CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES LIGNES CANTORIENNES.

PAR

M. L. ZORETTI

à CAEN.

1. Dans l'étude de la notion de continu, on peut se placer à deux points de vue bien différents. C'est le point de vue arithmétique pur qui a été surtout étudié. Il était en effet indispensable de baser uniquement sur la notion de nombre entier les définitions et propriétés dont on fait usage en analyse. Jusqu'à une époque toute récente, on avait fait en analyse un abus qui n'était pas sans danger, de l'intuition géométrique; et la revision approfondue des principes par PAUL DU BOIS REYMOND, G. CANTOR, JORDAN a eu le grand avantage d'asseoir définitivement sur des bases arithmétiques l'édifice analytique.

Un point de vue tout différent est le point de vue géométrique pur. On verra dans la suite de ce mémoire dans quelle mesure les travaux de CANTOR et JORDAN peuvent être considérés comme des recherches de géométrie. Mais il importe surtout de bien poser la question. M. ENRIQUES[1] distingue la géométrie élémentaire, la géométrie projective, la géométrie métrique et enfin l'analysis situs. Et c'est dans cette dernière branche de la géométrie que l'on étudie les propriétés générales de la ligne. C'est justement cette théorie générale de la ligne que l'on peut actuellement considérer comme à peine existante, et c'est elle qui fait l'objet de ce mémoire.

2. Je ne veux pas entreprendre ici une étude historique que l'on trouvera par exemple dans un article de l'Encyclopédie J. MOLK (Sur la notion de ligne, par VON MANGOLDT et L. ZORETTI). Je me bornerai à quelques remarques préliminaires.

---

[1] Encyclopédie des sciences mathématiques. Article sur les fondements de la géométrie.

Si l'on ouvre un traité classique de géométrie, on est frappé de ce fait que l'auteur, qui choisit en général avec le plus grand soin ses définitions et les développe d'après les règles de la logique, fait une exception pour la définition de la ligne. On ne peut en effet prendre pour une vraie définition, les conceptions de surface sans largeur, de trajectoire d'un point, de frontière d'une surface, généralement invoquées. Or il y a des rapports nécessaires entre les géométries ordinaires et l'analysis situs; et si l'on ne veut pas, ce qui serait l'attitude la plus logique mais la moins satisfaisante, s'interdire d'une façon absolue de prononcer le mot »ligne» en géométrie élémentaire, il faut alors établir comment l'introduction de ce mot se légitime même avant l'élaboration d'une théorie complète de la ligne.

Le plus simple est sans doute de ranger la notion de ligne parmi les intuitions a priori. Mais la difficulté n'est pas absolument résolue pour cela. En effet, quand on dira qu'une droite, une circonférence sont des lignes, ce sera par définition qu'il en sera ainsi; en d'autres termes on se bornera à définir des lignes particulières, à dresser le catalogue des êtres géométriques qui sont des lignes; mais la difficulté est de démontrer, ou même d'énoncer à chaque fois des propriétés de ces êtres. Par exemple, si l'on veut établir qu'une circonférence de cercle partage le plan en deux régions, il faudra entre autres propriétés entendre par là que toute *ligne* allant de l'intérieur à l'extérieur rencontre la circonférence; et on voit qu'on n'évite pas ainsi le mot ligne employé en général, d'où la nécessité, en l'absence de théorie générale, d'un nouvel appel à l'intuition. On pourrait essayer de se restreindre en ne considérant que des lignes formées de segments de droite; mais quiconque est familiarisé avec les paradoxes que l'on rencontre dans la théorie des ensembles de points, notamment avec l'existence d'ensembles parfaits discontinus qui ont des points sur toute droite, reconnaîtra sans peine combien cela serait insuffisant.

On voit donc combien il est nécessaire de définir la ligne en général, de démontrer des propriétés générales de la ligne ou de certaines lignes, de dégager en d'autres termes les axiomes de l'analysis situs et d'étudier ses rapports avec les autres branches de la géométrie.

Je crois que des explications qui précèdent, il découlera d'une façon évidente que cette étude n'est autre chose qu'un chapitre de la théorie des ensembles des points, mais ceux-ci étant considérés à un point de vue géométrique et non plus comme un ensemble de nombres.

Quant à la définition à adopter, elle est évidemment arbitraire mais la pratique nous impose de la choisir de la façon suivante. D'abord elle devra être d'allure aussi géométrique que possible; en second lieu elle devra serrer d'aussi près que possible la conception vulgaire de la ligne, La notion de ligne s'est peu à peu formée dans notre esprit et s'y est implantée avec des caractéristiques que nous sentons vaguement, et qu'il s'agit justement de traduire en mots bien définis. Que, ces réserves faites, il reste plusieurs définitions acceptables, cela n'est pas douteux. Il est même fort possible que le choix de la »meilleure» de ces définitions ne puisse se faire actuellement. Nous verrons que telle définition parfaitement acceptable nous révèle la possibilité de particularités qu'on n'avait pas prévues. Il n'y a pas lieu de s'en étonner, mais simplement d'y voir un nouvel exemple de la haute valeur du raisonnement mathématique au point de vue de la compréhension des choses. Il joue à cet égard le même rôle qu'un instrument d'observation qui nous dévoile dans un phénomène qu'on croyait bien connaître des circonstances nouvelles.

3. Je me propose dans ce mémoire de commencer l'étude dont je viens de parler. J'étudie d'abord les définitions de JORDAN et de CANTOR, et je montre comment la deuxième est plus conforme au but que nous poursuivons. Je me trouve dès lors entièrement dans la théorie des ensembles, dont je supposerai connus les résultats principaux. J'étudie ensuite, en la présentant un peu différemment, la restriction que j'ai apportée à la définition de CANTOR par la notion de continu *irréductible*. Je démontre quelques propriétés générales de ces ensembles que je précise ensuite en apportant une nouvelle restriction à ma définition.

Je termine enfin en disant quelques mots de la notion de surface qui n'est pas sans présenter de grandes difficultés.[1]

4. Pourquoi ne faut il pas considérer comme suffisantes *au point de vue géométrique* les récherches de M. JORDAN sur les lignes? J'ai déjà insisté ailleurs sur l'importance capitale de ces travaux. Je le répète ici en affirmant que deux dates sont à retenir dans la théorie des ensembles: la période 1877—1882 où paraissent les mémoires de M. CANTOR et l'année 1892 où M. JORDAN publie ses résultats relatifs aux ensembles de points. On peut y ajouter l'année 1902 avec la définition de la mesure de BOREL-LEBESGUE. Mais quand M. JORDAN définit une ligne comme un ensemble de fonctions continues peut on dire que ce

---

[1] J'aurai l'occasion de renvoyer quelquefois à mes publications antérieures, notamment à mon mémoire des Annales de l'Ecole Normale supérieure, 1909. Je désignerai ce mémoire par la lettre M.

Depuis la rédaction du présent mémoire, divers travaux sur les mêmes questions ont été publiés. Je citerai spécialement la thèse de M. JANISZEWSKI »Sur les continus irréductibles entre deux points», où se trouvent plusieurs des résultats de mes deux mémoires. M. JANISZEWSKI se borne aux arcs simples dans la recherche des propriétés générales. Voir Comptes rendus Ac. Sc. Paris t. CLI p. 198 et 201.

soit là une notion géométrique, ou facile à transporter en géométrie? Évidemment non. Un autre inconvénient est le suivant: on sait que la définition de JORDAN n'est pas identique à la notion vulgaire de ligne, puisqu'une ligne de JORDAN peut recouvrir une aire; en sorte qu'au point de vue géométrique c'est la notion de ligne *simple* de JORDAN qu'on pourrait seule à la rigueur admettre. Or j'ai démontré dans le mémoire cité plus haut que la notion de ligne irréductible que j'ai introduite est plus générale que celle de ligne simple de JORDAN tout en présentant, comme justement la suite de ce mémoire le montre, la plupart des caractères qui appartiennent à la ligne dont nous avons la notion vulgaire. On doit donc considérer la définition de JORDAN comme appropriée surtout aux recherches d'analyse: c'est d'ailleurs pour cela qu'elle a été faite.

5. Les travaux de M. CANTOR sont aussi des travaux d'arithmétique: c'est de l'espace *arithmétique* à n dimensions qu'il s'agit.[1] Mais le langage géométrique rend évidemment très facile le transport en géométrie ordinaire.

Examinons donc en premier lieu quelles notions sont pour cela nécessaires, en d'autres termes sur quelles intuitions ou sur quels axiomes géométriques se base la théorie des ensembles des points.

En premier lieu vient évidemment la notion de point, et celle de point limite; pour cette dernière il nous faut introduire la notion de distance de deux points et les propriétés de cette distance.[2] Je dis que c'est là tout ce dont nous avons besoin. On peut en effet certainement démontrer le principe de BOLZANO-WEIERSTRASS en s'appuyant uniquement sur ces notions. Les carrés dont on fait usage d'ordinaire pourront être remplacés par des familles de cercles ayant pour centres deux points fixes non points limites de l'ensemble, de façon à faire intervenir uniquement la distance à des points. Quant à la notion »d'ensemble limite» qui suffit pour conclure, elle n'exige rien de plus, elle aussi.

Ceci rend donc légitimes les propriétés des ensembles fermés et parfaits. Arrivons à la définition du continu d'après CANTOR. C'est un ensemble parfait bien enchaîné: cette définition repose donc encore sur la notion de distance. Il en est de même de la distinction des ensembles superficiels et linéaires, la définition des points frontières et des points intérieurs.

