LÖSUNG DES ABSOLUTEN KONVERGENZPROBLEMS EINER ALLGEMEINEN KLASSE DIRICHLETSCHER REIHEN.

VON

HARALD BOHR

in KOPENHAGEN.

Einleitung.

Unter einer Dirichletschen Reihe der komplexen unabhängigen Variabeln $s = \sigma + it$ wird bekanntlich eine unendliche Reihe der Form

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{1}$$

verstanden. Die Koeffizienten der Reihe, d. h. die Grössen a_n, sind hierbei beliebige reelle oder komplexe Zahlen, und die Exponenten λ_n sind reelle Zahlen, die den Bedingungen

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \ldots . < \lambda_n \ldots . \qquad (\lim_{n=\infty} \lambda_n = \infty)$$

genügen.

Bekanntlich hat Herr JENSEN[1] bewiesen, dass das Konvergenzgebiet der Reihe (1) eine Halbebene ist, welche von einer zu der reellen Achse senkrecht stehenden Geraden begrenzt wird, d. h. es existiert eine reelle Zahl A (die Konvergenzabszisse der Reihe (1)) derart, dass die Reihe (1) für $\sigma > A$ konvergiert, für $\sigma < A$ dagegen nicht konvergiert. In den beiden Grenzfällen, wo die Reihe (1) überall bezw. nirgends konvergiert, wird $A = -\infty$ bezw. $A = +\infty$ gesetzt.

---

[1] Betreffs der Literatur werde ich auf das fundamentale Werk des Herrn LANDAU: »*Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*« (Leipzig 1909) verweisen.

Ferner ist bekanntlich, wie leicht zu beweisen, das Gebiet der absoluten Konvergenz einer Dirichletschen Reihe auch eine Halbebene, welche von einer zu der reellen Achse senkrecht stehenden Geraden begrenzt wird, d. h. es existiert eine reelle Zahl B (die absolute Konvergenzabszisse der Reihe (1)) derart, dass die Reihe (1) für $\sigma > B$ absolut konvergiert, dagegen für $\sigma < B$ nicht absolut konvergiert; hierbei ist eo ipso $B \geqq A$. Es ist also die Reihe (1) in der Halbebene $\sigma > B$ absolut konvergent, im Streifen $B > \sigma > A$ bedingt konvergent, und in der Halbebene $\sigma < A$ divergent. Es kann bekanntlich vorkommen, dass $A < +\infty$, $B = +\infty$ ist, d. h. dass die Reihe (1) ein Konvergenzgebiet besitzt ohne jedoch irgendwo absolut zu konvergieren; dies ist z. B. bei der Dirichletschen Reihe

$$\sum \frac{(-1)^n}{(\log n)^s} = \sum (-1)^n e^{-s \cdot \log \log n}$$

der Fall.

Ferner ist, wie von Herrn Cahen bewiesen, bei jedem $\varepsilon > 0$, $E > 0$ die Reihe (1) im Gebiete $\sigma > A + \varepsilon$, $|s| < E$ gleichmässig konvergent. Hieraus folgt unmittelbar, da ja die einzelnen Glieder der Reihe (1), d. h. die Grössen $a_n e^{-\lambda_n s}$, ganze Transzendenten sind, dass die durch die Reihe (1) für $\sigma > A$ dargestellte Funktion $f(s)$ eine in der ganzen Halbebene $\sigma > A$ überall reguläre analytische Funktion ist.

Es sei eine Dirichletsche Reihe (1) gegeben; dann fragt sich: *wie weit konvergiert diese Reihe?* Eine solche Frage lässt sich auf verschiedene Weise auffassen. Man kann zunächst fragen: wie lassen sich die beiden Konvergenzabszissen A und B als Funktionen der Koeffizienten a_n und der Exponenten λ_n bestimmen? Diese Frage, welcher bei einer Potenzreihe die Frage nach dem Konvergenzradius als Funktion der Koffizienten der Potenzreihe ganz entspricht, ist von Herrn Cahen gelöst und zwar in ähnlicher Weise, wie die entsprechende Frage bei der Potenzreihe durch Cauchy und Hadamard seine Lösung gefunden hat. Die Frage: wie weit konvergiert eine Dirichletsche Reihe?, lässt sich aber auch ganz anders auffassen, nämlich: wie lassen sich die beiden Konvergenzgeraden $\sigma = A$ und $\sigma = B$ bestimmen, nicht aus der Dirichletschen Reihe selbst, d. h. aus den Koeffizienten und Exponenten der Reihe, sondern aus der Kenntnis der analytischen Eigenschaften der durch die Reihe dargestellten Funktion; oder genauer ausgedrückt: Es sei eine analytische Funktion $f(s)$ gegeben, und es sei bekannt, dass sie in einer gewissen Halbebene durch eine dort konvergente Dirichletsche Reihe darstellbar ist; wie lässt sich alsdann die Lage der beiden Konvergenzgeraden der Reihe aus dem analytischen Charakter der Funktion erkennen? Dieses Problem, welches sich an die Frage in dieser letzten Formulierung anknüpft, oder vielmehr an die Frage, inwiefern die Lage der beiden Konvergenzgeraden der Reihe mit einfachen analytischen Eigenschaften der Funktion in Zusammenhange steht, ist es, welches Problem man gewöhnlich als das *Konvergenzproblem* der Dirichletschen Reihen bezeichnet.[1]

Ich werde im folgenden einfach vom Konvergenzproblem reden, wenn es sich um die Bestimmung der Konvergenzgeraden $\sigma = A$ handelt, dagegen werde ich die Bezeichnung »das absolute Konvergenzproblem» benutzen, wenn es sich um die Bestimmung der absoluten Konvergenzgeraden $\sigma = B$ handelt.

Bei einer Potenzreihe, für die das Konvergenzproblem mit dem absoluten Konvergenzproblem zusammenfällt, ist dies Problem bekanntlich einfach dahin zu beantworten, dass der Konvergenzkreis die dem Mittelpunkt am nächsten gelegene singuläre Stelle enthält. Bei den Dirichletschen Reihen gilt bekanntlich kein entsprechender Satz; so ist z. B. die Reihe

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^s} = \sum (-1)^n e^{-s \log n}$$

nur für $\sigma > 0$ konvergent, während die durch die Reihe dargestellte Funktion über die Achse des Imaginären hinaus regulär ist, ja sogar eine ganze Transzendente ist.

Über das Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen haben die Herren Landau und Schnee, unter gewissen einschränkenden Bedingungen für die Exponentenfolge der Reihe,[2] einige sehr interessante Sätze bewiesen, welche den Zusammenhang zwischen der Lage der Konvergenzgeraden $\sigma = A$ und der Grössenordnung der Funktion $f(s)$ auf vertikalen Geraden (d. h. bei konstanter Abszisse und ins Unendliche wachsender Ordinate t) behandeln. Es geben je-

[1] Es sei die Funktion $f(s)$ in einer gewissen Halbebene durch eine dort konvergente Dirichletsche Reihe darstellbar; dann lassen sich bekanntlich die Koeffizienten a_n und Exponenten λ_n dieser Reihe aus den analytischen Eigenschaften der Funktion $f(s)$ bestimmen. Mit Benutzung dieser Bemerkung kann man offenbar die von Herrn Cahen gefundenen Ausdrücke für die Konvergenzabszissen A und B so formulieren, dass man dadurch eine genaue Bestimmung der beiden Konvergenzgeraden $\sigma = A$ und $\sigma = B$ aus den analytischen Eigenschaften der Funktion erhält. Eine derart komplizierte und für die Anwendung völlig unbrauchbare Bestimmung der Konvergenzgeraden der Reihe aus den analytischen Eigenschaften der Funktion ist aber keineswegs als eine Lösung des Konvergenzproblems zu betrachten. Bei diesem letzten Problem handelt es sich ja eben darum, den etwaigen Zusammenhang zwischen der Lage der Konvergenzgeraden der Reihe und *einfachen* analytischen Eigenschaften der Funktion zu studieren. Vergl. in dieser Beziehung auch die interessante Arbeit des Herrn W. Schnee: »*Über die Koeffizientendarstellungsformel in der Theorie der Dirichletschen Reihen*» (Göttinger Nachrichten, Math. phys. Kl., 1910).

[2] Diese einschränkenden Bedingungen laufen im Wesentlichen darauf hinaus, dass die Exponenten λ_n nicht allzu dicht aneinander folgen dürfen, und dass ihre Verteilung nicht allzu unregelmässig sein darf.

doch diese Sätze nur hinreichende Bedingungen für die Konvergenz der Reihe (1) in einer Halbebene $\sigma >$ Konst., aber keine Bedingungen, die zu gleicher Zeit notwendig und hinreichend sind, und es ist somit das Problem: die Konvergenzgerade $\sigma = A$ einer Dirichletschen Reihe aus einfachen analytischen Eigenschaften der durch die Reihe dargestellten Funktion genau zu bestimmen, nicht durch die oben erwähnten Untersuchungen gelöst. Es lässt sich sogar, wie ich in meiner Habilitationsschrift[1] bewiesen habe, eine genaue Bestimmung der Konvergenzgeraden $\sigma = A$ überhaupt nicht ermitteln, wenn man sich auf die Untersuchung der von den Herren LANDAU und SCHNEE betrachteten analytischen Eigenschaften der Funktion (d. h. der Regularität einerseits und der Grössenordnung von $f(\sigma + it)$ bei ins Unendliche wachsender Ordinate t anderseits) beschränkt.

Wir wenden uns nunmehr zur Betrachtung des absoluten Konvergenzproblems. Ich werde in dieser Abhandlung dieses Problem, welches meines Wissens bisher nicht direkt in Angriff genommen worden ist, für eine allgemeine Klasse Dirichletscher Reihen erledigen, nämlich für alle solche Reihen, deren Exponentenfolge im rationalen Körper linear unabhängig ist. Es ergibt sich für diese Klasse Dirichletscher Reihen, dass die absolute Konvergenzgerade $\sigma = B$ eine Gerade ist, welche sich aus den allereinfachsten analytischen Eigenschaften der durch die Reihe definierten Funktion genau bestimmen lässt.

Das Hauptziel dieser Abhandlung ist der Beweis des folgenden allgemeinen Satzes:

Es seien die Elemente der Zahlenfolge

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \cdots < \lambda_n \cdots \qquad (\lim \lambda_n = \infty) \tag{2}$$

linear unabhängig, d. h. es bestehe für kein ganzzahliges positives N eine Relation der Form

$$g_1 \lambda_1 + g_2 \lambda_2 + \cdots + g_N \lambda_N = 0$$

in ganzen rationalen nicht sämtlich verschwindenden Zahlen $g_1, g_2, \ldots, g_N$.

Es sei ferner

$$f(s) = f(\sigma + it) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{1}$$

[1] »Bidrag til de Dirichletske Rækkers Theori» (Kopenhagen 1910), S. 34.

eine zur Zahlenfolge (2) *gehörige Dirichletsche Reihe, die ein Konvergenzgebiet besitzt. Dann ist es eine für die absolute Konvergenz der Reihe* (1) *für* $\sigma \geqq \sigma_0$ *notwendige und hinreichende Bedingung, dass die durch die Reihe* (1) *definierte analytische Funktion* $f(s)$ *für* $\sigma > \sigma_0$ *regulär und beschränkt*[1] *ist.*

In diesem Satze ist die Exponentenfolge (2) nur der *rein arithmetischen* Bedingung unterworfen, dass ihre Elemente linear unabhängig sein sollen. Die wesentliche Rolle, welche diese arithmetische Bedingung beim Studium des absoluten Konvergenzproblems der Dirichletschen Reihen spielt, habe ich schon an anderem Orte[2] gezeigt.

§ 1 des Folgenden behandelt die Frage nach den Werten, welche eine Dirichletsche Reihe mit linear unabhängiger Exponentenfolge auf einer im absoluten Konvergenzgebiete der Reihe gelegenen zu der reellen Achse senkrecht stehenden Geraden annimmt; ich beweise hier *die Existenz eines Kreisringes derart, dass die angenommenen Werte sämtlich in diesem Kreisringe gelegen sind, und zwar in dem Kreisringe überall dicht liegen.* Der Beweis dieses Satzes stützt sich wesentlich auf einen von KRONECKER herrührenden Satz über Diophantische Approximationen. Es ist die oben erwähnte arithmetische Bedingung der Exponentenfolge eben eingeführt, um diesen Satz über Diophantische Approximationen auf unsern Problemkreis verwenden zu können.

In § 2 werden aus dem Satze des § 1 einige für das Folgende wesentliche Hilfssätze gezogen.

