SUR L'ÉQUATION

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[2\nu\frac{k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} + 2\nu_1\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} - 2\nu_2\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x}\right]\frac{dy}{dx}$$

$$= \left[\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}(n_3 - \nu_2)(n_3 + \nu_2 + 1) + \frac{\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x}(n_2 - \nu_1)(n_2 + \nu_1 + 1)\right.$$

$$\left. + \frac{k^2 \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}(n_1 - \nu)(n_1 + \nu + 1) + k^2\operatorname{sn}^2 x(n + \nu + \nu_1 + \nu_2)(n - \nu - \nu_1 - \nu_2 + 1) + h\right]y$$

ÉQUATION OÙ ν, ν_1, ν_2, DÉSIGNENT DES NOMBRES QUELCONQUES,

n, n_1, n_2, n_3 DES NOMBRES ENTIERS POSITIFS OU NÉGATIFS,

ET h UNE CONSTANTE ARBITRAIRE.

DEUXIÈME MÉMOIRE

PAR

Cte de SPARRE
à LYON.

VI.

Passons maintenant au cas de $n_2 = n_3 = 0$, cas comprenant avec l'équation de Lamé celle de M. Picard.

Posons pour ce cas

$$\operatorname{dn}^2 a_i = x_i, \qquad k^2 \operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i = u_i.$$

Les équations (10) et (12) deviendront alors en les multipliant par une puissance convenable de k

$$\sum_1^\beta u_i = 0, \quad \sum_1^\beta (1 - x_i) u_i = 0, \quad \ldots\ldots \quad \sum_1^\beta (1 - x_i)^{n-2} u_i = 0,$$

$$\sum_1^\beta \frac{u_i}{x_i} = 0, \quad \sum_1^\beta \frac{u_i}{x_i^2} = 0, \quad \sum_1^\beta \frac{x_i - k'^2}{x_i^3} u_i = 0, \quad \ldots\ldots \quad \sum_1^\beta \frac{(x_i - k'^2)^{n_1-2}}{x_i^{n_1}} u_i = 0;$$

ici $\beta = n + n_1$.

En résolvant ces $\beta - 1$ équations linéaires et homogènes par rapport aux quantités u on aura

$$\frac{u_1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ (1 - x_2) & (1 - x_3) & \ldots\ldots & 1 - x_\beta \\ (1 - x_2)^2 & (1 - x_3)^2 & \ldots\ldots & (1 - x_\beta)^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1 - x_2)^{n-2} & (1 - x_3)^{n-2} & \ldots\ldots & \\ \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_3} & \ldots\ldots & \\ \frac{1}{x_2^2} & \frac{1}{x_3^2} & \ldots\ldots & \\ \frac{x_2 - k'^2}{x_2^3} & \frac{x_3 - k'^2}{x_3^3} & \ldots\ldots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{(x_2 - k'^2)^{n_1-2}}{x_2^{n_1}} & \frac{(x_3 - k'^2)^{n_1-2}}{x_3^{n_1}} & \ldots\ldots & \end{vmatrix}} = \ldots\ldots$$

$$\cdots\cdots = \frac{(-1)^{i-1}u_i}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots\cdots & 1 & 1 & \cdots\cdots \\ 1-x_1 & \cdots\cdots & 1-x_{i-1} & 1-x_{i+1} & \cdots\cdots \\ (1-x_1)^2 & \cdots\cdots & (1-x_{i-1})^2 & (1-x_{i+1})^2 & \cdots\cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}$$

Mais on peut transformer ces équations de la manière suivante: Multiplions les dénominateurs de tous les rapports précédants par

$$x_1^{n_1} x_2^{n_1} \cdots\cdots x_\beta^{n_1}$$

nos équations pourront s'écrire

$$\frac{u_1}{x_1^{n_1}\begin{vmatrix} x_2^{n_1} & x_3^{n_1} & \cdots\cdots & x_\beta^{n_1} \\ (1-x_2)x_2^{n_1} & (1-x_3)x_3^{n_1} & \cdots\cdots & (1-x_\beta)x_\beta^{n_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1-x_2)^{n-2}x_2^{n_1} & (1-x_3)^{n-2}x_3^{n_1} & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_2^{n_1-1} & x_3^{n_1-1} & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_2^{n_1-2} & x_3^{n_1-2} & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ (x_2-k'^2)x_2^{n_1-3} & (x_3-k'^2)x_3^{n_1-3} & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (x_2-k'^2)^{n_1-2} & (x_3-k'^2)^{n_1-2} & \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{vmatrix}} = \cdots\cdots$$

Mais je remarquerai que le déterminant qui figure au dénominateur de u_1 est égal au déterminant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_2 & x_3 & \ldots\ldots & x_\beta \\ x_2^2 & x_3^2 & \ldots\ldots & x_\beta^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_2^{\beta-2} & x_3^{\beta-2} & \ldots\ldots & x_\beta^{\beta-2} \end{vmatrix}$$

multiplié par un facteur constant.

En effet si l'on développait les élements du 1^er^ déterminant on verrait que l'un quelconque de ces élements est une fonction entière de l'une des quantités x_2, x_3 ..... x_β de degré $\beta - 2$ au plus, et que, dans une même ligne on passe de l'élement de la première colonne à celui de l'une quelconque des autres en remplaçant x_2 par l'une des quantités x_3 ..... x_β, les coefficients restant les mêmes. Chaque ligne du premier déterminant peut donc être formée par l'addition de plusieurs lignes du déterminant Δ_1 multipliées au préalable par des facteurs constants convenables.

Le premier déterminant est donc égal à Δ_1 multiplié par un facteur constant. Nos équations pourront donc s'écrire

$$\frac{u_1}{x_1^{n_1}\Delta_1} = \frac{-u_2}{x_2^{n_1}\Delta_2} = \ldots\ldots = \frac{(-1)^{i-1}u_i}{x_i^{n_1}\Delta_i} = \ldots\ldots$$

où

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 1 & \ldots\ldots & 1 & 1 & \ldots\ldots \\ x_1 & \ldots\ldots & x_{i-1} & x_{i+1} & \ldots\ldots \\ x_1^2 & \ldots\ldots & x_{i-1}^2 & x_{i+1}^2 & \ldots\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{\beta-2} & \ldots\ldots & x_{i-1}^{\beta-2} & x_{i+1}^{\beta-2} & \ldots\ldots \end{vmatrix}$$

Mais si nous posons (comme à la page 124 du 1[er] mémoire)

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_\beta \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_\beta^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{\beta-1} & x_2^{\beta-1} & \dots & x_\beta^{\beta-1} \end{vmatrix}$$

et

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_\beta)$$

on aura (comme à la page 125 du 1[er] mémoire)

$$J = (-1)^{\beta-1} f'(x_1) J_1 = (-1)^{\beta-2} f'(x_2) J_2 = \dots = (-1)^{\beta-i} f'(x_i) J_i = \dots$$
$$\dots = f'(x_\beta) J_\beta$$

de sorte que nos équations deviennent

$$\frac{u_1 f'(x_1)}{x_1^{n_1}} = \frac{u_2 f'(x_2)}{x_2^{n_1}} = \dots = \frac{u_i f'(x_i)}{x_i^{n_1}} = \dots = \frac{u_\beta f'(x_\beta)}{x_\beta^{n_1}} = \lambda$$

λ désignant la valeur commune de ces expressions.

En remplaçant u_1, u_2, ..., u_β par leurs valeurs ces équations deviennent

$$(51) \qquad \frac{k^2 \operatorname{sn} a_1 \operatorname{cn} a_1 \operatorname{dn} a_1 f'(x_1)}{x_1^{n_1}} = \frac{k^2 \operatorname{sn} a_2 \operatorname{cn} a_2 \operatorname{dn} a_2 f'(x_2)}{x_2^{n_1}} = \dots$$
$$\dots = \frac{k^2 \operatorname{sn} a_\beta \operatorname{cn} a_\beta \operatorname{dn} a_\beta f'(x_\beta)}{x_\beta^{n_1}} = \lambda.$$

Telles sont les équations qui doivent servir à déterminer les coefficients de la fonction $f(x)$ qui égalé à zéro admet pour racines $\operatorname{dn}^2 a_1$, $\operatorname{dn}^2 a_2$ ..... $\operatorname{dn}^2 a_\beta$.

Soit

$$f(x) = x^{\beta} + \alpha_0 x^{\beta-1} + \alpha_1 x^{\beta-2} + \ldots\ldots + \alpha_{\beta-1}.$$

On a d'abord en vertu de la relation (13)

$$h = (2n - 1) \sum_1^{\beta} k^2 \operatorname{sn}^2 a_i - (n + n_1 + \nu_1 + \nu_2)(n + n_1 - \nu_1 - \nu_2)$$
$$- k^2(n + \nu + \nu_2)(n - \nu - \nu_2)$$

et comme

$$\alpha_0 = - \sum_1^{\beta} \operatorname{dn}^2 a_i = -(n + n_1) + \sum_1^{\beta} k^2 \operatorname{sn}^2 a_i$$

on en déduira

$$(52) \qquad \alpha_0 = \frac{h + (n + n_1)(n_1 - n + 1) - (\nu_1 + \nu_2)^2 + k^2(n + \nu + \nu_2)(n - \nu - \nu_2)}{2n - 1}$$

En prenant pour h l'expression dont nous sommes partis on suppose implicitement $n \lesseqgtr 0$.

