ordre supérieur à 2, une difficulté d'analyse nouvelle se présente. Il existe des équations du troisième ordre non linéaires, telles que

$$y'''=yy''-2y'^2, \tag{16}$$

ou généralement

$$y'''=y^ny''-(n+1)\,y^{n-1}y'^2, \qquad n \text{ entier positif}, \tag{17}$$

dont les intégrales n'ont ni points critiques algébriques, ni pôles. Ces intégrales seraient des fonctions entières, si elles n'avaient pas de points singuliers transcendants à distance finie. Mais les résultats obtenus dans le premier chapitre relativement aux équations différentielles du premier ordre, et l'application du théorème démontré au début de ce second chapitre permettent de montrer que l'intégrale générale de l'équation (16) ou (17) n'est pas uniforme, et par conséquent possède des points critiques transcendants.

Soit l'équation (16), qui ne change pas par la transformation à deux paramètres α et β $\left(x, y;\ \alpha x+\beta, \frac{y}{\beta}\right)$; l'intégration de cette équation se ramène à l'intégration d'une équation du premier ordre suivie de deux quadratures. Posons

$$\frac{y'}{y^2}=u,\ \frac{u'}{y}=t:$$

les variables u et t ne changent pas par la transformation précédente, et sont liées par l'équation du premier ordre

$$t\frac{dt}{du}+7ut+6u^3=t. \tag{18}$$

Le changement de variable $t=6u^3(1+v)$ transforme cette équation du premier ordre en l'équation

$$6u^3\frac{dv}{du}=\frac{v}{1+v}-7u-18u^2(1+v), \tag{19}$$

de la forme (1) considérée par M. BENDIXSON.

En définitive l'équation transformée en u de l'équation (16) est équivalente au système composé de l'équation (19) et de l'équation

$$\frac{u''}{u'^2}=\frac{\frac{dt}{du}}{t}+\frac{u}{t}=\frac{\frac{dv}{du}}{1+v}+\frac{3}{u}+\frac{1}{6u^2(1+v)}. \tag{20}$$

Dans le plan de la variable u, au voisinage du point $u=0$, nous avons mis en évidence au chapitre précédent une infinité d'intégrales de l'équation (19) dans les angles où $\Re(u^2)$ est positif, et dans les angles où $\Re(u^2)$ est négatif une seule intégrale; ces intégrales $v(u)$ sont holomorphes et tendent vers zéro quand la variable u tend vers le point $u=0$ dans l'angle correspondant, et admettent comme développement asymptotique la série entière en u sans terme constant qui vérifie formellement l'équation (19):

$$v=7u+67u^2+\cdots \tag{21}$$

Substituons l'une de ces intégrales $v(u)$ dans le second membre de l'équation (20): ce second membre prend, au voisinage du point $u=0$, dans l'angle correspondant la forme requise pour l'application du théorème démontré précédemment. Il résulte que la fonction $u(x)$ correspondante, et par suite aussi l'intégrale $y(x)$ de l'équation (16), ne sont pas uniformes.[1]

---

[1] On a remarqué souvent qu'une variation simple d'un coëfficient numérique peut changer profondément la nature d'une fonction analytique: voici un nouvel exemple de ce fait. Parmi toutes les équations différentielles du troisième ordre de la forme

$$y'''=ayy''+by'^2,$$

où a et b désignent deux constantes numériques, et qui à notre point de vue ne dépendent que du paramètre $\frac{b}{a}$, les seules dont l'intégrale générale soit uniforme sont celles qui se ramènent aux trois suivantes:

Il importe d'établir que la série entière en u (21) qui vérifie formellement l'équation (19) est divergente; sans quoi le théorème démontré au début de ce chapitre serait superflu. Considérons la série entière

$$t = 6u^3 + 42u^4 + 402u^5 + \cdots + a_n u^n + \cdots$$

qui vérifie formellement l'équation (18). Pour $n > 5$ les coëfficients a_n de cette série sont déterminés par une relation récurrente de la forme

$$a_n = 6(n-2)a_{n-2} + \cdots + 18a_{n-2} + 7a_{n-1},$$

où les coëfficients du second membre sont tous positifs: donc les coëfficients a_n sont eux-mêmes positifs, et satisfont à l'inégalité récurrente

$$a_n > 6(n+1)a_{n-2}.$$

Par conséquent, quand n croît indéfiniment, les coëfficients a_{2n} et a_{2n+1} croissent plus rapidement que $n!$, et les deux séries entières $t(u)$ et $v(u)$ sont divergentes.