La définition de CANTOR présente incontestablement l'allure géométrique que nous réclamions. J'ai déjà signalé ailleurs que les ensembles qui répondent à

---

[1] G. CANTOR, Acta t. 2 p. 404.

[2] Comparer ces indications à celles qui sont développées dans la note I (p. 75) de la thèse de M. JANISZEWSKI (Paris, 1911).

cette définition et que j'ai appelés avec M. PAINLEVÉ lignes cantoriennes ne sont pas identiques aux lignes de JORDAN. Il est bon d'y insister en montrant par des exemples jusqu'où peut aller la complication d'une ligne cantorienne. Cette complication nous révélera la nécessité de restrictions à apporter à la définition si l'on veut pouvoir démontrer des propriétés simples et générales.

Je me borne à deux exemples[1] 1:o la ligne dont l'équation est $y = \sin \frac{1}{x}$ à laquelle on adjoint le segment $+1$, -1 de l'axe des y. Cet exemple est aujourd'hui classique. Cette ligne n'est pas une ligne de JORDAN, c'est une ligne cantorienne. 2:o. Considérons deux ensembles parfaits non denses sur les deux segments 0—1 de deux droites rectangulaires. Par les différents points de chacun menons des perpendiculaires de longueur 1 à la droite qui porte l'ensemble. L'ensemble non dénombrable de droites obtenu est une ligne cantorienne. Elle découpe le plan en une infinité (dénombrable) de petits carrés.

On voit que si l'exemple précédent est compliqué, il est au moins construit au moyen d'éléments très simples, des segments de droite. Il est donc important dans l'étude générale que nous entreprenons de généraliser ce fait, c'est à dire 1:o de tâcher de définir, parmi les lignes cantoriennes, certaines lignes qu'on pourra appeler élémentaires et de les étudier à part; 2:o de se demander si toute ligne cantorienne ou même tout continu peut être décomposé en fractions élémentaires. Les lignes élémentaires en question seront celles que j'ai introduites sous le nom de lignes irréductibles, d'abord dans un cours professé au Collège de France en 1908—09, puis dans mon mémoire déjà cité. J'ai commencé alors l'étude de ces ensembles, mais je suis depuis parvenu à une propriété qui me permet, comme je vais le faire, d'adopter un mode d'exposition synthétique, en procédant du compliqué au simple. Ainsi sera marquée la vraie place de l'étude des ensembles simples auxquels nous aboutirons.

6. Soit un ensemble continu C et deux points a, b de l'ensemble. Si l'on peut trouver une portion continue de C qui comprenne a et b, l'ensemble C sera dit *réductible*. Si une telle portion n'existe pas (c'est à dire se confond avec C) l'ensemble sera dit *irréductible*.

Soit donc un continu C (ligne ou aire, ou même dans un espace à un nombre quelconque de dimensions), soient a et b deux points de l'ensemble. Deux cas sont possibles: ou bien il est irréductible entre a et b, ou bien il ne

---

[1] On en trouvera de nombreux dans la thèse de M. JANISZEWSKI. Voir aussi BROUWER, Math. Ann. t. 68.

l'est pas; je dis que dans ce dernier cas *on peut trouver une portion de C qui soit continue et irréductible entre a et b.*[1]

Je ferai d'abord quelques remarques générales. Soit m un point d'un continu C non irréductible entre les deux points a et b. Deux cas peuvent se présenter; ou bien il n'existe aucun cercle de centre m tel que dans la portion de C extérieure à ce cercle on puisse trouver un continu contenant a et b; ou bien au contraire un tel cercle existe. Dans ce dernier cas, tous les cercles de rayon plus petits ont encore la même propriété. Les rayons de ces cercles admettent donc pour un point donné m une limite maximum r. Les points de première sorte peuvent exister ou ne pas exister (exemple: l'ensemble formé par deux segments perpendiculaires en leur milieu présente de tels points si a et b sont les extrémités d'un segment; au contraire l'ensemble de points d'une circonférence n'en présente point). Mais les points de seconde sorte que j'appellerai *points secondaires* d'écart r existent certainement si l'ensemble donné n'est pas irréductible. En effet il existe une portion E de C continue et contenant a et b. Soit m un point de C qui n'appartient pas à E et qui par suite n'est pas non plus limite de E: tout cercle ayant m pour centre et de rayon inférieur à l'écart de m à E laisse à son extérieur les points de E et par suite une portion continue de C contenant a et b. Si donc un ensemble n'a que des points de première sorte, il est irréductible.

Remarquons encore que pour un ensemble donné C, le nombre r admet une limite maximum et que cette limite, l'ensemble étant fermé, est la valeur de r qui correspond à un point au moins de C: la démonstration d'une propriété de ce genre est classique et je crois inutile de la faire tout au long.

Soit alors un ensemble C, soit m le point secondaire pour lequel r est maximum (ou l'un de ces points). Considérons la portion de C extérieure au cercle de centre m et de rayon r, et dans cette portion, une portion continue C_1 contenant a et b. Si cette portion C_1 est irréductible, le théorème est démontré. Si elle ne l'est pas, elle admet des points secondaires. Enlevons encore les points de C_1 intérieurs au cercle maximum répondant à ces points, et dans l'ensemble restant, soit C_2 une portion continue contenant a et b; C_2 est ou non irréductible. Si

[1] Ce théorème a été démontré par M. S. Janiszewski dans une note parue aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences 1910. J'étais à ce moment là en possession de la démonstration qu'on va lire; le présent mémoire était même déjà rédigé. La démonstration de M. Janiszewski étant basée sur les propriétés des nombres transfinis ma démonstration en diffère complètement et je crois pouvoir la publier. M. Mazurkiewicz a publié dans les Comptes rendus (même tome p. 296) une démonstration également indépendante de la théorie des nombres transfinis. Cette démonstration est différente de la mienne, que j'avais de plus annoncée à la date du 6 juin 1910 (Comptes rendus t. 150 p. 1505).

C_2 n'est pas irréductible on opérera de même sur lui, et ainsi de suite. Alors ou bien on tombera sur un ensemble irréductible contenant a et b, ou bien cela n'arrivera jamais. Examinons ce dernier cas.

Les ensembles continus $C, C_1, C_2 \ldots$ mis en évidence sont tels que chacun contient a et b et contient aussi tous les suivants. Il y a donc, comme on le sait, un ensemble limite Γ qui est continu et contient a et b. Je dis que Γ est irréductible.

Si en effet il ne l'était pas, il renfermerait des points secondaires d'un certain rayon. La contradiction sera évidente, si nous montrons que les rayons des cercles successivement exclus pour construire C_1, $C_2 \ldots$ tendent vers zéro.

Or ce dernier point résulte de cette remarque que le centre de tout cercle exclu est extérieur à tous les cercles précédemment exclus. Si donc les rayons des cercles exclus avaient une limite inférieure non nulle ϱ, et si l'ensemble C qui est borné est tout entier intérieur à un cercle de rayon R, au bout d'un nombre limité d'exclusions, au plus égal à $\frac{R^2}{7\varrho^2}$ tous les points de C se trouveraient exclus, ce qui est absurde puisque les C_n sont supposés exister quel que soit n. La propriété énoncée est donc bien acquise.

La propriété précédente nous apprend comment on peut *extraire* d'un continu quelconque une portion irréductible. Elle nous donne même un procédé pour construire cette portion irréductible. Dans cette voie, il y aurait lieu de compléter ce résultat en recherchant de quelles portions irréductibles on peut considérer un continu quelconque comme constitué. C'est une question que je ne traite pas. Quoi-qu'il en soit, il semblera maintenant bien naturel de commencer l'étude des lignes cantoriennes par l'étude des continus irréductibles.

Propriétés des lignes irréductibles.

7. Ce qui augmente le caractère de nécessité de la restriction apportée à la définition de CANTOR par la définition des lignes irréductibles, c'est que les lignes simples de M. JORDAN sont des continus irréductibles; les lignes irréductibles sont plus conformes que les lignes cantoriennes ordinaires à notre notion vulgaire de ligne, et elles permettent comme on va le voir la démonstration de propriétés générales.

D'ailleurs les lignes irréductibles elles mêmes peuvent être encore assez compliquées, et nous verrons que moyennant l'introduction d'une restriction nouvelle, leurs propriétés se simplifient beaucoup. Je ne tranche pas la question, secondaire d'après moi, de savoir laquelle des deux définitions doit être conservée de préférence. La définition large précédente a au moins l'avantage de permettre l'étude de la ligne cantorienne en général. La recherche des propriétés en peut être plus laborieuse, mais tout résultat acquis n'en a que plus d'importance et s'applique, comme cas particulier, aux lignes irréductibles restreintes.