Mais si n était nul la solution de l'équation se déduirait du cas que nous avons examiné précédemment où $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ en considérant comme inconnue $a_i + K$ au lieu de a_i.

α_0 est donc connu par la relation (52) en fonction des données du problème.

Elevons maintenant les équations (51) au carré elles pourront s'écrire

$$(53) \qquad \frac{-k'^2 + (1 + k'^2)x_1 - x_1^2}{x_1^{2n_1-1}} f'^2(x_1) = \frac{-k'^2 + (1 + k'^2)x_2 - x_2^2}{x_2^{2n_1-1}} f'^2(x_2) = \ldots .$$
$$\ldots = \frac{-k'^2 + (1 + k'^2)x_\beta - x_\beta^2}{x_\beta^{2n_1-1}} f'^2(x_\beta) = \lambda^2.$$

Il résulte de là que l'équation

$$\frac{-k'^2 + (1 + k'^2)x - x^2}{x^{2n_1-1}} f'^2(x) - \lambda^2 = 0$$

admet toutes les racines $x_1, x_2, \ldots\ldots x_\beta$ de $f(x) = 0$ et que par suite son numérateur est divisible par $f(x)$. On aura donc

$$(54) \qquad \frac{-k'^2 + (1 + k'^2)x - x^2}{x^{2n_1-1}} f'^2(x) - \lambda^2 = f(x) f_1(x)$$

$f_1(x)$ étant une fonction de x dont le produit par x^{2n_1-1} est une fonction entière de degré β, car le premier membre de la relation (54) multiplié par x^{2n_1-1} est de degré 2β.

En prenant la dérivée de l'équation (54) on en déduit

$$(55) \qquad \Bigg[2f''(x) \frac{-k'^2 + (1 + k'^2)x - x^2}{x^{2n_1-1}} + f'(x) \frac{(2n_1 - 1)k'^2 - 2(n_1 - 1)(1 + k'^2)x + (2n_1 - 3)x^2}{x^{2n_1}} \Bigg] f'(x) = f'(x) f_1(x) + f_1'(x) f(x).$$

Mais $f'(x)$ étant premier avec $f(x)$, puisque nous supposons toutes les racines de $f(x) = 0$ distinctes, il en résulte que $f'(x)$ divisera le numérateur de $f_1'(x)$ et que l'on aura par suite

$$(56) \qquad f_1'(x) = \frac{Ax + B}{x^{2n_1}} f'(x)$$

A et B étant des constantes.

En effet le produit du second membre de la relation (55) par x^{2n_1} doit être un polynome entier en x de degré 2β.

Mais l'on a

$$f(x) = \sum_0^\beta \alpha_{i-1} x^{\beta - i}$$

$$\frac{f(x)}{x^{2n_1}} = \sum_0^\beta \alpha_{i-1} x^{n - n_1 - i}$$

$$\frac{f'(x)}{x^{2n_1}} = \sum_0^\beta (\beta - i)\alpha_{i-1}x^{n-n_1-i-1}$$

$$\frac{f''(x)}{x^{2n_1-1}} = \sum_0^\beta (\beta - i)(\beta - i - 1)\alpha_{i-1}x^{n-n_1-i-1}.$$

Posons maintenant

$$f_2(x) = 2f''(x)\frac{-k'^2 + (1 + k'^2)x - x^2}{x^{2n_1-1}}$$

$$+ f'(x)\frac{(2n_1 - 1)k'^2 - 2(n_1 - 1)(1 + k'^2)x + (2n_1 - 3)x^2}{x^{2n_1}}$$

ce qui peut s'écrire

$$f_2(x) = \sum_{-1}^\beta [-\alpha_i(\beta - i - 1)(2n - 2i - 1)$$

$$+ 2(1 + k'^2)(\beta - i)(n - i)\alpha_{i-1} - k'^2(\beta - i + 1)(2n - 2i + 1)\alpha_{i-2}]x^{n-n_1-i}.$$

On aura donc en divisant les deux membres de l'équation (55) par $f'(x)$ et en en prenant ensuite la dérivée

$$f_2'(x) = (Ax + B)\frac{f'(x)}{x^{2n_1}} + A\frac{f(x)}{x^{2n_1}} + (Ax + B)D_x\frac{f(x)}{x^{2n_1}}$$

ce qui peut s'écrire

$$f_2'(x) = \sum_{-1}^\beta [A\alpha_i(2n - 2i - 1) + 2B\alpha_{i-1}(n - i)]x^{n-n_1-i-1}$$

et comme d'autre part on aura aussi

$$f_2'(x) = \sum_{-1}^\beta (n - n_1 - i)[-\alpha_i(\beta - i - 1)(2n - 2i - 1)$$

$$+ 2(1 + k'^2)(\beta - i)(n - i)\alpha_{i-1} - k'^2(\beta - i + 1)(2n - 2i + 1)\alpha_{i-2}]x^{n-n_1-i-1}$$

on aura en égalant les coefficients des puissances semblables de x

$$(n - n_1 - i)[- \alpha_i(\beta - i - 1)(2n - 2i - 1) + 2(1 + k'^2)(\beta - i)(n - i)\alpha_{i-1}$$
$$- k'^2(\beta - i + 1)(2n - 2i + 1)\alpha_{i-2}] = A\alpha_i(2n - 2i - 1) + 2B\alpha_{i-1}(n - i);$$

en faisant d'abord $i = -1$ et ensuite $i = 0$ et remarquant que l'on doit prendre

$$\alpha_{-3} = \alpha_{-2} = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_{-1} = 1$$

on obtiendra

$$A = -\beta(n - n_1 + 1)$$
$$B = (2n - 1)\alpha_0 + (n - n_1)\beta(1 + k'^2)$$

et notre équation deviendra par suite

$$(57) \qquad (2n - 2i - 1)(2n - i)(i + 1)\alpha_i - 2(n - i)[(2n - 1)\alpha_0$$
$$+ i(2n - i)(1 + k'^2)]\alpha_{i-1} - k'^2(\beta - i + 1)(2n - 2i + 1)(n - n_1 - i)\alpha_{i-2} = 0,$$

d'où l'on tire

$$(58) \qquad \alpha_i = \frac{(2n - 1)\alpha_0 + i(2n - i)(1 + k'^2)}{(2n - 2i - 1)(2n - i)(i + 1)} 2(n - i)\alpha_{i-1}$$
$$+ \frac{(\beta - i + 1)(2n - 2i + 1)(n - n_1 - i)}{(2n - 2i - 1)(2n - i)(i + 1)} k'^2\alpha_{i-2}$$

Toutefois cette formule donne lieu à une remarque lorsque $n_1 > n$.

En faisant en effet $i = 2n$ dans la relation (58) elle tombe en défaut et la relation (57) devient en la divisant par $(2n - 1)$

$$2n\alpha_0\alpha_{2n-1} - k'^2\alpha_{2n-2}(n_1 - n + 1)(n_1 + n) = 0.$$

C'est une relation entre les quantités déjà connues α_{2n-1} et α_{2n-2} qui devra par suite se réduire à une identité.

Si l'on fait ensuite dans la formule (57) $i = 2n + 1,\ 2n + 2 \ldots\ldots \beta$ on aura en remarquant que $\alpha_\beta = 0$, $n_1 - n$ équations linéaires par rapport aux $n_1 - n$ quantités $\alpha_{2n}, \alpha_{2n+1} \ldots\ldots \alpha_{\beta-1}$ qui permettront de les calculer.

On peut d'ailleurs faire ce calcul de la manière suivante.

Calculons au moyen de la formule (58) où l'on donne à i les valeurs $2n + 1, \ldots\ldots, \beta - 1$

$$\alpha_{2n+1},\ \alpha_{2n+2} \ldots\ldots \alpha_{\beta-1}$$

en fonction de α_0 et de α_{2n}, les expressions que l'on obtiendra pour ces quantités étant toutes linéaires par rapport à α_{2n}, en substituant les valeurs obtenues pour $\alpha_{\beta-2}$ et $\alpha_{\beta-1}$ dans la relation

$$(59) \qquad [(2n - 1)\alpha_0 - \beta(n_1 - n)(1 + k'^2)]\alpha_{\beta-1} - k'^2(2n_1 - 1)\alpha_{\beta-2} = 0$$

que l'on obtient en faisant $i = \beta$ dans l'équation (57), on en déduira la valeur de α_{2n}, la relation (59) étant, d'après ce qui a été dit, linéaire par rapport à cette quantité.

En particulier pour $n_1 = n + 1$, ce qui correspond au cas de l'équation de M. Picard, la relation (59) donnera de suite α_{2n} qui est ici $\alpha_{\beta-1}$.

On peut remarquer, de plus, que l'on pourrait sans nuire à la généralité supposer $n > n_1$. Il suffirait pour cela dans le cas de $n_1 > n$ de considérer comme inconnue $\mathrm{dn}^2(a_i + K)$ au lieu de $\mathrm{dn}^2 a_i$, on retomberait alors sur les équations dont nous sommes partis, mais où n_1 serait remplacé par n et réciproquement.

