ÜBER DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEM MAXIMALBETRAGE EINER ANALYTISCHEN FUNKTION UND DEM GRÖSSTEN BETRAGE BEI GEGEBENEM ARGUMENTE DER FUNKTION.

Von

A. WIMAN

in Uppsala.

Es sei die Bemerkung vorangeschickt, dass, wie wohl aus den folgenden Entwicklungen hervorgehen wird, die Klarlegung des obigen Zusammenhanges auch Licht sowohl über das Theorem des Herrn Picard als auch über die Eigenschaften der Lösungen von Differentialgleichungen in der Umgebung von Unbestimmtheitspunkten zu werfen vermag.

§ 1.

Bezeichnet $A(r)$ das Maximum des reellen Teiles einer ganzen Funktion und $M(r)$ den Maximalbetrag, so hat Herr Borel bewiesen,[1] dass die Ungleichung

$$M(r) < [A(r)]^{1+\varepsilon}, \tag{1}$$

wo ε eine beliebige positive Grösse bedeutet, für eine unendlich wachsende Folge von r-Werten erfüllt sein muss. In (1) lässt sich, wie ohne weiteres ersichtlich ist, $A(r)$ durch $B(r)$ ersetzen, wenn für das Minimum des reellen Teiles die Bezeichnung $-B(r)$ eingeführt wird. Als erste Aufgabe stellen wir uns hier zu zeigen, *dass nicht nur* (1) *eine weit umfassendere Gültigkeit als bloss für ganze Funktionen besitzt, sondern auch insbesondere, dass dasselbe sogar für die äusserst präzise Ungleichung*

[1] Man sehe Borel, *Sur les zéros des fonctions entières*, Acta Math. XX (1897), S. 368. Die Frage ist späterhin von anderen Verfassern aufgenommen worden. Man vergleiche etwa Valiron, *Sur quelques théorèmes de M. Borel*, Bull. de la Soc. Math. de France, XLII (1914), S. 247.

$$\text{(I)} \qquad M(r) < A(r)(1+\varepsilon)$$

behauptet werden kann.

Der Beweis von (1) wurde zunächst durch Benutzung einer von Herrn HADAMARD gegebenen Relation zwischen $A(r)$ und dem Betrage $m(r)$ des grössten Gliedes der TAYLOR'schen Entwicklung erbracht. Behufs der oben besprochenen Gültigkeitserweiterung wollen wir uns einer ähnlichen Relation bedienen, welche freilich in gewissen Fällen etwas weniger scharf ist, aber den Vorteil gewährt, dass durch dieselbe auch Schlüsse über die Stellen auf dem Kreise $|z|=r$ gezogen werden können, für welche die Ungleichung (1) besteht.

Die Entwickelung

$$F(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$$

möge entweder eine ganze Funktion oder eine Funktion mit dem Konvergenzradius 1 bezeichnen, auf welchen letzteren Fall ja die TAYLOR'schen Reihen mit endlichem Konvergenzradius reduziert werden können. Es sei für einen gewissen Wert $|z|=r$ $c_n z^n$ das grösste Glied von $F(z)$. Schreibt man $c_n=|c_n|e^{i\gamma_n}$ und $z=re^{i\varphi}$, so nimmt dieses Gleied *einen positiven reellen Wert* an, falls

$$\gamma_n+n\varphi\equiv 0 \pmod{2\pi}$$

ist, d. h. für die n Argumente

$$\text{(2)} \qquad \varphi=-\frac{\gamma_n}{n}+\frac{2k\pi}{n} \qquad (k=0,1,\ldots n-1).$$

Ebenso ersieht man, dass für die n zwischenliegenden Argumente

$$\text{(2}_1\text{)} \qquad \varphi=-\frac{\gamma_n}{n}+\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

das grösste Glied *einen negativen reellen Wert* bekommt. Bezeichnen etwa $z_0, z_1, \ldots z_{n-1}$ irgend welche auf dem Kreise $|z|=r$ in dieser Weise äquidistante Stellen, so hat man offenbar den Mittelwertsatz

$$\frac{F(z_0)+F(z_1)+\cdots+F(z_{n-1})}{n}=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} z_0^{n\nu}.$$

Hieraus folgt, dass die Relation

$$A(r) \geqq m(r) - |c_0| - \sum_{\nu=2}^{\infty} |c_{n\nu}| r^{n\nu} \tag{3}$$

für mindestens eines von den n Argumenten (2) gelten muss, und ebenso, dass sich ein Gleiches für $B(r)$ bezüglich der Argumente (2_1) aussagen lässt. Für den Fall einer nicht ganzen Funktion $F(z)$ haben wir in einer früheren Arbeit,[1] deren Ergebnisse hier überhaupt eine grundlegende Bedeutung haben, bewiesen, dass, falls $F(z)$ auf dem Konvergenzkreise nach der Bezeichnung des Herrn HADAMARD die Ordnung ∞ besitzt, d. h. falls

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log |c_n|}{\log n} = \infty, \tag{4}$$

zwischen dem Betrage des grössten Gliedes und dem Maximalbetrage die Ungleichung

$$M(r) < [m(r)]^{1+\varepsilon} \tag{5}$$

für eine unendliche Folge $r = r_1, r_2, \cdots r_n, \cdots$ mit $\lim\limits_{n=\infty} r_n = 1$ besteht, wobei auch in entsprechender Weise der Index des grössten Gliedes ins Unendliche steigen muss. Da man nun auch, wie wir jetzt nachweisen wollen,

$$A(r) > m(r)(1-\varepsilon) \tag{6}$$

annehmen darf, so ergibt sich durch Kombination von (5) und (6) die zu beweisende Ungleichung (1).

Um den fraglichen Beweis zu erbringen, benutzen wir die Resultate von § 5 in unserer soeben zitierten Arbeit, indem wir $F(z)$ mit einer Funktion

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$$

vergleichen. Da wir

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{|c_n|}{n^k} = \infty$$

haben, so muss es beliebig grosse Indices n geben, dass, wenn für $r = r_n$ bez. $r = \varrho_n$ das Glied $c_n z^n$ bez. $n^k z^n$ in $F(z)$ bez. $\Phi(z)$ den grössten Betrag hat, man stets

---

[1] *Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylor'schen Reihe,* Acta Math. XXXVII (1914), S. 326.

$$\frac{|c_n| r_n^n}{|c_{n+h}| r_n^{n+h}} \geq \frac{n^k \varrho_n^n}{n^{k+h} \varrho_n^{n+h}} \qquad (h = 1, 2, 3, \cdots)$$

erhält; freilich kann dabei r_n nicht ganz beliebig in dem zugehörigen Intervalle gewählt werden. Nun lässt sich ϱ_n bestimmen, indem wir $n^k r^n$ in Bezug auf n derivieren, wodurch wir

$$\varrho_n = e^{-\frac{k}{n}}$$

erhalten. Mit Rücksicht auf eine Entwickelung, deren Glieder bez. dieselben absoluten Beträge wie $\Phi(z)$ besitzen, wird jetzt (3) durch

$$(3_1) \qquad A(\varrho_n) \geq n^k \varrho_n^n - 1 - \sum_{\nu=2}^{\infty} (n\nu)^k \varrho_n^{n\nu} = \left(\frac{n}{e}\right)^k \left[1 - e^k \sum_{\nu=2}^{\infty} \left(\frac{\nu}{e^\nu}\right)^k\right] - 1$$

ersetzt. Man hat aber, wie leicht ersichtlich,

$$e^k \sum_{\nu=2}^{\infty} \left(\frac{\nu}{e^\nu}\right)^k < \left(\frac{2}{e}\right)^k \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{2e}\right)^k},$$

und letztere Grösse wird offenbar beliebig klein, falls k genügend gross gewählt wird. Durch eine solche Wahl von k kann man also es immer bewirken, dass, wie klein auch die positive Grösse ε genommen wird, man

$$A(\varrho_n) > m(\varrho_n)(1 - \varepsilon)$$

erhält. Hiermit ist aber auch unsere Behauptung bezüglich der Ungleichung (6) erwiesen, woraus dann der in diesem § zu beweisende Satz folgt, d. h. *es ist die Gültigkeit von* (1) *auf Funktionen mit endlichem Konvergenzradius erstreckt, wenn die Ordnung der bez. Funktion auf dem Konvergenzkreise* ∞ *ist.*

Wir glauben doch hiermit nicht die äusserste Grenze erhalten zu haben, für welche (1) allgemein gilt. Es wäre z. B. denkbar, dass die der obigen Erweiterung zu Grunde liegende Bedingung

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log |c_n|}{\log n} = \infty$$

sich durch

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log |c_n|}{\log n} > 0$$

ersetzen liesse.

Es ist weiter unbefriedigend, dass wir zwar nachgewiesen haben, dass (1) für mindestens ein Argument (2) und, wenn $B(r)$ für $A(r)$ eintritt, ebenfalls für ein oder mehrere Argumente (2_1) gilt, aber wir sind zu keiner Entscheidung darüber gekommen, inwieweit es immer derartige Argumente geben muss, welche benachbart auftreten, wofür ja freilich alle Wahrscheinlichkeit spricht. Für die Anwendungen wäre aber ein solcher Satz über die Verteilung der fraglichen Argumente äusserst wichtig. Hierüber wollen wir auch in einem folgenden § nach einer anderen Methode Aufschluss geben.

§ 2.

