ORDRE DES POINTS SINGULIERS DE LA SÉRIE DE TAYLOR.

PAR

EUGÈNE FABRY

À MONTPELLIER.

1. M. HADAMARD a défini l'ordre d'une série de Taylor $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$, sur le cercle de convergence, dont le rayon est supposé égal à 1 (Journal de Math. pures et appliquées 1892, p. 165). Si la fonction $f(e^{\vartheta i})$ est finie et continue sur un arc C, c'est à dire entre deux valeurs de ϑ; on dit qu'elle est à écart fini, si les modules des deux intégrales $\int n f(e^{\vartheta i}) \cos n\vartheta \, d\vartheta$ et $\int n f(e^{\vartheta i}) \sin n\vartheta \, d\vartheta$ restent inférieurs à un nombre I déterminé, sur l'arc C, et sur tout arc intérieur à C; quelque soit n, qui peut augmenter indéfiniment.

Si $\varphi(z)=\sum \frac{a_n}{n^{\omega+\varepsilon}} z^n$ est à écart fini sur un arc C (ce qui suppose $\varphi(e^{\vartheta i})$ fini et continu), pour toute valeur positive de ε; $\varphi(z)$ n'étant pas à écart fini lorsque $\varepsilon<0$; ω est l'ordre de $f(z)$ sur cet arc. On en déduit l'ordre en un point du cercle de convergence, en supposant l'arc C infiniment petit. L'ordre sur le cercle de convergence est le plus grand des ordres en ses points singuliers, il est égal à la plus grande limite de $\frac{L|na_n|}{Ln}$. Nous supposerons cet ordre ω fini.

Dans les cas les plus simples, l'ordre en un point singulier est égal au degré d'infinitude. Mais M. BOREL a montré, par un exemple, que l'ordre peut être supérieur (Séries à termes positifs, p. 77). J'ai montré (C. R. 6 décembre 1909) qu'il était nécessaire de préciser ces définitions. Je me propose ici de définir, dans tous les cas, l'ordre d'infinitude en un point singulier, et l'ordre d'infinitude dans le cercle de convergence; et de montrer que ces deux définitions doivent reposer sur des principes différents. J'étudierai ensuite les divers cas qui peuvent se présenter, et les propriétés qui en résultent.

I. Ordre d'infinitude aux points singuliers.

2. Soit $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ une série dont le rayon de convergence est 1, et dont l'ordre, sur le cercle de convergence, est fini; c'est à dire que la plus grande limite ω de $\frac{L|na_n|}{Ln}$ n'est égale ni à $+\infty$, ni à $-\infty$.

Soit q un nombre réel, et $\varepsilon > 0$. Supposons qu'il existe un nombre positif fixe A, tel que

$$a_1 + \frac{a_2}{2^q} + \frac{a_3}{3^q} + \cdots + \frac{a_n}{n^q} = S_n$$

ait un module inférieur à A, $|S_n| < A$, quelque soit n.

La série $\sum_1^\infty \left(\frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon}\right)$ est convergente. $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^{q+\varepsilon}} = S_1 + \sum_2^\infty \frac{S_n - S_{n-1}}{n^\varepsilon} = \sum_1^\infty S_n \left(\frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon}\right)$ est aussi une série convergente.

Inversement, si la série $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^{q+\varepsilon}}$ est divergente, les sommes S_n ne restent pas toutes finies.

Il existe donc un nombre p, tel que la série $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^{p+\varepsilon}}$ soit convergente, pour toute valeur positive de ε; et que les sommes $\sum_1^n \frac{a_n}{n^{p-\varepsilon}}$ ne restent pas finies; de sorte que la série $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^{p-\varepsilon}}$ est divergente.