In § 3 wird u. a. bewiesen: *Es sei die Dirichletsche Reihe* (1) *mit linear unabhängiger Exponentenfolge für* $\sigma > B$ *absolut konvergent, für* $\sigma = B$ *dagegen nicht absolut konvergent; dann nimmt die Funktion* $f(s)$ *in der Halbebene* $\sigma > B$ *jeden Wert an.*

In § 4 beweise ich: Es besitze die Dirichletsche Reihe (1) mit linear unabhängiger Exponentenfolge ein absolutes Konvergenzgebiet, und es sei die durch

---

[1] Unter dem Ausdruck: »Eine Funktion $f(s)$ ist für $\sigma > \sigma_0$ beschränkt» ist zu verstehen: Es gibt eine positive Konstante K derart, dass, für $\sigma > \sigma_0$, $|f(s)| < K$ ist.

[2] »*Sur la convergence des séries de Dirichlet*». (Comptes rendus, Paris, 1. August 1910). Die obige Bedingung unterscheidet sich wesentlich von allen Bedingungen, die man bei früheren Untersuchungen über Dirichletsche Reihen der Exponentenfolge auferlegt hat. Diese letzten Bedingungen behandeln nämlich stets die *ungefähre* Lage der Exponenten, sie sagen z. B. aus, dass die Exponenten nicht allzu dicht aufeinander folgen dürfen oder dergleichen; während die obige Bedingung des Textes eine arithmetische Bedingung ist, d. h. eine Bedingung, welche die *genaue* Lage der Exponenten betrifft.

die Reihe definierte Funktion für $\sigma \geqq \beta$ regulär und beschränkt; dann ist die Reihe (1) für $\sigma > \beta$ absolut konvergent.

In § 5 erinnere ich an einen Hilfssatz des Herrn PERRON.

In § 6 wird der oben erwähnte Hauptsatz bewiesen. In diesem Satze ist über das Konvergenzverhalten der Reihe nur vorausgesetzt, *dass sie überhaupt ein Konvergenzgebiet besitzt;* beim Satze des § 4, welcher Satz in dem Hauptsatze als spezieller Fall enthalten ist, war noch die weitere Bedingung hinzugefügt, dass die Reihe ein *absolutes* Konvergenzgebiet besitze.

In den vorangehenden Sätzen war der Exponentenfolge die einzige Bedingung auferlegt, dass sie linear unabhängig sei; dass diese Bedingung aber eine *wesentliche* ist, d. h. dass die Sätze, wenn diese Bedingung weggelassen wird, nicht mehr gelten, wird schliesslich in § 7 durch passend konstruierte Beispiele bewiesen. Es wird hier u. a. die Existenz einer, in einer gewissen Halbebene konvergenten, Dirichletschen Reihe bewiesen, die eine für $\sigma \geqq 0$ reguläre und beschränkte Funktion definiert, und die jedoch nirgends absolut konvergiert.

In einer späteren Abhandlung werde ich die in dieser Arbeit dargestellte Theorie auf einige spezielle Dirichletsche Reihen verwenden, sowie eine ähnliche Theorie derjenigen Dirichletschen Reihen entwickeln, welche in der analytischen Primzahlentheorie die Hauptrolle spielen, nämlich derjenigen Dirichletschen Reihen vom Typus $\sum \frac{a_n}{n^s}$, welche eine Produktdarstellung einer der beiden Formen

$$\sum \frac{a_n}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{b_p}{p^s}\right), \qquad \sum \frac{a_n}{n^s} = \prod_p \frac{1}{\left(1 + \frac{b_p}{p^s}\right)}$$

zulassen, wo p die Primzahlen 2, 3, 5 ... durchläuft.

---

§ 1.

Es sei

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{1}$$

eine zur linear unabhängigen Zahlenfolge (2) gehörige Dirichletsche Reihe, die auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ absolut konvergiert; d. h. es sei die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0}$$

konvergent.

Ich werde dann in diesem Paragraph untersuchen, welche Werte die Funktion $f(s) = f(\sigma + it)$ auf der vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt.

Es sei die folgende Hilfsbetrachtung vorausgeschickt. Es sei

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots \tag{3}$$

eine unendliche Folge von reellen, nicht negativen Zahlen derart, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n$$

konvergiert und etwa die Summe R besitzt. Ich werde dann zunächst die Werte bestimmen, welche die unendliche Reihe

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n e^{i\varphi_n}$$

annimmt, wenn die Grössen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ unabhängig von einander sämtliche reelle Werte, oder, was auf dasselbe herauskommt, sämtliche reelle Werte zwischen 0 (incl.) und 2π (excl.) durchlaufen.

Es sei *das Gebiet G* folgendermassen definiert:

Fall 1. *Wenn in der Zahlenfolge* (3) *ein Element ϱ_{n_1} vorhanden ist, das grösser ist als die Summe aller übrigen Glieder, d. h. wenn*

$$\varrho_{n_1} > \sum_{n \neq n_1} \varrho_n = R - \varrho_{n_1}$$

ist, bezeichne ich mit G den Kreisring (*incl. Begrenzung*)

$$R \geqq |z| \geqq r,$$

wo

$$r = \varrho_{n_1} - \sum_{n \neq n_1} \varrho_n = 2\varrho_{n_1} - R$$

ist.

Fall 2. *Wenn dagegen in der Zahlenfolge* (3) *kein Element vorhanden ist, das grösser ist als die Summe aller übrigen Glieder, bezeichne ich mit G den Kreis* (*incl. Rand*)

$$|z| \leqq R.$$

Es gilt nunmehr der folgende

Hilfssatz 1: *Es liegen die Werte von*

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n e^{i\varphi_n}$$

sämtlich im Gebiete G, und es wird jeder Wert im Gebiete G angenommen.

Beweis: Da, für jede reelle Folge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$, im Falle 1

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n \geqq \left| \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n e^{i\varphi_n} \right| \geqq \varrho_{n_1} - \sum_{n \neq n_1} \varrho_n = r$$

ist, im Falle 2

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n e^{i\varphi_n} \right| \leqq R$$

ist, sieht man zunächst, dass die Werte von $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots)$ sämtlich im Gebiete G liegen. Ferner ist klar, dass, wenn die Funktion F den Wert z' annimmt, nimmt sie gewiss jeden Wert z an, für den $|z| = |z'|$ ist, d. h. jeden Wert auf dem Kreis mit o als Mittelpunkt und $|z'|$ als Radius; denn, wenn

$$F(\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_n, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n e^{i\varphi'_n} = z' = |z'| e^{i\theta'}$$

und

$$z = |z'| e^{i\theta}$$

ist, so ergibt sich ja unmittelbar

$$F(\varphi'_1 + \theta - \theta', \varphi'_2 + \theta - \theta', \ldots, \varphi'_n + \theta - \theta', \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n e^{i(\varphi'_n + \theta - \theta')}$$

$$= e^{i(\theta - \theta')} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n e^{i\varphi'_n} = e^{i(\theta - \theta')} z' = z.$$

Um den Hilfssatz zu beweisen, genügt es daher offenbar nachzuweisen, dass die Funktion

$$|F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n e^{i\varphi_n} \right|$$

im Falle 1 jeden reellen Wert zwischen r und R (beide incl.), im Falle 2 dagegen jeden Wert zwischen 0 und R (beide incl.) annimmt.

Beweis des Falles 1. Es sei speziell

$$\varphi_{n_1} = 0, \quad \varphi_n = \varphi \ (n \neq n_1)$$

gesetzt, wo φ das Intervall 0 (incl.) bis 2π (excl.) durchläuft. Dann durchläuft in der komplexen Ebene die Zahl

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n e^{i\varphi_n} = \varrho_{n_1} + (R - \varrho_{n_1}) e^{i\varphi}$$

einen Kreis mit dem Mittelpunkte ϱ_{n_1} und dem Radius $R - \varrho_{n_1}$, also Punkte, deren Abstand vom Nullpunkte alle reellen Werte von

$$\varrho_{n_1} - (R - \varrho_{n_1}) = 2\varrho_{n_1} - R = r$$

bis

$$\varrho_{n_1} + (R - \varrho_{n_1}) = R$$

(beide incl.) annimmt. q. e. d.

Beweis des Falles 2. Es darf offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit beim Beweise angenommen werden, dass

$$\varrho_1 \geqq \varrho_2 \geqq \varrho_3 \cdots \geqq \varrho_n \cdots$$

ist. Ferner darf $\varrho_1 > 0$ angenommen werden, denn im Falle $\varrho_1 = 0$, d. h. $\varrho_n = 0$ für alle n, ist der Satz von vornherein klar.

Es sei nunmehr N diejenige (gewiss existierende) Zahl, für die

$$\sum_{n=1}^{N} \varrho_n > \sum_{n=N+1}^{\infty} \varrho_n$$

ist, während

$$\sum_{n=1}^{N-1} \varrho_n \leqq \sum_{n=N}^{\infty} \varrho_n$$

ist. Hierbei ist eo ipso $N \geqq 2$. Es sei

$$\alpha = \varrho_1, \ \beta = \sum_{n=2}^{N} \varrho_n, \ \gamma = \sum_{n=N+1}^{\infty} \varrho_n$$

gesetzt. Dann erfüllen die drei nicht negativen Zahlen α, β und γ, deren Summe gleich R ist, die drei Relationen

$$\alpha+\beta \geqq \gamma, \quad \alpha+\gamma \geqq \beta, \quad \beta+\gamma \geqq \alpha; \tag{4}$$

denn es ist nach Voraussetzung

$$\alpha+\beta=\sum_{n=1}^{N} \varrho_n > \sum_{n=N+1}^{\infty} \varrho_n=\gamma$$

sowie

$$\beta+\gamma=\sum_{n=2}^{\infty} \varrho_n \geqq \varrho_1=\alpha,$$

und aus

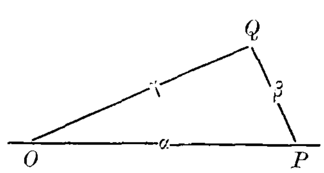
$$\sum_{n=1}^{N-1} \varrho_n \leqq \sum_{n=N}^{\infty} \varrho_n$$

d. h.

$$\alpha+\beta-\varrho_N \leqq \gamma+\varrho_N$$

folgt

$$\alpha+\gamma \geqq 2\alpha+\beta-2\varrho_N=\beta+2\varrho_1-2\varrho_N \geqq \beta .$$



Aus (4) folgt nunmehr unmittelbar (siehe Figur), dass in der komplexen Ebene zwei Punkte P und Q derart existieren, dass P auf der reellen Achse rechts vom Nullpunkte O liegt, und das

$$\overline{OP}=\alpha, \quad \overline{PQ}=\beta, \quad \overline{QO}=\gamma$$

ist; mit anderen Worten, es folgt aus (4) die Existenz einer komplexen Zahl q (der Zahl, die dem Punkte Q entspricht) derart, dass

$$|q-\alpha|=\beta, \quad |q|=\gamma$$

ist. Es sei

$$q-\alpha=\beta e^{i\theta_1}, \quad -q=\gamma e^{i\theta_2};$$

dann ist offenbar

$$\alpha+\beta e^{i\theta_1}+\gamma e^{i\theta_2}=0 .$$

Ich wähle nunmehr speziell

$$\varphi_1=0, \ \varphi_2=\varphi_3=\cdots=\varphi_N=t \,.\, \theta_1; \quad \varphi_{N+1}=\varphi_{N+2}=\cdots=t \,.\, \theta_2,$$

wo die reelle Variable t von 0 bis 1 (beide Grenzen incl.) läuft. Dann ist

$$|F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n e^{i\varphi_n}\right| = |\alpha + \beta e^{it\theta_1} + \gamma e^{it\theta_2}|$$

eine stetige Funktion $F_1(t)$ von t. Weil aber für $t = 0$

$$|\alpha + \beta e^{it\theta_1} + \gamma e^{it\theta_2}| = \alpha + \beta + \gamma = R$$

ist, und für $t = 1$

$$|\alpha + \beta e^{it\theta_1} + \gamma e^{it\theta_2}| = |\alpha + \beta e^{i\theta_1} + \gamma e^{i\theta_2}| = 0$$

ist, nimmt die obige Funktion $F_1(t) = |F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots)|$ alle Werte von 0 bis R (beide incl.) an. q. e. d.

Damit ist der Hilfssatz I bewiesen.

Bevor ich zu der am Anfang des Paragraphen erwähnten Untersuchung übergehe, erinnere ich noch an den folgenden KRONECKER'schen Satz über Diophantische Approximationen, welcher für unsere Untersuchungen eine fundamentale Rolle spielt.