J'ai démontré dans mon Mémoire qu'un continu irréductible ne peut contenir aucun point intérieur. Donc dans un espace à deux dimensions, un continu irréductible est nécessairement *linéaire*. Mais dans l'espace à trois dimensions, il peut comprendre une portion de surface comme on s'en rend compte par l'exemple suivant: soit dans le plan xOy un ensemble dénombrable de cercles C_n ayant l'origine pour centre et pour rayons les fractions inférieures à un par exemple (ou un ensemble de nombres dense dans l'intervalle $0 - 1$. Considérons une spire d'hélice Γ, dont la projection sur le plan xOy soit le cercle C_1, commençant au point $z = 1$, $x = 0$, et se terminant au point $z = \frac{1}{2}$, $x = 0$, traçons de même une deuxième spire d'hélice Γ_2 de pas $\frac{1}{4}$ sur le cylindre de base C_2 entre les plans $z = \frac{1}{2}$ et $z = \frac{1}{4}$ et ainsi de suite, toutes les hélices commençant et finissant dans le plan yOz en des points dont l'y est positif. Raccordons le commencement d'une hélice et la fin de la précédente par un segment de droite parallèle à Oy. Nous obtenons ainsi une courbe qui en lui adjoignant tous les points intérieurs (sens large) au cercle de rayon un du plan xOy forment un continu irréductible entre l'origine de la première hélice et un point quelconque de l'ensemble dans le plan xOy.[1]

8. Revenant au cas du plan, nous allons maintenant aborder l'étude des continus irréductibles en général. Mais auparavant je vais démontrer un théorème général sur les ensembles bien enchaînés qui jouera un rôle très important dans la suite. Ce lemme généralise un théorème que j'ai démontré dans mon mémoire des Annales de l'Ecole Normale. L'énoncé que j'avais établi alors est le suivant: *La somme de deux ensembles fermés ayant un seul point commun ne peut être continue que si les deux ensembles le sont séparément.* Si l'on regarde la démonstration, on verra que l'hypothèse que les ensembles sont fermés intervient peu. Quant à l'ensemble-somme, il est inutile de le supposer fermé. On utilise seulement ce fait qu'il est bien enchaîné. Cependant on ne peut pas se débarrasser entièrement de l'hypothèse que les ensembles donnés sont fermés. Voici l'énoncé que je propose et utiliserai dans la suite: *Soient deux*

---

[1] M. Janiszewski donne d'autres exemples.

ensembles C et Γ jouissant des propriétés suivantes 1:o *leur somme est bien enchaînée,* 2:o *Γ contient exclusivement des points limites de C. Je dis que C est bien enchaîné.*

Supposons qu'il ne le soit pas. Soient a et b deux points de C[1] pour lesquels un nombre ε existe tel que l'on ne puisse pas aller de a en b par une chaîne de points de C de chaînons inférieurs à ε. Il en résulte que, si l'on trace les cercles de rayons ε ayant pour centres les points de C, ces points recouvriront un nombre au moins égal à deux de domaines séparés, et a et b ne seront certainement pas dans le même domaine. Or les cercles ainsi tracés se trouvent renfermer en même temps tous les points de Γ qui sont limites de C. Cela est contradictoire avec l'hypothèse que la somme est bien enchaînée.

9. La propriété essentielle des continus irréductibles est la possibilité de définir pour eux en général la notion de »situé entre» c'est à dire un ordre de succession des points. À vrai dire pour les ensembles irréductibles les plus généraux je ne définis pas cet ordre pour *tous* les points: il y aura des points pour lesquels on pourra dire que l'un est avant l'autre (ce sont les plus nombreux) mais il y en aura aussi dont on ne pourra pas dire lequel est le premier. Les ensembles irréductibles pour lesquels ces derniers points n'existent pas formeront une catégorie restreinte, particulièrement simple: je les appellerai ensembles irréductibles *simples*. C'est à ceux-là que se bornent les résultats de M. JANISZEWSKI.

Les théorèmes dont la succession va nous conduire au résultat généralisent pour la plupart des énoncés donnés dans mon premier mémoire. J'ai déjà signalé ailleurs[2] que deux erreurs sont à remarquer dans ce mémoire. On verra plus loin que le résultat essentiel n'en est pas moins exact. Quoiqu'il en soit, la rédaction ci-dessous ne supposera pas chez le lecteur la connaissance préalable de mes premières démonstrations. Mais si l'on s'y reporte pour établir une comparaison, on reconnaîtra que j'ai été obligé d'introduire une certaine complication qui me paraît bien ne pas pouvoir être réduite beaucoup, à moins de se borner aux ensembles irréductibles *simples*.

10. J'ai donné dans mon mémoire la propriété suivante:

---

[1] C comprend au moins deux points sans quoi C est un point, Γ n'existe pas, $C+\Gamma$ est un point. D'ailleurs, dans la suite, je considérai toujours pour abréger les énoncés un ensemble formé d'un seul point comme un continu ou comme un ensemble bien enchaîné (mais pas comme un ensemble fermé). Cela est évidemment légitime, et alors le théorème du texte peut s'appliquer.

[2] Comptes rendus Ac. sc. t. 151 p. 201; Annales École Normale 1909 p. 567. Dans cette dernière note, les passages erronés sont indiqués. De ma rectification résulte l'identité de la notion de ligne simple et de ligne de JORDAN. Voir JANISZEWSKI, thèse p. 3.

Si l'on décompose un continu C irréductible entre a et b en deux continus ayant un et un seul point commun, c, chacun d'eux est séparément irréductible, l'un entre a et c, l'autre entre b et c.

Voici l'énoncé plus général que je vais lui substituer:

Soit un continu C irréductible entre deux points a et b et soit c un point de l'ensemble. Supposons C décomposé en trois ensembles C_1, C_2, Γ jouissant des propriétés suivantes: C_1 et C_2 ont c pour seul point commun, chacun d'eux est dense en soi et bien enchaîné (mais non fermé), $C_1 + \Gamma$ contient a, $C_2 + \Gamma$ contient b; les points de Γ sont des points limites à la fois de C_1 et de C_2. Dans ces conditions, chacun des ensembles $C_1 + \Gamma$, $C_2 + \Gamma$ est un continu irréductible. En second lieu, une telle décomposition, le point c étant donné, n'est possible que d'une manière.

Remarquons d'abord qu'un point limite de C_1 devant appartenir à C et ne pouvant appartenir à C_2 appartient soit à C_1, soit à Γ (en comptant c comme point de Γ). Si l'on ajoute à C_1 son dérivé, on trouve $C_1 + \Gamma$; si l'on ajoute à C_2 son dérivé, on trouve $C_2 + \Gamma$. Ces deux ensembles, $C_1 + \Gamma$ et $C_2 + \Gamma$, sont continus (fermés et bien enchaînés). Supposons qu'il existe une portion Γ_1 de $C_1 + \Gamma$ continue et contenant a et c, considérons l'ensemble $\Gamma_1 + \Gamma + C_2$, il est continu (somme de deux continus qui ont un point c commun); il contient a et b. Je dis que c'est une portion de C, car les points de $C_1 + \Gamma$ qui ont été écartés pour construire Γ_1, ne peuvent être tous des points de Γ: dès qu'un point de Γ est enlevé tous les points voisins le sont, donc des points de C_1 sont enlevés et ces points ne peuvent se retrouver dans C_2. Donc $\Gamma_1 + \Gamma + C_2$ n'est qu'une portion de C et C n'est pas irréductible.

La décomposition n'est possible que d'une manière. Soit en effet une seconde décomposition $C'_1 + C'_2 + \Gamma'$ jouissant des mêmes propriétés, et c étant toujours l'unique point commun à C'_1 et C'_2. Les ensembles $C'_1 + \Gamma'$, $C'_2 + \Gamma'$; $C_1 + \Gamma$, $C_2 + \Gamma$ sont continus. Les deux ensembles $C'_1 + \Gamma'$ et $C_2 + \Gamma$ ont le point c commun. Le premier contient a, le second contient b. Leur somme est un continu contenant a et b; comme c'est une portion de C, elle est identique à C.

Prenons un point de C_1, il appartient à $C'_1 + \Gamma' + C_2 + \Gamma$, comme il n'appartient ni à C_2 (s'il n'est pas c), ni à Γ, il appartient à $C'_1 + \Gamma'$. De plus tout point de $C_1 + \Gamma$ appartient aussi à $C'_1 + \Gamma'$, car un point de Γ étant limite de points de C_1, est limite de $C'_1 + \Gamma'$, et ce dernier est fermé. De même on verra que tout point de $C'_1 + \Gamma'$ appartient à $C_1 + \Gamma$. On en conclut que les ensembles $C_1 + \Gamma$, $C'_1 + \Gamma'$ d'une part, $C_2 + \Gamma$, $C'_2 + \Gamma'$ d'autre part, sont identiques.

Remarquons encore que tout point limite de C_1, appartenant à C_1 ou à Γ, est limite de $C_1 + \Gamma$; de même tout point limite de $C_1 + \Gamma$ est limite de C_1 car s'il est limite de Γ, il est limite de points limites de C_1. On peut donc dire que Γ est l'ensemble des points limites communs à $C_1 + \Gamma$ et à $C_2 + \Gamma$, ou encore à $C'_1 + \Gamma'$ et à $C'_2 + \Gamma'$ qui sont les mêmes. Donc Γ est identique à Γ', C_1 à C'_1 et C_2 à C'_2.[1]

II. J'arrive maintenant au théorème que j'ai en vue et pour préparer sa démonstration, je commence par en étudier un cas particulier simple.

Je dirai qu'un continu irréductible entre deux points a, b est *simple* si, c étant un point quelconque de l'ensemble, on peut décomposer celui-ci en deux continus contenant l'un a et l'autre b et ayant en commun le seul point c.[2]

D'ailleurs il est inutile de faire explicitement l'hypothèse que ces deux continus C_1, C_2 contiennent l'un a et l'autre b, car si a et b étaient tous deux dans C_1 par exemple, C_1 serait une portion continue de C contenant a et b.