A toute valeur positive de ε correspond un rang à partir du quel on a $|a_n| < n^{\omega - 1 + \frac{\varepsilon}{2}}$. Donc la série $\sum \frac{a_n}{n^{\omega+\varepsilon}}$ est convergente. D'autre part, il y a une infinité de termes tels que $|a_n| > n^{\omega - 1 - \frac{\varepsilon}{2}}$. Donc, la série $\sum \frac{a_n}{n^{\omega - 1 - \varepsilon}}$ est divergente. Il en résulte:

$$\omega - 1 \leq p \leq \omega.$$

3. Supposons encore $|S_n| < A$, quelque soit n;

$$z = \varrho e^{\vartheta i}, \quad 0 < \varrho < 1, \quad \left|\frac{\vartheta}{1-\varrho}\right| < k, \quad k > 0.$$

De sorte que le point z peut se rapprocher de $z = 1$, par un contour intérieur, et non tangent, au cercle de convergence, mais formant avec la tangente au cercle un angle aussi petit que l'on voudra, si le nombre fixe k est choisi assez grand. Nous allons étudier l'ordre de grandeur du produit $(1-z)^q f(z)$, en supposant $q \geq 0$. On a:

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n = a_0 + \sum_1^\infty (S_n - S_{n-1}) n^q z^n = a_0 + \sum_1^\infty S_n [n^q z^n - (n+1)^q z^{n+1}]$$

puisque $S_n n^q z^n$ tend vers zéro, pour $n = \infty$, si $\varrho < 1$.

$$f(z) = a_0 + (1 - e^{\vartheta i}) \sum_1^\infty S_n n^q \varrho^n e^{n\vartheta i} + \sum_1^\infty S_n [n^q \varrho^n - (n+1)^q \varrho^{n+1}] e^{(n+1)\vartheta i}$$

$$|f(z)| < |a_0| + 2A \left|\sin\frac{\vartheta}{2}\right| \sum_1^\infty n^q \varrho^n + A \sum_1^\infty |n^q \varrho^n - (n+1)^q \varrho^{n+1}|.$$

$n^q \varrho^n$ augmente d'abord avec n, puis diminue lorsque $n > \frac{q}{-L\varrho}$, ou $\varrho^n < e^{-q}$. Soit N le nombre entier pour le quel $n^q \varrho^n$ a la plus grande valeur

$$-\frac{q}{L\varrho} - 1 < N < -\frac{q}{L\varrho} + 1.$$

On a:

$$\sum_1^{N-1} ((n+1)^q \varrho^{n+1} - n^q \varrho^n) = N^q \varrho^N - \varrho$$

$$\sum_N^\infty (n^q \varrho^n - (n+1)^q \varrho^{n+1}) = N^q \varrho^N$$

$$\sum_1^\infty |n^q \varrho^n - (n+1)^q \varrho^{n+1}| = 2N^q \varrho^N - \varrho < 2\left(\frac{q}{-eL\varrho}\right)^q$$

et:

$$\sum_1^{N-1} n^q \varrho^n < \int_1^N x^q \varrho^x dx$$

$$\sum_{N+1}^\infty n^q \varrho^n < \int_N^\infty x^q \varrho^x dx$$

$$\sum_1^\infty n^q \varrho^n < N^q \varrho^N + \int_0^\infty x^q \varrho^x dx = N^q \varrho^N + \int_0^\infty \frac{x^q e^{-x} dx}{(-L\varrho)^{q+1}} =$$

$$= N^q \varrho^N + \frac{\Gamma(q+1)}{(-L\varrho)^{q+1}} < \left(\frac{1}{-L\varrho}\right)^q \left[\left(\frac{q}{e}\right)^q + \frac{\Gamma(q+1)}{-L\varrho}\right]$$

$$|f(z)| < |a_0| + A|\vartheta| \left(\frac{-1}{L\varrho}\right)^q \left[\left(\frac{q}{e}\right)^q - \frac{\Gamma(q+1)}{L\varrho}\right] + 2A\left(\frac{q}{-eL\varrho}\right)^q$$

$$(1-\varrho)^q |f(z)| < |a_0|(1-\varrho)^q + Ak\left[\left(\frac{q}{e}\right)^q (1-\varrho) + \Gamma(q+1)\right] + 2A\left(\frac{q}{e}\right)^q.$$

Le produit $(1-\varrho)^q |f(z)|$ reste inférieur à un nombre fixe, lorsque $|z| = \varrho$ tend vers 1.

$$\left|\frac{1-z}{1-\varrho}\right| = \sqrt{1 + \frac{4\varrho}{(1-\varrho)^2}\sin^2\frac{\vartheta}{2}} < \sqrt{1+\varrho k^2}.$$

Donc, le produit $(1-z)^q f(z)$ a aussi un module qui reste fini. Le produit $(1-z)^{q+\varepsilon} f(z)$ tend vers zéro, si z tend vers 1, par un contour non tangent au cercle de convergence.