Über die Grössenordnung von ganzen transzendenten Funktionen mit positiven Koeffizienten hat man von mehreren Verfassern Untersuchungen,[1] welche dahinzielen, dass, wenn n den Index des grössten Gliedes bedeutet, unter sehr ausgedehnten Voraussetzungen man für dieselbe eine Genauigkeit erhält, bei welcher nur von einem gegen 1 konvergierenden Faktor abgesehen wird, indem man bloss eine Gruppe von Gliedern zu berücksichtigen braucht, deren Anzahl in einem für $\lim n = \infty$ beliebig kleines Verhältnis zu n steht. Es wäre gewiss keine grössere Schwierigkeit zu überwinden, um Resultate dieser Art auch auf nicht ganze Funktionen mit der Ordnung ∞ auf dem Konvergenzkreise auszudehnen. Wollte man den Satz nicht durchweg für $\lim n = \infty$ aufstellen, sondern nur für eine unendliche Folge von Indices, so hätte man sogar den Beweis ganz allgemein sowohl für ganze tranzendente Funktionen als auch für Funktionen mit endlichem Konvergenzradius von der bezeichneten Art unter der einzigen Voraussetzung führen können, dass die Koeffizienten positiv oder Null sein sollen. Es erscheint uns nicht unwahrscheinlich, dass der Satz, bei welcher es ja sich um das Verhältnis der Funktion an der Stelle handelt, wo dieselbe den Maximalbetrag hat, ebenso allgemein bei komplexen Koeffizienten gilt. Da es aber auf sehr erhebliche Schwierigkeiten zu stossen scheint, um die für den Beweis des letzteren Satzes nötige Abschätzung von Summen komplexer Glieder auszuführen, so wollen wir auch hier auf den Beweis für den Spezialfall von positiven Koeffizienten verzichten.

Die Sachlage ist nun auch wiederholt von Herrn Borel dahin charakterisiert worden, dass für die Grössenordnung der Funktion dem grössten Gliede eine durchaus entscheidende Bedeutung zukommt, und in unserer schon zitier-

---

[1] Es genüge auf die bezügliche zuletzt erschienene uns bekannte Arbeit zu verweisen, welche wohl auch die grösste Präzision erzielt hat, nämlich Valiron, *Sur le calcul approché de certaines fonctions entières*, Bull. de la Soc. Math. de France, XLII (1914), S. 252.

ten Arbeit glauben wir die Hauptfragen über das Verhältnis zwischen dem Maximalbetrage und dem Betrage des grössten Gliedes klargelegt zu haben. Von diesen Resultaten wollen wir jetzt eine Anwendung machen, indem wir auseinandersetzen, wie an solchen Stellen, wo der Betrag der Funktion dem Betrage $m(r)$ des grössten Gliedes mindestens gleich ist, was ja für den Maximalbetrag $M(r)$ der Fall ist, man eine Anzahl zentraler Glieder herausnehmen kann, so dass die nach beiden Richtungen nicht mitgenommenen Gleider keinen wesentlichen Einfluss über die Eigenschaften der Funktion besitzen. Zunächst soll dies betreffend den Betrag der Funktion gelten. Dabei nehmen wir bei der Abschätzung der nicht zentralen Glieder die absoluten Beträge einer Majorantfunktion und bestimmen die nötigen Voraussetzungen, damit diese Summe $< \varepsilon m(r)$ sei. Es ist dann $(1-\varepsilon) m(r)$ eine untere Grenze für den Betrag des Inbegriffes der zentralen Glieder. Eine solche Methode ist freilich nichts weniger als vollkommen. Wenn es aber im nächsten Paragraphen gilt, nochw eiter gehende Schlüsse über die Eigenschaften der Funktion zu ziehen, so werden wir auf neue Schwierigkeiten stossen, welche noch mehr den Funktionenbereich umgrenzen, für welchen es uns gelungen ist, den Beweis durchzuführen. Doch ist zu bemerken, dass für die ganzen Funktionen die hier besprochenen Probleme ganz leicht erledigt werden, und dieser Fall ist ja als der überaus wichtigste zu betrachten.

Zunächst nehmen wir an, dass eine Vergleichsfunktion

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n$$

existiert, für welche man

$$\frac{\varrho_n}{\varrho_{n-1}} = 1 + n^{-\alpha} \qquad (1 < \alpha < 2)$$

wählen kann, wo, wie in unserer vorigen Arbeit ausgeführt wird, für $|z| = \varrho_n$ $\gamma_n z^n$ das Glied vom grössten Betrage liefert. Nach S. 320 ebenda ersieht man ohne Schwierigkeit, dass es, wenn n hinreichend gross ist, für $\lim \varrho_n = 1$ erlaubt ist

$$|\gamma_n| < e^{n^{2-\alpha+\varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0)$$

zu setzen. Man erhält weiter beim Vergleich mit S. 312 unserer zitierten Arbeit

$$(7) \qquad \frac{|\gamma_{n-\nu-1}| \varrho_n^{n-\nu-1}}{|\gamma_n| \varrho_n^n} \leqq \prod_{\varkappa=0}^{\nu} [1 + (n-\varkappa)^{-\alpha}]^{-(\nu-\varkappa)},$$

sowie

$$(7_1)\qquad \frac{|\gamma_{n+\nu+1}|\varrho_n^{n+\nu+1}}{|\gamma_n|\varrho_n^n} \leq \prod_{\varkappa=0}^{\nu}(1+(n+\varkappa+1)^{-\alpha})^{-(\nu-\varkappa)}$$

$$\leq (1+(n+\nu+1)^{-\alpha})^{-\frac{\nu(\nu+1)}{2}} < e^{-\frac{\nu^2}{2(n+\nu)^\alpha}(1-\delta)},$$

wo für δ, wenn n (und ν) genügend gross gewählt wird, eine beliebig kleine positive Grösse gesetzt werden kann. Will man jetzt für $|z| = \varrho_n$ den Betrag der Summe der nicht zentralen Glieder, also derjenigen, deren Indices enweder $> n + \nu$ oder $< n - \nu$ sind, mit $m(\varrho_n)$ vergleichen, so wird offenbar das Verhältnis

$$< 2\sum_r^{\infty} e^{-\frac{\nu^2}{2(n+\nu)^\alpha}(1-\delta)}$$

oder mit Bezug darauf, dass man δ immer kleiner nehmen kann,

$$(8)\qquad < 2\int_r^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2(n+x)^\alpha}(1-\delta)}\, dx.$$

Behufs der Abschätzung des Integrals (8) zerlegen wir dasselbe in zwei Teilintegrale: Eine partielle Integration ergibt zunächst

$$(9)\qquad \int_n^{\infty} e^{-\frac{1-\delta}{2}\frac{x^2}{(n+x)^\alpha}}\, dx < \int_n^{\infty} e^{-\frac{1-\delta}{2^{1+\alpha}}x^{2-\alpha}}\, dx$$

$$< \frac{(1+\eta)\, 2^{1+\alpha} n^{\alpha-1}}{(2-\alpha)(1-\delta)} e^{-\frac{(1-\delta)n^{2-\alpha}}{2^{1+\alpha}}} \qquad (\eta > 0).$$

Andererseits ist ersichtlich:

$$(9_1)\qquad \int_r^{n} e^{-(1-\delta)\frac{x^2}{(n+x)^\alpha}}\, dx < \int_r^{\infty} e^{-\frac{1-\delta}{2^\alpha n^\alpha}x^2}\, dx < \frac{2^{\alpha-1} n^\alpha}{(1-\delta)r} e^{-\frac{(1-\delta)r^2}{2^\alpha n^\alpha}}.$$

Es muss r so genommen werden, dass auch in (9_1), was für (9) von selbst erfüllt wird, sich für $\lim n = \infty$ eine beliebig kleine Grösse ergibt. Am einfachsten geschieht dies, indem wir $r = n^{\beta/2}\ (2 > \beta > \alpha)$ setzen. Das Verhältnis des von den nicht zentralen Gliedern herrührende Betrages zu $m(r)$ wird dann

$$(10)\qquad < e^{-n^{\beta-\alpha-\varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0).$$

Nach dem allgemeinen Prinzipe, welches im letzten Paragraphen unserer mehrmals zitierten Abhandlung begründet wird, können wir jetzt den Satz aufstellen:

Es bezeichne

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

entweder eine ganze transzendente Funktion oder eine Funktion mit dem Konvergenzradius 1 *unter der Bedingung*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log |c_n|}{n^\eta} > 0 \qquad (\eta > 0). \tag{11}$$

Es sei ε *eine beliebig kleine positive Grösse und* $0 < \eta_1 < \eta$. *Die zentralen Glieder sollen in*

$$\sum c_\nu z^\nu \qquad \left(n - n^{1-\frac{\eta_1}{2}} \leq \nu \leq n + n^{1-\frac{\eta_1}{2}}\right) \tag{12}$$

enthalten sein, wenn n *den Index des grössten Gliedes bedeutet. Es gibt dann immer eine unendliche Folge von Indices* n, *für welche man als Verhältnis des von den nicht zentralen Gliedern herrührenden Betrages zu* $m(r)$ *eine Grösse erhalten kann, welche*

$$< e^{-n^{\eta - \eta_1 - \varepsilon}} \tag{13}$$

ist. Für ganze transzendente Fuktionen kann man insbesondere bei beliebigem $\delta > 0$ $\eta = 1 - \delta$ *in* (13) *nehmen. Es ist dann möglich in* (12) *der Bedingung für* ν *die genauere Gestalt*

$$n - n^{\frac{1}{2}+\delta} \leq \nu \leq n + n^{\frac{1}{2}+\delta} \tag{14}$$

zu geben.