Hilfssatz 2: *Wenn N linear unabhängige reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ und N beliebige reelle Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$ sowie $\varepsilon > 0$ gegeben sind, so gibt es ein reelles T und N ganze Zahlen $g_1, g_2, \ldots, g_N$ derart, dass die N Ungleichungen*

$$|T\lambda_1 - \mu_1 - g_1| < \varepsilon$$
$$|T\lambda_2 - \mu_2 - g_2| < \varepsilon$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|T\lambda_N - \mu_N - g_N| < \varepsilon$$

sämtlich erfüllt sind.

Ich gehe nunmehr zum Beweis des folgenden allgemeinen Satzes über.

Satz 1: *Es sei die Dirichletsche Reihe* (1) *mit linear unabhängiger Exponentenfolge für $\sigma = \sigma_0$ absolut konvergent, und es sei für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$*

$$|a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} = \varrho_n$$

gesetzt. Es bezeichne ferner $G = G(\sigma_0)$ das auf Seite 203 *definierte Gebiet (also den Kreisring $r \leqq |z| \leqq R$, bezw. den Kreis $|z| \leqq R$). Dann ist, für jedes reelle t, $f(\sigma_0 + it)$ im Gebiete G gelegen, und es liegen die Werte von $f(\sigma_0 + it)$ $(-\infty < t < \infty)$ überall dicht im Gebiete G.*

Beweis: Dass die Werte von

$$f(\sigma_0 + it) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n(\sigma_0 + it)} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

sämtlich im Gebiete G liegen, ist, wegen $|a_n e^{-\lambda_n(\sigma_0+it)}| = |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} = \varrho_n$, unmittelbar klar. Es sei nunmehr z eine beliebige Zahl im Gebiete G (incl. Rand), und es sei $\delta > 0$ beliebig gegeben; dann ist zu beweisen: es gibt ein reelles T derart, dass

$$|f(\sigma_0 + iT) - z| < \delta$$

ist. Die Existenz eines solchen T wird folgendermassen nachgewiesen. Es sei N so gewählt, dass

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \varrho_n < \frac{\delta}{3}$$

ist, und N fest. Es sei ferner, was nach dem Hilfssatze 1 möglich ist, eine Folge reeller Zahlen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ so gewählt, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n e^{i\varphi_n} = z$$

ist, d. h. dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} . e^{i\varphi_n} = z$$

ist. Dann ergibt sich für jedes reelle t, indem ich für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Amplitude der Grösse a_n durch α_n bezeichne,

$$|f(\sigma_0 + it) - z| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{i\alpha_n} e^{-\lambda_n(\sigma_0+it)} - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} e^{i\varphi_n} \right|$$

$$\leqq \left| \sum_{n=1}^{N} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} (e^{i(\alpha_n - \lambda_n t)} - e^{i\varphi_n}) \right| + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0}$$

$$< \sum_{n=1}^{N} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} \, |e^{i(\alpha_n - \lambda_n t)}| \,.\, |1 - e^{i(\lambda_n t - (\alpha_n - \varphi_n))}| + \frac{2\delta}{3}$$

d. h.

$$|f(\sigma_0 + it) - z| < \sum_{n=1}^{N} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} \left| 1 - e^{2\pi i \left(\frac{\lambda_n}{2\pi} . t - \frac{\alpha_n - \varphi_n}{2\pi} \right)} \right| + \frac{2\delta}{3}. \tag{5}$$

Es sei nunmehr, was offenbar aus Stetigkeitsgründen möglich ist, $\varepsilon > 0$ so (d. h. so klein) gewählt, dass die Summe der N Glieder

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} . |1 - e^{2\pi i \theta_n}|$$

kleiner als $\frac{\delta}{3}$ ist, wenn, für alle $n = 1, 2, \ldots, N$, die reelle Zahl θ_n von einer ganzen Zahl g_n um weniger als ε abweicht. Wir bestimmen alsdann, was nach dem Hilfssatze 2 möglich ist, ein reelles T sowie N ganze Zahlen $g_1, g_2, \ldots, g_N$ derart, dass für alle $n = 1, 2, \ldots, N$

$$\left| \frac{\lambda_n}{2\pi} . T - \frac{\alpha_n - \varphi_n}{2\pi} - g_n \right| < \varepsilon$$

ist. Für dieses T ergibt sich dann weiter nach (5)

$$|f(\sigma_0 + iT) - z| < \frac{\delta}{3} + 2\frac{\delta}{3} = \delta.$$

Hiermit ist der Satz I bewiesen.

§ 2.

Wir ziehen nunmehr in diesem Paragraphen einige für das Folgende wesentliche Folgerungen aus dem Satze des § 1.

Satz 2^a: *Es sei die Dirichletsche Reihe* (1) *mit linear unabhängiger Exponentenfolge für* $\sigma = \sigma_0$ *absolut konvergent*; *es sei* $\varepsilon > 0$ *beliebig gegeben. Dann existiert ein reelles* t_0 *derart, dass*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n (\sigma_0 + i t_0)} \right| < \varepsilon \tag{6}$$

ist.

Beweis: Es habe $G = G(\sigma_0)$ die Bedeutung des § 1, d. h. es bezeichne G den Kreisring $r \leq |z| \leq R$ bezw. den Kreis $|z| \leq R$. Dann folgt die Existenz eines reellen t_0, für das (6) erfüllt ist, unmittelbar daraus, dass einerseits die Zahl

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0}$$

dem Gebiete G angehört, während anderseits die Werte von

$$f(\sigma_0 + it) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n (\sigma_0 + it)} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

in dem Gebiete G überall dicht liegen.

Hiermit ist der Satz 2ᵃ bewiesen.

Da

$$|a|-|b| \leqq |a-b|$$

ist, folgt aus dem Satze 2ᵃ unmittelbar der

Satz 2ᵇ: *Es sei die Dirichletsche Reihe* (1) *mit linear unabhängiger Exponentenfolge für* $\sigma=\sigma_0$ *absolut konvergent, und* $\varepsilon>0$ *beliebig gegeben. Dann existiert ein reelles* t_0 *derart, dass*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|e^{-\lambda_n\sigma_0}-\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n(\sigma_0+it_0)}\right|<\varepsilon$$

ist.

Wir brauchen für das Folgende den Satz 2ᵇ in der folgenden allgemeineren Formulierung:

Satz 2ᶜ: *Es seien die Elemente der Zahlenfolge* (2) *linear unabhängig, es seien die* $M+1$ *zur Zahlenfolge* (2) *gehörigen Dirichletschen Reihen*

$$f_0(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(0)}e^{-\lambda_n s},\quad f_1(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(1)}e^{-\lambda_n s},\ \ldots,\ f_M(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(M)}e^{-\lambda_n s}$$

sämtlich für $\sigma=\sigma_0$ *absolut konvergent, und es sei für jedes* $n=1, 2, 3, \ldots$

$$\text{Amplitude }(a_n^{(0)})=\text{Amplitude }(a_n^{(1)})=\cdots=\text{Amplitude }(a_n^{(M)}); \tag{7}$$

es sei ferner $\varepsilon>0$ *beliebig gegeben. Dann gibt es ein reelles* t_0 *derart, dass gleichzeitig, für alle* $m=0, 1, \ldots, M$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n^{(m)}|e^{-\lambda_n\sigma_0}-\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(m)}e^{-\lambda_n(\sigma_0+it_0)}\right|<\varepsilon$$

ist.

Beweis: Wir betrachten die für $\sigma=\sigma_0$ absolut konvergente Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-\lambda_n s},$$

wo, für alle $n=1, 2, 3, \ldots$

$$b_n=a_n^{(0)}+a_n^{(1)}+\cdots+a_n^{(M)}$$

ist. Hierbei ist auf Grund von (7)

$$|b_n|=|a_n^{(0)}|+|a_n^{(1)}|+\cdots+|a_n^{(M)}|.$$

Wir wählen nunmehr, was nach dem Satze 2^b möglich ist, ein reelles t_0 derart, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} - \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n(\sigma_0 + i t_0)} \right| < \varepsilon$$

ist, oder anders geschrieben derart, dass

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(0)}| e^{-\lambda_n \sigma_0} + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(M)}| e^{-\lambda_n \sigma_0} \right) - \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(0)} e^{-\lambda_n(\sigma_0 + i t_0)} + \cdots \right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(M)} e^{-\lambda_n(\sigma_0 + i t_0)} \right| < \varepsilon$$

ist, also a fortiori derart, dass

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(0)}| e^{-\lambda_n \sigma_0} + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(M)}| e^{-\lambda_n \sigma_0} \right) - \left(\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(0)} e^{-\lambda_n(\sigma_0 + i t_0)} \right| + \cdots \right.$$
$$\left. + \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(M)} e^{-\lambda_n(\sigma_0 + i t_0)} \right| \right) < \varepsilon \qquad (8)$$

ist. Wegen der für alle $m = 0, 1, 2, \ldots, M$ giltigen Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(m)}| e^{-\lambda_n \sigma_0} - \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} e^{-\lambda_n(\sigma_0 + i t_0)} \right| \geqq 0$$

folgt aber unmittelbar aus (8), dass für jedes $m = 0, 1, 2, \ldots M$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(m)}| e^{-\lambda_n \sigma_0} - \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} e^{-\lambda_n(\sigma_0 + i t_0)} \right| < \varepsilon$$

ist. q. e. d.

Korollar: Es sei die Dirichletsche Reihe (1) mit linear unabhängiger Exponentenfolge für $\sigma > \alpha$ absolut konvergent; dann ist bekanntlich, wie sehr leicht zu beweisen, für jedes $m = 0, 1, 2, \ldots$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-\lambda_n)^m e^{-\lambda_n s}$$

für $\sigma > \alpha$ absolut konvergent und stellt die Funktion $f^{(m)}(s)$ dar. Ferner ist ja

$$\textit{Amplitude}\ (a_n \lambda_n^m) = \textit{Amplitude}\ (a_n).$$

Es lässt sich daher der Satz 2^c auf den Fall anwenden, wo $\sigma_0 = \alpha + 1$[1] *ist, während für jedes* $m = 0, 1, 2, \ldots M$

$$f_m(s) = (-1)^m f^{(m)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^m e^{-\lambda_n s}$$

ist. Dies werden wir später verwenden.

Satz 3: *Es sei die Dirichletsche Reihe* (1) *mit linear unabhängiger Exponentenfolge für* $\sigma > B$ *absolut konvergent, für* $\sigma = B$ *dagegen nicht absolut konvergent; dann ist die durch die Reihe* (1) *dargestellte Funktion* $f(s)$ *für* $\sigma > B$ *nicht beschränkt, d. h. nach Annahme einer beliebig grossen positiven Grösse* K *lässt sich eine Zahl* $s_0 = \sigma_0 + it_0$ *derart wählen, dass*

$$\sigma_0 > B, \qquad |f(s_0)| > K$$

ist.

Beweis: Aus der vorausgesetzten Divergenz der Reihe mit reellen nicht negativen Gliedern

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n B}$$

folgt die Existenz eines ganzzahligen N derart, dass

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n| e^{-\lambda_n B} > K + 1$$

ist. Nunmehr wählen wir ein $\sigma_0 > B$ derart, dass

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} > K + 1$$

ist, was aus Stetigkeitsgründen möglich ist; dann ist a fortiori

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} > K + 1 .$$

Ferner lässt sich nach dem Satze 2^a ein reelles t_0 derart wählen, dass

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n (\sigma_0 + it_0)} \right| < 1$$

---

[1] An Stelle von 1 könnte natürlich auch jede andere positive Konstante stehen.

ist. Dann ergibt sich für dieses t_0

$$|f(\sigma_0 + it_0)| \geq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} - \left| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} - f(\sigma_0 + it_0) \right| > K + 1 - 1 = K.$$

Damit ist der Satz 3 bewiesen.

§ 3.

Es möge die Dirichletsche Reihe (1) mit linear unabhängiger Exponentenfolge ein absolutes Konvergenzgebiet besitzen; ich werde dann in diesem Paragraph diejenigen Werte bestimmen, welche die Funktion $f(s)$ im absoluten Konvergenzgebiet der Reihe annimmt. Es sei zunächst derjenige Fall betrachtet, in dem die Reihe eine im Endlichen gelegene absolute Konvergenzgerade $\sigma = B$ besitzt, d. h. es sei B endlich und die Reihe (1) für $\sigma > B$ absolut konvergent, für $\sigma < B$ nicht absolut konvergent. Es sind nunmehr zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Reihe (1) auf der absoluten Konvergenzgeraden $\sigma = B$ absolut konvergiert oder nicht. Ich fasse zunächst den zweiten Fall ins Auge. Es gilt hier der folgende

Satz 4ª: *Es möge die Dirichletsche Reihe* (1) *mit linear unabhängiger Exponentenfolge für $\sigma > B$ absolut konvergieren, für $\sigma = B$ dagegen nicht absolut konvergieren. Dann nimmt die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > B$ jeden Wert an.*

Dem Beweis dieses Satzes wird der folgende, mit Benutzung des Satzes 1 sehr leicht beweisbare Hilfssatz vorausgeschickt.