4. Supposons q négatif: $-\lambda \leq q < 1-\lambda$, λ étant un nombre entier positif, et S_n restant fini (nº 2). La série $\sum n^{-q-\varepsilon} a_n$ sera convergente. Nous supposerons:

$$\sum_0^\infty a_n = 0, \quad \sum_1^\infty n a_n = 0, \quad \sum_1^\infty n^2 a_n = 0, \quad \cdots \sum_1^\infty n^{\lambda-1} a_n = 0.$$

C'est à dire que $f(z)$ est nul, pour $z = 1$, ainsi que ses $\lambda - 1$ premières dérivées. On peut toujours remplir ces conditions en ajoutant à $f(z)$ un polynôme de degré $\lambda - 1$. On a alors:

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n = \sum_0^\infty a_n (z^n - 1) = (z-1)\sum_1^\infty a_n (1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}).$$

Posons:

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{1-z} = \sum_0^\infty b_n z^n$$

$$b_n = -a_{n+1} - a_{n+2} - \cdots = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

On a:

$$\sum_0^\infty b_n = -\sum_0^\infty n a_n = 0, \qquad \text{si } \lambda > 1$$

$$\sum_0^\infty n b_n = -\sum_1^\infty \frac{n(n-1)}{2} a_n = 0, \qquad \text{si } \lambda > 2$$

et ainsi de suite, jusqu'à

$$\sum_0^\infty n^{\lambda-2} b_n = -\sum_2^\infty a_n (1 + 2^{\lambda-2} + 3^{\lambda-2} + \cdots + (n-1)^{\lambda-2}) = 0$$

car le coefficient de a_n est égal à un polynôme en n de degré $\lambda - 1$; et cette série est une combinaison linéaire des λ séries supposées nulles.

D'autre part, on a:

$$\sum_1^m \frac{b_n}{n^{q+1}} = -\sum_{n=2}^m a_n \left(1 + \frac{1}{2^{q+1}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^{q+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^{q+1}} + \cdots + \frac{1}{m^{q+1}}\right) \sum_{m+1}^\infty a_n.$$

Et comme $a_n = n^q (S_n - S_{n-1})$, $|S_n| < A$

$$\sum_1^m \frac{b_n}{n^{q+1}} = 2^q S_1 + \sum_2^m S_n \left[(n+1)^q \sum_1^n \frac{1}{n^{q+1}} - n^q \sum_1^{n-1} \frac{1}{n^{q+1}}\right] -$$

$$-\left[S_{m+1}((m+1)^q - (m+2)^q) + S_{m+2}((m+2)^q - (m+3)^q) + \cdots\right] \sum_1^m \frac{1}{n^{q+1}}.$$

Cette expression reste finie, quelque soit m. En effet, si $0 > q \geq -1$, on a:

$$\sum_1^m \frac{1}{n^{q+1}} < \int_0^m \frac{dx}{x^{q+1}} = \frac{1}{-q m^q}.$$

La fonction $(1+x)^q - 1 - qx$ augmente avec x, a partir de $x = 0$. Si $x = \frac{1}{n}$, on a:

$$0 < n^q - (n+1)^q < -q n^{q-1}$$

$$(n+1)^q \sum_1^n \frac{1}{n^{q+1}} - n^q \sum_1^{n-1} \frac{1}{n^{q+1}} = \frac{1}{n} - \left[n^q - (n+1)^q\right] \sum_1^n \frac{1}{n^{q+1}} > 0.$$