L'équation $f(x) = 0$ admet pour racines $\mathrm{dn}^2 a_1$, $\mathrm{dn}^2 a_2$, $\ldots\ldots$ $\mathrm{dn}^2 a_\beta$ mais le signe de l'une de ces quantités étant choisi arbitrairement, celui de toutes les autres s'en déduit, la concordance des signes se concluant des formules (51)

$$\frac{k^2 \operatorname{sn} a_1 \operatorname{cn} a_1 \operatorname{dn} a_1}{\mathrm{dn}^{2n_1} a_1} f'(\mathrm{dn}^2 a_1) = \frac{k^2 \operatorname{sn} a_2 \operatorname{cn} a_2 \operatorname{dn} a_2}{\mathrm{dn}^{2n_1} a_2} f'(\mathrm{dn}^2 a_2) = \ldots$$

$$\ldots = \frac{k^2 \operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i}{\mathrm{dn}^{2n_1} a_i} f'(\mathrm{dn}^2 a_i) = \ldots\ldots = \lambda.$$

L'intégrale sera ensuite donnée par la formule (14) ou l'on fait $n_2 = n_3 = 0$; elle sera par suite

$$\mathrm{dn}^{\nu} x\, \mathrm{cn}^{\nu_1} x\, \mathrm{sn}^{\nu_2} x \left[A \frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\ \ldots\ldots\ H(x-a_\beta)}{\Theta_1^{n_1}(x)\Theta^{n}(x)} e^{\frac{C}{2}x} \right.$$

$$\left. + B \frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\ \ldots\ldots\ H(x+a_\beta)}{\Theta_1^{n_1}(x)\Theta^{n}(x)} e^{-\frac{C}{2}x} \right]$$

où l'on a par les formules (9)

$$\frac{C}{2} = \sum_1^\beta \frac{\Theta'(a_i)}{\Theta(a_i)} = \sum_1^\beta \frac{\Theta'_1(a_i)}{\Theta_1(a_i)}$$

VII.

Nous allons maintenant mettre cette intégrale sous la même forme que pour le cas examiné en premier lieu.

Écrivons d'abord l'intégrale de la manière suivante:

$$\mathrm{dn}^{\nu-n_1} x\, \mathrm{cn}^{\nu_1} x\, \mathrm{sn}^{\nu_2} x \left[A \frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\ \ldots\ldots\ H(x-a_\beta)}{\Theta^{\beta}(x)} e^{\frac{C}{2}x} \right.$$

$$\left. + B \frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\ \ldots\ldots\ H(x+a_\beta)}{\Theta^{\beta}(x)} e^{-\frac{C}{2}x} \right]$$

et remarquons que la fonction doublement périodique de deuxième espèce

$$\frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\ \ldots\ldots\ H(x-a_\beta)}{\Theta^{\beta}(x)} e^{\frac{C}{2}x}$$

qui admet les multiplicateurs

$$(-1)^\beta e^{KC} \quad \text{et} \quad e^{iK'C + \frac{i\pi}{K}\sum_1^\beta a_i}$$

peut se mettre sous la forme suivante:

$$e^{\frac{\pi(\beta+1)i}{2K}x}\,\frac{H(x-a_1)\,\ldots\ldots\,H(x-a_\beta)H(x+\omega)}{\theta^{\beta+1}(x)}\,\frac{\theta(x)}{H(x+\omega)}\,e^{-\frac{\pi(\beta+1)i}{2K}x+\frac{C}{2}x}.$$

Mais si l'on prend

$$\omega = \sum_1^\beta a_i + (\beta + 1)iK'$$

le 1^er^ facteur sera une fonction doublement périodique de x aux périodes $2K$ et $2iK'$ et nous allons nous proposer de calculer, comme dans le cas précédent, les coefficients de cette fonction, ainsi que ω et $\frac{C}{2}$ en fonction des coefficients de $f(x)$.

La fonction doublement périodique en question pourra se mettre sous la forme suivante [1]

$$A\varphi(\mathrm{dn}^2 x) - k^2 \,\mathrm{sn}\, x \,\mathrm{cn}\, x \,\mathrm{dn}\, x\,\psi(\mathrm{dn}^2 x)$$

où $\varphi(x)$ est un polynome entier en x de degré m, β étant égal à $2m$ ou à $2m - 1$ et $\psi(x)$ un polynome de degré $m - 1$ si $\beta = 2m$ et de degré $m - 2$ si $\beta = 2m - 1$, c'est à dire dans tous les cas de degré $\beta - m - 1$.

Cette fonction devant être nulle pour $x = a_i$ on a

$$A\varphi(\mathrm{dn}^2 a_i) - k^2 \,\mathrm{sn}\, a_i \,\mathrm{cn}\, a_i \,\mathrm{dn}\, a_i\,\psi(\mathrm{dn}^2 a_i) = 0.$$

On tirera par suite de cette équation et des relations (51)

$$k^2 \,\mathrm{sn}\, a_i \,\mathrm{cn}\, a_i \,\mathrm{dn}\, a_i = \frac{A\varphi(\mathrm{dn}^2 a_i)}{\psi(\mathrm{dn}^2 a_i)} = \frac{\lambda\,\mathrm{dn}^{2m_1} a_i}{f'(\mathrm{dn}^2 a_i)}$$

et par suite en prenant $A = \lambda$

$$\mathrm{dn}^{2m_1} a_i\psi(\mathrm{dn}^2 a_i) = \varphi(\mathrm{dn}^2 a_i)f'(\mathrm{dn}^2 a_i)$$

---

(1) Voir Cours de calcul différentiel et intégral de LACROIX tome 2, Note de M. HERMITE.

et cette relation devant avoir lieu pour toute valeur de $\mathrm{dn}^2 a_i$ qui annule $f(x)$ on devra prendre

$$\mathrm{dn}^{2n_1} x \psi(\mathrm{dn}^2 x) = \varphi(\mathrm{dn}^2 x) f'(\mathrm{dn}^2 x) - f(\mathrm{dn}^2 x)\theta(\mathrm{dn}^2 x)$$

ou en remplaçant $\mathrm{dn}^2 x$ par x

$$x^{n_1}\psi(x) = \varphi(x)f'(x) - \theta(x)f(x) \tag{61}$$

$\theta(x)$ étant un polynome entier en x de degré $m - 1$.

On voit facilement, comme dans le cas précédant, que l'on peut toujours déterminer les coefficients de $\varphi(x)$, $\theta(x)$ et $\psi(x)$ au moyen de l'équation (61).

Il suffit de remarquer que les coefficients des divers puissances de x dans les deux membres de (61) sont linéaires et homogènes par rapport aux coefficients de $\varphi(x)$, $\theta(x)$ et $\psi(x)$ et comme le second membre est dans tous les cas de degré $\beta + m - 1$ en égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, cela fera $\beta + m$ équations, qui étant linéaires et homogènes par rapport aux $\beta + m + 1$ coefficients inconnus permettront de les calculer à un facteur près. On peut opérer de la manière suivante.

On obtiendra d'abord les coefficients de $\theta(x)$ et $\varphi(x)$ en égalant à zéro, dans le second membre les coefficients des puissances de x inférieures à n_1 et supérieures à $n_1 + \beta - m - 1$ ce qui fera $2m$ équations linéaires et homogènes par rapport aux $2m + 1$ coefficients de $\varphi(x)$ et $\theta(x)$, ne contenant pas les coefficients de $\psi(x)$. On obtiendra ensuite les coefficients des $\psi(x)$ en fonction de ceux de $\theta(x)$ et $\varphi(x)$, qui sont maintenant connus, en égalant dans les deux membres de la relation (61) les coefficients des puissances de x supérieures à $n_1 - 1$ et inférieures à $n_1 + \beta - m$ ce qui donnera bien $\beta - m$ équations.

Posons comme dans le cas précédant

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\ldots + A_m x^m$$

$$\theta(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots\ldots + B_{m-1} x^{m-1}$$

$$\psi(x) = R_0 + R_1 x + R_2 x^2 + \ldots\ldots + R_{\beta-m-1} x^{\beta-m-1}.$$

Nos $2m$ premières équations pourront s'écrire comme il suit

$$(n_1 \text{ équations}) \left\{ \begin{array}{l} A_0\alpha_{\beta-2} - B_0\alpha_{\beta-1} = 0 \\ 2A_0\alpha_{\beta-3} + A_1\alpha_{\beta-2} - B_0\alpha_{\beta-2} - B_1\alpha_{\beta-1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ n_1A_0\alpha_{\beta-n_1-1} + (n_1 - 1)A_1\alpha_{\beta-n_1} \dots\dots - B_0\alpha_{\beta-n_1} \\ \qquad\qquad - B_1\alpha_{\beta-n_1+1} \dots\dots = 0 \end{array} \right.$$

$$(2m - n_1 \text{ équations}) \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots A_{m-1}(\beta + n_1 - 2m + 2)\alpha_{2m-n_1-3} \\ \qquad + A_m(\beta + n_1 - 2m + 1)\alpha_{2m-n_1-2} - \dots \\ \qquad\qquad \dots - B_{m-2}\alpha_{2m-n_1-3} - B_{m-1}\alpha_{2m-n_1-2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta A_m - B_{m-1} = 0. \end{array} \right.$$

On tirera de là (comme nous l'avons fait dans le cas examiné précédemment de $n_1 = n_2 = n_3 = 0$) les coefficients de $\theta(x)$ et $\varphi(x)$.