Durch die Bedingung (11) werden ja keineswegs sämtliche Funktionen mit der Ordnung ∞ auf dem Konvergenzkreise erschöpft. Mit den uns hier zur Verfügung stehenden Mitteln sehen wir übrigens keine Möglichkeit, den obigen Satz, auch bei etwaiger Modifikation desselben, auf sämtliche der in Rede stehenden Funktionen zu erweitern. Etwas weiter können wir doch die Frage führen, indem wir eine Vergleichsfunktion $\Phi(z)$ heranziehen, für welche z. B.

$$\frac{\varrho_n}{\varrho_{n-1}} = 1 + \frac{(\log n)^{\varkappa+1}}{n^2} \qquad (\varkappa > 0)$$

gesetzt werden kann. Die Sache wird dann auf die Abschätzung des Integrals

$$(\bar{8})\qquad \int_r^\infty e^{-\frac{x^2}{2(n+x)^2}[\log(n+x)]^{\varkappa+1}}\,dx.$$

zurückgeführt. Man hat offenbar

$$(\bar{9})\qquad \int_n^\infty e^{-\frac{x^2}{2(n+x)^2}[\log n+x)]^{\varkappa+1}}\,dx < \int_n^\infty e^{-\frac{1}{8}[\log(n+x)]^{\varkappa+1}}\,dx < \int_n^\infty (n+x)^{-\frac{1}{8}(\log n)^{\varkappa}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{8}(\log n)^{\varkappa}-1}(2n)^{-\frac{1}{8}(\log n)^{\varkappa}+1}$$

Andererseits ist für $r = \delta n$

$$(\bar{9}_1)\qquad \int_{\delta n}^n e^{-\frac{x^2}{2(n+x)^2}[\log(n+x)]^{\varkappa+1}}\,dx < \int_{\delta n}^\infty e^{-\frac{x^2}{8n^2}(\log n)^{\varkappa+1}}\,dx = \frac{2n\sqrt{2}}{(\log n)^{\frac{\varkappa+1}{2}}}\int_{\frac{\delta}{2\sqrt{2}}(\log n)^{\frac{\varkappa+1}{2}}}^\infty e^{-y^2}\,dy <$$

$$< \frac{4n}{\delta(\log n)^{\varkappa+1}}\,e^{-\frac{\delta^2}{8}(\log n)^{\varkappa+1}} = \frac{4}{\delta(\log n)^{\varkappa+1}}\,n^{-\frac{\delta^2}{8}(\log n)^{\varkappa}+1}$$

Für die Vergleichsfunktion lässt sich demnach behaupten, dass, wie klein auch $\delta > 0$ gegeben wird, das Verhältnis des von den nicht zentralen Gliedern herrührenden Betrages zu $m(r)$, wenn n genügend gross ist,

$$(\overline{10})\qquad < n^{-(\log n)^{\varkappa}-\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0)$$

wird.

Man erschliesst ohne Schwierigkeit (wobei man etwa ähnliche Relationen wie (56) und (57) unserer zitierten Arbeit heranziehen kann), dass die Funktionen $F(z)$, für welche sich mit Hilfe der zuletzt betrachteten Vergleichsfunktion ein ähnlicher Satz wie der früher in diesem Paragraphen hergeleitete Hauptsatz aufstellen lässt, durch die Eigenschaft

$$(\overline{11})\qquad \overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log|c_n|}{(\log n)^{2+\eta}} > 0 \qquad (\eta > 0)$$

charakterisiert werden. Funktionen mit unendlicher Ordnung auf dem Konvergenzkreise erhält man aber jedenfalls noch, falls in $(\overline{11})$ der Exponent $2+\eta$ auf $1+\eta$ erniedrigt wird.

§ 3.

Es besteht, wie leicht ersichtlich, die Identität

$$F\left(z e^{\frac{i\lambda\pi}{n}}\right) = e^{i\lambda\pi}\left[F(z) + \sum_{\nu=-n}^{\infty}\left(e^{\frac{\lambda i\pi\nu}{n}} - 1\right) c_{n+\nu} z^{n+\nu}\right]. \tag{15}$$

Bei den Anwendungen, welche wir hiervon machen wollen, ist es vorteilhaft, für n den Index des grössten Gliedes zu nehmen. Eine wichtige Frage gilt insbesondere das Verhältnis des Betrages von

$$F(z,\lambda) = \sum_{\nu=-n}^{\infty}\left(e^{\frac{\lambda i\pi\nu}{n}} - 1\right) c_{n+\nu} z^{n+\nu} \tag{16}$$

zu $|F(z)|$, wenn die reelle Grösse λ unter gewissen Schranken bleibt. Ist nämlich dieses Verhältnis sehr klein, so bleibt ja der Betrag von $F(z)$ fast unverändert, das Argument wächst aber mit einer Grösse, welche sehr wenig von λ verschieden ist, d. h. *das grösste Glied hat einen bestimmenden Einfluss über die Änderungen des Argumentes der Funktion.*

Ist $F(z)$ eine Funktion mit *positiven* Koeffizienten, für welche die Bedingung ($\overline{11}$) zutrifft, und wird z positiv genommen, so ersieht man aus den Erörterungen des vorigen Paragraphen, dass solche Fälle für beliebig grosse n eintreten, da ja für diejenigen Glieder, welche einen bestimmenden Einfluss auf den Betrag der Funktion haben, der Faktor $\left(e^{\frac{\lambda i\pi\nu}{n}} - 1\right)$ sehr klein wird. Wie wir bereits angedeutet haben, lässt sich dieselbe Eigenschaft für sämtliche Funktionen mit positiven Koeffizienten überhaupt bestätigen, zu denen die Ordnung ∞ auf dem Konvergenzkreise gehört. Die Vermutung liegt dann nahe, dass es sich in ähnlicher Weise auch bei nicht positiven Koeffizienten in der Umgebung der Stellen, wo der Maximalbetrag erreicht wird, verhält, obwohl ein allgemeiner Beweis hierfür mit grossen Schwierigkeiten verbunden sein dürfte. Für Funktionen mit endlicher Ordnung auf dem Konvergenzkreise ersieht man dagegen schon aus dem Beispiel $F(z) = (1-z)^{-k}$, dass ein ähnlicher Satz von vollständiger Schärfe nicht existiert. Der Maximalbetrag der Funktion ist ja $(1-r)^{-k}$; wenn das Argument der Funktion um eine Grösse $\pm\pi$ geändert wird, bekommt der Betrag einen Faktor, der $< \left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^k$ ist und also nicht für $\lim r = 1$ beliebig nahe an 1 heranrückt, wobei selbstverständlich $k > 1$ vorausgesetzt wird.

Wir machen jetzt noch die weitere Zerlegung

$$F(z,\lambda) = \lambda\pi i \sum_{\nu=-n}^{\infty}\frac{\nu}{n} c_{n+\nu} z^{n+\nu} + \sum_{\nu=-n}^{\infty}\left(e^{\frac{\lambda i\pi\nu}{n}} - 1 - \frac{\lambda i\pi\nu}{n}\right) c_{n+\nu} z^{n+\nu}. \tag{17}$$

Für den absoluten Betrag der letzteren Summe bekommt man eine obere Grenze, indem man jedes Glied durch seinen Betrag ersetzt und dann auf

$$\left| e^{\frac{\lambda i \pi \nu}{n}} - 1 - \frac{\lambda i \pi \nu}{n} \right| \leqq \lambda^2 \pi^2 \frac{\nu^2}{2 n^2}$$

Rücksicht nimmt. Es wird sich dann um die Summe

$$(18) \qquad \sum \frac{\nu^2}{n^2} | c_{n+\nu} | r^{n+\nu}$$

handeln, und wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen das Verhältnis dieser Summe zu $m(r)$ für $\lim n = \infty$ verschwindend klein wird. Zu dem Ende ist es nötig, die Voraussetzung zu machen, entweder sei $F(z)$ eine ganze Funktion oder es gelte anderenfalls die Ungleichung (11). Dann ist es möglich, eine Vergleichsfunktion solcher Art zu wählen, dass wir behufs der Abschätzung des in Rede stehenden Verhältnisses eine Relation (7) zu Hülfe nehmen dürfen. Man ersieht ja hieraus, dass für beliebig grosse n die obere Grenze des fraglichen Verhältnisses von keiner höheren Grössenordnung als das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{n^2} e^{-\frac{x^2}{2(n+x)^\alpha}} dx$$

wird, wo α irgend eine Zahl zwischen 1 und 2 bedeutet. Der Hauptteil dieses Integrales fällt offenbar zwischen den Grenzen 0 und n, und wir können eben darum dasselbe durch

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{n^2} e^{-\frac{x^2}{8n^\alpha}} dx$$

ersetzen. Letzteres Integral lässt sich aber durch die Substitution $x = 2\sqrt{2}\, n^{\alpha/2} y$ in

$$(19) \qquad 16\sqrt{2}\, n^{\frac{3\alpha}{2}-2} \int_0^\infty y^2 e^{-y^2} dy = 4\sqrt{2\pi}\, n^{\frac{3\alpha}{2}-2}$$

transformieren. In den Fällen, wo man hier $\alpha < \frac{4}{3}$ setzten darf, was nach unserer mehrmals zitierten Arbeit jedenfalls für

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log | c_n |}{n^{2/3+\varepsilon}} > 0 \qquad (\varepsilon > 0)$$

erlaubt ist, bekommen wir mithin in (19) für $\lim n = \infty$ eine verschwindend kleine Grösse.