Les deux continus trouvés sont irréductibles l'un entre a et c, l'autre entre b et c. De plus nous savons déjà que la décomposition n'est possible que d'une manière. On voit ce qu'il faudra entendre en disant qu'un point c est *avant* un point d (en allant de a vers b). On voit aussi ce que sera *l'arc* cd: ce sera la partie commune aux continus ad, ac.

Ceci posé je vais démontrer le théorème suivant:

Soit C un continu irréductible simple entre deux points a et b. Soit m un point fixe de C, p un point variable de C tendant vers m. L'ensemble limite de l'arc mp est réduit au seul point m.[3]

En effet, d'abord l'arc mp est continu, et il en est de même de l'ensemble limite L puisqu'il y a un point, le point m commun à tous les arcs mp. Il faut montrer que ce continu L est réduit à un point. Supposons pour fixer les idées p com-

---

[1] On peut donner une démonstration analogue à celle du texte du théorème 5 (M. p. 491) d'après lequel un continu irréductible ne peut que d'une seule manière être décomposé en deux continus ayant un seul point commun c. Je la donne ici, car elle est plus simple que celle du Mémoire cité. Soient C_1, C_2; Γ_1, Γ_2 deux telles décompositions C_1 et Γ_1 contenant a, C_2 et Γ_2 contenant b. L'ensemble $C_1 + \Gamma_2$ est un continu contenant a et b. Il est donc identique à C, c'est à dire à $C_1 + C_2$. Un point quelconque de C_2 (autre que c) appartient donc à Γ_2, puisqu'il n'appartient certainement pas à C_1. On en déduit que C_2 est identique à Γ_2 et naturellement C_1 à Γ_1.

Remarquons encore que le théorème subsiste si on suppose que Γ comprend, outre des points limites de C_1 et C_2 un ensemble dense en soi de points, pourvu que $C_1 + \Gamma$ et $C_2 + \Gamma$ soient continus.

[2] Au lieu de »*deux continus*» on pourrait dire »deux ensembles fermés», car il sont alors nécessairement continus.

[3] Cette démonstration établit l'identité entre le notion d'ensemble irréductible *simple* et ce que j'appelais dans mon mémoire ensemble *complètement fermé*. Je laisse au lecteur le soin de voir comment la démonstration du théorème principal: identité entre l'ensemble irréductible simple et la ligne de JORDAN, subsiste entièrement, le lemme de la page 490 devenant inutile ainsi que la restriction faite p. 492.

pris sur l'arc am et prenons sur L un point q *distinct de* m. Deux cas sont à distinguer suivant que bm contient q ou ne contient pas q. Dans le premier cas, on ne pourra pas décomposer C en deux continus ayant m seul en commun. En effet l'arc pm est un ensemble fermé; il doit donc contenir q puisque q est voisin de certains points de pm. Donc l'arc am contient aussi ce point q, qui se trouve commun à am et bm. Supposons au contraire que bm ne contienne pas q. Alors l'arc qb contient m. Mais qa contient p puisque q est sur pm. Et comme p est aussi voisin de m qu'on veut, qa doit également contenir m (qa est fermé). Cette fois-ci ce sont les arcs qb et qa qui ont m en commun, et cela est contraire à l'hypothèse.

Donc L ne peut que se réduire au point m.

12. Nous allons nous proposer de généraliser ce résultat en ne faisant plus aucune hypothèse sur l'ensemble irréductible donné. Voici le théorème que je vais démontrer:

Etant donné un continu irréductible C et un point c de l'ensemble, il est en général possible et d'une seule manière (le point c étant donné) de décomposer C en trois ensembles C'_1, C'_2, Γ jouissant des propriétés suivantes:

1:o *C'_1 et C'_2 sont bien enchaînés et ont en commun le seul point c;*

2:o *Γ est formé uniquement de l'ensemble des points limites communs aux ensembles C'_1 et C'_2 (et du point c).*

Nous savons déjà que dans ces conditions, chacun des ensembles $C'_1 + \Gamma$, $C'_2 + \Gamma$ est continu et irréductible.

La démonstration généralise celle que j'avais donnée (M. p. 490) et qui présentait un point inexact. Je la reprends entièrement.

Soit D le domaine lieu des points dont l'écart à C est inférieur ou égal à ε. La frontière extérieure de D limite un domaine Δ. Au moyen d'une droite issue du point c de C et qui n'a pas en commun avec C un continu contenant c (une telle droite existe, voir page 265 du présent mémoire) je décompose Δ en deux aires Δ_1, Δ_2 dont chacune contient une portion de C. On peut supposer que a est dans Δ_1 et b dans Δ_2.

Les ensembles limites des aires Δ_1, Δ_2 sont deux continus C_1, C_2 qui ont en commun le point c; l'un contient a, l'autre b. De plus tout point de C appartient à un de ces ensembles et inversement leur réunion forme C. Je laisse de côté les détails de la démonstration des différents points précédents. Le lecteur n'aura aucune peine à les établir et d'ailleurs ils sont donnés dans mon premier mémoire. Mais il importe d'observer (c'est justement là qu'était l'erreur de ma première démonstration) que les ensembles C_1 et C_2 ont en général d'autres points communs que c.[1]

Soit donc Γ l'ensemble des points communs à C_1 et à C_2. Désignons par C'_1 et C'_2 les autres points de C_1 et de C_2 auxquels nous ajoutons le point c. Il en résulte donc que C'_1 et C'_2 ont un seul point commun, le point c. De même C'_1 et Γ ont le même point comme seul point commun.[2]

Il peut se faire qu'il y ait dans Γ des points limites de C'_1 sans être limites de C'_2 et des points limites de C'_2 sans être limites de C'_1. Comptons les premiers parmi les points de C'_1 et les autres parmi les points de C'_2; conservons les mêmes noms aux ensembles ainsi accrus C'_1, C'_2 et à l'ensemble amoindri Γ, il reste vrai que $C'_1\, C'_2$; $C'_1\, \Gamma$; $C'_2\, \Gamma$ ont un seul point commun c. Les points qui restent dans Γ sont limites à la fois pour C'_1 et pour C'_2: montrer cela revient à montrer que dans l'ensemble Γ primitif il n'y avait aucun point qui ne soit limite d'un au moins des ensembles C'_1 et C'_2. En effet un point de l'ensemble que nous appelions d'abord Γ est un point qui appartient par exemple à l'aire Δ_1 et qui est voisin de points de Δ_2, ou ce qui revient au même, de points de C situés dans Δ_2, ou mieux dans tous les Δ_2 (à partir de l'un d'eux), donc un tel point est voisin de points de C'_2.

Considérons alors l'ensemble $C_1 = C'_1 + \Gamma$, il est continu donc bien enchaîné, et comme Γ est formé uniquement de points limites de C'_1, cela entraîne d'après le théorème de la page 248, que C'_1 est bien enchaîné. De même C'_2 est bien enchaîné.

Nous avons donc décomposé C en trois ensembles C'_1, C'_2, Γ tels que les deux premiers sont bien enchaînés et ont un seul point commun; de plus le troisième est formé uniquement des points limites communs aux deux premiers.

Plusieurs cas sont alors possibles: ou bien a est dans $C'_1 + \Gamma$ et b dans $C'_2 + \Gamma$. Nous savons alors que chacun de ces ensembles est irréductible et que la décomposition n'est possible que d'une manière. Ou bien, a et b sont par exemple tous deux dans $C'_2 + \Gamma$. Alors a qui figurait dans C_1 figurait dans l'ensemble initial Γ, puisque c'est de là qu'il a du être extrait pour être ajouté à C'_2.

---

[1] Cela tient à ce que Δ_1, Δ_2 ne vont pas constamment en diminuant quand ε tend vers zéro. On s'en rend compte au moyen de l'ensemble $y = \sin \frac{1}{x}$ en prenant c à l'origine des coordonnés. Les aires Δ_1, Δ_2 seront de petites bandes sinusoidales se raccordant sur un petit segment de l'axe des x. Si l'on prend un point de l'ensemble sur l'axe Oy, ce point appartiendra par exemple à Δ_1 et ne cessera pas d'appartenir à Δ_1 quand ε diminuera; mais en même temps, certaines des spires de la bande sinusoidale Δ_2 sont voisines de lui, et quand ε diminue, ces spires augmentent en nombre en se rapprochant de plus en plus du point donné, qui donc, sans jamais appartenir à Δ_2, appartient à l'ensemble limite C_2 de Δ_2.

[2] Remarquons que C'_1 ou C'_2 peuvent se réduire à ce seul point c.

Donc C_2 contenait a et b, et comme C_2 est continu, C_2 épuise C. Donc C'_1 n'existe pas (se réduit à c); l'ensemble initial Γ est continu, et l'ensemble donné est décomposé en deux ensembles C'_2 et Γ; le dernier est continu non réduit à un point, et tous ses points sont limites de C'_2; C'_2 est bien enchainé (cela résulte d'ailleurs du lemme p. 248—249).

Si Γ se réduisait à un point (le point c) il serait encore nécessaire que C'_1 se réduise lui même au point c car sans cela $C'_2 + c$ serait portion continue de C contenant a et b, ce qui est impossible. Nous retombons sur le cas particulier précédent. Dans ce cas particulier, on peut encore dire qu'on a réalisé la décomposition cherchée: C'_1 et Γ sont réduits à c, C'_2 est C. Cette dernière décomposition est une solution banale applicable à tout continu; mais ici c'est la vraie solution du problème, à moins qu'on ne préfère dire que c'est un cas d'exception pour le théorème. La vraie caractéristique de ce cas est la décomposition en deux ensembles C'_2 et Γ le dernier continu, le premier bien enchaîné, tout point de Γ étant limite de C'_2. Le seul point commun à ces deux ensembles est c. Dans la suite ce cas d'exception sera en général écarté.