Hilfssatz 3: *Es seien die Voraussetzungen des Satzes 4ª erfüllt, und es sei die komplexe Zahl a beliebig gegeben. Dann existiert eine reelle Zahl $\sigma_0 > B$ derart, dass die Funktion*

$$\frac{1}{f(s) - a}$$

für $\sigma > \sigma_0$ regulär ist, sowie, bei jedem $0 < \varepsilon < 1$, im Streifen

$$\sigma_0 + \varepsilon < \sigma < \sigma_0 + 1$$

beschränkt ist, während sie auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ nicht beschränkt ist.

Beweis: Aus der vorausgesetzten Divergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma}$$

für $\sigma \leqq B$ folgt zunächst, dass die Koeffizienten a_n der Reihe (1) nicht sämtlich gleich 0 sind. Es darf daher offenbar beim Beweise $a_1 \neq 0$ angenommen werden. Es habe, bei jedem festen $\sigma > B$, das Gebiet $G = G(\sigma)$ die Bedeutung des § 1 (d. h. es sei G der Kreisring $r \leqq |z| \leqq R$ bezw. der Kreis $|z| \leqq R$). Es sind nunmehr zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die gegebene Zahl a verschieden von 0 oder gleich 0 ist.

Fall 1. $a \neq 0$.

Es sei, für jedes $\sigma > B$,

$$R = R(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma}$$

gesetzt; die hier für $\sigma > B$ definierte Funktion $R(\sigma)$ ist dann bekanntlich, und wie sehr leicht zu beweisen, eine stetige Funktion, die mit wachsendem σ stets abnimmt, und es ist

$$\lim_{\sigma = +\infty} R(\sigma) = 0; \qquad \lim_{\sigma = B} R(\sigma) = \infty.$$

Es folgt hieraus die Existenz einer reellen Zahl $\sigma_0 > B$ derart, dass

$$R(\sigma_0) = |a|$$

ist. Dann ist, für $\sigma > \sigma_0$

$$|f(s) - a| \geqq |a| - |f(s)| \geqq |a| - R(\sigma) = R(\sigma_0) - R(\sigma) > 0,$$

also $\frac{1}{f(s) - a}$ für $\sigma > \sigma_0$ regulär. Ferner ist, bei jedem $\varepsilon > 0$, die Funktion $\frac{1}{f(s) - a}$ in der Halbebene $\sigma > \sigma_0 + \varepsilon$ (also a fortiori, bei jedem $0 < \varepsilon < 1$, im Streifen $\sigma_0 + \varepsilon < \sigma < \sigma_0 + 1$) beschränkt; denn es ist für $\sigma > \sigma_0 + \varepsilon$

$$|f(s) - a| \geqq |a| - |f(s)| \geqq |a| - R(\sigma) > R(\sigma_0) - R(\sigma_0 + \varepsilon).$$

Es ist dagegen $\frac{1}{f(s) - a}$ auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ nicht beschränkt, denn es gehört ja nach § 1, wegen $R(\sigma_0) = |a|$, der Wert a dem Gebiete $G = G(\sigma_0)$ an, so dass $f(\sigma_0 + it)$ $(-\infty < t < \infty)$ beliebig nahe an a herankommt.

Fall 2. $a = 0$.

Da, für alle $\sigma > B$, $R = R(\sigma)$ positiv ist, ist in diesem Falle für kein $\sigma > B$, $R(\sigma) = |a|$, und es muss daher die im Falle 1 verwendete Beweismethode hier etwas geändert werden. Es sei, für jedes $\sigma > B$,

$$r_1 = r_1(\sigma) = |a_1| e^{-\lambda_1 \sigma} - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma}$$

gesetzt; die hier für $\sigma > B$ definierte Funktion $r_1(\sigma)$ ist dann eine stetige Funktion, die bekanntlich für alle hinreichend grosse σ positiv ist, und es ist

$$\lim_{\sigma \to B} r_1(\sigma) = -\infty.$$

Es folgt hieraus die Existenz einer reellen Zahl $\sigma_0 > B$ derart, dass

$$r_1(\sigma_0) = 0$$

ist, während, für $\sigma > \sigma_0$,

$$r_1(\sigma) > 0$$

ist. Dann ist für $\sigma > \sigma_0$

$$|f(s)| \geqq |a_1| e^{-\lambda_1 \sigma} - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} = r_1(\sigma) > 0,$$

also die Funktion $\frac{1}{f(s) - 0} = \frac{1}{f(s)}$ für $\sigma > \sigma_0$ regulär; ferner ist, für jedes $0 < \varepsilon < 1$, die Funktion $\frac{1}{f(s)}$ im Streifen $\sigma_0 + \varepsilon < \sigma < \sigma_0 + 1$ (nicht aber in der ganzen Halbebene $\sigma > \sigma_0 + \varepsilon$) beschränkt; denn es ist in diesem Streifen

$$|f(s)| \geqq r_1(\sigma) \geqq m > 0,$$

wo $m = m(\varepsilon)$ das Minimum der stetigen Funktion $r_1(\sigma)$ im Intervall $\sigma_0 + \varepsilon \leqq \sigma \leqq \sigma_0 + 1$ bedeutet, in welchem Intervall $r_1(\sigma) > 0$ ist. Dagegen ist die Funktion $\frac{1}{f(s)}$ auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ nicht beschränkt; es ist nämlich, wegen

$$r_1(\sigma_0) = |a_1| e^{-\lambda_1 \sigma_0} - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} = 0,$$

in der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0}$$

kein Glied grösser als die Summe aller übrigen Glieder, so dass 0 dem Gebiete

$G(\sigma_0)$ angehört, und es nimmt somit die Funktion $f(\sigma_0 + it)$ $(-\infty < t < \infty)$ beliebig kleine Werte an.

Es ist hiermit der Hilfssatz 3 bewiesen.

Ich gehe nunmehr zum **Beweise des Satzes 4ª** über.

Es sei a eine beliebige komplexe Zahl, dann ist zu beweisen: es nimmt die Funktion $f(s)$ für $\sigma > B$ den Wert a an. Es habe $\sigma_0 = \sigma_0(a)$ die Bedeutung des Hilfssatzes 3, also insbesondere: es ist $f(s) \neq a$ für $\sigma > \sigma_0$. Ich werde dann beweisen: es nimmt, sogar bei jedem $\varepsilon > 0$, die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \sigma_0 - \varepsilon$ den Wert a an. Gesetzt, dies sei nicht der Fall, dann gäbe es eine feste Zahl $e > 0$, die ich $< \sigma_0 - B$ sowie $< \frac{1}{3}$ annehmen darf, derart, dass $f(s)$ in der Halbebene $\sigma \geqq \sigma_0 - e$ verschieden von a wäre. Es bezeichne unter dieser Annahme $F(s)$ einen beliebigen, für $\sigma \geqq \sigma_0 - e$ regulären Zweig der Funktion

$$\log\,(f(s) - a).$$

Dann ist, im Streifen $\sigma_0 - e \leqq \sigma \leqq \sigma_0 + 1$, $\Re(F(s))$[1] nach oben beschränkt, denn es ist in diesem Streifen

$$\Re(F(s)) = \Re(\log\,(f(s) - a)) = \log\,|f(s) - a| \leqq \log\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, e^{-\lambda_n(\sigma_0 - e)} + |a|\right) < K_1,$$

wo die positive Grösse K_1 (sowie in der Folge $K_2 > 0$, $K_3 > 0, \ldots$) von s nicht abhängt.

Ferner ist, auf der Geraden $\sigma = \sigma_0 + e$, $\Re(F(s))$ auch nach unten beschränkt, d. h. es ist für $\sigma = \sigma_0 + e$

$$-\Re(F(s)) < K_2,$$

denn es ist

$$-\Re(F(s)) = \log\left|\frac{1}{f(s) - a}\right|$$

und, nach dem Hilfssatze 3, die Funktion $\frac{1}{f(s) - a}$ für $\sigma = \sigma_0 + e$ beschränkt.

Nun hat aber Herr Carathéodory bewiesen:

Es sei die analytische Funktion $F(s)$ für $|s - s_0| \leqq r$ regulär und A das Maximum von $\Re(F(s))$ für $|s - s_0| \leqq r$. Es sei $0 < \varrho < r$. Dann ist für $|s - s_0| \leqq \varrho$

[1] $\Re(z)$ bedeute stets den reellen Teil einer komplexen Zahl z.

$$|\Re(F(s))| \leqq |\Re(F(s_0))| \frac{r+\varrho}{r-\varrho} + 2A \frac{\varrho}{r-\varrho}.$$

Wir wenden nun diesen CARATHÉODORY'schen Satz an auf die Funktion

$$F(s) = \log(f(s) - a),$$

den Punkt

$$s_0 = \sigma_0 + e + it \qquad (-\infty < t < \infty)$$

und die Zahlen

$$r = 2e, \quad \varrho = e.$$

Die Voraussetzungen des Satzes (d. h. insbesondere die Regularität von $F(s)$ für $|s - s_0| \leqq r$) sind offenbar erfüllt; denn es gehört ja der Kreis $|s - s_0| \leqq r$ dem Streifen $\sigma_0 - e \leqq \sigma \leqq \sigma_0 + 1$ an.

Ferner ist im Streifen $\sigma_0 - e \leqq \sigma \leqq \sigma_0 + 1$, also a fortiori im Kreise $|s - s_0| \leqq r$,

$$\Re(F(s)) < K_1,$$

d. h. es ist die Zahl $A < K_1$, und aus

$$\Re(F(s_0)) < K_1, \qquad -\Re(F(s_0)) < K_2$$

folgt

$$|\Re(F(s_0))| < K_3,$$

wo K_3 die grössere der beiden positiven Zahlen K_1 und K_2 bedeutet.

Der CARATHÉODORY'sche Satz ergibt alsdann für $|s - s_0| \leqq \varrho = e$

$$|\Re(F(s))| < K_3 \frac{2e+e}{2e-e} + 2K_1 \frac{e}{2e-e} = 3K_3 + 2K_1 = K_4.$$

Es wäre also insbesondere im Punkte $s = \sigma_0 + it$, der vom Punkte s_0 genau den Abstand $\varrho = e$ hat,

$$|\Re(F(s))| < K_4,$$

also a fortiori

$$-\Re(F(\sigma_0 + it)) < K_4. \qquad (-\infty < t < \infty)$$

Die Funktion

$$\left|\frac{1}{f(s) - a}\right| = e^{-\Re(F(s))}$$

wäre also auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ beschränkt, im Gegensatze zu den Voraussetzungen.

Es muss also unsre Annahme $f(s) \neq a$ für $\sigma \geqq \sigma_0 - e$ falsch gewesen sein.

Damit ist der Satz 4ª bewiesen.

Dem Satze 4ª schliesst sich der folgende Satz 4ᵇ an, der den Fall behandelt, in dem die Reihe (1) auf der absoluten Konvergenzgeraden $\sigma = B$ absolut konvergiert.

Satz 4ᵇ. *Es sei die Dirichletsche Reihe* (1) *mit linear unabhängiger Exponentenfolge für $\sigma \geqq B$ absolut konvergent, für $\sigma < B$ dagegen nicht absolut konvergent, und es sei $a_1 \neq 0$. Dann liegen die Werte, welche $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > B$ annimmt, sämtlich im Innern (excl. Rand) des Kreises $|z| \leqq R$, wo*

$$R = R(B) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n B}$$

ist; und es nimmt die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > B$ jeden Wert im Innern des Kreises $|z| \leqq R$, bezw. jeden Wert im Innern des Kreises $|z| \leqq R$ ausser den einzigen Wert 0, *an, je nachdem*

$$|a_1 e^{-\lambda_1 B}| < \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n B}$$

bezw.

$$|a_1 e^{-\lambda_1 B}| \geqq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n B}$$

ist.

Die Ausführung des Beweises dieses Satzes überlasse ich dem Leser, da er im Wesentlichen ganz wie der des Satzes 4ª verläuft.