Ces coefficients étant connus on aura ensuite pour les coefficients de $\psi(x)$

$$R_s = \sum_{i=0}^{i=m} (n_1 + s - i + 1)A_i\alpha_{n-s+i-2} - \sum_{i=0}^{i=m-1} B_i\alpha_{n-s+i-1},$$

en convenant toujours de prendre $\alpha_i = 0$ pour $i < -1$ ou $i > \beta - 1$.

Ayant ainsi déterminé $\varphi(x)$, $\theta(x)$ et $\psi(x)$ nous aurons par un choix convenable de la constante A

$$(62) \qquad \lambda\varphi(\mathrm{dn}^2 x) - k^2 \,\mathrm{sn}\, x \,\mathrm{cn}\, x \,\mathrm{dn}\, x\psi(\mathrm{dn}^2 x)$$

$$= Ae^{\frac{\pi(\beta+1)i}{2K}x} \frac{H(x - a_1)H(x - a_2) \dots\dots H(x - a_\beta)H(x + \omega)}{\Theta^{\beta+1}(x)}$$

car le 1[er] membre qui admet les zéros $a_1, a_2 \dots\dots a_\beta$ admettra aussi puisqu'il est doublement périodique aux périodes $2K$ et $2iK'$ le zéro

$$-\omega = -\left[\sum_1^\beta a_i + (\beta + 1)iK'\right],$$

puisque la somme de ses infinis $(\beta + 1)iK'$ ne doit, en vertu du théorème de M. Liouville, différer de celle des zéro que par des multiples des périodes $2K$ et $2iK'$.

En changeant x en $-x$ on aura ensuite

$$\text{(63)} \qquad \lambda\varphi(\mathrm{dn}^2 x) + k^2 \mathrm{sn}\, x \,\mathrm{cn}\, x \,\mathrm{dn}\, x \psi(\mathrm{dn}^2 x)$$

$$= (-1)^{\beta+1} A e^{-\frac{\pi(\beta+1)i}{2K}x} \frac{H(x + a_1)H(x + a_2) \ldots\ldots H(x + a_\beta)H(x - \omega)}{\Theta^{\beta+1}(x)}$$

On en déduit d'abord en faisant le produit des relations (62) et (63)

$$\lambda^2\varphi^2(\mathrm{dn}^2 x) - k^4 \mathrm{sn}^2 x \,\mathrm{cn}^2 x \,\mathrm{dn}^2 x \psi^2(\mathrm{dn}^2 x) = S(\mathrm{dn}^2 x - \mathrm{dn}^2 \omega) f(\mathrm{dn}^2 x)$$

S désignant une constante, ou en remplaçant $\mathrm{dn}^2 x$ par x

$$\lambda^2\varphi^2(x) - [-k'^2 x + (1 + k'^2)x^2 - x^3]\psi^2(x) = S(x - \mathrm{dn}^2 \omega)f(x);$$

en égalant d'abord dans les deux membres le coefficient de x et le terme constant on aura

$$\text{(64)} \qquad \begin{cases} \lambda^2 A_0^2 = -S\, \mathrm{dn}^2 \omega\, \alpha_{\beta-1} \\ 2\lambda^2 A_0 A_1 + k'^2 R_0^2 = S(\alpha_{\beta-1} - \mathrm{dn}^2 \omega\, \alpha_{\beta-2}). \end{cases}$$

Égalant ensuite dans les deux membres les coefficients des puissances $(\beta + 1)$ de x

1° si $\beta = 2m$ on aura

$$\text{(65)} \qquad R_{m-1}^2 = S$$

et par suite pour ce cas les équations (64) et (65) donnent

$$\text{(66)} \qquad \mathrm{dn}^2 \omega = -\frac{\lambda^2 A_0^2}{R_{m-1}^2 \alpha_{\beta-1}} \quad \text{et} \quad \lambda^2 = \frac{\alpha_{\beta-1}}{A_0} \frac{R_{m-1}^2 \alpha_{\beta-1} - k'^2 R_0^2}{2A_1 \alpha_{\beta-1} - A_0 \alpha_{\beta-2}};$$

2° si $\beta = 2m - 1$ on aura

$$\lambda^2 A_m^2 = S \tag{67}$$

et pour ce cas on déduira des équations (64) et (67)

$$\mathrm{dn}^2\,\omega = -\frac{A_0^2}{A_m^2 a_{\beta-1}} \quad \text{et} \quad \lambda^2 = \frac{k'^2 R_0^2 a_{\beta-1}}{A_0^2 a_{\beta-2} + A_m^2 a_{\beta-1}^2 - 2A_0 A_1 a_{\beta-1}}. \tag{68}$$

Les formules (66) et (68) donnent dans tous les cas les valeurs de λ et ω au signe près. On obtiendra ensuite la concordance des signes entre λ et ω en remarquant qu'en vertu de la relation (63)

$$\lambda\varphi\,(\mathrm{dn}^2\,x) + k^2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x\,\psi\,(\mathrm{dn}^2\,x)$$

est nul pour $x = \omega$.

On a donc

$$\lambda = -\,k^2\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega\,\frac{\psi(\mathrm{dn}^2\,\omega)}{\varphi(\mathrm{dn}^2\,\omega)}$$

relation qui, le signe de ω étant pris arbitrairement, donnera celui de λ.

Il faut maintenant obtenir $\frac{C}{2}$ en fonction de ω.

On a par les formules (9)

$$\frac{C}{2} = \sum_1^{\beta} \frac{\theta'_1(a_i)}{\theta_1(a_i)}.$$

Si dans la relation (62) on change maintenant x en $x + K + iK'$ elle devient

$$\lambda\varphi\,[\mathrm{dn}^2\,(x + K + iK')]$$

$$-\,k^2\,\mathrm{sn}\,(x + K + iK')\,\mathrm{cn}\,(x + K + iK')\,\mathrm{dn}\,(x + K + iK')\,\psi[\mathrm{dn}^2\,(x + K + iK')]$$

$$= Ae^{\frac{\pi(\beta+1)i}{2}}\,e^{\frac{\pi(\beta+1)i}{2K}x}\,\frac{\theta_1(x - a_1)\theta_1(x - a_2)\,\ldots\ldots\,\theta_1(x - a_\beta)\theta_1(x + \omega)}{H_1^{\beta+1}(x)}$$

et en prenant la dérivée logarithmique de cette expression et y faisant ensuite $x = 0$

$$-\frac{k'^2 R_0}{\lambda A_0} = \frac{\pi(\beta+1)i}{2K} - \sum_1^{\beta} \frac{\theta'_1(a_i)}{\theta_1(a_i)} + \frac{\theta'_1(\omega)}{\theta_1(\omega)}$$

d'où

$$\frac{C}{2} - \frac{\pi(\beta+1)i}{2K} = \frac{\theta'_1(\omega)}{\theta_1(\omega)} + \frac{k'^2 R_0}{\lambda A_0}.$$

On aura donc enfin pour l'intégrale cherchée

$$\begin{aligned} \mathrm{dn}^{\nu-n_1} x\, \mathrm{cn}^{\nu_1} x\, \mathrm{sn}^{\nu_2} x \Bigg[& A[\lambda\varphi(\mathrm{dn}^2 x) - k^2 \mathrm{sn}\, x\, \mathrm{cn}\, x\, \mathrm{dn}\, x \psi(\mathrm{dn}^2 x)] \\ & \times \frac{\theta(x)}{H(x+\omega)} e^{\left[\frac{\theta'_1(\omega)}{\theta_1(\omega)} + \frac{k'^2 R_0}{\lambda A_0}\right] x} \\ & + B[\lambda\varphi(\mathrm{dn}^2 x) + k^2 \mathrm{sn}\, x\, \mathrm{cn}\, x\, \mathrm{dn}\, x \psi(\mathrm{dn}^2 x)] \frac{\theta(x)}{H(x-\omega)} e^{-\left[\frac{\theta'_1(\omega)}{\theta_1(\omega)} + \frac{k'^2 R_0}{\lambda A_0}\right] x} \Bigg], \end{aligned}$$

toutes les quantités qui figurent dans cette intégrale se calculant comme nous l'avons dit en fonction des données n, n_1, ν, ν_1, ν_2 et h.

VIII.