Le coefficient de S_n étant positif, on a:

$$\left|\sum_1^m \frac{b_n}{n^{q+1}}\right| < 2A(m+1)^q \sum_1^m \frac{1}{n^{q+1}} < \frac{2A}{-q}\left(\frac{m+1}{m}\right)^q < \frac{2A}{-q}.$$

Si $q < -1$, on a:

$$\sum_1^m \frac{1}{n^{q+1}} < \int_0^{m+1} \frac{dx}{x^{q+1}} = \frac{1}{-q(m+1)^q}$$

$$\sum_1^m \frac{1}{n^{q+1}} > \int_0^m \frac{dx}{x^{q+1}} = \frac{1}{-qm^q}$$

$$-q n^{q-1} > n^q - (n+1)^q > -q n^{q-1} - \frac{q(q-1)}{2} n^{q-2}.$$

On en déduit:

$$[n^q - (n+1)^q] \sum_1^n \frac{1}{n^{q+1}} < \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^q < \frac{1}{n} - \frac{q}{n^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^q$$

$$[n^q - (n+1)^q] \sum_1^n \frac{1}{n^{q+1}} > \frac{1}{n} - \frac{1-q}{2n^2} > \frac{1}{n} + \frac{q}{n^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^q$$

puisque $0 > \frac{q-1}{2} > q$ et $\left(\frac{n}{n+1}\right)^q > 1$,

$$\frac{q}{n^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^q < (n+1)^q \sum_1^n \frac{1}{n^{q+1}} - n^q \sum_1^{n-1} \frac{1}{n^{q+1}} < \frac{-q}{n^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^q$$

$$\left|\sum_1^m \frac{b_n}{n^{q+1}}\right| < -Aq \sum_1^m \frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^q + A(m+1)^q \sum_1^m \frac{1}{n^{q+1}} < -\frac{A}{q} - Aq \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^q$$

$\varphi(z)$ est nul, pour $z = 1$, ainsi que ses $\lambda - 2$ premières dérivées, et les sommes $\sum_1^n \frac{b_n}{n^{q+1}}$ restent finies.

En répétant λ fois les mêmes transformations, on peut poser:

$$\frac{f(z)}{(1-z)^\lambda} = \sum_0^\infty b_n z^n$$

les sommes $\sum_1^n \frac{b_n}{n^{q+\lambda}}$ restant finies. Et comme $q + \lambda \geq 0$, le produit $(1-\varrho)^q f(z)$ reste fini, ainsi que $(1-z)^q f(z)$, lorsque z tend vers 1, par un contour intérieur, et non tangent, au cercle de convergence. $(1-z)^{q+\varepsilon} f(z)$ tend vers zéro.

5. q étant positif, et $0 < \varepsilon < q$, supposons que l'on ait, pour toute valeur de z telle que $|z| = \varrho < 1$:

$$(1-\varrho)^{q-\varepsilon} \left|\sum_0^\infty a_n z^n\right| < A.$$

Il résulte d'un théorème de Cauchy que l'on a:

$$(1-\varrho)^{q-\varepsilon}\varrho^n|a_n|<A.$$

J'ai donné une généralisation de ce théorème (C. R. 8 novembre 1909), en montrant que, quels que soient n et λ, on a:

$$(1-\varrho)^{q-\varepsilon}|a_n\varrho^n+a_{n+1}\varrho^{n+1}+\cdots+a_{n+\lambda}\varrho^{n+\lambda}|<2A\left(1+\frac{L(\lambda+1)}{\pi}\right)<A'L(\lambda+1)$$

$$A'=2A\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{L2}\right),\quad \lambda>0.$$