Es wäre zwar möglich, dieses Resultat für nicht ganze Funktionen erheblich zu verbessern. Da es aber mit unseren Mitteln in den folgenden Entwickelungen an erschöpfende Resultate für nicht ganze Funktionen gar nicht zu denken ist, so wollen wir uns fortan der Kürze halber auf *ganze Funktionen* beschränken. Wir können dann in (19) $\alpha = 1 + \delta$ nehmen, wo δ nur der Bedingung $0 < \delta < \frac{1}{3}$ unterliegt. Die in (17) auftretende Restsumme von $F(z, \lambda)$ wird dann höchstens von der Grössenordnung

$$\lambda^2 m(r) n^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\delta}.$$

Damit dieselbe von niedrigerer Grössenordnung als $m(r)$ sei, braucht für λ nur die Schranke

$$|\lambda| \leq n^{\frac{1}{4}-\delta}$$

gesetzt zu werden. Es darf sonach $|\lambda|$ mit n unbegrenzt wachsen, doch wird dabei der Winkel $\frac{\lambda\pi}{n}$ unendlich klein. Wollte man andererseits für $|\lambda|$ eine endliche obere Grenze feststellen, so könnte bei den folgenden Auseinandersetzungen $|F(z)|$ von niedrigerer Grössenordnung als $m(r)$, wie z. B. $n^{-\frac{1}{2}+2\delta}$, angenommen werden.

Wir schreiben jetzt

$$F(z) = R e^{i\Phi},$$

$$\sum_{\nu=-n}^{\infty} \frac{\nu\pi}{n} c_{n+\nu} z^{n+\nu} = F_1(z) = R_1^{i\Phi_1}.$$

Die Anfangsstelle z sei so gewählt, dass R ein Maximum von $|F(z)|$ auf dem Kreise $|z| = r$ darstellt. Dagegen braucht R nicht notwendig mit dem Maximalbetrage $M(r)$ identisch zu sein, sondern wir begnügen uns damit, $R \geq m(r)$ vorauszusetzen. Wir suchen den Betrag von

$$R e^{\Phi i} + i\lambda R_1 e^{\Phi_1 i} \tag{20}$$

und finden hierfür

$$\sqrt{R^2 + \lambda^2 R_1^2 + 2\lambda R R_1 \sin(\Phi - \Phi_1)}. \tag{21}$$

Die Entwickelung des Quadrates von $\left|F\left(z e^{\frac{\lambda i \pi}{n}}\right)\right|$ fängt nun offenbar mit den Gliedern

$$R^2 + 2\lambda R R_1 \sin(\Phi - \Phi_1)$$

an. Da diese Grösse ein Maximum für $\lambda = 0$ haben soll, so muss

$$\sin(\Phi - \Phi_1) = 0$$

sein. Es lässt sich also (21) durch den einfacheren Ausdruck

$$\sqrt{R^2 + \lambda^2 R_1^2} \tag{21$_1$}$$

ersetzen. Dass in (21_1) ein Minimum statt ein Maximum für $\lambda = 0$ auftritt, soll nun durch das Hinzutreten der weggelassenen Glieder von $F\left(z e^{\frac{\lambda \pi i}{n}}\right)$ aufgehoben werden. Ist der aus den letzteren Gliedern herrührende Betrag

$$< \lambda^2 \eta R,$$

so wird

$$\left|F\left(z e^{\frac{\lambda i \pi}{n}}\right)\right| > \sqrt{R^2 + \lambda^2 R_1^2} - \lambda^2 \eta R. \tag{22}$$

Als notwendige Bedingung für das Maximum bei $\lambda = 0$ erweist sicht demnach

$$R_1 \leqq \sqrt{2\eta}\, R. \tag{23}$$

Die obigen Erörterungen haben klargelegt, wie für eine unendliche Folge $r_1, r_2, \cdots r_n, \cdots$ η gegen Null $\left(\text{wie } n^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\delta}\right)$ konvergiert. Aus (23) ersieht man dann, dass für die in Rede stehende Folge auch $\frac{R_1}{R}$ gegen Null konvergiert, und zwar wie $n^{-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\delta}$.

Betrachtet man jetzt die Zerlegung (15) von $F\left(z e^{\frac{\lambda \pi i}{n}}\right)$ in zwei Faktoren, so ist für $|\lambda| \leqq n^{\frac{1}{4}-\delta}$ ersichtlich, dass der Betrag sich nur um Faktoren ändern kann, die für $\lim n = \infty$ beliebig wenig von 1 verschieden sind. Die wesentliche Änderung des Argumentes rührt vom ersten Faktor rechts, also $e^{\lambda \pi i}$, her, da in dem zweiten Faktor das nicht von λ abhängige Glied $F(z)$ von höherer Grössenordnung als das Restglied ist. Die Funktion $F\left(z e^{\frac{\lambda i \pi}{n}}\right)$, wo hier λ als reelle Veränderliche unter den angegebenen Schranken bleibt, wird also *mit absoluten Beträgen, deren Verhältnisse zu einander beliebig wenig von 1 differieren, in regelmässiger Aufeinanderfolge alle möglichen Argumente annehmen, und zwar so, dass die*

Änderung des Argumentes der Funktion diejenige des grössten Gliedes begleitet. Bei dieser Änderung des Argumentes nimmt selbstverständlich die Funktion auch rein reelle oder rein imaginäre, positive oder negative, Werte an.

Der vorhergehende Satz gilt insbesondere bei einer Stelle z, wo der Maximalbetrag $M(r)$ erreicht wird. Das Verhältnis zwischen den Geschwindigkeiten, mit denen die Argumente der Funktion und des grössten Gliedes in der Umgebung einer solchen Stelle auf dem Kreise $|z| = r$ oszillieren, ist also für unendlich steigende r-Werte unendlich wenig von 1 verschieden. *Will man dem Argumente der Funktion die Beschränkung* $-\pi < \Phi \leq \pi$ *auferlegen, und bezeichnet* $A_\Phi(r)$ *den Maximalbetrag der Funktion für ein bestimmtes Argument* Φ, *so bekommt man als Verallgemeinerung von* (I)

$$A_\Phi(r) > M(r)(1-\varepsilon). \tag{II}$$

Dieser Zusammenhang zwischen den Änderungen des Argumentes der Funktion und desjenigen ihres grössten Gliedes bietet vielleicht eine Erklärung der in unserer vorigen Arbeit hergeleiteten Formel

$$M(r) \geq m_0 \frac{r^n}{r_1 r_2 \cdots r_n}$$

dar, wo $r_1, r_2, \cdots r_n, \cdots$ nicht wie in dem bekannten Theoreme des Herrn Jensen die Bedeutung der Beträge der Nullstellen haben, sondern, wie hier, als Beträge, bei denen je für die grössten Glieder übereinstimmende Indices auftreten, betrachtet werden können.

§ 4.

Aus den obigen Ergebnissen erhält man als erste Anwendung *eine bemerkenswerte Folgerung über die Eigenschaften der ganzen Funktionen von der speziellen Gestalt* $e^{F(z)}$. Bezeichnen $m_a(r)$ und $m_i(r)$ den Maximalbetrag bez. Minimalbetrag dieser Funktion, und schreibt man für $\Phi = 0, \pi$ $A_\Phi(r) = A(r), B(r)$, so hat man offenbar die Ungleichungen

$$\begin{gathered} e^{A(r)} \leq m_a(r) \leq e^{M(r)}, \\ e^{-B(r)} \geq m_i(r) \geq e^{-M(r)}. \end{gathered} \tag{24}$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die durch (II) ausgedrückte allgemeine Eigenschaft

$$m_a(r)^{-(1-\varepsilon_1)} > m_i(r) > m_a(r)^{-(1+\varepsilon_1)} \tag{25}$$

für eine unendliche Folge von unendlich wachsenden r-Werten, wo ε_1 eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet. *In* (25) *liegt aber eine wesentliche Verschärfung eines berühmten Theoremes des Herrn* HADAMARD, *dessen Gültigkeit sich doch auf sämtliche ganze Funktionen erstreckt,* und welches in der Hauptsache seinen Ausdruck in der Ungleichung

$$\log \frac{1}{m_i(r)} < [\log m_a(r)]^{1+\varepsilon_1} \tag{26}$$

findet.

Es dürfte auch Aufmerksamkeit verdienen, dass *die Bereiche, wo* $|e^{F(z)}|$ *von der Grössenordnung des Maximalbetrages bez. Minimalbetrages ist, offenbar alternieren, so dass, wenn das Argument um eine Grösse* $\frac{2\pi}{n}$ *zugenommen hat, won den Index des grössten Gliedes von* $F(z)$ *bezeichnet, man wieder aufs neue sich dem Maximalbetrage bez. Minimalbetrage nähert.* Eine solche Oszillation kann man übrigens leicht bei speziellen Funktionen, wie etwa e^{e^z}, näher studieren.

Aus verschiedenen Gründen haben wir die Überzeugung gewonnen, dass das obige Theorem des Herrn HADAMARD auch bei dem allgemeinen Fall der ganzen Funktionen einer Erweiterung fähig ist, so dass (26) durch

$$m_i(r) > [m_a(r)]^{-(1+\varepsilon_1)} \tag{26_1}$$

ersetzt werden kann. Doch ist es uns bisher nicht gelungen, den Satz in dieser Allgemeinheit zu beweisen. Noch schwieriger dürfte es sein zu entscheiden, für welche Klassen von Funktionen mit einem Konvergenzradius 1 die Ungleichung (26_1) charakteristisch ist. Als ein Beispiel, wo dies nicht der Fall ist, führen wir an:

$$F(z) = e^{-\frac{1}{1-z} + \frac{1}{(1+z)^{\varkappa}}} \qquad (\varkappa < 1),$$

wo $m_i(r)$ und $m_a(r)$ von den bez. Grössenordnungen $e^{-\frac{1}{1-r}}$ und $e^{\frac{1}{(1-r)^{\varkappa}}}$ sind, und wo für die Koeffizienten die Eigenschaft

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log |c_n|}{n^{\frac{\varkappa}{1+\varkappa}-\varepsilon}} = \infty \qquad (\varepsilon > 0)$$

nachgewiesen werden kann.