Revenons maintenant au cas général où n, n_1, n_2, n_3 sont tous quatres différents de zéro, et posons

$$\operatorname{sn}^2 a_i = x_i, \quad \operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i = u_i.$$

Les équations (10) et (12) deviendront

$$\sum_1^\beta \frac{u_i}{x_i} = 0, \quad \sum_1^\beta \frac{u_i}{1 - x_i} = 0, \quad \sum_1^\beta \frac{u_i}{1 - k^2 x_i} = 0$$

$$\sum_1^\beta u_i = 0, \quad \sum_1^\beta u_i x_i = 0, \quad \ldots\ldots \quad \sum_1^\beta u_i x_i^{n-2} = 0$$

$$\sum_1^\beta \frac{u_i}{(1 - k^2 x_i)^2} = 0, \quad \sum_1^\beta \frac{(1 - x_i) u_i}{(1 - k^2 x_i)^3} = 0, \quad \ldots\ldots \quad \sum_1^\beta \frac{(1 - x_i)^{n_1 - 2} u_i}{(1 - k^2 x_i)^{n_1}} = 0$$

$$\sum_1^\beta \frac{u_i}{(1 - x_i)^2} = 0, \quad \sum_1^\beta \frac{(1 - k^2 x_i) u_i}{(1 - x_i)^3} = 0, \quad \ldots\ldots \quad \sum_1^\beta \frac{(1 - k^2 x_i)^{n_2 - 2} u_i}{(1 - x_i)^{n_2}} = 0$$

$$\sum_1^\beta \frac{u_i}{x_i^2} = 0, \quad \sum_1^\beta \frac{u_i}{x_i^3} = 0, \quad \ldots\ldots \quad \sum_1^\beta \frac{u_i}{x_i^{n_3}} = 0.$$

En résolvant ces $\beta - 1$ équations par rapport aux β quantités u_i, ce qui est possible puisqu'elles sont homogènes par rapport à ces quantités on aura

$$\frac{u_1}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots\cdots & 1 \\ x_2 & \cdots\cdots & x_\beta \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ x_2^{n-2} & \cdots\cdots & x_\beta^{n-2} \\ \dfrac{1}{1-k^2x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{1}{1-k^2x_\beta} \\ \dfrac{1}{(1-k^2x_2)^2} & \cdots\cdots & \dfrac{1}{(1-k^2x_\beta)^2} \\ \dfrac{1-x_2}{(1-k^2x_2)^3} & \cdots\cdots & \dfrac{1-x_\beta}{(1-k^2x_\beta)^3} \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \dfrac{(1-x_2)^{n_1-2}}{(1-k^2x_2)^{n_1}} & \cdots\cdots & \dfrac{(1-x_\beta)^{n_1-2}}{(1-k^2x_\beta)^{n_1}} \\ \dfrac{1}{1-x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{1}{1-x_\beta} \\ \dfrac{1}{(1-x_2)^2} & \cdots\cdots & \dfrac{1}{(1-x_\beta)^2} \\ \dfrac{1-k^2x_2}{(1-x_2)^3} & \cdots\cdots & \dfrac{1-k^2x_\beta}{(1-x_\beta)^3} \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \dfrac{(1-k^2x_2)^{n_2-2}}{(1-x_2)^{n_2}} & \cdots\cdots & \dfrac{(1-k^2x_\beta)^{n_2-2}}{(1-x_\beta)^{n_2}} \\ \dfrac{1}{x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{1}{x_\beta} \\ \dfrac{1}{x_2^2} & \cdots\cdots & \dfrac{1}{x_\beta^2} \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \dfrac{1}{x_2^{n_3}} & \cdots\cdots & \dfrac{1}{x_\beta^{n_3}} \end{vmatrix}} = \frac{-u_2}{\begin{vmatrix} \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot \end{vmatrix}} = \cdots\cdots$$

Mais on peut transformer ces équations de façon à les mettre sous une forme beaucoup plus simple.

Multiplions d'abord les dénominateurs de tous les rapports précédants par $(1 - k^2x_1)^{n_1}(1 - k^2x_2)^{n_1} \,.\,.\,.\,.\,.\, (1 - k^2x_\beta)^{n_1}(1 - x_1)^{n_2}(1 - x_2)^{n_2} \ldots$ $\ldots (1 - x_\beta)^{n_2} x_1^{n_3} x_2^{n_3} \,.\,.\,.\,.\,.\, x_\beta^{n_3}$.

Nos rapports prendront la forme suivante

$$
\frac{u_1}{(1 - k^2x_1)^{n_1}(1 - x_1)^{n_2}x_1^{n_3} \left|\begin{array}{l}
(1 - k^2x_2)^{n_1}(1 - x_2)^{n_2}x_2^{n_3} \ldots\ldots\ldots \\
(1 - k^2x_2)^{n_1}(1 - x_2)^{n_2}x_2^{n_3+1} \ldots\ldots \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
(1 - k^2x_2)^{n_1}(1 - x_2)^{n_2}x_2^{n_3+n-2} \ldots\ldots \\
(1 - k^2x_2)^{n_1-1}(1 - x_2)^{n_2}x_2^{n_3} \ldots\ldots \\
(1 - k^2x_2)^{n_1-2}(1 - x_2)^{n_2}x_2^{n_3} \ldots\ldots \\
(1 - k^2x_2)^{n_1-3}(1 - x_2)^{n_2+1}x_2^{n_3} \ldots\ldots \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
(1 - x_2)^{n_1+n_2-2}x_2^{n_3} \ldots\ldots\ldots\ldots \\
(1 - k^2x_2)^{n_1}(1 - x_2)^{n_2-1}x_2^{n_3} \ldots\ldots \\
(1 - k^2x_2)^{n_1}(1 - x_2)^{n_2-2}x_2^{n_3} \ldots\ldots \\
(1 - k^2x_2)^{n_1+1}(1 - x_2)^{n_2-3}x_2^{n_3} \ldots\ldots \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
(1 - k^2x_2)^{n_1+n_2-2}x_2^{n_3} \ldots\ldots\ldots\ldots \\
(1 - k^2x_2)^{n_1}(1 - x_2)^{n_2}x_2^{n_3-1} \ldots\ldots \\
(1 - k^2x_2)^{n_1}(1 - x_2)^{n_2}x_2^{n_3-2} \ldots\ldots \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
(1 - k^2x_2)^{n_1}(1 - x_2)^{n_2} \ldots\ldots\ldots
\end{array}\right|} = \ldots\ldots
$$

Mais nous remarquerons que le déterminant

$$\begin{vmatrix}
(1-k^2x_2)^{n_1}(1-x_2)^{n_2}x_2^{n_3} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1}(1-x_\beta)^{n_2}x_\beta^{n_3} \\
(1-k^2x_2)^{n_1}(1-x_2)^{n_2}x_2^{n_3+1} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1}(1-x_\beta)^{n_2}x_\beta^{n_3+1} \\
\dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots \\
(1-k^2x_2)^{n_1}(1-x_2)^{n_2}x_2^{n_3+n-2} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1}(1-x_\beta)^{n_2}x_\beta^{n_3+n-2} \\
(1-k^2x_2)^{n_1-1}(1-x_2)^{n_2}x_2^{n_3} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1-1}(1-x_\beta)^{n_2}x_\beta^{n_3} \\
(1-k^2x_2)^{n_1-2}(1-x_2)^{n_2}x_2^{n_3} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1-2}(1-x_\beta)^{n_2}x_\beta^{n_3} \\
(1-k^2x_2)^{n_1-3}(1-x_2)^{n_2+1}x_2^{n_3} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1-3}(1-x_\beta)^{n_2+1}x_\beta^{n_3} \\
\dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots \\
(1-x_2)^{n_2+n_1-2}x_2^{n_3} & \dots\dots & (1-x_\beta)^{n_1+n_2-2}x_\beta^{n_3} \\
(1-k^2x_2)^{n_1}(1-x_2)^{n_2-1}x_2^{n_3} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1}(1-x_\beta)^{n_2-1}x_\beta^{n_3} \\
(1-k^2x_2)^{n_1}(1-x_2)^{n_2-2}x_2^{n_3} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1}(1-x_\beta)^{n_2-2}x_\beta^{n_3} \\
(1-k^2x_2)^{n_1+1}(1-x_2)^{n_2-3}x_2^{n_3} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1+1}(1-x_\beta)^{n_2-3}x_\beta^{n_3} \\
\dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots \\
(1-k^2x_2)^{n_1+n_2-2}x_2^{n_3} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1+n_2-2}x_\beta^{n_3} \\
(1-k^2x_2)^{n_1}(1-x_2)^{n_2}x_2^{n_3-1} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1}(1-x_\beta)^{n_2}x_\beta^{n_3-1} \\
(1-k^2x_2)^{n_1}(1-x_2)^{n_2}x_2^{n_3-2} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1}(1-x_\beta)^{n_2}x_\beta^{n_3-2} \\
\dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots \\
(1-k^2x_2)^{n_1}(1-x_2)^{n_2} & \dots\dots & (1-k^2x_\beta)^{n_1}(1-x_\beta)^{n_2}
\end{vmatrix}$$

est égal au déterminant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_2 & x_3 & \ldots\ldots & x_\beta \\ x_2^2 & x_3^2 & \ldots\ldots & x_\beta^2 \\ x_2^3 & x_3^3 & \ldots\ldots & x_\beta^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ x_2^{\beta-2} & x_3^{\beta-2} & \ldots\ldots & x_\beta^{\beta-2} \end{vmatrix}$$

multiplié par un facteur constant.

En effet si l'on développait chaque élément du premier déterminant, on verrait que ces éléments sont des fonctions entières de l'une des quantités x_2, x_3, ... x_β de degré $\beta - 2$ au plus, et que, dans une même ligne on passe de l'élément de la 1ère colonne à celui de l'une quelconque des autres en remplaçant x_2 par l'une des quantités x_3, x_4, ... x_β, les coefficients restant les mêmes. Chaque ligne du premier déterminant peut donc être formée par l'addition de plusieurs lignes du déterminant Δ_1 multipliées au préalable par des facteurs constants convenablement choisis. Il résulte de là que le premier déterminant est égal à Δ_1 multiplié par un facteur constant.