Parmi les équations d'ordre supérieur à 3, il existe de même des équations de la forme (14) analogues aux équations (16) et (17). Telle est l'équation du quatrième ordre

$$(22)\quad \begin{aligned} y^{IV} = \alpha[y^n y''' - (n+1)(2n+1)y^{n-2}y'^3] + \beta[y^{n-1}y'y'' - (n+1)y^{n-2}y'^3] + \\ + \gamma[y^{2n}y'' - (n+1)y^{2n-1}y'^2], \qquad (n \text{ entier} > 1), \end{aligned}$$

dont les intégrales n'ont ni points critiques algébriques, ni pôles, quelles que soient les constantes α, β, γ. La combinaison du théorème démontré au début de ce chapitre, et des résultats obtenus dans le chapitre précédent relativement aux équations d'ordre supérieur au premier qui généralisent l'équation (1) consi-

---

(α) $\quad y''' = -6y'^2, \quad$ d'où $\; y = \zeta(x + A; 0, B) + C;$

(β) $\quad y''' = -2yy'' - 2y'^2, \quad$ d'où $\; y' = -y^2 + Ax + B;$

(γ) $\quad y''' = 2yy'' - 3y'^2;$

ζ désignant la fonction de Weierstrass, et A, B, C trois constantes d'intégration. L'intégrale générale de l'équation (α) est méromorphe et possède des pôles simples de résidu 1 qui forment un réseau de parallèlogrammes. L'intégrale générale de l'équation (β) est aussi méromorphe elle possède des pôles simples de résidu 1, qui, à mesure que l'on s'éloigne dans le plan de la variable x, s'approchent indéfiniment d'une droite de ce plan, et, l'un de l'autre, étant les zéros d'une fonction entière d'ordre $\frac{3}{2}$. Enfin l'intégrale générale de l'équation (γ) admet comme ligne singulière une circonférence ou une droite variable avec les constantes d'intégration, et n'est définie, suivant les valeurs de ces constantes, qu'à l'intérieur ou à l'extérieur de cette circonférence ou d'un côté de cette droite: elle est holomorphe dans la région où elle est définie. (Cf. Acta Mathematica, t. 34, p. 345—353.)

dérée par M. Bendixson permet, comme pour l'équation (16), d'établir que les intégrales générales de ces nouvelles équations ne sont pas uniformes. On est conduit par exemple à transformer l'équation (22) de la façon suivante. On pose

$$\frac{y'}{y^{n+1}} = u, \quad \frac{u'}{y^n} = t,$$

et l'équation transformée en u est équivalente au système

$$(23) \quad \begin{cases} t^2 \dfrac{d^2t}{du^2} + t\left(\dfrac{dt}{du}\right)^2 + (7n+4)ut\dfrac{dt}{du} + (18n^2+22n+6)u^2t + (n+1)(2n+1)(3n+1)u^4 = \\ \qquad = \alpha\left[t\dfrac{dt}{du} + (4n+3)ut\right] + \beta ut + \gamma t, \end{cases}$$

$$(24) \qquad \frac{u''}{u'^2} = \frac{\dfrac{dt}{du}}{t} + \frac{nu}{t}.$$

Il suffit de faire dans l'équation (23) les changements de variables

$$t = \frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)}{\gamma} u^4(1+v) \quad \text{pour } \gamma \neq 0,$$

$$t = \frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)}{(4n+3)\alpha + \beta} u^3(1+v) \quad \text{pour } \gamma = 0, (4n+3)\alpha + \beta \neq 0,$$