Die beiden Sätze 4ª und 4ᵇ behandelten den Fall, dass die absolute Konvergenzabszisse der Reihe (1) im Endlichen gelegen war. Es sei nunmehr derjenige Fall betrachtet, in dem die Reihe (1) überall absolut konvergiert. Hier gilt der folgende

Satz 4ᶜ. *Es möge die Dirichletsche Reihe* (1) *mit linear unabhängiger Exponentenfolge in der ganzen Ebene absolut konvergieren, und es mögen mindestens zwei der Koeffizienten der Reihe von* 0 *verschieden sein.*[1] *Dann nimmt die in der ganzen Ebene reguläre Funktion $f(s)$ jeden Wert an.*

---

[1] Wenn die Koeffizienten der Reihe (1) sämtlich gleich 0 sind, nimmt die Funktion $f(s)$ nur den Wert 0 an; wenn nur ein Koeffizient $\neq 0$ ist, nimmt $f(s)$ jeden Wert ausser 0 an.

Der Beweis dieses Satzes verläuft wörtlich wie der Beweis des Satzes 4^a, wenn nur in dem letzten B überall durch $-\infty$ ersetzt wird.

Schliesslich will ich noch erwähnen, dass ich durch eine tiefergehende Untersuchung, auf die ich hier verzichte, das folgende allgemeine Resultat bewiesen habe, aus welchem offenbar die obigen Sätze 4^a, 4^b und 4^c speziell abzuleiten sind: *Es ist die Menge $M(\sigma_0)$ aller Werte, welche die Dirichletsche Reihe* (1) *mit linear unabhängiger Exponentenfolge in unendlicher Nähe*[1] *der im Innern des absoluten Konvergenzgebietes gelegenen vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt, mit der Menge aller Zahlen, welche in der komplexen Ebene im Gebiete $G(\sigma_0)$ (d. h. im Kreisringe $r \leqq |z| \leqq R$, bezw. im Kreise $|z| \leqq R$) gelegen sind, identisch.*

§ 4.

Satz 5. *Es besitze die zur linear unabhängigen Exponentenfolge* (2) *gehörige Dirichletsche Reihe* (1) *ein absolutes Konvergenzgebiet, und es möge die durch die Reihe definierte Funktion $f(s)$ für $\sigma \geqq \beta$ regulär und beschränkt sein. Dann ist die Reihe* (1) *für $\sigma > \beta$ absolut konvergent.*

Beweis: Es ist nach Voraussetzung eine reelle Zahl α derart vorhanden, dass (1) für $\sigma > \alpha$ absolut konvergiert; da für $\beta \geqq \alpha$ der Satz trivial ist, darf beim Beweise $\beta < \alpha$ angenommen werden.

Es ist ferner nach Voraussetzung die Funktion $f(s)$ für $\sigma \geqq \beta$ beschränkt, d. h. es gibt eine positive Zahl K derart, dass für $\sigma \geqq \beta$

$$|f(s)| < K$$

ist.

Es sei nunmehr $\delta > 0$ beliebig gegeben; dann lautet die Behauptung: es ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n(\beta+\delta)}$$

konvergent. Es darf hierbei offenbar $\delta < 1$ angenommen werden.

In der Umgebung von $s = \alpha + 1 + iT$, wo T eine beliebige reelle Zahl bedeutet, mit einem Radius $r = r(T) > \alpha + 1 - \beta$ gilt die Potenzreihenentwickelung

$$f(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(s - (\alpha + 1 + iT))^m}{m!} \cdot f^{(m)}(\alpha + 1 + iT);$$

[1] Unter dem Ausdruck: es nimmt die Funktion $f(s)$ den Wert z in unendlicher Nähe der Geraden $\sigma = \sigma_0$ an, ist zu verstehen: Bei jedem $\delta > 0$ nimmt die Funktion $f(s)$ im Streifen $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$ den Wert z an.

denn es ist ja nach Voraussetzung die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma \geqq \beta$ regulär.

Weil aber nach Voraussetzung, für $|s-(\alpha+1+iT)| \leqq \alpha+1-\beta$,

$$|f(s)| < K$$

ist, so ergibt sich die Existenz einer Konstanten (d. h. *einer von T unabhängigen Grösse*) $K_1 = K_1(\alpha, \beta, \delta, K)$ derart, dass, für $|s-(\alpha+1+iT)| \leqq \alpha+1-\beta-\delta$,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{(s-(\alpha+1+iT))^m}{m!} \cdot f^{(m)}(\alpha+1+iT) \right| < K_1$$

ist.[1]

Hieraus folgt speziell im Punkte $s = \beta+\delta+iT$, der vom Punkte $\alpha+1+iT$ genau den Abstand $\alpha+1-\beta-\delta$ hat, die Ungleichung

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{(\alpha+1-\beta-\delta)^m}{m!} (-1)^m f^{(m)}(\alpha+1+iT) \right| < K_1 \tag{9}$$

d. h., wenn ich für alle $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$(-1)^m f^{(m)}(\alpha+1+iT) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^m e^{-\lambda_n(\alpha+1+iT)}$$

einführe,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1-\beta-\delta)^m}{m!} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^m e^{-\lambda_n(\alpha+1+iT)} \right| < K_1.$$

Ich werde nunmehr zeigen, und dieser Nachweis ist der Kern des Beweises, dass man aus der für alle reellen T giltigen Ungleichung (9) die Konvergenz der Doppelreihe mit reellen nicht negativen Gliedern

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1-\beta-\delta)^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n^m e^{-\lambda_n(\alpha+1)}$$

folgern kann, ja sogar beweisen kann: es ist

---

[1] Es ist hier der folgende Satz angewendet: »*Es sei $0 < r_1 < r_2$, und die durch die Potenzreihe $\sum_{m=0}^{\infty} A_m x^m$ dargestellte Funktion $F(x)$ für $|x| \leqq r_2$ regulär, sowie, für $|x| \leqq r_2$, $|F(x)| < k$; dann gibt es eine Konstante $k_1 = k_1(r_1, r_2, k)$ derart, dass für $|x| \leqq r_1$, $\sum_{m=0}^{\infty} |A_m x^m| < k_1$ ist.*« Die Richtigkeit dieses Satzes ist unmittelbar einzusehen. Aus $|F(x)| < k$ für $|x| \leqq r_2$ folgt nämlich für alle $m = 0, 1, 2, \ldots$ die Abschätzung $|A_m| < k : r_2^m$, und hieraus ergibt sich weiter für $|x| \leqq r_1$

$$\sum_{m=0}^{\infty} |A_m x^m| < k \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^m = k \frac{r_2}{r_2 - r_1} = k_1 \qquad \text{q. e. d.}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n^m e^{-\lambda_n (\alpha+1)} \leq K_1,$$

wo K_1 die obige Konstante bedeutet.

Gesetzt, dies sei nicht der Fall, dann würde ein ganzzahliges M derart existieren, dass

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n^m e^{-\lambda_n (\alpha+1)} = K_2 > K_1$$

wäre. Hieraus ergibt sich aber ein Widerspruch in folgender Weise.

Es sei

$$\varepsilon = \frac{K_2 - K_1}{\sum\limits_{m=0}^{M} \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!}}$$

gesetzt, und zu diesem ε, was nach dem Satze 2[c] (vergl. Korollar dieses Satzes) möglich ist, die reelle Zahl t_0 so gewählt, dass für alle $m = 0, 1, 2, \dots M$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n^m e^{-\lambda_n(\alpha+1)} - |(-1)^m f^{(m)}(\alpha + 1 + it_0)| < \varepsilon$$

ist. Dann ergibt sich für dieses t_0

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!} |(-1)^m f^{(m)}(\alpha + 1 + it_0)| = \sum_{m=0}^{M} \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n^m e^{-\lambda_n(\alpha+1)}$$

$$- \sum_{m=0}^{M} \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n^m e^{-\lambda_n(\alpha+1)} - |(-1)^m f^{(m)}(\alpha + 1 + it_0)| \right)$$

$$> K_2 - \varepsilon \sum_{m=0}^{M} \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!} = K_2 - (K_2 - K_1) = K_1$$

also a fortiori

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!} |(-1)^m f^{(m)}(\alpha + 1 + it_0)| > K_1,$$

im Gegensatze zu der für alle reellen T giltigen Beziehung (9).

Aus der somit bewiesenen Konvergenz der Doppelreihe mit reellen nicht negativen Gliedern

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n^m e^{-\lambda_n(\alpha+1)}$$

folgt nunmehr die Konvergenz der durch Summationsvertauschung entstehenden Doppelreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n(\alpha+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!} \lambda_n^m$$

d. h. die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n(\alpha+1)} \cdot e^{\lambda_n(\alpha+1-\beta-\delta)} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n(\beta+\delta)}.$$

Damit ist der Satz V bewiesen.[1]

§ 5.

Es ist in dem vorangehenden Paragraph bewiesen: Es besitze die Dirichletsche Reihe (1) mit linear unabhängiger Exponentenfolge ein absolutes Konvergenzgebiet, und es möge die durch die Reihe definierte Funktion für $\sigma \geqq \beta$ regulär und beschränkt sein; dann ist die Reihe (1) für $\sigma > \beta$ absolut konvergent.

Ich werde nunmehr im folgenden Paragraph, d. h. im § 6, beweisen, dass in dem obigen Satze die Voraussetzung der Existenz einer absoluten Konvergenzhalbebene glatt weggelassen werden kann, oder vielmehr durch die (wie es in der Natur der Sache liegt, notwendige) Voraussetzung ersetzt werden kann: es besitze die Reihe (1) überhaupt ein Konvergenzgebiet.

Wie der Leser bemerkt haben wird, stützte sich die Beweismethode des § 4 wesentlich auf die dort vorausgesetzte Existenz eines absoluten Konvergenzgebietes. Ich wende daher im § 6 eine ganz andere Beweismethode an, die übrigens keinen Gebrauch von dem im § 4 gewonnenen Resultate macht.

In diesem Paragraph 5 erinnere ich an einen für den Beweis des Satzes in § 6 wesentlichen Hilfssatz des Herrn PERRON.

---

[1] Die oben verwendete Beweismethode, nämlich von der TAYLOR'schen Reihenentwickelung der durch die Dirichletsche Reihe dargestellten Funktion auszugehen und dann nachher durch Summationsvertauschung einer Doppelreihe zu der Dirichletschen Reihe zurückzukehren, ist zuerst von Herrn LANDAU benutzt, der sie verwendet um den folgenden Satz über Dirichletsche Reihen mit *positiven* Koeffizienten zu beweisen: »*Es habe die Dirichletsche Reihe* $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$, *wo stets* $a_n \geqq 0$ *ist, die im Endlichen gelegene Konvergenzgerade* $\sigma = A$. *Dann ist* $s = A$ *ein singulärer Punkt der für* $\sigma > A$ *durch die Reihe definierten Funktion* $f(s)$.« Beim Beweise des LANDAU'schen Satzes war die Erlaubnis der Summationsvertauschung der dort vorkommenden Doppelreihe von vornherein klar, weil ihre Elemente sämtlich $\geqq 0$ waren. Beim obigen Beweise des Textes dagegen, war es gerade die wesentlichste, und erst durch Heranziehen des recht tief liegenden Satzes 1 zu überwindende Schwierigkeit, die Erlaubnis dieser Summationsvertauschung der Doppelreihe zu beweisen.

Es ist bekanntlich, und mit Hilfe des CAUCHY'schen Integralsatzes sehr leicht zu beweisen, für $\gamma > 0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{ys}}{s^2}\, ds = \begin{cases} y \text{ für } y > 0 \\ 0 \text{ für } y \leqq 0, \end{cases}$$

wo das Integral rechts längs der vertikalen Geraden $\sigma = \gamma$ von $\gamma - i\infty$ bis $\gamma + i\infty$ erstreckt ist.

Herr PERRON hat, von dieser Formel ausgehend, bewiesen: Es besitze die Dirichletsche Reihe (1) ein Konvergenzgebiet, und es sei die Gerade $\sigma = \gamma$, wo $\gamma > 0$ ist, im Innern des Konvergenzgebietes gelegen; es sei ferner x eine beliebige reelle Zahl; dann ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{xs}}{s^2} f(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{1}{s^2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(x-\lambda_n)s}\, ds = \sum_{\lambda_n < x} a_n (x - \lambda_n).$$

Durch Anwendung einer einfachen Variabelntransformation $s = s' - s_0$ lässt sich dieser PERRON'sche Satz auch so formulieren:

Hilfssatz 4: *Es besitze die Dirichletsche Reihe* (1) *ein Konvergenzgebiet, und es sei $\sigma = \gamma$ im Innern dieses Konvergenzgebietes gelegen; es sei ferner s_0 eine komplexe Zahl, für die $\Re(s_0) < \gamma$ ist, und es sei x eine reelle Zahl. Dann ist*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{x(s-s_0)}}{(s - s_0)^2} f(s)\, ds = \sum_{\lambda_n < x} (x - \lambda_n)\, a_n\, e^{-\lambda_n s_0}.$$

§ 6.