Ce que nous venons de dire pour le dénominateur de u_1 s'appliquant à celui de l'une quelconque des quantités u on aura pour nos équations

$$\frac{u_1}{x_1^{n_3}(1 - x_1)^{n_2}(1 - k^2 x_1)^{n_1}\Delta_1} = \frac{-u_2}{x_2^{n_3}(1 - x_2)^{n_2}(1 - k^2 x_2)^{n_1}\Delta_2} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{(-1)^{i-1} u_i}{x_i^{n_3}(1 - x_i)^{n_2}(1 - k^2 x_i)^{n_1}\Delta_i} = \ldots$$

où

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_{i-1} & x_{i+1} & \ldots\ldots & x_\beta \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots\ldots & x_{i-1}^2 & x_{i+1}^2 & \ldots\ldots & x_\beta^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ x_1^{\beta-2} & x_2^{\beta-2} & \ldots\ldots & x_{i-1}^{\beta-2} & x_{i+1}^{\beta-2} & \ldots\ldots & x_\beta^{\beta-2} \end{vmatrix}.$$

Mais si l'on pose comme précédemment:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_\beta)$$

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_\beta \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots\ldots & x_\beta^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x_1^{\beta-1} & x_2^{\beta-1} & \ldots\ldots & x_\beta^{\beta-1} \end{vmatrix}$$

on en déduira au moyen du théorème de VANDERMONDE

$$\varDelta = (-1)^{\beta-1}\varDelta_1 f'(x_1) = (-1)^{\beta-2}\varDelta_2 f'(x_2) = \ldots\ldots = (-1)^{\beta-i}\varDelta_i f'(x_i) = \ldots$$
$$\ldots = \varDelta_\beta f'(x_\beta)$$

de sorte que nos équations deviendront

$$\frac{u_1 f'(x_1)}{x_1^{n_3}(1-x_1)^{n_2}(1-k^2x_1)^{n_1}} = \frac{u_2 f'(x_2)}{x_2^{n_3}(1-x_2)^{n_2}(1-k^2x_2)^{n_1}} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{u_i f'(x_i)}{x_i^{n_3}(1-x_i)^{n_2}(1-k^2x_i)^{n_1}} = \ldots\ldots = \lambda$$

en désignant par λ la valeur commune de ces rapports. Mais ces équations peuvent s'écrire

$$(69)\qquad \frac{f'(\mathrm{sn}^2 a_1)}{\mathrm{sn}^{2n_3-1} a_1 \,\mathrm{cn}^{2n_2-1} a_1 \,\mathrm{dn}^{2n_1-1} a_1} = \frac{f'(\mathrm{sn}^2 a_2)}{\mathrm{sn}^{2n_3-1} a_2 \,\mathrm{cn}^{2n_2-1} a_2 \,\mathrm{dn}^{2n_1-1} a_2} = \ldots$$
$$= \ldots \frac{f'(\mathrm{sn}^2 a_i)}{\mathrm{sn}^{2n_3-1} a_i \,\mathrm{cn}^{2n_2-1} a_i \,\mathrm{dn}^{2n_1-1} a_i} = \ldots\ldots = \lambda;$$

en les élévant au carré on pourra les écrire

$$\frac{f'^2(x_1)}{x_1^{2n_3-1}(1-x_1)^{2n_2-1}(1-k^2x_1)^{2n_1-1}} = \frac{f'^2(x_2)}{x_2^{2n_3-1}(1-x_2)^{2n_2-1}(1-k^2x_2)^{2n_1-1}} = \ldots,$$
$$\ldots = \frac{f'^2(x_i)}{x_i^{2n_3-1}(1-x_i)^{2n_2-1}(1-k^2x_i)^{2n_1-1}} = \ldots\ldots = \lambda^2.$$

Il résulte de cette dernière relation que l'équation

$$(70)\qquad \frac{f'^2(x)}{x^{2n_3-1}(1-x)^{2n_2-1}(1-k^2x)^{2n_1-1}} - \lambda^2 = 0$$

admet toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$.

Cette remarque nous servira comme dans les cas précédants à calculer les coefficients de $f(x)$.

Soit toujours

$$f(x) = x^\beta + \alpha_0 x^{\beta-1} + \ldots\ldots + \alpha_{\beta-2}x + \alpha_{\beta-1}$$

c'est à dire

$$f(x) = \sum_0^\beta \alpha_{i-1} x^{\beta-i}$$

on aura d'abord en vertu de la 1ère des relations (13)

$$\alpha_0 = -\sum_1^\beta \mathrm{sn}^2\, a_i$$

$$= \frac{(\nu_1+\nu_2+n+n_1)(\nu_1+\nu_2-n-n_1)+k^2(\nu+\nu_2+n+n_2)(\nu+\nu_2-n-n_2)-h}{(2n-1)k^2}.$$

On pourrait en partant de la relation (70) opérer comme nous l'avons fait dans les cas précédants, mais la relation entre les coefficients α serait beaucoup plus compliquée car elle comprendrait cinq coefficients consécutifs. Nous procéderons par suite d'une façon un peu différente.

L'équation (70) admettant toutes les racines de $f(x) = 0$, il en sera de même de l'équation suivante:

$$f'^2(x) - \lambda^2 x^{2n_3-1}(1-x)^{2n_2-1}(1-k^2x)^{2n_1-1} = 0$$

et comme le premier membre de cette dernière équation est entier, on aura en désignant par $f_1(x)$ une fonction entière de x de degré $\beta - 2$

$$(71)\qquad f'^2(x) - \lambda^2 x^{2n_3-1}(1-x)^{2n_2-1}(1-k^2x)^{2n_1-1} = f(x)f_1(x).$$

Prenons la dérivée de cette équation nous aurons

$$2f'(x)f''(x) - \lambda^2\{2n_3 - 1 - 2[n_3 + n_2 - 1 + k^2(n_3 + n_1 - 1)]x$$
$$+ (2n_3 + 2n_2 + 2n_1 - 3)k^2x^2\}x^{2n_3-2}(1 - x)^{2n_2-2}(1 - k^2x)^{2n_1-2}$$
$$= f'(x)f_1(x) + f(x)f_1'(x);$$

éliminons λ^2 entre cette équation et la précédante nous pourrons écrire le résultat de la manière suivante:

$$f'(x)\big[2x(1 - x)(1 - k^2x)f''(x) - \{2n_3 - 1 - 2[n_3 + n_2 - 1 + k^2(n_3 + n_1 - 1)]x$$
$$+ (2n_3 + 2n_2 + 2n_1 - 3)k^2x^2\}f'(x) - x(1 - x)(1 - k^2x)f_1(x)\big]$$
$$= f(x)\big[x(1 - x)(1 - k^2x)f_1'(x) - \{2n_3 - 1 - 2[n_3 + n_2 - 1 + k^2(n_3 + n_1 - 1)]x$$
$$+ (2n_3 + 2n_2 + 2n_1 - 3)k^2x^2\}f_1(x)\big];$$

mais $f(x)$ étant premier avec $f'(x)$ puisque toutes les racines de $f(x) = 0$ sont distinctes on devra avoir

$$x(1 - x)(1 - k^2x)f_1'(x) - \{2n_3 - 1 - 2[n_3 + n_2 - 1 + k^2(n_3 + n_1 - 1)]x$$
$$+ (2n_3 + 2n_2 + 2n_1 - 3)k^2x^2\}f_1(x) = (Ax + B)f'(x)$$

A et B étant des constantes puisque le premier membre est de degré β et qu'il doit en être de même du second.

On en déduit ensuite

$$2x(1 - x)(1 - k^2x)f''(x) - \{2n_3 - 1 - 2[n_3 + n_2 - 1 + k^2(n_3 + n_1 - 1)]x$$
$$+ (2n_3 + 2n_2 + 2n_1 - 3)k^2x^2\}f'(x) - x(1 - x)(1 - k^2x)f_1(x) = (Ax + B)f(x).$$

Soit

$$f_1(x) = \sum_2^{\beta} \mu_{i-2}x^{\beta-i}$$

en convenant toujours, dans ce qui suivra, que $\mu_i = 0$ pour $i < 0$ ou $i > \beta - 2$.