ou (u, u^2), $t = \sqrt{\dfrac{2}{5\alpha}(n+1)(2n+1)(3n+1)u^5(1+v)}$ pour $\gamma = 0, (4n+3)\alpha + \beta = 0, \alpha \neq 0$

pour transformer cette équation en une équation appartenant respectivement à la deuxième, à la première ou à la troisième des formes considérées au n° 9. Dans les trois cas, l'équation obtenue possède au voisinage du point $u = 0$ des intégrales $v(u)$ holomorphes dans des angles et admettant comme développement asymptotique dans ces angles la série entière en u sans terme constant qui vérifie l'équation. Il suffit de substituer le développement correspondant dans l'équation (24) pour achever la démonstration comme précédemment.

D'une façon générale, si les intégrales de l'équation différentielle d'ordre n

$$y^{(n)} = P(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y, x)$$

où P désigne un polynôme en $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ à coëfficients analytiques en x, ont leurs points critiques fixes, le degré de ce polynôme P par rapport à chacune des variables $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ est limité par la règle suivante: considérons chaque dérivée $y^{(i)}$ comme de poids égal à l'indice de dérivation augmenté d'une unité, et la fonction y comme de poids 1; *le poids de chaque terme du polynôme P ne peut surpasser le poids de $y^{(n)}$, $n+1$.*

Il est à peine besoin de faire remarquer que pour $n > 1$ la condition précédente est nécessaire, mais non suffisante pour que l'équation considérée ait ses points critiques fixes. Il existe toutefois des équations à points critiques fixes contenant des termes dont le poids atteint effectivement la limite indiquée: telle est l'équation d'ordre n

$$y^{(n)} = (y^2)^{(n-1)},$$

qui admet comme équation intégrale dépendant de $n-1$ constantes l'équation de Riccati

$$y' = y^2 + P_{n-2}(x),$$

$P_{n-2}(x)$ désignant un polynôme de degré $n-2$ en x à coëfficients arbitraires.

13. Considérons maintenant les equations différentielles à points critiques fixes de la forme

$$y^{(n)} = R\,(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y, x), \tag{25}$$

où R désigne une fraction rationnelle en $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ à coëfficients analytiques en x. Sauf dans un cas d'exception, le degré de la fraction rationnelle R par rapport à chacune des variables $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ est susceptible d'une limitation analogue à celle que nous venons d'obtenir quand la fraction rationnelle R est un polynôme, et cette limitation peut être obtenue par les mêmes méthodes, sans qu'on ait à résoudre de difficulté d'analyse nouvelle.

La fraction R étant par rapport à la variable $y^{(n-1)}$ un polynôme du second degré au plus, l'équation (25) est de la forme

$$\begin{cases} y^{(n)} = R_1(y^{(n-2)}, y^{(n-3)}, \ldots, y', y, x)\,[y^{(n-1)}]^2 + \\ \quad + R_2(y^{(n-2)}, y^{(n-3)}, \ldots, y', y, x)\,y^{(n-1)} + R_3(y^{(n-2)}, y^{(n-3)}, \ldots, y', y, x), \end{cases} \tag{26}$$

R_1, R_2, R_3 désignant des fractions rationnelles en $y^{(n-2)}, y^{(n-3)}, \ldots, y', y$ à coëfficients analytiques en x.

Dans le cas de l'équation du second ordre

$$y'' = R_1(y, x)\,y'^2 + R_2(y, x)\,y' + R_3(y, x),$$

M. Painlevé a démontré que les pôles $y=a(x)$ des fractions rationnelles R_1, R_2, R_3 sont simples, et que le nombre de ces pôles pour l'ensemble des trois fractions (le point $y=\infty$ compris) ne peut surpasser 4: par là les degrés en y des trois fractions R_1, R_2, R_3 sont limités. Et le résultat précédent entraîne comme conséquence la limitation du degré en $y^{(n-2)}$ des fractions R_1, R_2, R_3 de l'équation (26). Ainsi, dans l'équation du troisième ordre

$$y''' = R_1(y', y, x)\, y''^2 + R_2(y'', y', x)\, y' + R_3(y', y, x), \tag{27}$$

les pôles $y'=a(y,x)$ des fractions R_1, R_2, R_3 sont simples, le nombre de ces pôles pour l'ensemble des trois fractions ne peut surpasser 3; enfin les ordres d'infinitude des trois fractions R_1, R_2, R_3 pour $y'=\infty$ ne peuvent surpasser respectivement -1, 1 et 3.