Satz 6: *Es besitze die Dirichletsche Reihe* (1) *mit linear unabhängiger Exponentenfolge ein Konvergenzgebiet, und es möge die durch die Reihe definierte Funktion $f(s)$ für $\sigma \geqq \beta$ regulär und beschränkt sein. Dann ist* (1) *für $\sigma > \beta$ absolut konvergent.*

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es eine Konstante K derart, dass für $\sigma \geqq \beta$

$$|f(s)| < K$$

ist.

Es sei $\delta > 0$ beliebig gegeben; dann ist zu beweisen: Die Reihe (1) ist für $\sigma = \beta + \delta$ absolut konvergent.

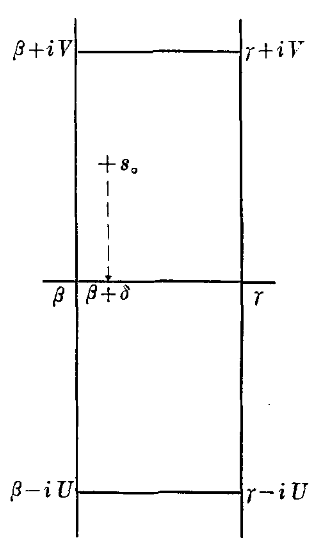
Ich bemerke zunächst, dass die Funktion $f'(s)$ auf der Geraden $\sigma = \beta + \delta$ beschränkt ist; denn es ist nach dem CAUCHY'schen Satze, für jedes reelle t,

$$f'(\beta + \delta + it) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{f(s)}{(s - (\beta + \delta + it))^2}\, ds$$

wo das Integral rechts längs der Kreisperipherie C mit dem Mittelpunkte $\beta + \delta + it$ und dem Radius δ erstreckt ist; und hieraus ergibt sich sofort

$$|f'(\beta + \delta + it)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{K}{\delta^2}\, \delta\, d\theta = \frac{K}{\delta} = K',$$

wo K' von t nicht abhängt.



Es sei nunmehr $\gamma > \beta + \delta$ eine reelle Zahl, die im Inneren des Konvergenzgebietes der Reihe (1) gelegen ist. Es sei T eine beliebige reelle Zahl, und es sei $s_0 = \beta + \delta + iT$ gesetzt. Es sei ferner $x > 1$ eine feste positive Zahl. Dann ist nach dem Hilfssatze 4 des § 5

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{x(s-s_0)}}{(s - s_0)^2} f(s)\, ds = \sum_{\lambda_n < x} a_n (x - \lambda_n)\, e^{-\lambda_n s_0}, \tag{10}$$

wo das Integral links längs der Geraden $\sigma = \gamma$ erstreckt ist.

Wir wenden nunmehr den CAUCHY'schen Satz auf den Integranden

$$F(s) = \frac{e^{x(s-s_0)}}{(s - s_0)^2} f(s)$$

und das Rechteck

$$[\gamma - iU,\ \gamma + iV,\ \beta + iV,\ \beta - iU]$$

an. Dann ergibt sich für alle hinreichend grosse U und V

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma - iU}^{\gamma + iV} F(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma - iU}^{\beta - iU} F(s)\, ds + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta - iU}^{\beta + iV} F(s)\, ds + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta + iV}^{\gamma + iV} F(s)\, ds + x f(s_0) + f'(s_0); \tag{11}$$

denn es ist die Funktion

$$F(s)=\frac{e^{x(s-s_0)}}{(s-s_0)^2}f(s)$$

im Rechteck und auf dessen Begrenzung überall regulär bis auf den einzigen Punkt $s=s_0$, wo sie einen Pol der zweiten Ordnung mit dem Residuum $xf(s_0)+f'(s_0)$ besitzt.[1]

Lassen wir nunmehr in (11) U und V gegen ∞ wachsen! Dann konvergiert das erste und dritte Integral rechts gegen 0; denn es ist auf den beiden Strecken $(\gamma-iU,\ \beta-iU)$ und $(\beta+iV,\ \gamma+iV)$

$$|F(s)|=|F(\sigma+it)|=\left|\frac{e^{x(s-s_0)}}{(s-s_0)^2}f(s)\right|<\frac{e^{x(\gamma-(\beta+\delta))}}{(t-T)^2}K=\frac{k}{(t-T)^2}$$

wo k von t, d. h von U und V, nicht abhängt.

Ferner konvergiert, nach (10), die linke Seite von (11) gegen

$$\sum_{\lambda_n<x} a_n(x-\lambda_n)\,e^{-\lambda_n s_0}.$$

Es folgt daher aus (11)

$$\sum_{\lambda_n<x} a_n(x-\lambda_n)\,e^{-\lambda_n s_0}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(s)\,ds+xf(s_0)+f'(s_0). \tag{12}$$

Untersuchen wir zunächst das erste Glied auf der rechten Seite von (12), und setzen wir die Variable s gleich $\beta+it$, wo die reelle Variable t von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft; dann ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(s)\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{x(\beta+it-(\beta+\delta+iT))}}{(\beta+it-(\beta+\delta+iT))^2}f(\beta+it)\,i\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{x(-\delta+i(t-T))}}{(-\delta+i(t-T))^2}f(\beta+it)\,dt,$$

also

[1] Die Formel (11) gilt, wie unmittelbar zu ersehen, auch in den beiden speziellen Fällen $f(s_0)=0$, $f'(s_0)\neq 0$, bezw. $f(s_0)=0$, $f'(s_0)=0$, wo die Funktion $F(s)$ im Punkte s_0 einen Pol der ersten Ordnung, bezw. eine reguläre Stelle besitzt.

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s)\,ds\right| < \frac{1}{2\pi}\, e^{-x\delta} K \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\delta^2+(t-T)^2} = \frac{K}{2\pi}\, e^{-x\delta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\delta^2+u^2} = K_1 e^{-x\delta} < K_1,$$

wo $K_1 > 0$ (sowie in der Folge $K_2, K_3, K_4, \ldots$) *von* T *und* $x\,(>1)$ *unabhängig ist.*

Ferner ist

$$|x f(s_0) + f'(s_0)| < x K + K' < x(K+K') < x K_2.$$

Es ergibt sich daher aus (12)

$$\left|\sum_{\lambda_n < x} a_n e^{-\lambda_n s_0}(x-\lambda_n)\right| < K_1 + x K_2 < x K_3.$$

Es ist somit für alle reellen T bewiesen, *dass*

$$\left|\sum_{\lambda_n < x} a_n (x-\lambda_n)\, e^{-\lambda_n(\beta+\delta+iT)}\right| < x K_3 \tag{13}$$

ist, wo K_3 *von* T *und* $x\,(>1)$ *nicht abhängt.*

Wir wählen nunmehr, bei festem $x > 1$, ein reelles t_0 derart, dass

$$\sum_{\lambda_n < x} |a_n|(x-\lambda_n)\, e^{-\lambda_n(\beta+\delta)} - \left|\sum_{\lambda_n < x} a_n (x-\lambda_n)\, e^{-\lambda_n(\beta+\delta+it_0)}\right| < 1 \tag{14}$$

ist. Eine solche Wahl ist nach dem Satze 2[b] des § 2 möglich; man hat ihr nur auf die für $\sigma = \beta + \delta$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s}$$

anzuwenden, wo

$$b_n = \begin{cases} a_n(x-\lambda_n) & \text{für } \lambda_n < x \\ 0 & \text{für } \lambda_n \geqq x \end{cases}$$

ist.

Aus (13) und (14), wenn in der ersten Ungleichung T speziell gleich t_0 gesetzt wird, ergibt sich nun weiter

$$\sum_{\lambda_n < x} |a_n|(x-\lambda_n)\, e^{-\lambda_n(\beta+\delta)} < x K_3 + 1 < x(K_3+1) < x K_4,$$

also a fortiori

$$\sum_{\lambda_n < \frac{x}{2}} |a_n| e^{-\lambda_n(\beta+\delta)} (x - \lambda_n) < x K_4,$$

$$\sum_{\lambda_n < \frac{x}{2}} |a_n| e^{-\lambda_n(\beta+\delta)} \left(\frac{x}{2}\right) < x K_4$$

$$\frac{x}{2} \sum_{\lambda_n < \frac{x}{2}} |a_n| e^{-\lambda_n(\beta+\delta)} < x K_4$$

d. h.

$$\sum_{\lambda_n < \frac{x}{2}} |a_n| e^{-\lambda_n(\beta+\delta)} < 2 K_4 = K_5,$$

wo K_5 von x unabhängig ist. Dies gilt für jedes $x > 1$. Es ist folglich die Reihe mit reellen nicht negativen Gliedern

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n(\beta+\delta)}$$

konvergent. Damit ist der Satz 6 bewiesen.

Es lässt sich nunmehr der Beweis des in der Einleitung erwähnten Hauptsatzes in wenigen Worten führen.

Hauptsatz: *Es besitze die Dirichletsche Reihe* (1) *mit linear unabhängiger Exponentenfolge ein Konvergenzgebiet. Dann ist es eine für die absolute Konvergenz der Reihe* (1) *für $\sigma \geqq \beta$ notwendige und hinreichende Bedingung, dass die durch die Reihe definierte Funktion $f(s)$ für $\sigma > \beta$ regulär und beschränkt ist.*

Beweis. 1.) Die Bedingung ist notwendig; denn aus der absoluten Konvergenz der Reihe (1) für $\sigma \geqq \beta$ folgt erstens die Regularität von $f(s)$ für $\sigma > \beta$; ferner ist, der für $\sigma > \beta$ giltigen Ungleichung

$$|f(s)| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \beta}$$

zufolge, $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \beta$ beschränkt.

2.) Die Bedingung ist aber auch hinreichend; denn es sei $f(s)$ für $\sigma > \beta$, also a fortiori, bei jedem $\varepsilon > 0$, für $\sigma \geqq \beta + \varepsilon$, regulär und beschränkt; dann ist, nach dem Satze 6, die Dirichletsche Reihe (1) für $\sigma > \beta + \varepsilon$, d. h. für $\sigma > \beta$, absolut konvergent. Es ist aber die Reihe (1) auch für $\sigma = \beta$ absolut konvergent, denn wenn dies nicht der Fall wäre, dann würde nach dem Satze 3 des § 2 folgen: »es ist $f(s)$ für $\sigma > \beta$ nicht beschränkt,» im Gegensatze zu den Voraussetzungen.

Damit ist der Hauptsatz bewiesen.

Wie unmittelbar einzusehen, lässt sich der Hauptsatz auch folgendermassen formulieren:

Es besitze die Reihe (1) *mit linear unabhängiger Exponentenfolge ein Konvergenzgebiet; dann sind drei Fälle zu unterscheiden:*

Fall 1. *Es sei für kein reelles σ_0 die Funktion $f(s)$ für $\sigma > \sigma_0$ regulär und beschränkt; dann ist die Reihe* (1) *nirgends absolut konvergent.*

Fall 2. *Es sei für jedes reelle σ_0 die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \sigma_0$ regulär und beschränkt; dann ist die Reihe* (1) *überall absolut konvergent.*

Fall 3. *Es mögen zwei Zahlen σ_1 und σ_2 derart existieren, dass $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \sigma_1$ regulär und beschränkt ist, dagegen in der Halbebene $\sigma > \sigma_2$ nicht sowohl regulär als auch beschränkt ist, und es bezeichne unter dieser Annahme B diejenige reelle Zahl, für welche, bei jedem $\varepsilon > 0$, $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > B + \varepsilon$ regulär und beschränkt ist, dagegen in der Halbebene $\sigma > B - \varepsilon$ nicht regulär und beschränkt ist. Dann ist B die absolute Konvergenzabszisse der Reihe* (1). *Ferner ist* (1) *auf der absoluten Konvergenzgeraden $\sigma = B$ absolut konvergent oder nicht, je nachdem $f(s)$ in der ganzen Halbebene $\sigma > B$* (nicht etwa in der Halbebene $\sigma > B + \varepsilon$) *beschränkt ist oder nicht.*

In nicht ganz präziser Ausdrucksweise lässt sich der Hauptsatz auch so formulieren: Eine Dirichletsche Reihe mit linear unabhängiger Exponentenfolge ist stets so weit und nur so weit absolut konvergent, als die durch die Reihe dargestellte Funktion regulär und beschränkt bleibt.

§ 7.