§ 5.

Für die erste Ableitung haben wir

$$(27)\qquad F'(z)=\sum_{\nu=-n}^{\infty}(n+\nu)\,c_{n+\nu}\,z^{n+\nu-1}=\frac{n}{z}\left[F(z)+\sum_{\nu=-n}^{\infty}\frac{\nu}{n}c_{n+\nu}\,z^{n+\nu}\right]=$$

$$=\frac{n}{z}[F(z)+F_1(z)].$$

Ist nun z eine Stelle, wo der Maximalbetrag $M(r)$ erreicht wird, so ist nach (23) $\frac{F_1(z)}{F(z)}$ eine sehr kleine Grösse. Unter den dort zu Grunde liegenden Voraussetzungen kann man also schreiben

$$(28)\qquad F'(z)=\frac{n}{z}F(z)(1+\varepsilon_n),$$

wo $|\varepsilon_n|=\eta_n$ beliebig klein wird. Bezeichnet $M_1(r)$ den Maximalbetrag von $F'(z)$, so folgt aus (28)

$$(29)\qquad M_1(r)\geq\frac{n}{r}M(r)(1-\eta).$$

Ganz entsprechende Relationen gelten für die folgenden Ableitungen. Man erhält

$$(30)\quad F^{(\varkappa)}(z)=\sum_{\nu=-n}^{\infty}(n+\nu)(n+\nu-1)\cdots(n+\nu-\varkappa+1)\,c_{n+\nu}\,z^{n+\nu-\varkappa}=$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-\varkappa+1)}{z^{\varkappa}}[F(z)+\varkappa F_1(z)+F_2(z,\varkappa)].$$

Da die Koeffizienten der zentralen Glieder von $F_2(z,\varkappa)$, denen die eigentliche Bedeutung bei der Abschätzung zukommt, von der Grössenordnung $\frac{\nu^2}{n^2}c_{n+\nu}$ sind, so ist an einer Stelle der hier gedachten Art nach den Auseinandersetzungen in § 3 das Verhältnis $\frac{F_2(z,\varkappa)}{F(z)}$ zu vernachlässigen. *Als Verallgemeinerungen von* (28) *und* (29) *haben wir sonach auch bei den höheren Ableitungen:*

$$(28_1)\qquad F^{(\varkappa)}(z)=\frac{n^{\varkappa}}{z^{\varkappa}}F(z)(1+\varepsilon_n),$$

$$M_\varkappa(r) \geqq \frac{n^\varkappa}{r^\varkappa} M(r)(1 - \eta_\varkappa). \tag{29_1}$$

Für die Grössenordnungen der Maximalbeträge der Ableitungen geben (29) und (29_1) zunächst nur untere Grenzen. In völlig analoger Weise lassen sich obere Grenzen feststellen. Es sei z eine Stelle, wo wir für $|F'(z)|$ das Maximum $M_1(r)$ haben. Schreiben wir dann

$$F'(z) = \sum_{\nu=-n+1}^{\infty} \gamma_{n+\nu} z^{n+\nu-1} = \sum_{\nu=-n+1}^{\infty} (n + \nu) c_{n+\nu} z^{n+\nu-1},$$

so erhalten wir

$$F(z) = \gamma_0 + \sum_{\nu=-n+1}^{\infty} \frac{\gamma_{n+\nu}}{n+\nu} z^{n+\nu} = \frac{z}{n}\Bigg[F'(z) - \sum_{\nu=-n+1}^{\infty} \frac{\nu}{n} \gamma_{n+\nu} z^{n+\nu-1} + \tag{31}$$

$$+ \sum_{\nu=-n+1} \frac{\nu^2}{n(n+\nu)} \gamma_{n+\nu} z^{n+\nu-1}\Bigg] + \gamma_0 = \frac{z}{n} F'(z)(1 + \varepsilon_n).$$

Man bekommt in der Tat diese letztere Umformung, indem man beachtet, dass die in § 2 ausgeführte Abschätzung über das Verhältnis der nicht zentralen Glieder zu $m(r)$ leicht auf die erste Ableitung übergeführt werden kann, wenn wir für diese $n c_n z^{n-1}$ als grösstes Glied betrachten, da es ja von keiner wesentlichen Bedeutung ist, falls in (8) der Integrand mit einem Faktor $1 + \frac{x}{n}$ multipliziert wird. Dann lassen sich die zwei in (31) auftretenden Summen in ganz derselben Weise wie die entsprechenden Summen in (17) behandeln. In gleicher Weise finden wir betreffend die folgenden Ableitungen für die Stellen, wo $|F^{(\varkappa)}(z)| = M_\varkappa(r)$ ist:

$$F(z) = \frac{z^\varkappa}{n^\varkappa} F^{(\varkappa)}(z)(1 + \varepsilon_n). \tag{31_1}$$

Aus (31) und (31_1) ergibt sich

$$M(r) \geqq \frac{r}{n} M_1(r)(1 - \eta_n), \tag{32}$$

sowie allgemeiner

$$M(r) \geqq \frac{r^\varkappa}{n^\varkappa} M_\varkappa(r)(1 - \eta_n). \tag{32_1}$$

Fassen wir (29) *und* (32) *zusammen, so erhalten wir*

$$\text{(III)} \qquad \frac{n}{r} M(r)(1-\eta) < M_1(r) < \frac{n}{r} M(r)(1+\eta),$$

wo die positive Grösse η beliebig klein gegeben werden kann. Ebenso erschliessen wir aus (29_1) *und* (32_1) *für die höheren Ableitungen*

$$\text{(III}_1\text{)} \qquad \frac{n^\varkappa}{r^\varkappa} M(r)(1-\eta) < M_\varkappa(r) < \frac{n^\varkappa}{r^\varkappa} M(r)(1+\eta).$$

Die Art und Weise aber, auf welche wir diese Ungleichungen gefunden haben, lehren uns noch, dass, wenn $|z| = r$ gewisse Anforderungen bezüglich des Überwiegens der zentralen Glieder erfüllt, *die Maximalbeträge der Funktion und der Ableitungen einander begleiten, so dass an einer Stelle, wo die Funktion oder irgend eine der Ableitungen den Maximalbetrag hat, die absoluten Beträge der anderen von den zugehörigen Maximalbeträgen nur mit je gegen 1 konvergierenden Faktoren abweichen.*[1]

Aus (28), (28_1), (31) und (31_1) erhalten wir noch Aufschlüsse *über die Beziehungen zwischen den Argumenten der Funktion und ihrer Ableitungen* an einer Stelle der gedachten Art. *Hat man $z = re^{i\varphi}$, und bedeutet Φ das Argument von $F(z)$, so gibt offenbar $\Phi - \varkappa\varphi$ einen Näherungswert für das Argument der Ableitung $F^{(\varkappa)}(z)$.*

Die soeben erhaltenen Resultate gestatten verschiedene Anwendungen auf die Beschaffenheit der Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen, über welche wir uns doch hier kurz fassen müssen. In ganz besonderer Weise bekommt man Aufschlüsse über *die linearen Differentialgleichungen mit rationalen Funktionen als Koeffizienten, deren Lösungen ganze Funktionen sind,* was ja immer der Fall sein muss, wenn $z = \infty$ die einzige singuläre Stelle der Differentialgleichung ist. Substituiert man nämlich $\frac{n}{z} y, \cdots \frac{n^\varkappa}{z^\varkappa} y, \cdots$ für $y', \cdots y^{(\varkappa)}, \cdots$, so erhält man *asymptotische Relationen zwischen n und z, welche sowohl für die möglichen Grössenordnungen der Maximalbeträge als auch für die Richtungen, in denen die Lösungen ihre Maximalbeträge besitzen können, entscheidend sind;* hierbei hat man sich nur der sogenannten *Newton-Cramer'schen Methode* zu bedienen. Wie ohne Schwierigkeit zu ersehen ist, muss jede derartige Relation von der Gestalt

$$(33) \qquad n = az^{\frac{\mu}{\nu}}$$

sein, wo μ und ν natürliche Zahlen sind. Hat man $a = |a| e^{iv}$, so ergibt sich

[1] Auch bei den früher, insbesondere von Herrn Borel angestellten Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen $M(r)$ und $M_1(r)$ spielt der Vergleich mit dem grössten Gliede eine wesentliche Rolle. Wir verweisen hier nur auf die bereits zitierte Arbeit des Herrn Valiron, *Sur quelques théorèmes de M. Borel.*

aus (33) für das Argument φ von z die Relation

$$v + \frac{\mu}{\nu}\varphi \equiv 0 \pmod{2\pi}, \tag{34}$$

wodurch μ äquidistante Richtungen bestimmt werden. Ebenso findet man durch Rechnungen, die von keinerlei prinzipieller Schwierigkeit sind, auf welche wir aber hier nicht eingehen wollen, dass aus (33), worin ja eine Abhängigkeit zwischen r und dem Index n des zugehörigen grössten Gliedes ausgesprochen wird, als Grössenordnung des Maximalbetrages sich

$$e^{|a|\frac{\nu}{\mu} r^{\frac{\mu}{\nu}}} \tag{35}$$

ergibt. Doch müssen wir einstweilen die Frage betreffend die Umkehrung dahingestellt lassen, d. h. wir vermögen nicht zu entscheiden, in wie weit zu jeder möglichen Kombination von (34) und (35) auch wirklich eine Lösung der Differentialgleichung gehört.