13. Eclaircissons ceci par quelques exemples.

Soit d'abord la courbe

$$y = \sin \frac{1}{x}$$

complétée par les points

$$x = 0 \qquad\qquad -1 \leqq y \leqq 1,$$

Prenons pour a et b les points $x = \pm \frac{1}{2\pi}$, $y = 0$ par exemple, et pour c un point quelconque du segment -1, $+1$ de l'axe des y. Les ensembles C'_1, C'_2 sont respectivement formés des courbes $y = \sin \frac{1}{x} (x \gtreqless 0)$ proprement dites, Γ comprend le segment entier -1, $+1$.

Prenons du continu précédent les seuls points où x est positif ou nul. Prenons pour $a \left(x = \frac{1}{2\pi},\ y = 0\right)$, pour b l'origine, pour c un point quelconque de l'axe des y. Dans ce cas C'_1 comprend tout l'ensemble. C'_2 et Γ sont respectivement réduits au point c. C'est le cas exceptionnel signalé à la fin de la démonstration.

On peut encore se demander comment est faite en général la portion Γ. Si elle se réduit à un point (quel que soit c) sans qu'il soit de même de C_1 ou de C_2, l'ensemble est irréductible simple.

Voici quelques questions qu'on peut se poser.

On peut d'abord se demander si Γ est nécessairement continu: on peut par des exemples montrer qu'il n'en est rien. On peut également rechercher si Γ n'est pas formé exclusivement de portions continues ou de points *isolés,* et si les portions continues ne seraient pas irréductible simple. Je laisse de côté pour l'instant toutes ces questions comme secondaires.

14. Soient maintenant un continu C irréductible entre a et b; soient m et p deux points de l'ensemble, proposons nous de définir l'arc mp.

Au moyen d'un point p on peut décomposer C en trois ensembles C_1, Γ, C_2, jouissant des propriétés vues dans le paragraphe précédent; supposons que a soit dans $C_1+\Gamma$ et b dans $C_2+\Gamma$; par définition $C_1+\Gamma$ est dit l'arc ap. Le point m appartiendra soit à $C_1+\Gamma$ soit à $C_2+\Gamma$ (s'il appartient à Γ, nous choisirons l'un quelconque des deux ensembles $C_1+\Gamma$, $C_2+\Gamma$) soit $C_1+\Gamma$ par exemple. Ce dernier ensemble est un continu irréductible entre a et p. Le point m le décompose en trois ensembles C'_1, Γ', C'_2 jouissant toujours des mêmes propriétés. C'est l'ensemble continu $\Gamma'+C'_2$ qui sera par définition l'arc mp.

Je dis que nous aurions trouvé le même continu, si dans la construction précédente nous avions permuté les rôles des points m et p. Considérons d'abord les deux ensembles $C'_1+\Gamma'$, $\Gamma'+C'_2+C_2$. Extrayons de C'_1 les points de C'_1 qui seraient limites de C_2, et ajoutons les à Γ'; de même extrayons de $C_2+C'_2$ c'est à dire de C_2 les points qui sont limites de C'_1 et ajoutons les à Γ': ces points sont les mêmes des deux côtés, ce sont en effet les points limites communs de C'_1 et C_2 qui ne seraient pas déjà points de Γ'; un tel point est un point de C'_1 puisque il appartient à $C'_1+\Gamma'$ qui est fermé et n'appartient pas à Γ', il est de même point de C_2 car C'_2 et C'_1 n'ont pas de point commun. Désignons par $C''_1\,\Gamma''$; $\Gamma''\,C''_3$ ce que deviennent respectivement les ensembles $C'_1\,\Gamma'$ et C'_2+C_2; C''_1 et C''_3 n'ont plus que le point m commun; les ensembles C''_1 et C''_3 sont bien enchaînés d'après le lemme de la page 248, puisque les points de Γ'' sont tous limites de C''_1 ou de C''_3 et d'autre part la somme $C''_1+\Gamma''$ qui est identique à $C'_1+\Gamma'$, est bien enchaîné ainsi que $C''_3+\Gamma'$. La décomposition (possible d'une seule manière) de C en deux par le point m est donc bien réalisée par les ensembles $C'_1+\Gamma'$ et $\Gamma'+C'_2+C_2$.

Le point p appartient au second; je dis que pour décomposer par le point p l'ensemble $\Gamma'+C'_2+C_2$ il faut prendre d'une part $\Gamma+C'_2$, et d'autre part C_2 augmenté de ses points limites qui forment deux groupes: ceux qui sont déjà dans $\Gamma'+C'_2$, soient C''_4 et ceux qui n'y sont pas, soient C'''_4. Posons $C_5=C_2+$ $+C'''_4$. Tous les points du continu $\Gamma'+C'_2+C_2$ ont ainsi leur place. L'ensemble C_5 n'a pas de point commun autre que a avec $\Gamma' + C'_2$, car un tel point serait commun à C_2 et à $C'_2 + \Gamma$ c'est à dire à C_2 et à $C_1 + \Gamma$ ce qui est absurde. En extrayant de C'_2 pour les reporter dans Γ' les points de C'_2 qui seraient aussi limites de $C'''_4 + C_5$ c'est à dire les points de C'''_4 qui ne seraient pas déjà dans Γ' la portion de C'_2 qui reste est bien enchaînée toujours d'après le même lemme, il en est de même de C_5. Donc, la décomposition par le point p est bien ainsi réalisée. Donc l'arc mp est bien encore $\Gamma + C'_2$.

Remarquons que l'arc mp est irréductible entre m et p. Si q est un point quelconque de l'arc mp, l'arc mq et l'arc pq sont deux portions de l'arc mp (mais il peut arriver que l'une de ces portions soit identique à mp lui-même) et l'on peut dire que

$$\text{arc } pq + \text{arc } qm = \text{arc } pm$$

en remarquant toutefois que les arcs pq et qm peuvent avoir des points communs (points limites communs de chacun d'eux).

On voit donc ce qu'on devra entendre par »point situé avant ou après un autre». Soit m un point; un point de l'arc am sera dit *avant* m (plus près de a) quand il n'est pas en même temps point de l'arc bm. En d'autres termes, le point m décompose C en trois ensembles C_1, Γ, C_2 au sens du théorème de la page 252. Si a est dans $C_1 + \Gamma$, il est bien naturel de dire que les points de C_1 sont avant m, ceux de C_2 sont après; quant à ceux de Γ, je ne vois pour l'instant aucun moyen de distinguer s'ils sont avant ou après m, mais il ne faut pas en conclure que cette distinction est impossible.

Remarquons que nous ne pouvons écarter le cas suivant: l'arc am est identique à ab par exemple. Alors m devra être dit, d'après notre définition, indifféremment avant ou après b. Cela montre que pour *certains* points la définition sera contradictoire; nous la rejetterons naturellement pour ces points là, mais cela n'a qu'une importance secondaire car il n'en reste pas moins vrai que la notion d'ordre a un sens pour la majorité des points de l'arc et en second lieu que nous savons reconnaître ceux des points pour lesquels elle n'a pas de sens.

15. Nous allons dans ce qui suit donner un nouveau moyen de distinguer les points pour lesquels la définition n'est pas valable. Ces explications montreront le caractère de complexité que peut présenter un ensemble non irréductible simple.

Considérons d'abord un ensemble irréductible simple. Notre ensemble est irréductible entre a et b, soit c un point quelconque de l'ensemble. On peut, par hypothèse, trouver deux continus C_1, C_2 ayant c seul en commun, dont la somme soit C, et séparément irréductibles entre a et c, b et c. C'est justement là la décomposition unique de l'ensemble C par le point c en trois ensembles: ceux que nous avons appelés C_1 et C_2 sont ceux qui ont actuellement le même nom, et l'ensemble Γ des points limites communs est réduit au point c. Cela résulte de ce que C_1 et C_2 sont bien enchaînés, ont c seul en commun, et, en outre, de ce que la décomposition n'est possible que d'une manière. Il y a donc, dans le cas de l'ensemble irréductible simple, identité entre la notion générale d'arc d'un ensemble irréductible et ce que nous avons déjà appelé arc.

Nous venons de voir que Γ est réduit à un point, le point c. Une question se pose. Est-ce là une propriété *caractéristique* d'un ensemble irréductible simple? Nous allons voir qu'il n'en est rien. Cela résultera simplement de l'étude qui va suivre.

16. Je me propose de montrer que la définition d'un ensemble irréductible simple peut être remplacée par la suivante. Un ensemble irréductible est irréductible simple, quand il ne renferme aucune portion continue qui soit irréductible de plusieurs façons, c'est à dire entre des couples de points différents.

Considérons un ensemble C irréductible d'une part entre les points a et b, d'autre part entre les points a et c, je dis qu'il ne peut pas être simple. Supposons en effet qu'il le soit. On peut alors trouver deux continus, l'un C_1 renfermant a et c, l'autre C_2 renfermant c et b, et ayant c seul en commun, dont la somme soit C. De plus chacun de ces continus est irréductible. Le continu C_1 portion de C contenant a et c est identique à C puisque C est irréductible entre a et c. Donc C_2 ne peut que se réduire au point c, ce qui est absurde puisque il contient b.