In dem Hauptsatze, sowie in allen Sätzen der Paragraphen 1, 2, 3, 4 und 6, ist die Exponentenfolge der (und nur der) Bedingung unterworfen, dass ihre Elemente linear unabhängig sein sollen. Diese Bedingung wurde in § 1 eingeführt, um den Kronecker'schen Satz über Diophantische Approximationen auf unsren Problemkreis verwenden zu können. Die Einführung jenes Kronecker'schen Satzes gestattete uns in § 1 den Satz 1 zu beweisen, welcher letzte Satz gewissermassen die Grundlage der in dieser Abhandlung dargestellten Theorie bildet. Es fragt sich aber nunmehr, ob diese arithmetische Bedingung, welche der Exponentenfolge auferlegt ist, nur für die von uns verwendete Beweismethode notwendig ist, oder aber ob sie eine für die Sätze selbst (in erster Linie für den Hauptsatz) wesentliche Bedingung ist, d. h. ob die Sätze noch bestehen bleiben, wenn in denselben die einschränkende Bedingung für die Exponentenfolge weggelassen wird.

Ich werde nunmehr in diesem letzten Paragraph beweisen, dass dies letzte nicht der Fall ist, d. h. *dass die arithmetische Bedingung der Exponentenfolge in der Tat eine für die Probleme selbst wesentliche Bedingung ist.* Der Kürze halber werde ich mich nur mit dem Hauptsatze sowie mit dem Satze 4^a des § 3 beschäftigen.

Es sei zunächst der Satz 4^a ins Auge gefasst.

Dieser Satz sagt aus: Es nimmt eine Dirichletsche Reihe mit linear unabhängiger Exponentenfolge, die für $\sigma > B$ absolut konvergiert, für $\sigma = B$ dagegen nicht absolut konvergiert, in der Halbebene $\sigma > B$ jeden Wert an.

Dass dieser Satz nicht allgemein besteht, wenn die arithmetische Bedingung für die Exponentenfolge weggelassen wird, folgt unmittelbar durch Betrachtung der folgenden speziellen, zur linear nicht unabhängigen Exponentenfolge $\lambda_n = n$ gehörigen, für $\sigma > 0$ absolut konvergenten, für $\sigma = 0$ dagegen nicht absolut konvergenten Dirichletschen Reihe

$$\frac{e^{-s}}{1-e^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ns}.$$

Es nimmt ja die Funktion $\frac{e^{-s}}{1-e^{-s}}$ in der Halbebene $\sigma > 0$ z. B. keinen Wert im Kreise $|z+1| < \frac{1}{2}$ an; denn es ist für $\sigma > 0$, d. h. für $|e^{-s}| < 1$,

$$\left|\frac{e^{-s}}{1-e^{-s}} + 1\right| = \left|\frac{1}{1-e^{-s}}\right| > \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Ein anderes Beispiel bildet die zur linear nicht unabhängigen Exponentenfolge $\lambda_n = \log n$ gehörige Dirichletsche Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\log n \cdot s},$$

wo $\zeta(s)$ die Riemann'sche Zetafunktion bedeutet; es ist nämlich $\sum \frac{1}{n^s}$ für $\sigma > 1$ absolut konvergent, dagegen für $\sigma = 1$ nicht absolut konvergent, während bekanntlich für $\sigma > 1$

$$\zeta(s) \neq 0$$

ist.[1]

Wir wenden uns nunmehr zum Hauptsatze.

Es handelt sich hier vor allem darum, die Existenz einer solchen Dirichletschen Reihe (die selbstverständlich zu einer linear nicht unabhängigen Exponentenfolge gehören muss) zu beweisen, dass die durch die Reihe definierte Funktion für $\sigma > 0$[2] regulär und beschränkt ist, ohne dass die Reihe jedoch für $\sigma \geqq 0$ absolut konvergiert.

Zu diesem Zwecke entnehme ich aus der Theorie der Potenzreihen den folgenden

Existenzsatz 1: *Es existiert eine für $|x| < 1$ absolut konvergente, für $|x| = 1$ nicht absolut konvergente, Potenzreihe*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

derart, dass die Funktion $F(x)$ im Innern des Einheitskreises beschränkt ist, d. h. derart, dass es eine solche Konstante K gibt, dass, für $|x| < 1$,

$$|F(x)| < K$$

ist.

Ich betrachte nunmehr die für $|e^{-s}| < 1$, d. h. für $\sigma > 0$, absolut konvergente Dirichletsche Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ns} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{-s})^n = F(e^{-s}),$$

wo die Grössen b_n die Koeffizienten der im obigen Existenzsatze vorkommen-

---

[1] Dagegen nimmt, wie ich vor kurzem bewiesen habe (»Über das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$«, Göttinger Nachrichten, 1911), die Funktion $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ jeden Wert ausser den einzigen Wert 0 an. Da hier von der Zetafunktion die Rede ist, bemerke ich beiläufig, dass aus dem Satze 4[a] des § 3 unmittelbar folgt, *dass die beiden Dirichletschen Reihen*

$$\sum \frac{1}{p^s} \quad \textit{und} \quad \sum \frac{\log p}{p^s}, \quad (p = 2, 3, 5, 7, \ldots),$$

welche mit der Zetafunktion in naher Verbindung steht, *in der Halbebene $\sigma > 1$ jeden Wert annimmt;* denn es ist die Exponentenfolge $\log p$ linear unabhängig, und es sind die beiden obigen Reihen für $\sigma > 1$ absolut konvergent, für $\sigma = 1$ dagegen nicht absolut konvergent.

[2] An Stelle von 0 könnte natürlich hier und im folgenden jede andere reelle Zahl stehen.

den Potenzreihe sind. Die durch diese Dirichletsche Reihe definierte Funktion $f(s) = F(e^{-s})$ ist alsdann, dem Existenzsatze zufolge, für $|e^{-s}| < 1$, d. h. für $\sigma > 0$, regulär und beschränkt; es ist aber die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ns}$$

für $\sigma \geqq 0$ doch nicht absolut konvergent (sondern nur für $\sigma > 0$); denn es ist, für $\sigma = 0$, die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-n \cdot 0} = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

divergent.

Es ist durch dieses Beispiel gezeigt, dass in dem Hauptsatze die Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit der Exponentenfolge nicht weggelassen werden kann. Es fragt sich aber weiter, und dies ist durch das Vorhergehende noch nicht erledigt, ob nicht doch für alle (d. h. zu einer beliebigen, linear unabhängigen oder nicht unabhängigen Exponentenfolge gehörigen) Dirichletschen Reihen, die ein Konvergenzgebiet besitzen, aus der vorausgesetzten Regularität und Beschränktheit für $\sigma > \sigma_0$ der durch die Reihe definierten Funktion, die absolute Konvergenz der Reihe wenigstens für $\sigma > \sigma_0$ folgt. (Es ist durch das obige Beispiel nur bewiesen: es folgt nicht die absolute Konvergenz der Reihe für $\sigma \geqq \sigma_0$).

Dass dies aber nicht der Fall ist, werde ich nunmehr durch den folgenden Satz beweisen.

Satz A: *Es existiert, zu jedem $k > 0$, eine Dirichletsche Reihe mit den beiden folgenden Eigenschaften:*

1.) *Die Reihe ist für $\sigma > k$ absolut konvergent, für $\sigma = k$ dagegen nicht absolut konvergent.*

2.) *Die durch die Reihe definierte Funktion ist für $\sigma > 0$ regulär und beschränkt.*[1]

Dem Beweis dieses Satzes wird der folgende sehr leicht beweisbare Hilfssatz vorausgeschickt.

Hilfssatz: *Es sei auf der reellen Achse eine abzählbare Menge von Intervallen $i_1, i_2, \ldots, i_m, \ldots$ beliebig gegeben. Dann existiert eine reelle Zahlenfolge $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m, \ldots$ derart, dass erstens, für alle $m = 1, 2, \ldots$, die Zahl δ_m dem Intervalle i_m zugehört, und dass zweitens, für kein ganzzahliges positives M, eine Relation der Form*

[1] Es kann natürlich, dem Hauptsatze zufolge, die Exponentenfolge der Reihe hierbei linear nicht unabhängig sein.

$$g_0 + g_1\delta_1 + g_2\delta_2 + \cdots + g_M\delta_M = 0$$

in ganzen nicht sämtlich verschwindenden Zahlen $g_0, g_1, \ldots, g_M$ *besteht.*

Beweis: Ich wähle zunächst δ_1 im Intervalle i_1 derart, dass keine Relation der Form

$$g_0 + g_1\delta_1 = 0$$

besteht, d. h. ich wähle eine irrationale Zahl δ_1 im Intervalle i_1. Nachdem δ_1 festgelegt ist, wähle ich nunmehr eine Zahl δ_2 im Intervalle i_2 derart, dass keine Relation der Form

$$g_0 + g_1\delta_1 + g_2\delta_2 = 0$$

besteht. Eine solche Wahl ist offenbar möglich, denn die sämtlichen Zahlen δ'_2, die eine Relation der Form

$$g_0 + g_1\delta_1 + g_2\delta'_2 = 0$$

(wobei eo ipso $g_2 \neq 0$ sein muss) genügen, d. h. die Zahlen δ'_2 der Form

$$\delta'_2 = r_0 + r_1\delta_1,$$

wo r_0 und r_1 zwei rationale Zahlen bedeuten, bilden bekanntlich eine abzählbare Menge, während ja die sämtlichen Zahlen im Intervalle i_2 eine unendliche nicht abzählbare Menge bilden. Wir setzen nunmehr die obige Methode fort, bestimmen, nachdem δ_1 und δ_2 festgelegt sind, eine Zahl δ_3 im Interwalle i_3 derart, dass keine Relation der Form

$$g_0 + g_1\delta_1 + g_2\delta_2 + g_3\delta_3 = 0$$

besteht, u. s. w.

Die Möglichkeit dieser sukzessiven Bestimmungen ergibt sich unmittelbar durch Induktion, wenn man sich daran errinnert, dass bei jedem festen m, die Zahlen der Form

$$\delta'_m = r_0 + r_1\delta_1 + \cdots + r_{m-1}\delta_{m-1},$$

wo $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{m-1}$ feste Zahlen sind, während $r_0, r_1, \ldots, r_{m-1}$ beliebige rationale Zahlen bedeuten, eine abzählbare Menge bilden.

Die somit erhaltene unendliche Zahlenfolge $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m, \ldots$ erfüllt offenbar die Bedingungen des Hilfssatzes; damit ist dieser Satz bewiesen.

Wir gehen nunmehr zum **Beweise des Satzes A** über.

Es sei also die Zahl $k > 0$ gegeben.

Es habe

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

die Bedeutung des obigen Existenzsatzes 1, und es sei wie vorher

$$f(s)=F(e^{-s})=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ns}$$

gesetzt. Dann ist die zur Exponentenfolge $\lambda_n = n$ gehörige Dirichletsche Reihe

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ns}$$

für $\sigma > 0$ absolut konvergent, für $\sigma = 0$ dagegen nicht absolut konvergent.

Aus der Divergenz der Reihe

$$\sum_{n=1} |b_n|$$

folgt bekanntlich für zu o abnehmendes σ

$$\lim_{\sigma=0} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-n\sigma} = \infty;$$

ferner ist

$$\lim_{\sigma=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-n\sigma} = 0.$$

Hieraus folgt unmittelbar die Existenz einer unendlichen Folge von positiven, d. h. auf dem positiven Teil der reellen Achse gelegenen, Intervallen $i_1, i_2, \ldots, i_m, \ldots$ derart, dass für jede Zahl y, die dem Intervall i_m angehört,

$$e^{(1+k)m} < \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-nky} < 2\, e^{(1+k)m}$$

ist.

Es sei nunmehr, was nach dem obigen Hilfssatze möglich ist, die reelle Zahlenfolge $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m, \ldots$ so gewählt, dass, für alle $m = 1, 2, \ldots$, die Zahl δ_m dem Interwalle i_m angehört, während für kein M eine Relation der Form

$$g_0 + g_1\delta_1 + \cdots + g_M\delta_M = 0$$

in ganzen nicht sämtlich verschwindenden Zahlen $g_0, g_1, \ldots, g_M$ besteht. Dann ist für alle $m = 1, 2, \ldots$

$$e^{(1+k)m} < \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-n\delta_m \cdot k} < 2\, e^{(1+k)m},$$

und es erfüllen die positiven Zahlen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m, \ldots$ hierbei eo ipso die Bedingung

$$\lim_{m=\infty} \delta_m = 0.$$

Es sei nunmehr, für alle $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$f_m(s) = f(s\,\delta_m) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-n\delta_m \cdot s}$$

gesetzt. Es gehört also die für $\sigma\delta_m > 0$, d. h. für $\sigma > 0$, absolut konvergente Dirichletsche Reihe $f_m(s)$ zur linear nicht unabhängiger Exponentenfolge $\delta_m, 2\,\delta_m, 3\,\delta_m, \ldots$ Hierbei ist, für $\sigma > 0$, $f_m(s) = f(s\,\delta_m)$ regulär, und es ist für $\sigma > 0$

$$|f_m(s)| < K.$$

Ich setze nunmehr

$$g(s) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m}\, e^{-ms} f_m(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n\, e^{-m})\, e^{-(m+n\delta_m)s}.$$

Wegen der für $\sigma > 0$ giltigen Ungleichung

$$|e^{-m}\, e^{-ms} f_m(s)| < e^{-m} \,.\, 1 \,.\, K$$

ist die Reihe

$$g(s) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m}\, e^{-ms} f_m(s)$$

für $\sigma > 0$ gleichmässig konvergent. Es folgt hieraus, da ja die einzelnen Glieder der Reihe, d. h. die Grössen $e^{-m} e^{-ms} f_m(s)$ für $\sigma > 0$ regulär sind, dass $g(s)$ eine für $\sigma > 0$ reguläre analytische Funktion ist. Ferner ist, für $\sigma > 0$, $g(s)$ beschränkt; denn es ist für $\sigma > 0$

$$|g(s)| < \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m} \,.\, K = K_1,$$

wo K_1 von s nicht abhängt.