Jedenfalls finden wir doch, dass die ganzen transzendenten Funktionen, welche als Lösungen von linearen Differentialgleichungen auftreten können, deren Koeffizienten rationale Funktionen der unabhängigen Veränderlichen sind, die folgenden zwei charakteristischen Eigenschaften besitzen müssen.

1. *Dieselben sind nicht nur von rationaler endlicher Ordnung, sondern gehören immer dem nach einer von Herrn* PRINGSHEIM *eingeführten Terminologie sogenannten Mitteltypus an.* Dadurch sind Funktionen wie $\frac{1}{\Gamma(z)}$ und die RIEMANN'sche Funktion $\xi(z)$ ausgeschlossen.[1]

2. *Die Stellen, wo die Funktionen ihre Maximalbeträge besitzen, ordnen sich asymptotisch in ganz bestimmte Richtungen.*[2]

Als ein einfaches Bespiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$y'' - zy' - z^2 y = 0.$$

Als asymptotische Relation zwischen n und z erhält man

---

[1] Nach einem längst bekannten Satze gilt für die Funktion $\frac{1}{\Gamma(z)}$ dieser Satz nicht nur für lineare Differentialgleichungen. Man sehe O. HÖLDER, *Über die Eigenschaft der Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen*, Math. Ann. XXVIII (1886).

[2] Obgleich wir keinen Beweis dafür haben, so können wir es hier nicht unterlassen, die Vermutung auszusprechen, dass auch die Nullstellen sich asymptotisch gewissen bestimmten Richtungen anschmiegen. Man vergleiche doch hier insbesondere die Resultate des Herrn HORN.

$$\frac{n^2}{z^2} - z\frac{n}{z} - z^2 = 0$$

oder nach der Lösung

(a) $$\frac{n}{z^2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

(b) $$\frac{n}{z^2} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Durch (a) wird ein Maximalbetrag von der Grössenordnung $e^{\frac{\sqrt{5}+1}{4}r^2}$ in den Richtungen $\varphi = 0, \pi$ charakterisiert; dem gegenüber entsprechen der Lösung (b) die Grössenordnung $e^{\frac{\sqrt{5}-1}{4}r^2}$ und die Richtungen $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$. Offenbar ist (a) der allgemeine Fall. Ob es wirklich partikuläre Integrale gibt, für welche (b) charakteristisch ist, scheint nicht ohne weiteres beantwortet werden zu können.

Zur Zeit sind wir mit einer strengen Erledigung der entsprechenden Fragen für den Fall, dass die Koeffizienten transzendente Funktionen sind, wie bei

$$y'' = e^z y,$$

nicht fertig.

Bei nicht linearen Differentialgleichungen ist die Sache auf Grund der möglicherweise auftretenden beweglichen kritischen Punkte verwickelter. Am leichtesten scheint man Kriterien zu bekommen, damit ganze Transzendenten *auch nicht als partikuläre Integrale* auftreten können. Als Beipiele nehmen wir die beiden Gleichungen

(α) $$y''y - 2y'^2 + P(z)y'' + Q(z)y' + R(z)y + S(z) = 0,$$
$$y''y - zy'^2 + P(z)y'' + Q(z)y' + R(z)y + S(z) = 0,$$

wo $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ und $S(z)$ ganze rationale Funktionen bedeuten. Es lässt sich ohne Schwierigkeit *eine obere Grenze für die Ordnung einer ganzen rationalen Funktion*, die hier Lösung sein kann, abschätzen. Hierzu können wir jetzt in ergänzender Weise behaupten, dass die fraglichen Gleichungen *auch keine ganzen transzendenten Funktionen* als Integrale haben können. Denn bei den Maximalbeträgen sind ja $yy'' - 2y'^2$ bez. $yy'' - zy'^2$ mit $-y'^2$ bez. $(1-z)y'^2$ vergleichbar und mithin von höherer Grössenordnung als die linearen Glieder. In ganz anderer Weise verhält es sich mit

(β) $$yy'' - y'^2 + y'' + y + 1 = 0,$$

wo wir das partikuläre Integral $y = \sin(z + c)$ haben. Als ein anderes Beispiel nehmen wir

$$(\gamma) \qquad y'y'' + y^2 + y'' - y = 0,$$

wo als partikuläres Integral $y = ce^{-z}$ auftritt. Die Fälle (β) und (γ) gehören insofern zu zwei verschiedenen Typen, als man, auch wenn die Koeffizienten beliebige rationale Funktionen $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ und $S(z)$ wären, im Falle (γ) auf Grund der vorhergehenden Entwickelungen bestimmt behaupten kann, dass eine etwa als Integral auftretende ganze transzendente Funktion von der Grössenordnung e^r sein muss, ein entsprechendes Ergebnis aber für den Fall (β) nicht herauskommt.

§ 6.

Der spezielle Picard'sche Satz lässt bekanntlich die Formulierung zu, dass keine Relation

$$(36) \qquad e^{F(z)} = e^{F_1(z)} + 1,$$

wo $F(z)$ und $F_1(z)$ ganze Funktionen bedeuten, bestehen kann, es sei denn, dass $F(z)$ und $F_1(z)$ sich auf Konstanten reduzieren. Wir wollen zeigen, wie aus den vorangehenden Entwicklungen sich ein einfacher Beweis für diesen Satz herleiten lässt. Man wird hoffentlich zugeben, dass die Schwierigkeit des Beweises eigentlich in unseren ungenügenden Kenntnissen von den allgemeinen Eigenschaften der ganzen *transzendenten* Funktionen liegt. Dem gegenüber werden wir den Beweisgrund eben darin suchen, dass wir in § 3 analoge Eigenschaften für ganze *transzendente* Funktionen nachgewiesen haben, wie solche für *rationale* Funktionen von selbst einleuchten.

Für die ganze Funktion $F(z)$ gibt es nach § 2 eine unendliche Folge von Indices n, denen Werte $|z| = r_n$ zugeordnet sind, so dass, wenn β irgendwie zwischen 1 und 2 genommen wird, als zentrale Glieder, von denen der wesentliche Einfluss auf $M(r_n)$ herrührt, diejenigen bezeichnet werden können, deren Indices zwischen $n - n^{\beta/2}$ und $n + n^{\beta/2}$ liegen. Beachten wir, dass bei einer ganzen Funktion α beliebig wenig grösser als 1 genommen werden kann, so ist aus (10) zu ersehen, dass das Verhältnis des von den nicht zentralen Gliedern herrührenden Betrages zu $m(r_n)$ und mithin $M(r_n)$

$$(37) \qquad < e^{-n^{\beta-1-\varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0)$$

wird. Wir wollen zeigen, dass, falls die Relation (36) als gültig angenommen wird, die beiden einander zugeordneten Folgen n und r_n die gleiche Bedeutung für $F_1(z)$ wie für $F(z)$ haben müssen.

Da der grösste positive reelle Teil $A(r_n)$ von $F(z)$ dieselbe Grössenordnung wie $M(r_n)$ hat, so muss dies auch für den Maximalbetrag $M_1(r_n)$ von $F_1(z)$ der Fall sein. Man hat also $M_1(r_n) \geqq M(r_n)(1-\varepsilon_n)$ mit $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. Wir versuchen mit der Annahme, dass von den Gliedern in $F_1(z)$, deren Indices nicht zwischen $n - n^{\beta/2}$ und $n + n^{\beta/2}$ liegen, für $|z| = r_n$ ein Betrag herrühre, der $> \delta_1 A_1(r_n)$ ist, wo δ_1 eine gegebene positive Grösse bedeutet.

Zunächst erinnern wir daran, dass wir bei der Abschätzung einer oberen Grenze für den zu $m(r_n)$ komplementären Faktor $\mu(r_n)$ in $M(r_n) = m(r_n)\mu(r_n)$ die Funktion $F(z)$ durch eine mit n bewegliche Majorantfunktion mit positiven Koeffizienten ersetzt haben, welche übrigens einen endlichen Konvergenzradius hat und das Glied vom Index n dem Betrage nach unverändert besitzt. Es ist einleuchtend, dass innerhalb des Konvergenzkreises dieser Majorantfunktion, welche wir etwa mit $\Phi_n(z)$ bezeichnen können, $M(r)$ niemals den Maximalbetrag von $\Phi_n(z)$ überholen darf. Lässt sich also beweisen, dass aus der gemachten Annahme die Folgerung gezogen werden kann, dass für irgend einen r-Wert der grösste positive reelle Teil der Funktion $F_1(z)$ von höherer Grössenordnung als der Maximalbetrag von $\Phi_n(z)$ wird, so darf hier letzterer Betrag durch $M(r)$ ersetzt werden.