Soit maintenant un continu quelconque C irréductible entre a et b mais non simple. Décomposons-le au moyen du point c en trois ensembles C_1, Γ, C_2. L'ensemble Γ peut être formé soit d'un, soit de plusieurs points. Supposons-le d'abord réduit à un point, qui est nécessairement le point c. Comme c est quelconque, si C_1 ou C_2 n'était pas réduit au seul point c, l'ensemble donné ne serait pas irréductible (raisonnement déjà fait). Si Γ et C_2 par exemple sont tous deux réduits au point c, nous sommes dans le cas exceptionnel, et on peut décomposer C en deux ensembles A et B, A étant bien enchaîné, B continu, et les points de B étant limites de ceux de A. Supposons a dans A et b dans B. Je dis que C est irréductible entre a et un point quelconque m de B. S'il ne l'était pas, il y aurait une *portion* continue de C contenant a et m; cette portion ne pourrait comprendre tout A car alors elle comprendrait tout B. En lui ajoutant B on obtient donc une portion de C continue, et contenant a et b, ce qui est absurde.

Supposons que Γ comprenne plus d'un point. Soit d un point de Γ autre que c. Décomposons encore C au moyen de c en trois ensembles C_1, Γ, C_2, d est point limite commun de C_1 et de C_2. On peut supposer que a est dans $C_1 + \Gamma$. Ajoutons le point d à l'ensemble C_1 et par compensation enlevons c de C_1: cela n'altère pas l'ensemble somme $C_1 + \Gamma$. Faisons la même opération sur les ensembles C_2 et Γ. Soient C'_1, Γ', C'_2 ce que deviennent respectivement les trois ensembles: C'_1 et C'_2 sont restés bien enchainés et n'ont plus que d en commun, Γ' est toujours formé des points limites communs à C'_1 et C'_2. Les ensembles C'_1, C'_2, Γ réalisent donc la décomposition de C au moyen de d. Donc $C'_1 + \Gamma'$, c'est à dire $C_1 + \Gamma$, est irréductible entre a et d, comme il l'était déjà entre a et c. Il l'est donc de deux façons.

Pour qu'un ensemble soit irréductible simple il est donc bien nécessaire et suffisant que toute portion irréductible de cet ensemble le soit d'une seule manière.

Je vais montrer maintenant qu'étant donné un continu irréductible $C(ab)$ on peut toujours trouver dans ce continu des points m tels que l'arc am par exemple ne soit pas identique à C.

Traçons en effet de a comme centre un cercle γ laissant b à son extérieur (à ce cercle on peut substituer une aire fixe quelconque). Les points de C dans γ ne forment pas un continu. Mais l'ensemble C étant bien enchaîné, considérons une chaîne à chaînons inférieurs à ε allant de a à b et prenons la première portion de cette chaîne (ligne de Jordan simple) intérieure à γ jusqu'à sa première sortie de γ. Quand ε tend vers zéro, cette portion a évidemment pour ensemble limite un continu intérieur à γ qui est portion de C (portion seulement puisque C sort de γ). Si m est un point de ce continu ou bien C est irréductible entre a et m, ou bien il ne l'est pas mais contient une portion irréductible entre a et m. Cette portion irréductible est l'arc am et elle ne contient pas b ni d'ailleurs aucun point de C extérieur à γ.

Ce théorème montre que la notion d'ordre a un sens pour *la plupart* des points de C.

17. Je démontrerai en dernier lieu le théorème suivant:

Toute portion continue d'un continu irréductible est elle-même irréductible entre deux de ses points.

Soit C le continu donné, irréductible entre a et b, E une portion continue de C, m un point quelconque de C. Considérons l'ensemble des arcs am, et l'ensemble F des points communs à tous ces arcs. Soit de même G l'ensemble des points communs à tous les arcs bm. Il est évident que les ensembles F et G sont fermés. Il sont aussi continus, car si deux points α et β sont dans F, ils sont communs à tous les arcs am. Donc l'arc $\alpha\beta$ appartient aussi à tous les arcs am, et par suite à F. Donc F est bien enchaîné, donc continu.

Soit alors μ un point commun à F et E, π un point commun à G et à E. Il existe de tels points, car si E et F n'avaient aucun point commun, ils auraient un écart δ; on pourrait enfermer F et G dans deux domaines sans point commun; l'arc am qui va d'un point du premier à un point du second aurait donc des points extérieurs au premier domaine, et un tel point appartenant à tous les arcs am appartiendrait à F, ce qui est contradictoire.

Ceci posé, F, qui contient μ, contient l'arc $a\mu$ et G contient l'arc $b\pi$. E contient une portion continue de C entre μ et π qui ne peut être que l'arc $\mu\pi$. Voyons si E peut contenir d'autres points situés par exemple sur l'arc $a\mu$. Soit m un de ces points, l'arc am contient μ; puisque l'arc $a\mu$ contient aussi m, il s'ensuit que le point m appartient également à l'arc $\mu\pi$. En définitive E ne contient que des points appartenant à l'arc $\pi\mu$. Donc E est identique à $\pi\mu$, c'est à dire est irréductible.

Propriétés des lignes fermées.

18. Dans mon mémoire (M. p. 493), j'ai essayé de montrer que la frontière d'un domaine peut être considérée comme la somme de deux continus ayant deux points communs seulement. Ce résultat n'est pas exact d'une façon absolument générale. La démonstration n'est correcte que moyennant une hypothèse que j'ai utilisée sans la formuler explicitement. Cette hypothèse est la suivante:

Il faut qu'on puisse trouver deux points a, b sur la frontière C du domaine que l'on puisse joindre par une ligne irréductible *simple* entre les deux points a, b.

Cette question appelle de nouvelles recherches. Il y a lieu, par exemple, de se demander si cette hypothèse n'est pas vérifiée toutes les fois que le plan se trouve partagé en *deux* domaines seulement dont C est la frontière commune.

Je me propose dans ce paragraphe d'étudier la réciproque de cette propriété, c'est à dire rechercher ce qu'on pourrait appeler en analysis situs une »*ligne fermée*». Je crois qu'il sera possible de préciser les résultats que j'ai obtenus, mais il ne me semble pas inutile de les faire connaître dès maintenant.

Il sera assez naturel d'appeler ligne fermée la réunion de deux continus ayant deux points communs a, b seulement et irréductibles entre ces deux points. On peut alors essayer de démontrer que cet ensemble partage le plan en deux domaines dont il est la frontière commune. Or, nous allons le voir sur un exemple, cet énoncé n'est pas exact et nous aurons seulement un énoncé plus restreint.

L'exemple que je vais donner est inspiré de celui par lequel M. BROUWER montre qu'un continu irréductible peut morceler le plan. Ce continu est formé d'une spirale enveloppant un cercle asymptote; il est irréductible entre l'origine de la spirale et un point quelconque du cercle. Mais il n'est pas irréductible d'une seule manière; la circonstance ne peut d'ailleurs pas se présenter lorsque le continu donné est irréductible *simple*; la démonstration de mon mémoire est en effet valable dans cette hypothèse.

Revenons à l'exemple indiqué. Soit un cercle de centre O et rayon un; et considérons un ensemble dénombrable d'arcs de cercle C_n tous concentriques au cercle donné et construits de la façon suivante. Le rayon de C_n sera $1 + \frac{1}{n}$; C_n est symétrique par rapport à l'axe des y, plus grand qu'une demi-circonférence, et terminé sur les deux demi-droites d'argument $-\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{n}$. Joignons l'origine du cercle C_n à celle du cercle C_{n-1} et son extrémité à celle du cercle C_{n+1} par des segments de droites; joignons l'extrémité libre du cercle C_2 à un point a de l'axe des y, d'ordonnée -2 par exemple, par une ligne (de JORDAN simple) quelconque ne croisant pas la ligne déjà construite. L'ensemble total obtenu est irréductible entre le point a et un point quelconque du cercle C; il partage le plan en deux régions, comme dans l'exemple de M. BROUWER.

Considérons un deuxième ensemble simplement formé d'un segment de l'axe des y et allant de a au cercle C (point $x = 0$, $y = -1$). Nous avons deux ensembles irréductibles ayant deux points communs seulement et le plan est partagé par eux en *trois régions* qui ont la même frontière.[1]

On peut généraliser beaucoup cet exemple; il nous suffit pour mettre en défaut l'énoncé qui paraissait vraisemblable. En supposant les deux ensembles irréductibles simples, leur réunion forme une ligne de JORDAN simple fermée, et le théorème en question devient tout simplement le théorème de JORDAN bien connu.

19. Voici l'énoncé que j'ai pu obtenir qui généralise le théorème de JORDAN.

[1] Voir d'autres exemples dans la thèse de M. JANISZEWSKI. Voir aussi la note de M. DENJOY (C. R. t. 151 p. 138).