La combinaison de la méthode introduite par M. Painlevé et de la méthode que nous avons appliquée aux équations (16) et (22) permet d'obtenir, en ce qui concerne les degrés en y des mêmes fractions R_1, R_2, R_3 de l'équation (27), les résultats suivants.[1] Chacune des équations différentielles du premier ordre que l'on obtient en annulant l'un des facteurs polaires irréductibles des fractions R_1, R_2, R_3 a ses points critiques fixes. La fraction R_1 n'a pas de pôles de la forme $y=a(x)$, les pôles $y=a(x)$ de la fraction R_2 sont simples, ceux de la fraction R_3 sont doubles au plus. Enfin le nombre des pôles $y=a(x)$ de l'ensemble des deux fractions R_2 et R_3 (le point $y=\infty$ compris) ne peut surpasser 6, sauf dans des équations (27) qui se ramènent aux équations fuchsiennes et kleinéennes.

On sait que les fonctions fuchsiennes et kleinéennes sont uniformes dans tout leur domaine d'existence, et vérifient toutes une équation différentielle du troisième ordre de la forme

$$y''' = \frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'} + f(y)\, y'^3, \tag{28}$$

où $f(y)$ désigne une fonction rationnelle ou algébrique de y. Or l'intégrale générale de l'équation (28) est, quelle que soit la fonction $f(y)$, de la forme

$$y = F\left(\frac{Ax+B}{Cx+D}\right),$$

A, B, C, D désignant quatre constantes arbitraires, et cette formule permet de déduire l'intégrale générale d'une intégrale particulière autre que $y=$ constante. Les équations (28) vérifiées par une fonction fuchsienne ou kleinéenne constituent

[1] Cf. Acta Mathematica, t. 34, p. 364.

donc une classe d'équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme dans tout son domaine d'existence. L'ordre de la fonction rationnelle ou algébrique $f(y)$ en l'un de ses pôles ou points critiques est -2, conformément à la condition que nous avons obtenue pour les pôles de la fraction rationnelle R_3 de l'équation (27); mais le nombre des pôles et points critiques de la fonction $f(y)$ n'est pas limité.

Ainsi, sauf dans des équations qui se ramènent à la classe précédente, les degrés des fractions R_1, R_2, R_3 en y se trouvent limités dans l'équation (27). Et le résultat obtenu entraîne comme conséquence la limitation des degrés en $y^{(n-3)}$ des fractions R_1, R_2, R_3 de l'équation (26), sauf pour des équations se ramenant aux équations fuchsiennes et kleinéennes. Sauf pour de telles équations encore, les mêmes méthodes permettent de limiter les degrés en y des coëfficients de l'équation (26) pour $n=4$, et ainsi de suite, sans qu'on rencontre de nouvelle difficulté d'analyse.

Considérons enfin les équations différentielles d'ordre n, algébriques en $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y', y$, analytiques en x, mais de degré supérieur à 1 en $y^{(n)}$, et, parmi ces équations, considérons celles dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes, l'intégrale singulière ou les intégrales singulières pouvant avoir des points critiques mobiles. Les mêmes méthodes s'étendent à ces nouvelles équations, et, au moins jusqu'au troisième ordre et avec le même cas d'exception, donnent une limitation analogue, à des transformations birationnelles près, à celle qui est valable pour une équation du premier degré en $y^{(n)}$, sans qu'on ait à résoudre d'autres difficultés nouvelles que des difficultés arithmétiques.

Juillet 1914.