Das Integral (8), durch dessen Abschätzung wir die Resultate (10) und (37) erhalten haben, bezieht sich zunächst auf die nicht zentralen Glieder von $\Phi_n(z)$, also erst in zweiter Instanz auf $F(z)$. Ohne besondere Schwierigkeit lässt sich ersehen, dass das Integral (8) für $\lim n = \infty$ noch unendlich klein wird, falls der Integrand durch

$$e^{(n+x)^{\beta-\alpha-\varepsilon_1}} \qquad (\varepsilon_1 > 0)$$

multipliziert wird, und die untere Grenze $r = n^{\beta/2}$ gesetzt wird. Es handelt sich ja dann um das Integral

$$\int\limits_{n^{\beta/2}}^{\infty} e^{(n+x)^{\beta-\alpha-\varepsilon_1} - \frac{x^2}{2(n+x)^{\alpha}}(1-\delta)} dx,$$

und wenn man hier den Exponenten im Integranden betrachtet, so kommt offenbar die entscheidende Bedeutung dem negativen Gliede zu, weil bei gegebenem $\varepsilon_1 > 0$ für $x \geqq n^{\beta/2}$

$$\frac{x^2}{(n+x)^{\beta-\varepsilon_1}} = \frac{\left(1 + \frac{x - n^{\beta/2}}{n^{\beta/2}}\right)^2}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\beta}} (n+x)^{\varepsilon_1}$$

mit n ins Unendliche steigt. Da man $\alpha + \varepsilon_1 = 1 + \varepsilon$ setzen kann, so muss es bei der oben angenommenen Eigenschaft von $F_1(z)$ für $|z| = r_n$ mindestens ein Index $n + \nu$ geben, so dass das zugehörige Glied in $F_1(z)$ zu dem entsprechenden in $\Phi_n(z)$ ein grösseres Verhältnis als

$$e^{(n+\nu)^{\beta-1-\varepsilon}} \tag{38}$$

hat. Im Allgemeinen können wir das Verhältnis zwischen den absoluten Beträgen der zu den gleichen Indices $n + \nu$ gehörigen Koeffizienten von $F_1(z)$ und $\Phi_n(z)$ in der Gestalt

$$e^{(n+\nu)^{\varkappa_{n+\nu}^{(n)}}}$$

schreiben, und aus (38) hat man für das Maximum der Exponenten $\varkappa_{n+\nu}^{(n)}$ die untere Grenze $\beta - 1 - \varepsilon$. Für grosse positive ν-Werte müssen dagegen die fraglichen Exponenten negativ werden, da wohl $F_1(z)$, aber nicht $\Phi_n(z)$, eine ganze Funktion ist. Ein Gleiches muss aber, jedenfalls bei genügend grossem n, der Fall sein, wenn ν sich gegen $-n$ bewegt, da offenbar die besondere Bildungsweise von $\Phi_n(z)$ aus $F(z)$ die extremen Koeffizienten in *beiden* Richtungen wesentlich erhöht, so dass die Anfangskoeffizienten von $\Phi_n(z)$ mit n über alle Grenzen wachsen. Der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten $d_{n+\nu}$ bez. $c_{n+\nu}$ von $\Phi_n(z)$ und $F(z)$ lässt sich ja folgendermassen charakterisieren, wie aus den beiden ersten Paragraphen unserer in Acta XXXVII publizierten Arbeit hervorgehen dürfte. Wie die Grössen $|c_{n+\nu}|$ von den Elementen $\frac{r_{n+\nu}}{r_{n+\nu-1}}$ eines divergenten Produktes, so hängen die Grössen $d_{n+\nu}$ von den Elementen $\frac{P_{n+\nu}}{P_{n+\nu-1}} = (1 + (n+\nu)^{-\alpha})$ eines konvergenten Produktes ab. Dabei ist aber das Anfangsglied P_1 von solcher Grösse, dass man $P_n = r_n$ bekommt. Es ist also im Allgemeinen zu erwarten, dass man $P_{n+\nu} > r_{n+\nu}$ oder $P_{n+\nu} < r_{n+\nu}$ erhält, je nachdem $\nu < 0$ oder $\nu > 0$ ist. Setzen wir immer $\nu > 0$, so sind für die Abschätzung der Grössen $\frac{d_{n-\nu}}{|c_{n-\nu}|}$ bez. $\frac{d_{n+\nu}}{|c_{n+\nu}|}$ die Produkte

$$\prod_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{P_{n-\varkappa}}{r_{n-\varkappa}} \tag{39$_1$}$$

bez.

$$\prod_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{r_{n+\varkappa}}{P_{n+\varkappa}} \tag{39$_2$}$$

von entscheidender Bedeutung.[1] Die Richtigkeit der obigen Behauptung bezüglich der extremen Koeffizienten von $\Phi_n(z)$ folgt jetzt daraus, dass beide Produkte (39) mit ν und (für das erstere) n über alle Grenzen wachsen.

Man ersieht auch, dass für die Funktion $\Phi_n(z)$ die Verhältnisse sich ganz analog stellen, wenn ein anderes Glied als dasjenige vom Index n die Rolle als grösstes Glied übernimmt. Für den Index $n + \nu$ hängt der Komplementärfaktor $\mu_{n+\nu}$ in ganz derselben Weise vom unendlichen Produkte

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 + m^{-\alpha})$$

ab, als wenn es sich um eine Majorantfunktion $\Phi_{n+\nu}(z)$ handelt. Ebenso ist es bei der Abschätzung des grössten Gliedes $m_{n+\nu}$; nur dass diese Grösse auch das Anfangsglied von $\Phi_n(z)$ als Faktor besitzt, welches ja beim Übergange zu $\Phi_{n+\nu}(z)$ geändert wird. Das wesentliche ist aber, dass dieses Anfangsglied, wie wir oben hervorgehoben haben, mit n über alle Grenzen wächst. Dadurch wird ja der in unserer früheren Abhandlung gezogene Schluss über das Grössenverhältnis zwischen $\mu_{n+\nu}$ und $m_{n+\nu}$, bei welchem ja ein gegebenes endliches Anfangsglied vorausgesetzt wurde, nur erhärtet.

Wir kehren jetzt zu den Beziehungen zwischen $F_1(z)$ und $\Phi_n(z)$ wieder. Es sei eine positive Grösse $\varkappa \leq \beta - 1 - \varepsilon$ fixiert. Es gibt dann jedenfalls einen Index n_1, für welchen man $\varkappa_{n_1}^{(n)} \geq \varkappa$ hat. Andererseits muss es, auf Grund der nachgewiesenen Eigenschaft der Grössen $\varkappa_{n+\nu}^{(n)}$ für $\lim \nu = \infty$, möglich sein, den Index n_1 so zu wählen, dass man

$$\varkappa_{\lambda n_1}^{(n)} < \varkappa \qquad (\lambda = 2, 3, \cdots)$$

erhält. Für $|z| = r_{n_1}$ sei n_1 der Index des grössten Gliedes von $\Phi_n(z)$. Aus der Formel (3) erhält man jetzt, indem man die Abschätzung der betreffenden Glieder von $F_1(z)$ auf die ensprechenden von $\Phi_n(z)$ zurückführt und letztere durch die Verhältnisse zu dem grössten Gliede m_{n_1} ausdrückt:

[1] Man vergleiche insbesondere (12) S. 309 unserer zitierten Arbeit.

$$A_1(r_{n_1}) \geq m_{n_1}\left[e^{n_1^{\varkappa}} - \sum_{\lambda=2}^{\infty} e^{-\frac{(\lambda-1)^2 n_1^2}{2\lambda^{\alpha_1} n_1^{\alpha_1}} + \lambda^{\varkappa} n_1^{\varkappa}}\right] - c.$$

Da man hier $\varkappa + \alpha_1 < 2$ nehmen kann, und da n_1 offenbar mit n unendlich gross werden muss, so lässt sich die obige Ungleichung auch in der Gestalt

$$A_1(r_{n_1}) \geq m_{n_1} e^{n_1^{\varkappa}} (1 - \varepsilon_n) \qquad \left(\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0\right) \tag{40}$$

schreiben. *Hierin liegt aber ein Widerspruch mit* (36), denn da für μ_{n_1} nur eine Potenz von n_1 zu setzen ist, so würde sich aus (40) eine höhere Grössenordnung für $A_1(r_{n_1})$ als für $M(r_{n_1}) \leq m_{n_1} \mu_{n_1}$ ergeben.

Wird dann andererseits (36) mit der Annahme verträglich sein, dass auch auf $M_1(r_n)$ nur diejenigen Glieder, deren Indices zwischen $n - n^{3/4}$ und $n + n^{3/4}$ liegen, von wesentlichem Einfluss sind? Bezeichnet $m_n^{(1)}$ den Betrag des grössten Gliedes der Funktion $F_1(z)$ für $|z| = r_n$, so ersieht man leicht, dass

$$m_n^{(1)} < M(r_n)(1 + \varepsilon_n) \qquad \left(\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0\right)$$

sein muss; denn die Benutzung von (3) gibt ein Resultat, dem man die Gestalt

$$A_1(r_n) > m_n^{(1)}\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)$$

geben kann, und $A_1(r_n)$ darf ja höchstens einen äussert geringen Überschuss über $M(r_n)$ haben. Für

$$F_1(z) = \sum_{\nu=-n}^{\infty} c_{n+\nu} z^{n+\nu}$$

bekommen wir

$$F_1\left(z e^{\frac{\lambda i \pi}{n}}\right) = e^{\lambda i \pi}\left[F_1(z) + \lambda \sum_{\nu=-n}^{\infty} \frac{\nu i \pi}{n} c_{n+\nu} z^{n+\nu} + \right. \tag{41}$$

$$\left. \sum_{\nu=-n}^{\infty}\left(e^{\frac{\lambda \nu i \pi}{n}} - 1 - \frac{\lambda \nu i \pi}{n}\right) c_{n+\nu} z^{n+\nu}\right] = e^{\lambda i \pi}[F_1(z) + \lambda \overline{F}_1(z) + \overline{\overline{F}}_1(z, \lambda)].$$