Es sei nunmehr die Doppelreihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n\, e^{-m})\, e^{-(m+n\delta_m)s}$$

durch Umordnung ihrer Glieder in eine Dirichletsche Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} c_r e^{-\lambda_r s}$$

formell verwandelt, d. h. es sei die Doppelfolge

$$m + n\delta_m \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots; n = 1, 2, 3 \ldots)$$

in eine Einzelfolge

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \ldots < \lambda_r \ldots \qquad (\lim_{r=\infty} \lambda_r = \infty)$$

umgeordnet; dies ist offenbar möglich, denn es sind erstens die Grössen $m + n\delta_m$ sämtlich > 0 (sogar > 1), zweitens ist, nach der obigen Bestimmung der Zahlenfolge $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m \ldots$, eine Relation

$$m' + n'\delta_{m'} = m'' + n''\delta_{m''}$$

d. h. eine Relation

$$(m' - m'') + n'\delta_{m'} - n''\delta_{m''} = 0$$

nur dann vorhanden, wenn $m' = m''$, $n' = n''$ ist, und drittens sind offenbar, bei jedem $E > 0$, nur endlich viele Elemente der Doppelfolge $m + n\delta_m$ kleiner als E.

Ich behaupte nunmehr: es ist die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} c_r e^{-\lambda_r s}$$

für $\sigma > k$ absolut konvergent und gleich $g(s)$; dies ist offenbar bewiesen, wenn ich nachgewiesen habe: es ist für $\sigma > k$ die Doppelreihe mit reellen nicht negativen Gliedern

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-m} e^{-(m+n\delta_m)\sigma}$$

konvergent, d. h. es ist, bei jedem $\varepsilon > 0$, die Doppelreihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-m} e^{-(m+n\delta_m)(k+\varepsilon)}$$

konvergent. Dies ist tatsächlich der Fall und folgt unmittelbar daraus, dass, für alle $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-m} e^{-(m+n\delta_m)(k+\varepsilon)} = e^{-m(k+1+\varepsilon)} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-n\delta_m (k+\varepsilon)}$$

$$< e^{-m(k+1+\varepsilon)} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-n\delta_m k} < e^{-m(k+1+\varepsilon)} \cdot 2\, e^{m(k+1)} < 2\, e^{-m\varepsilon}$$

ist, während ja die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2\, e^{-m\varepsilon}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ konvergiert.

Ich werde nunmehr beweisen: es ist $\sum_{r=1}^{\infty} c_r e^{-\lambda_r s}$ für $\sigma = k$ nicht absolut konvergent, oder was offenbar auf dasselbe herauskommt: es ist die Doppelreihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-m} e^{-(m+n\delta_m)k} = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m(1+k)} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-n\delta_m k}$$

divergent. Dass dies letzte der Fall ist, folgt aber unmittelbar daraus, dass, wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-n\delta_m k} > e^{m(1+k)},$$

für alle $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$e^{-m(1+k)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-n\delta_m k} > e^{-m(1+k)} \cdot e^{m(1+k)} > 1$$

ist.

Es ist also die Dirichletsche Reihe

$$g(s) = \sum_{r=1}^{\infty} c_r e^{-\lambda_r s}$$

für $\sigma > k$ absolut konvergent, für $\sigma = k$ dagegen nicht absolut konvergent, während die durch die Reihe definierte Funktion $g(s)$ für $\sigma > 0$ regulär und beschränkt ist.

Damit ist der Satz A bewiesen.

Aus dem vorangehenden Satze A folgt speziell, dass keine feste positive Zahl k derart existiert, dass allgemein aus der vorausgesetzten Regularität und Beschränktheit für $\sigma > 0$ der durch eine Dirichletsche Reihe definierten Funktion die absolute Konvergenz der Reihe für $\sigma > k$ folgt.

Ich werde nunmehr den folgenden Satz B beweisen; damit sind alsdann die sämtlichen mit dem Hauptsatze in Zusammenhang stehenden Existenzfragen völlig erledigt.

Satz B. *Es existiert eine in einer gewissen Halbebene konvergente Dirichletsche Reihe* (1) *derart, dass die durch die Reihe dargestellte Funktion für $\sigma > 0$ regulär und beschränkt ist, während die Reihe jedoch nirgends absolut konvergiert.*

Zum Beweise dieses Satzes entnehme ich aus der Theorie der Potenzreihen den folgenden Existenzsatz 2, der etwas mehr aussagt als der früher benutzte.

Existenzsatz 2. *Es existiert eine für $|x| < 1$ absolut konvergente, für $|x| = 1$ nicht absolut konvergente Potenzreihe*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n,$$

derart, dass für alle $|x| < 1$ und alle ganzzahligen $N \geqq 1$

$$\left| \sum_{n=1}^{N} b_n x^n \right| \leqq K$$

ist, wo K eine von x und N unabhängige, positive Zahl bedeutet. Hieraus folgt speziell, dass, für $|x| < 1$, $|F(x)| \leqq K$ ist.

Es mögen im folgenden die Grössen b_n die Bedeutung dieses letzten Existenzsatzes haben.

Ich bestimme nunmehr, auf ganz dieselbe Weise wie beim Beweise des Satzes A, eine Folge von positiven Zahlen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m, \ldots$ derart, dass erstens, für alle $m = 1, 2, \ldots$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^{-n\delta_m \cdot m} > e^{m+m^2}$$

ist, und dass zweitens für kein ganzzahliges M eine Relation der Form

$$g_0 + g_1 \delta_1 + \cdots + g_M \delta_M = 0$$

in ganzen nicht sämtlich verschwindenden Grössen $g_0, g_1, \ldots, g_M$ besteht. Ferner setze ich wie vorher, für $\sigma > 0$,

$$f_m(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\delta_m \cdot s}.$$

Dann ist offenbar, wegen $|f_m(s)| \leq K$ für $\sigma > 0$, die Reihe

$$g(s) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m} e^{-ms} f_m(s)$$

für $\sigma > 0$ konvergent und stellt eine für $\sigma > 0$ reguläre und beschränkte Funktion $g(s)$ dar.

Es sei nunmehr, ganz wie beim Beweise des Satzes A, die Doppelreihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m} e^{-ms} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\delta_m s} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n e^{-m}) e^{-(m+n\delta_m)s}$$

durch Umordnung ihrer Glieder in eine Dirichletsche Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} c_r e^{-\lambda_r s}$$

formell verwandelt.

Dann ist zunächst diese Dirichletsche Reihe, oder, was auf dasselbe herauskommt, die obige Doppelreihe, nirgends absolut konvergent, d. h. es ist bei jedem festen σ_0 die Doppelreihe mit positiven Gliedern

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m} e^{-m\sigma_0} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-n\delta_m \sigma_0}$$

divergent; dies ergibt sich unmittelbar daraus, dass für alle $m > \sigma_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-n\delta_m \cdot \sigma_0} > \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-n\delta_m \cdot m} > e^{m+m^2}$$

ist, also für alle $m > \sigma_0$

$$e^{-m} e^{-m\sigma_0} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-n\delta_m \sigma_0} > e^{-m} e^{-m\sigma_0} . e^{m+m^2} = e^{m(m-\sigma_0)} > 1$$

ist.

Ich werde nunmehr beweisen: es ist, sogar für jedes $\sigma > 0$, die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} c_r e^{-\lambda_r s}$$

konvergent und gleich $g(s)$.

Ich bemerke zunächst, dass offenbar, bei jedem ganzzahligen $R > 0$, die endliche Summe

$$\sum_{r=1}^{R} c_r e^{-\lambda_r s} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N_m} (b_n e^{-m}) e^{-(m+n\delta_m)s} = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m} e^{-ms} \sum_{n=1}^{N_m} b_n e^{-n\delta_m s}$$

ist, wo die Zahlen $N_m = N_m(R)$ ganze Zahlen $\geqq 0$ sind, die übrigens von einer gewissen Stelle an, d. h. für $m \geqq m_0 = m_0(R)$, alle $= 0$ sind;[1] hierbei ist ferner, bei jedem festen m, $\lim\limits_{R=\infty} N_m = \infty$.

Hieraus ergibt sich aber leicht die Behauptung: es ist für $\sigma > 0$

$$\lim_{R=\infty} \sum_{r=1}^{R} c_r e^{-\lambda_r s} = g(s).$$

Es sei $\sigma_0 > 0$ und $s_0 = \sigma_0 + it_0$ eine feste Zahl; es sei ferner $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Ich bestimme alsdann zunächst eine ganze Zahl $M > 1$ derart, dass

$$\sum_{m=M+1}^{\infty} e^{-m} < \frac{\varepsilon}{3K}$$

ist, wo K die Konstante des Existenzsatzes 2 bedeutet.

Nachdem M festgelegt ist, bestimme ich nunmehr eine ganze Zahl $N > 1$ derart, dass für alle $m = 1, 2, \ldots M$ und $n' \geqq N$

$$\left| \sum_{n=n'+1}^{\infty} b_n e^{-n\delta_m s_0} \right| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

ist, und zu diesem N bestimme ich schliesslich eine ganze Zahl $R_0 > 1$ derart, dass für $R \geqq R_0$ und alle $m = 1, 2, \ldots M$

$$N_m = N_m(R) \geqq N$$

[1] Unter $\sum\limits_{n=1}^{0} u_n$ ist 0 zu verstehen.

ist. Eine solche Wahl von R_0 ist möglich wegen der bei festem m giltigen Relation: $\lim\limits_{R=\infty} N_m(R) = \infty$.

Dann behaupte ich: es ist für alle $R \geqq R_0$

$$\left| \sum_{r=1}^{R} c_r e^{-\lambda_r s_0} - g(s_0) \right| < \varepsilon .$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich folgendermassen: Es ist für $R \geqq R_0$

$$\left| \sum_{r=1}^{R} c_r e^{-\lambda_r s_0} - g(s_0) \right| = \left| \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m} e^{-m s_0} \sum_{n=1}^{N_m} b_n e^{-n\delta_m s_0} - \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m} e^{-m s_0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\delta_m s_0} \right|$$

$$< \sum_{m=1}^{M} e^{-m} \left| \sum_{n=N_m+1}^{\infty} b_n e^{-n\delta_m s_0} \right| + \sum_{m=M+1}^{\infty} e^{-m} \left| \sum_{n=1}^{N_m} b_n e^{-n\delta_m s_0} \right| + \sum_{m=M+1}^{\infty} e^{-m} \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\delta_m s_0} \right| .$$

Nun ist aber dem Existenzsatz 2 zufolge

$$\left| \sum_{n=1}^{N_m} b_n e^{-n\delta_m s_0} \right| \leqq K \quad , \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\delta_m s_0} \right| \leqq K .$$

Es ergibt sich somit für $R \geqq R_0$

$$\left| \sum_{r=1}^{R} c_r e^{-\lambda_r s_0} - g(s_0) \right| < \sum_{m=1}^{M} e^{-m} \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + 2 \sum_{m=M+1}^{\infty} e^{-m} . K < M . \frac{\varepsilon}{3M} + 2K \frac{\varepsilon}{3K} = \varepsilon .$$

Es ist hiermit die Behauptung:

$$\lim_{R=\infty} \sum_{r=1}^{R} c_r e^{-\lambda_r s} = g(s)$$

für alle $\sigma > 0$ bewiesen.

Die Dirichletsche Reihe $\sum\limits_{r=1}^{\infty} c_r e^{-\lambda_r s}$ erfüllt somit die sämtlichen Bedingungen des Satzes B.

Damit ist dieser Satz bewiesen.

Kopenhagen, den 1 Dezember 1911.