On trouvera d'abord en égalant entre eux les premiers coefficients de x dans les deux relations précédantes

$$A = -k^2\beta(\beta - 2n - 1)$$

$$B = -\beta[(n - n_3)(1 + k^2) + (n_1 - n_2)k'^2] - k^2\alpha_0(2n - 1).$$

Ensuite en égalant dans les deux membres de la 1ère relation les coefficients de $x^{\beta-i-1}$ et remplaçant A et B par leurs valeurs on a

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned} &(\beta - 2n_3 - i)\mu_{i-1} + [(n_3 - n + i)(1 + k^2) + (n_2 - n_1)k'^2]\mu_i \\ &\quad - k^2(\beta - 2n + i)\mu_{i+1} + k^2\beta(\beta - 2n - 1)(\beta - i - 1)\alpha_i \\ &+ \{\beta[(n - n_3)(1 + k^2) + (n_1 - n_2)k'^2] + k^2(2n - 1)\alpha_0\}(\beta - i)\alpha_{i-1} = 0. \end{aligned}\right.$$

Puis égalant dans les deux membres de la 2de relation les coefficients de $x^{\beta-i}$ et remplaçant A et B par leurs valeurs on a

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned} &k^2\alpha_i[\beta(\beta - 2i - 2) - (i + 1)(2n - 2i - 1)] + \alpha_{i-1}\{-\beta(\beta - 2i)(1 + k^2) \\ &\quad + 2i[n + n_1 - i + k^2(n + n_2 - i)] + (2n - 1)k^2\alpha_0\} \\ &+ \alpha_{i-2}(\beta - i + 1)(2\beta - 2i - 2n_3 + 1) - \mu_{i-1} + (1 + k^2)\mu_i - k^2\mu_{i+1} = 0. \end{aligned}\right.$$

En éliminant ensuite μ_{i+1} entre ces deux relations on en déduit

$$(74)\quad \left\{\begin{aligned} &2(n_1 + n_2)\mu_{i-1} - 2(n_1 + n_2k^2)\mu_i - k^2(i + 1)(2n - 2i - 1)(2n - i)\alpha_i \\ &\quad + 2\{(2n - 1)(n - i)k^2\alpha_0 + \beta(\beta - 2i)(n_1 + n_2k^2) \\ &\quad + i(2n - i)[(n - i)(1 + k^2) + n_1 + n_2k^2]\}\alpha_{i-1} \\ &\quad - (\beta - 2n + i)(\beta - i + 1)(2\beta - 2n_3 - 2i + 1)\alpha_{i-2} = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation lorsqu'on y suppose $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ (et par suite $\beta = n$) donne l'équation (23) de la page 128.

On calculera ensuite les coefficients α et μ de la manière suivante. En faisant d'abord $i = -1$ et $i = 0$ l'une des équations (72) ou (73) donnera μ_0 et μ_1. Cela fait en faisant $i = 1$ dans (74) on aura α_1. α_1 étant connu la formule (73), par exemple, donnera en y faisant $i = 1$

μ_2, on obtiendra ensuite α_2 au moyen de la formule (74) où l'on fera $i = 2$, et ainsi de suite.

D'une façon générale si l'on connait $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_s$ et $\mu_0, \mu_1, \ldots\ldots \mu_s$, la formule (73) donnera μ_{s+1} en y faisant $i = s$ et μ_{s+1} étant connu la formule (74) donnera α_{s+1} en y faisant $i = s + 1$.

Nous obtiendrons donc de la sorte tous les coefficients μ et α.

Il y a toutefois lieu de faire une remarque pour le cas où $\beta > 2n + 1$, car en faisant $i = 2n$ on n'obtiendra pas la valeur de α_{2n} et en donnant à i cette valeur dans (74) cette relation, qui a lieu entre des quantités déjà connues, devra se reduire à une identité.

On opérera dans ce cas de la manière suivante.

On calculera les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{2n-1}$ et $\mu_0, \mu_1, \ldots\ldots \mu_{2n}$ en fonction de α_0 au moyen des équations (73) et (74) comme nous l'avons indiqué. On calculera ensuite les coefficients $\alpha_{2n+1}, \alpha_{2n+2}, \ldots\ldots \alpha_{\beta-1}$ et $\mu_{2n+1}, \mu_{2n+2}, \ldots\ldots \mu_{\beta-2}$ en fonction de α_0 et α_{2n} au moyen des mêmes équations où l'on donne à i les valeurs $2n$, $2n + 1$, $\ldots\ldots \beta - 1$ dans (73) et $2n + 1, \ldots\ldots \beta - 1$ dans (74). Les expressions que l'on obtiendra ainsi seront toutes linéaires par rapport à α_{2n}. En faisant ensuite $i = \beta$ dans (73) ou (74) on obtient la relation

$$(75)\quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha_{\beta-1}\{\beta[(n - n_3)(1 + k^2) + (n_1 - n_2)k'^2] + (2n - 1)k^2\alpha_0\} \\ &\qquad - (2n_3 - 1)\alpha_{\beta-2} = 0 \end{aligned} \right.$$

et $\alpha_{\beta-1}$ et $\alpha_{\beta-2}$ étant linéaires par rapport à α_{2n} cette relation fera connaître cette dernière quantité.

L'équation qui admet pour racines $\operatorname{sn}^2 a_1$, $\operatorname{sn}^2 a_2$ $\ldots\ldots$ $\operatorname{sn}^2 a_\beta$ étant ainsi connue, la concordance des signes entre les quantités $a_1, a_2, \ldots\ldots a_\beta$ sera fournie par les relations (69)

$$\frac{f'(\operatorname{sn}^2 a_1)}{\operatorname{sn}^{2n_3-1} a_1 \operatorname{cn}^{2n_2-1} a_1 \operatorname{dn}^{2n_1-1} a_1} = \ldots\ldots = \frac{f'(\operatorname{sn}^2 a_i)}{\operatorname{sn}^{2n_3-1} a_i \operatorname{cn}^{2n_2-1} a_i \operatorname{dn}^{2n_1-1} a_i} = \ldots\ldots = \lambda,$$

qui lorsque le signe de a_1 aura été choisi arbitrairement fera connaître celui de toutes les autres quantités.

L'intégrale générale sera donnée ensuite par la formule (14)

$$\operatorname{dn}^{\nu} x \operatorname{cn}^{\nu_1} x \operatorname{sn}^{\nu_2} x \left[A \frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\,\ldots\ldots\,H(x-a_\beta)}{H^{n_3}(x)H_1^{n_2}(x)\Theta_1^{n_1}(x)\Theta^{n}(x)} e^{\frac{C}{2}x} \right.$$

$$\left. + B \frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\,\ldots\ldots\,H(x+a_\beta)}{H^{n_3}(x)H_1^{n_2}(x)\Theta_1^{n_1}(x)\Theta^{n}(x)} e^{-\frac{C}{2}x} \right]$$

où $\frac{C}{2}$ est donné par les formules (9)

$$\frac{C}{2} = \sum_1^\beta \frac{\Theta'(a_i)}{\Theta(a_i)} = \sum_1^\beta \frac{\Theta'_1(a_i)}{\Theta_1(a_i)} = \sum_1^\beta \frac{H'_1(a_i)}{H_1(a_i)} = \sum_1^\beta \frac{H'(a_i)}{H(a_i)}.$$

IX.

Nous allons maintenant mettre le résultat sous la même forme que dans les deux cas particuliers que nous avons déjà examinés.

Pour cela nous écrirons d'abord l'intégrale de la manière suivante.

$$(76) \qquad \operatorname{dn}^{\nu-n_1} x \operatorname{cn}^{\nu_1-n_2} x \operatorname{sn}^{\nu_2-n_3} x \left[A \frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\,\ldots\ldots\,H(x-a_\beta)}{\Theta^{\beta}(x)} e^{\frac{C}{2}x} \right]$$

$$+ B \frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\,\ldots\ldots\,H(x+a_\beta)}{\Theta^{\beta}(x)} e^{-\frac{C}{2}x} \Bigg]$$

et nous remarquerons que la fonction doublement périodique de 2[de] espèce

$$\frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\,\ldots\ldots\,H(x-a_\beta)}{\Theta^{\beta}(x)} e^{\frac{C}{2}x}$$

qui admet les multiplicateurs

$$(-1)^{\beta} e^{KC} \quad \text{et} \quad e^{iK'C + \frac{i\pi}{K}\sum_1^{\beta} a_i}$$

peut se mettre sous la forme suivante

$$e^{\frac{\pi(\beta+1)i}{2K}x} \frac{H(x-a_1)\ \ldots\ldots\ H(x-a_{\beta})H(x+\omega)}{\Theta^{\beta+1}(x)} \frac{\Theta(x)}{H(x+\omega)} e^{-\frac{\pi(\beta+1)i}{2K}x + \frac{Cx}{2}}.$$

Mais si l'on prend

$$\omega = \sum a_i + (\beta + 1)iK'$$

le premier facteur

$$e^{\frac{\pi(\beta+1)i}{2K}x} \frac{H(x-a_1)\ \ldots\ldots\ H(x-a_{\beta})H(x+\omega)}{\Theta^{\beta+1}(x)}$$

sera une fonction doublement périodique ordinaire de x.

Cette fonction doublement périodique d'ordre $(\beta + 1)$ peut se mettre sous la forme

$$(77) \qquad A\varphi(\operatorname{sn}^2 x) - \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \psi(\operatorname{sn}^2 x)$$

(voir traité de LACROIX note de M. HERMITE) $\varphi(x)$ étant un polynome entier en x de degré m, si β est égal à $2m$ ou à $2m-1$, et $\psi(x)$ un polynome entier en x de degré $m-1$, si $\beta = 2m$ et de degré $m-2$, si $\beta = 2m-1$ ($\psi(x)$ est donc dans tous les cas de degré $\beta - m - 1$).