Die Bestimmung einer oberen Grenze für $|\overline{\overline{F}}_1(z, \lambda)|$, wobei nur die Glieder, für welche $-n^{\beta/2} \leq \nu \leq n^{\beta/2}$, berücksichtigt zu werden brauchen, führt höchstens auf

$$\frac{\lambda^2 \pi^2 m_n^{(1)}}{n^2} \int_0^{n^{\beta/2}} x^2 \, dx < \frac{\lambda^2 \pi^2 M(r_n)}{3} n^{\frac{3\beta}{2}-2} (1 + \varepsilon_n).$$

Da man $\beta < \frac{4}{3}$ nehmen kann, wird das Verhältnis dieser Grösse zu $M(r_n)$ und also auch zu $M_1(r_n)$ für $\lim n = \infty$ beliebig klein, falls z. B. $|\lambda|$ unter einer gegebenen endlichen Grenze bleibt. Aber eben diese Eigenschaft ist es nach § 3, welche bedingt, dass für $\lim n = \infty$ das Verhältnis zwischen dem grössten positiven reellen Teile $A_1(r_n)$ und $M_1(r_n)$ gegen 1 konvergiert. Wenn nun $A(r_n)$ und $A_1(r_n)$ sich in solcher Weise den zugehörigen Maximalbeträgen anschmiegen, so verlangt offenbar (36), dass auch $\frac{M(r_n)}{M_1(r_n)}$ gegen 1 konvergieren muss.

Geht man von einer Stelle z aus, wo $|F(z)| = M(r_n)$ ist, so gibt es nach § 3 in der Nachbarschaft auf dem Kreise $|z| = r_n$ mit sehr wenig von $\frac{2\pi}{n}$ abweichenden Zwischenwinkeln beliebig viele Stellen, wo $F(z)$ positiv und $> M(r_n)(1-\varepsilon)$ ist. Eine Gleichung (36) verlangt nun, dass an diesen Stellen die Differenzen zwischen den reellen Teilen von $F_1(z)$ und $F(z)$ sehr klein sein müssen. Auf Grund des Verhältnisses der fraglichen Grössen zu den bezüglichen Maximalbeträgen muss dann das Argument von $F_1(z)$ näherungsweise ein Vielfaches von 2π sein.

Man hat sonach für eine Folge von λ-Werten, welche der Reihe nach den Näherungswert 2 als Differenz besitzen

$$\left| F_1\left(z e^{\frac{\lambda \pi i}{n}}\right) \right| > M_1(r_n)(1-\varepsilon).$$

Der Faktor von $\left| F_1\left(z e^{\frac{\lambda \pi i}{n}}\right) \right|$, welcher von λ abhängig ist, weicht mithin sehr wenig von 1 ab. Nun ist es oben nachgewiesen, dass bei gehöriger Beschränkung von $|\lambda|$ das Verhältnis $\frac{|F_1(z, \lambda)|}{M_1(r_n)}$ eine sehr kleine Grösse ist. Man hat demnach für $\left| F_1\left(z e^{\frac{\lambda \pi i}{n}}\right) \right|$ den Näherungswert $|F_1(z) + \lambda \overline{F}_1(z)|$. Letztere Grösse kann offenbar in der angegebenen Weise nur dann von λ unabhängig sein, falls $\frac{|\overline{F}_1(z)|}{|F_1(z)|}$ genügend klein ist. Beim Übergange von z zu $z e^{\frac{\lambda \pi i}{n}}$ ändern sich also die Argumente sowohl von $F(z)$ als $F_1(z)$ annäherungsweise um die Grösse $\lambda\pi$. Da die Stellen, für welche die Argumente der beiden Funktionen Vielfache von 2π sind, einander begleiten, so muss ein Gleiches der Fall sein, wenn die Argumente der beiden Funktionen ungerade Vielfache von π darstellen. Wenn man also z. B. die Winkel zwischen den Richtungen halbiert, in denen $F(z)$ positive reelle Werte bekommt, so gelangt man auf Stellen des Kreises $|z| = r_n$, in denen die reellen Teile von sowohl $F(z)$ als $F_1(z)$ negativ und dem absoluten Betrage nach von der Grössenordnung der Maximalbeträge sind. *Dann werden aber die beiden nicht konstanten Glieder in* (36) *für* $\lim n = \infty$ *beliebig klein; eine solche Identität ist sonach unmöglich.*

Hiermit ist der Beweis des speziellen PICARD'*schen Satzes erbracht, indem wir dargetan haben, dass aus dem durch* (36) *bedingten Übereinanderfallen der Stellen, wo* $F(z)$ *und* $F_1(z)$ *grosse positive Teile haben, als Begleiterscheinung ein Gleiches für Stellen mit grossen negativen Teilen folgt.*

Betreffend die ausgedehnte Literatur, welche sich mit diesen und ähnlichen Fragen beschäftigt hat, sei nur an folgendes erinnert. Der erste Beweis des speziellen PICARD'schen Satzes, der nicht von der Modularfunktion Gebrauch macht, ist von Herrn BOREL gegeben,[1] und die entsprechende Leistung für das allgemeine Theorem rührt sodann von Herrn SCHOTTKY her.[2] Indem wir die sich an die merkwürdigen Resultate des Herrn E. LANDAU anschliessenden Untersuchungen nur kurz erwähnen, wollen wir noch besonders auf eine neuerdings erschienene Arbeit des Herrn P. MONTEL aufmerksam machen, welche neue fruchtbringende Gesichtspunkte beim Beweise der PICARD'schen Sätze darbietet.[3]

Bei der von uns benutzten Methode bereitet es keine prinzipielle Schwierigkeit, falls man Erweiterungen des PICARD'schen Theoremes, wie solche zuerst Herr BOREL für ganze Funktionen endlicher Ordnung gegeben hat, auch auf den Fall unendlicher Ordnung ausdehnen will. So z. B. lässt sich die Unmöglichkeit einer Identität

$$\Phi(z)\, e^{F(z)} = \Phi_1(z)\, e^{F_1(z)} + \Phi_2(z)$$

---

[1] Comptes rendus (1896).

[2] Berliner Sitzungsberichte, XLII (1904), XLVI (1907). Man vergleiche auch E. LINDELÖF, *Sur le théorème de* M. PICARD *dans la théorie des fonctions monogènes*, Congrès des mathématiques à Stockholm (1909).

[3] *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionelles dans un domaine*, Annales de l'École Normale (3) XXIX (1912). Man vergleiche auch C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Démonstration simplifiée du théorème fondamental de* M. MONTEL *sur les familles normales de fonctions*, Annals of Mathematics, (2) XVII (Sept. 1915).

nachweisen, wo $\Phi(z), \Phi_1(z)$ und $\Phi_2(z)$ ganze Funktionen endlicher Ordnung bedeuten, und mindestens eine von den ganzen Funktionen $F(z)$ und $F_1(z)$ transzendent ist.

Unser Beweisverfahren lässt sich aber auch auf *den allgemeinen* PICARD'schen *Satz* anwenden, dass es höchstens zwei Ausnahmewerte gibt, welche eine in der Umgebung eines isolierten wesentlichen singulären Punktes eindeutige analytische Funktion in beliebiger Nähe des Punktes nicht annimmt. Machen wir die Voraussetzung, für die Funktion $F(z)$ existiere in der Umgebung des wesentlichen Punktes $z = \infty$ die drei Ausnahmewerte ∞, 0, 1. Betrachten wir dann die Funktion $\log F(z)$, so muss es möglich sein, einen Kreis mit genügend grossem Radius zu konstruieren, dass diese Funktion sich in jedem Punkte ausserhalb dieses Kreises regulär verhält. Lässt man dann z in diesem Bereiche eine geschlossene Kurve um den Punkt ∞ durchlaufen, so kann offenbar $\log F(z)$ sich nur um ein Vielfaches der Grösse $2\pi i$ ändern. Es muss also eine gewisse ganze Zahl $k \gtreqless 0$ geben, so dass die Funktion $\log \frac{F(z)}{z^k}$ sich in der Umgebung des Punktes $z = \infty$ eindeutig verhält. Dann wird aber eine Entwickelung von der Gestalt

$$\log \frac{F(z)}{z^k} = G(z) + \varphi(z)$$

existieren, wo $G(z)$ eine ganze rationale oder transzendente Funktion bedeutet, und $z = \infty$ eine reguläre Stelle für die Funktion $\varphi(z)$ darstellt. Übrigens lässt sich $\varphi(z)$ in der Art fixieren, dass $\lim\limits_{z=\infty} \varphi(z) = 0$ ist. In ganz derselben Weise bekommt man die entsprechende Identität

$$\log \frac{F(z) - 1}{z^{k_1}} = G_1(z) + \varphi_1(z).$$

Mann erhält alsdann

$$z^k e^{G(z)} \Phi(z) = z^{k_1} e^{G_1(z)} \Phi_1(z) + 1, \tag{36_1}$$

wo $G(z)$ und $G_1(z)$ ganze Funktionen bedeuten und $z = \infty$ einen regulären Punkt für die Funktionen $\Phi(z)$ und $\Phi_1(z)$ bezeichnet, welche dortselbst den Wert 1 annehmen. Offenbar beeinträchtigt aber das Hinzutreten der Faktoren $z^k, \Phi(z), z^{k_1}, \Phi_1(z)$ in keiner Weise die Schlussätze, wodurch wir die Unmöglichkeit einer Identität (36) nachgewiesen haben.