La réunion de deux continus irréductibles entre deux points qui sont leurs seuls points communs partage le plan en deux aires cantoriennes dont elle constitue l'ensemble des points frontières (c'est à dire non intérieurs). De plus ces aires cantoriennes sont les ensembles limites de deux domaines d'un seul tenant.[1]

Soient E et E' les deux ensembles, a et b leurs points communs. Donnons nous un nombre ε et constituons entre a et b sur E et sur E' deux chaînes de chaînons inférieurs à ε dont les sommets sont sur l'ensemble. Ces deux chaînes sont des lignes de M. JORDAN. Je dis qu'on peut les supposer *simples*, c'est à dire ne se coupant pas. Supposons en effet que, quelque petit que soit ε, elles se coupent en un point m. Il y aurait une infinité de points m, donc un point limite au moins. Un tel point limite, infiniment voisin de points de E et de points de E' appartient à E et à E' qui sont fermés; ce ne peut donc être que a ou b, a par exemple. Alors à partir d'une certaine valeur de ε, les points m se trouveront dans un cercle donné de centre a. Mais on peut éviter cela en prenant pour point de départ des deux chaînes au lieu du point a (ou du point b) un point de E et un point de E' extérieurs à ce cercle ou sur sa circonférence, et en allant de chacun de ces points à a par un segment de droite. On pourra sur cette chaîne supposer les chaînons assez petits pour qu'elle ne se coupe pas elle-même. La chaîne totale est à chaînons inférieurs à un nombre qui tend vers zéro avec ε et que nous appellerons aussi ε. Elle constitue une ligne de JORDAN simple fermée, elle divise donc le plan en deux domaines D_ε, D'_ε (j'appelle D'_ε le domaine extérieur).

Faisons tendre ε vers zéro; ces deux domaines sont des continus qui ont des *continus limites*, appelons-les D, D'. On peut faire alors les remarques suivantes:

1:o. Tout point du plan appartient soit à D, soit à D', soit aux deux ensembles à la fois;

---

[1] Cette dernière propriété appartient d'ailleurs à toute aire cantorienne. Soit en effet un continu quelconque C au sens de CANTOR (avec ou sans point intérieur). Considérons l'ensemble des points dont l'écart à C est inférieur (sens étroit) à ε. Cet ensemble forme un domaine au sens habituel de ce mot, c'est un ensemble qui comprend C et qui ne comprend que des points intérieurs (il est dense en lui-même et non fermé, comme le domaine d'existence d'une fonction analytique uniforme par exemple). Ce domaine a visiblement C pour ensemble limite quand ε tend vers zéro. Pour voir qu'il est d'un seul tenant, il suffit de démontrer qu'on peut en joindre deux points par un trait continu sans sortir de D. Cela est presque évident: soient a et b deux points de D. Dans le cercle de centre a et de rayon ε il y a un point m de C au moins; de même dans le cercle de centre b et de rayon ε il y a un point p de C au moins. On peut de plus aller de m en p par une chaîne à chaînons inférieurs à ε dont les sommets sont sur C. Le chemin (ligne brisée) constitué par cette chaîne, et par les deux segments am et bp est entièrement dans D, ce qui démontre le théorème.

2:o. Un point commun à D et à D' est infiniment voisin à la fois de points intérieurs à D_ε et de points intérieurs à D'_ε. Cela est impossible si son écart à l'un des ensembles E ou E' n'est pas nul (cela est à peu pres évident). Donc les points communs à D et à D' ne sont que des points de E ou E', ce qui démontre notamment que D et D' n'ont aucun point *intérieur* commun;

3:o. La frontière commune de D et de D' se compose donc d'un ensemble continu, portion de E et de E'. D'autre part cette frontière comprend tous les points de E et tous les points de E'. Ceci démontre donc le théorème.

20. Je reviens sur les détails de la démonstration.

Considérons un point quelconque m du plan. Quel que soit ε il appartient soit à D_ε soit à D'_ε. Alors deux hypothèses peuvent être faites.

1:o. Quel que soit ε, le point m appartient soit toujours à D_ε soit toujours à D'_ε; il appartient alors dans le premier cas à D (et peut être à D'), dans le second à D' (et peut-être à D).

2:o. Quel que soit ε il y a des valeurs plus petites de ε telles que m appartienne à D_ε et d'autres également telles qu'il appartienne à D'_ε. Alors m est limite des deux: il est certainement commun à D et à D'.

Cherchons maintenant dans quelles conditions le point m peut être commun à D et à D'. Appelons L_ε la ligne de JORDAN constituée au moyen de la valeur donnée à ε. Remarquons que tout point de cette ligne est à une distance de $E + E'$ inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. Soit m un point commun à D et à D'. Si quel que soit ε il appartient à des lignes L_ε, le point m est sur $E + E'$. Supposons donc qu'il n'appartienne plus à aucune des lignes L_ε à partir d'une valeur de ε, et qu'il n'appartienne pas non plus à l'ensemble limite de ces lignes (auquel cas il serait encore sur $E + E'$). On peut donc trouver un cercle de centre m et de rayon η dans lequel les lignes L_ε ne pénètrent plus pour ε assez petit. L'ensemble $E + E'$ ne pénètre pas non plus dans le même cercle. Supposons que m appartienne quel que soit ε à D_ε: dans son voisinage il doit y avoir des points de certains D'_ε, notamment il doit y en avoir dans le cercle de rayon η. Dans le même cercle il y a donc des points de L_ε. Supposons au contraire que m appartienne tantôt à D_ε tantôt à D'_ε: la conclusion sera la même, car si m appartient par exemple pour une certaine valeur de ε à D_ε, il y a dans son voisinage des points de $D'_{\varepsilon'}$ $(\varepsilon' < \varepsilon)$ sans qu'il soit lui-même dans $D'_{\varepsilon'}$, il y a donc dans ce même voisinage des points de L_ε, ce qui est contradictoire.

En dernier lieu, il reste à examiner le point suivant: tout point de E (ou de E') est un point commun à E ou E', et par suite, un point frontière commun. En effet, chacune des deux lignes de JORDAN construites au début de la démonstration a un ensemble limite qui est continu, il comprend a et b et ne comprend que des points de E (ou de E'); cet ensemble limite se confond donc avec E (ou avec E') et par suite, tout point de E (ou de E') appartient à la fois à D et à D'.

Les propriétés qui précèdent permettent comme on le voit d'introduire dans les raisonnements géométriques le concept de courbe fermée: la seule restriction apportée par le mot irréductible à la définition cantorienne est suffisante pour que la ligne fermée jouisse dans une certaine mesure des propriétés que nous exigeons par notre conception vulgaire de ligne fermée.

Tangente.

21. Je me propose maintenant de définir la tangente en un point m d'un continu irréductible E. Soit p un point de l'arc am par exemple. Joignons le point m à tous les points de l'arc pm. Considérons l'ensemble des angles que font avec une droite fixe les droites obtenues. Soit E_p cet ensemble de nombres que nous porterons en abscisses sur une droite quelconque. Il est certainement dense en lui-même, mais il n'est pas fermé. Ajoutons lui son dérivé E'_p, et posons $F_p = E_p + E'_p$. L'ensemble nouveau F_p est fermé et dense en lui-même. Je vais montrer qu'il est bien enchaîné, il en résultera qu'il est continu.

Il suffit évidemment de montrer que E_p est bien enchaîné, car entre deux points de F_p appartenant l'un ou l'autre ou tous deux à E_p on pourra substituer deux points voisins de E_p et établir une chaîne entre ces deux derniers.

Soient donc deux nombres pris dans E_p. À ces nombres correspondent deux points de pm, soient q et r tels que les droites mq et mr faisont avec l'axe des x un angle égal à l'un de ces nombres. Considérons l'arc qr: s'il ne contient pas le point m, le point m est à une certaine distance ϱ de cet arc. Si l'on veut construire dans E_p une chaîne à chaînons inférieurs à ε, il suffira de prendre dans l'arc qr des points à des distances relatives inférieures à $\varrho\varepsilon$, ce qui est possible puisque qr est continu. Dans le cas particulier où m appartiendrait à l'arc qr, c'est à dire, comme on le voit aisément, dans le cas où les arcs qm, rm, qr seraient les mêmes, on pourrait substituer aux points q ou r ou aux deux, des points voisins q_1, r_1, tels que m ne soit pas sur l'arc $q_1 r_1$: la démonstration précédente subsiste donc.

Substituons alors au point p du début un autre point de l'arc pm. L'ensemble E_p diminue (ou au moins n'augmente pas). Il en est donc de même de E'_p et par suite de F_p. Faisons tendre le point p vers le point m sur l'arc pm; l'ensemble continu F_p a un ensemble limite, F, qui, naturellement, est continu (puisque les ensembles F_p vont en se réduisant sans cesse). Toute droite passant par m et qui fera avec l'axe des x un angle égal à un des nombres de F sera dite une tangente à l'ensemble au point m.

22. Examinons les différents cas possibles. D'abord, suivant qu'on prend le point p initial sur l'arc am ou sur l'arc bm, les ensembles F obtenus ne sont pas les mêmes. Alors le cas le plus simple est celui où ces deux ensembles sont les mêmes et réduits tous deux à un point. On dira dans ce cas qu'il y a une tangente unique à la ligne au point m.

Supposons que les deux ensembles F soient encore réduits à un point, mais les deux points étant différents. Il y aura alors deux tangentes au point m (une *à droite*, et une *à gauche*).

Enfin si l'un des deux F (ou tous deux) n'est pas réduit à un point, il existe au point m soit un, soit deux angles se recouvrant partiellement, totalemement ou pas du tout, et dont toute droite est tangente à l'ensemble.

Voyons de plus près ce que signifie pour une droite D la condition d'être tangente à E au point m. Deux cas sont possibles: ou bien il existe sur D une infinité de points de l'ensemble dont m est un point limite; si l'on veut, l'intersection de D avec E, qui est un ensemble fermé, doit comprendre m comme point limite. Le cas actuel est celui de la droite Ox pour la courbe $y = x \sin \frac{1}{x}$.