Cette fonction devant être nulle pour $x = a_i$ on aura

$$A\varphi(\operatorname{sn}^2 a_i) - \operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i \psi(\operatorname{sn}^2 a_i) = 0$$

d'où

$$\operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i = \frac{A\varphi(\operatorname{sn}^2 a_i)}{\psi(\operatorname{sn}^2 a_i)}.$$

Mais on a aussi en vertu des relations (69)

$$\operatorname{sn} a_i \operatorname{cn} a_i \operatorname{dn} a_i = \frac{\lambda \operatorname{sn}^{2n_3} a_i \operatorname{cn}^{2n_2} a_i \operatorname{dn}^{2n_1} a_i}{f'(\operatorname{sn}^2 a_i)}$$

et par suite en prenant A, qui est arbitraire, égal à λ on aura

$$\operatorname{sn}^{2n_3} a_i \operatorname{cn}^{2n_2} a_i \operatorname{dn}^{2n_1} a_i \psi(\operatorname{sn}^2 a_i) = \varphi(\operatorname{sn}^2 a_i) f'(\operatorname{sn}^2 a_i)$$

et cette relation devant avoir lieu pour toutes les valeurs de $\operatorname{sn}^2 a$ qui annulent $f(x)$ on est conduit à poser

$$\operatorname{sn}^{2n_3} x \operatorname{cn}^{2n_2} x \operatorname{dn}^{2n_1} x \psi(\operatorname{sn}^2 x) = \varphi(\operatorname{sn}^2 x) f'(\operatorname{sn}^2 x) - f(\operatorname{sn}^2 x)\theta(\operatorname{sn}^2 x)$$

$\theta(x)$ étant une fonction entière de x de degré $m - 1$.

Si nous remplaçons maintenant $\operatorname{sn}^2 x$ par x cette relation deviendra

$$x^{n_3}(1 - x)^{n_2}(1 - k^2 x)^{n_1}\psi(x) = \varphi(x)f'(x) - f(x)\theta(x). \tag{78}$$

Soit

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + \ldots\ldots + A_m x^m$$

$$\theta(x) = B_0 + B_1 x + \ldots\ldots + B_{m-1} x^{m-1}$$

$$\psi(x) = R_0 + R_1 x + \ldots\ldots + R_{\beta-m-1} x^{\beta-m-1}.$$

On va voir qu'on peut toujours déterminer au moyen de la relation (78) les coefficients de $\varphi(x)$, $\theta(x)$ et $\psi(x)$.

En effet les quantités $A_0 A_1 \ldots\ldots B_0 B_1 \ldots\ldots R_0 R_1 \ldots\ldots$ entrent toutes linéairement dans les coefficients de x dans les deux membres de (78). En égalant donc, dans les deux membres de cette relation les coefficients des mêmes puissances de x, on aura (puisque le second membre est dans tous les cas de degré $m + \beta - 1$ et le premier d'un degré au plus égal) $m + \beta$ équations qui permettront de déterminer à un facteur constant près, les $m + \beta + 1$ coefficients de $\varphi(x)$, $\theta(x)$ et $\psi(x)$ puisque ces équations sont linéaires et homogènes par rapport à ces quantités.

Parmi ces $m + \beta$ équations, on en obtiendra d'abord n_3 en égalant à zéro dans le second membre de (78) les coefficients des puissances de x inférieures à n_3, et ensuite $2m + n - \beta$ en égalant à zéro, dans le même second membre les coefficients des puissances de x supérieures à $2\beta - m - n - 1$, nous aurons de la sorte $2m - n_1 - n_2$ équations qui ne contiendront pas les coefficients R de $\psi(x)$.

Les coefficients des fonctions φ, θ et ψ étant ainsi déterminés, nous aurons avec un choix convenable de la constante A

$$(79)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda\varphi(\mathrm{sn}^2 x) - \mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x\,\psi(\mathrm{sn}^2 x) \\ &= Ae^{\frac{\pi(\beta+1)i}{2K}x}\frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\ldots\ldots H(x-a_\beta)H(x+\omega)}{\Theta^{\beta+1}(x)} \end{aligned}\right.$$

car le premier membre qui admet les zéros a_1, a_2, ... a_β admettra aussi en vertu du théorème de M. Liouville le zéro

$$-\omega = -\left[\sum_1^\beta a_i + (\beta+1)iK'\right]$$

puisqu'il est doublement périodique aux périodes $2K$ et $2iK'$ et que la somme de ces infinis $(\beta+1)iK'$.

En changeant x en $-x$ on aura ensuite

$$(80)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda\varphi(\mathrm{sn}^2 x) + \mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x\,\psi(\mathrm{sn}^2 x) \\ &= (-1)^{\beta+1}e^{-\frac{\pi(\beta+1)i}{2K}x}\frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\ldots\ldots H(x+a_\beta)H(x-\omega)}{\Theta^{\beta+1}(x)}. \end{aligned}\right.$$

On en déduit d'abord en faisant le produit des deux équations (79) et (80), et désignant par S une constante

$$\lambda^2\varphi^2(\mathrm{sn}^2 x) - \mathrm{sn}^2 x\,\mathrm{cn}^2 x\,\mathrm{dn}^2 x\,\psi^2(\mathrm{sn}^2 x) = S(\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2\omega)f(\mathrm{sn}^2 x)$$

et en remplaçant $\mathrm{sn}^2 x$ par x cette relation deviendra

$$(81)\qquad \lambda^2\varphi^2(x) - x(1-x)(1-k^2x)\psi^2(x) = S(x - \mathrm{sn}^2\omega)f(x).$$

En égalant d'abord dans les deux membres de cette relation les coefficients de x et les termes constants on aura

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda^2 A_0^2 = -S\,\mathrm{sn}^2\omega\,\alpha_{\beta-1} \\ &2\lambda^2 A_0 A_1 - B_0^2 = S(\alpha_{\beta-1} - \mathrm{sn}^2\omega\,\alpha_{\beta-2}). \end{aligned}\right.$$

Égalant ensuite dans les deux membres de (81) les coefficients des puissances $(\beta + 1)$ de x,

1° si $\beta = 2m$ on aura

$$- k^2 R_{m-1}^2 = S \tag{83}$$

et les équations (82) et (83) donneront

$$\operatorname{sn}^2 \omega = \frac{\lambda^2 A_0^2}{k^2 R_{m-1}^2 a_{\beta-1}} \quad \text{et} \quad \lambda^2 = \frac{a_{\beta-1}(R_0^2 - k^2 R_{m-1}^2 a_{\beta-1})}{A_0(2A_1 a_{\beta-1} - A_0 a_{\beta-2})}; \tag{84}$$

2° si $\beta = 2m - 1$ on aura

$$\lambda^2 A_m^2 = S \tag{85}$$

et des équations (82) et (85) on déduit pour ce cas

$$\operatorname{sn}^2 \omega = - \frac{A_0^2}{A_m^2 a_{\beta-1}} \quad \text{et} \quad \lambda^2 = \frac{R_0^2 a_{\beta-1}}{2A_0 A_1 a_{\beta-1} - A_m^2 a_{\beta-1}^2 - A_0^2 a_{\beta-2}}. \tag{86}$$

Les formules (84) et (86) permettront donc d'obtenir dans tous les cas les valeurs de λ et ω au signe près.

On obtiendra ensuite la concordance des signes entre λ et ω en remarquant que l'équation (79) nous fait voir que

$$\lambda \varphi(\operatorname{sn}^2 x) - \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \psi(\operatorname{sn}^2 x)$$

est nul pour $x = - \omega$.

On doit donc avoir

$$\lambda = - \frac{\operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega \psi(\operatorname{sn}^2 \omega)}{\varphi(\operatorname{sn}^2 \omega)}. \tag{87}$$

Il nous reste maintenant à obtenir l'expression de $\frac{C}{2}$ en fonction des coefficients connus et de ω.

Or on a par l'une des formules (9)

$$\frac{C}{2} = \sum_1^{\beta} \frac{H'(a_i)}{H(a_i)}$$

et si l'on prend la dérivée logarithmique de la relation (79) et qu'on y fasse ensuite $x = 0$ on aura

$$-\frac{\psi(0)}{\lambda\varphi(0)} = \frac{\pi(\beta+1)i}{2K} - \sum_1^{\beta}\frac{H'(a_i)}{H(a_i)} + \frac{H'(\omega)}{H(\omega)};$$

on en déduit par suite

$$\frac{C}{2} - \frac{\pi(\beta+1)i}{2K} = \frac{H'(\omega)}{H(\omega)} + \frac{R_0}{\lambda A_0}.$$

Donc l'intégrale cherchée prendra en définitive la forme

$$\begin{aligned}\operatorname{dn}^{\nu-n_1}x\operatorname{cn}^{\nu_1-n_2}x\operatorname{sn}^{\nu_2-n_3}x\Bigg[&A[\lambda\varphi(\operatorname{sn}^2x) - \operatorname{sn}x\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x\,\psi(\operatorname{sn}^2x)]\\&\times\frac{\Theta(x)}{H(x+\omega)}e^{\left[\frac{H'(\omega)}{H(\omega)}+\frac{R_0}{\lambda A_0}\right]x}\\+B[\lambda\varphi(\operatorname{sn}^2x) + \operatorname{sn}x\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x\,\psi(\operatorname{sn}^2x)]&\frac{\Theta(x)}{H(x-\omega)}e^{-\left[\frac{H'(\omega)}{H(\omega)}+\frac{R_0}{\lambda A_0}\right]x}\Bigg]\end{aligned}$$

toutes les quantités qui figurent dans cette intégrale se calculant, comme nous l'avons indiqué, en fonctions des données n, n_1, n_2, n_3, ν, ν_1, ν_2 et h.

Chateau de Vallière, 11 Juin 1883.