Supposons au contraire que le point m ne soit pas point limite de l'intersection des ensembles D et E. Alors ou bien il y a sur D des points *éloignés* de m mais appartenant à l'arc pm dont les extrémités sont infiniment voisines; ou bien il y a simplement *au voisinage de m* des points de E tels que les droites qui le joignent au point m soient infiniment voisines de D. Dans ce dernier cas la droite D jouit bien de la propriété habituelle de la tangente d'être position limite d'une sécante. Il ne me semble pas que, pour définir la tangente, il faille écarter les deux autres cas, si l'on veut conserver le bénéfice d'un ensemble continu de tangentes.

J'ajoute que pour une droite donné D plusieurs des cas précédents peuvent se présenter simultanement.

23. Après avoir examiné les différentes possibilités je vais montrer que le cas d'une tangente unique (ou double) en chaque point n'est pas compatible

avec la définition d'un ensemble non simple. On pourrait donc se borner pour la définition de la tangente aux lignes de JORDAN. Il serait facile alors de voir qu'il y a identité entre les définitions précédentes et celle des nombres dérivés et que l'existence d'une tangente unique (ou double) revient à l'existence d'une dérivée (ou d'une dérivée à droite et d'une dérivée à gauche).

Il s'agit donc de montrer que si un ensemble n'est pas irréductible simple, en un point au moins, il admet une infinité de tangentes. Il suffit évidemment de réduire l'ensemble donné à un ensemble E irréductible à la fois entre les deux points a, b, et entre les deux points a et c. Soit m un point de E; nous savons déjà que

$$\text{arc } ac = \text{arc } ab = E;$$

considérons les arcs mb, mc. Comme on a

$$ac = am + mc$$

$$ab = am + mb$$

il en résulte

$$am + mc \equiv am + mb$$

ce qui entraîne, ou bien que $mc \equiv mb$, ou bien que $am \equiv ac$, comme c'est à peu près évident. Dans le premier cas, les arcs identiques mc et mb ont pour limites, quand m tend vers c par exemple, des continus qui, contenant b et c ne se réduisent pas à un point. On peut écarter le second cas qui ne se présente pas pour tous les points m voisins de c par exemple.

Soit alors un point d du continu limite de mc. On peut faire passer par d une infinité de droites D qui passent également entre les points voisins de c et les points voisins de b. Or ce sont là des points appartenant à l'arc mc et à l'arc mb, c'est à dire au même arc, et cet arc étant continu rencontre D. Il y a donc sur D une infinité de points de l'arc mc (qui n'est autre que l'arc md). Donc D est une tangente en d, il y en a donc une infinité.

Extension à l'espace de la définition cantorienne.

24. J'ai, dans une note du mémoire déjà cité (M., 489 note 2), énoncé et utilisé la propriété suivante: Etant donné un point c d'une ligne cantorienne on peut, parmi les droites issues de c en trouver une au moins qui n'admette pas avec l'ensemble un ensemble continu de points communs comprenant c. Cette pro-

priété n'était pas par moi considérée comme évidente. Je voyais simplement la démonstration sans l'avoir, je l'avoue, cherchée dans tous ses détails. Je suis revenu sur cette démonstration, qui n'est pas aussi simple que je pensais d'abord. Je vais la donner ci-dessous: elle a pris à mes yeux une importance assez grande quand je me suis aperçu d'abord qu'elle caractérisait les lignes cantoriennes, en les distinguant des aires, et en second lieu qu'elle fournit un moyen d'étendre à l'espace les définitions de M. CANTOR.

Considérons donc un continu linéaire *quelconque* E. Supposons que toutes les droites issues d'un point m de l'ensemble aient en commun avec lui un continu comprenant m. Soit φ l'angle que fait une droite passant par m avec l'axe des x (une droite quelconque) et soit $r(\varphi)$ la longueur de l'ensemble continu commun à l'ensemble E et à la droite. Les nombres positifs $r(\varphi)$ forment un ensemble.

Supposons d'abord que la limite inférieure des nombres $r(\varphi)$ ne soit pas nulle. Soit ϱ cette limite. Il en résulte que le cercle de centre m et de rayon ϱ a tous ses points sur E. Donc E n'est pas linéaire. On voit de même que si la limite inférieure de nombres $r(\varphi)$ relatifs aux valeurs de φ dans un intervalle quelconque α, β n'était pas nulle, l'ensemble E comprendrait tous les points d'un secteur, c'est à dire une aire.

En résumé la fonction $r(\varphi)$ jouit des propriétés suivantes 1:o elle n'est jamais nulle, 2:o sa limite inférieure est nulle dans tout intervalle.

Associons maintenant une infinité de valeurs de φ tendant vers φ_0. Soit $r_0 = r(\varphi_0)$. Je dis que r_0 est la plus grande limite des valeurs de r relatives à ces valeurs de φ. Cela est évident, car cette plus grande limite d'abord est au moins égale à r_0 et de plus ne peut être plus grande que r_0, car si elle avait une valeur $r_1 > r_0$ tous les points de la droite φ_0 à une distance inférieure à r_1 de m seraient points de E comme limites de points de E.

Considérons maintenant l'ensemble des valeurs de φ pour lesquelles le nombre $r(\varphi)$ dépasse un nombre donné ϱ. D'après la propriété que je viens de démontrer, cet ensemble, G_1, est *fermé*. Considérons de même l'ensemble des valeurs de φ, s'il en existe, où $r(\varphi)$ est compris entre ϱ et $\frac{\varrho}{2}$. Cet ensemble est fermé, tout au moins si l'on lui ajoute son dérivé, mais cette opération ne risque d'introduire que des éléments figurant déjà dans G_1: nous les compterons deux fois. Soit G_2 ce nouvel ensemble. Recommençons en remplaçant ϱ et $\frac{\varrho}{2}$ par $\frac{\varrho}{2}$ et $\frac{\varrho}{4}$ et ainsi de suite. Nous obtenons ainsi une succession d'ensembles $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$

Une valeur quelconque de φ figurera certainement dans l'un des ensembles, car si r est la valeur correspondante de $r(\varphi)$, on finira par avoir $r > \frac{\varrho}{2^n}$. Il en résulte que l'ensemble de toutes les valeurs de φ, c'est à dirc l'ensemble $0-2\pi$ de l'axe des x qui est continu, est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés (le fait que ces ensembles ont des points communs ne modifie pas la conclusion). L'un de ces ensembles au moins doit donc renfermer des portions continues d'après un théorème que j'ai démontre dans ma thèse.[1] Il y a donc un intervalle α, β tel que φ variant entre α et β, $r(\varphi)$ est supérieur à un nombre fixe; ce qui est contradiction avec la propriété 2.

On voit que d'après la démonstration même, non seulement il y a des droites issues de m n'ayant pas avec E un continu commun, mais il y en a dans tout intervalle: autrement dit l'ensemble de ces droites (ou des angles qu'elles font avec une droite fixe) est dense (dense sur $0 - 2\pi$).

Considérons maintenant une aire cantorienne: Il est évident qu'il y a des points — les points intérieurs — tels que toutes les droites issues de ces points ont avec l'ensemble un continu commun. Pour qu'un continu soit linéaire, il est donc nécessaire et suffisant qu'en tous ses points il existe au moins une droite n'ayant pas avec l'ensemble un continu commun. En d'autres termes, ce critérium est *entièrement équivalent* au critérium de l'existence des points intérieurs par lequel M. Cantor distingue les lignes et les aires.

Remarquons qu'en *certains* points d'une aire, des droites n'ayant pas de continu commun avec l'ensemble peuvent exister dans tout intervalle.

25. Le critérium précédent n'a visiblement pas sur celui de M. Cantor l'avantage de la simplicité. Mais il a celui de pouvoir être étendu à l'espace.

En effet dans l'espace ordinaire à trois dimensions la définition d'un ensemble continu s'applique, de même que la définition de l'ensemble continu irréductible, et la plupart des propriétés de ces ensembles examinées dans mes deux Mémoires. La définition de la ligne cantorienne ne s'applique pas, car dire que dans un continu il n'y a pas de point intérieur, entraîne simplement qu'il n'est pas un *volume*, c'est à dire une portion d'espace. Mais les définitions de M. Cantor sont insuffisantes pour distinguer une *ligne* d'une *surface*. Comme nous l'avons vu plus haut, il en est de même de la notion de ligne irréductible.

Cette distinction est au contraire fournie en transportant dans l'espace la définition donnée au paragraphe précédent. Je dirai qu'un continu à trois dimensions est une ligne, si en chacun de ses points on peut trouver un plan au moins qui n'a pas avec l'ensemble un continu commun. Dans le cas contraire,

[1] Journal de M. Jordan 1905.

l'ensemble sera une surface si en chaque point il existe des droites n'ayant pas avec l'ensemble un continu commun, un volume dans le cas contraire.

Les définitions précédentes ont des conséquences immédiates. D'abord un ensemble qui a des points intérieurs est un volume, et inversement, comme on le voit par une démonstration analogue à celle donnée dans le cas du plan. En second lieu, tout ensemble situé dans un plan est une aire ou une ligne, et dans ce cas particulier les définitions de ces mots données dans le cas de l'espace se réduisent aux définitions données plus haut dans le cas du plan.

Un continu irréductible entre a et b dans l'espace n'est certainement pas un volume, car on pourrait enlever toute une sphère de points de l'ensemble sans qu'il cesse d'être continu et de contenir les deux points a et b. Nous avons vu plus haut qu'un continu irréductible peut comprendre une aire.

Grenoble, 11 juillet 1910.