Posons:

$$T_\lambda=a_n\varrho^n+a_{n+1}\varrho^{n+1}+\cdots+a_{n+\lambda}\varrho^{n+\lambda}$$

et

$$U=\frac{a_n}{n^q}+\frac{a_{n+1}}{(n+1)^q}+\cdots+\frac{a_{n+\lambda}}{(n+\lambda)^q}=\frac{T_0}{n^q\varrho^n}+\frac{T_1-T_0}{(n+1)^q\varrho^{n+1}}+\cdots+\frac{T_\lambda-T_{\lambda-1}}{(n+\lambda)^q\varrho^{n+\lambda}}=$$

$$=T_0\left(\frac{1}{n^q\varrho^n}-\frac{1}{(n+1)^q\varrho^{n+1}}\right)+\cdots+T_{\lambda-1}\left(\frac{1}{(n+\lambda-1)^q\varrho^{n+\lambda-1}}-\frac{1}{(n+\lambda)^q\varrho^{n+\lambda}}\right)+$$

$$+T_\lambda\frac{1}{(n+\lambda)^q\varrho^{n+\lambda}}.$$

$n^q\varrho^n$ augmente avec n, si $n>\frac{q}{-L\varrho}$. Prenons $\varrho=e^{-\frac{q}{n+\lambda}}$. Les coefficients de T_0, $T_1,\cdots T_n$ sont tous positifs, et ont pour somme $\frac{1}{n^q\varrho^n}$.

$$|T_0|=|a_n|\varrho^n<\frac{A'}{(1-\varrho)^{q-\varepsilon}},\quad |T_\lambda|<\frac{A'}{(1-\varrho)^{q-\varepsilon}}L(\lambda+1)$$

$$|U|<\frac{A'L(\lambda+1)}{n^q\varrho^n(1-\varrho)^{q-\varepsilon}}.$$

$\frac{1-e^{-x}}{x}$ diminue, si x augmente à partir de zéro. Si $n+\lambda\geq 1$, on a:

$$1-\varrho=1-e^{-\frac{q}{n+\lambda}}\geq\frac{1-e^{-q}}{n+\lambda}$$

$$\varrho^n=e^{-q\frac{n}{n+\lambda}}>e^{-q}.$$

$$|U|<\frac{A'e^q}{(1-e^{-q})^q}\left(\frac{n+\lambda}{n}\right)^q\frac{L(\lambda+1)}{(n+\lambda)^\varepsilon}.$$

Si $\lambda\leq n$, $|U|<A''\frac{L(\lambda+1)}{(n+\lambda)^\varepsilon}$, où A'' reste fixe. Décomposons U en une suite de

sommes de termes successifs commençant aux valeurs $n_0 = n$, $n_1 = 2n$, $n_2 = 2^2 n$, $\cdots n_{\nu-1} = 2^{\nu-1} n$, $n + \lambda < 2^\nu n$. On aura:

$$|U| < \frac{A''}{(2n)^\varepsilon}\left(\frac{Ln}{1} + \frac{Ln + L2}{2^\varepsilon} + \frac{Ln + 2L2}{2^{2\varepsilon}} + \cdots + \frac{Ln + (\nu-1)L2}{2^{(\nu-1)\varepsilon}}\right) <$$

$$< \frac{A''}{n^\varepsilon}\left(\frac{Ln}{2^\varepsilon - 1} + \frac{L2}{(2^\varepsilon - 1)^2}\right) < \frac{A''}{2^\varepsilon - 1}\left(\frac{1}{e\varepsilon} + \frac{L2}{2^\varepsilon - 1}\right) < \frac{A''}{\varepsilon^2 L2}\left(1 + \frac{1}{e}\right).$$

U reste fini, quels que soient n et λ.

Inversement, si les sommes $S_n = a_1 + \frac{a_2}{2^q} + \cdots + \frac{a_n}{n^q}$ ne restent pas finies; c'est à dire s'il existe des valeurs de n telles que $|S_n|$ soit plus grand qu'un nombre donné quelconque, le produit $(1-\varrho)^{q-\varepsilon} \sum_0^\infty a_n z^n$ aura un module qui peut dépasser tout nombre donné à l'intérieur du cercle de convergence. Le module de $(1-z)^{q-\varepsilon} \sum_0^\infty a_n z^n$ pourra également dépasser tout nombre donné.

6. Supposons que $z = 1$ soit le seul point singulier du cercle de convergence, $f(z)$ reste fini dans la portion du cercle de convergence extérieure à un cercle de centre 1, de rayon aussi petit que l'on voudra. Supposons, en outre, $p > 0$ (nº 2). Le module de $(1-z)^{p-\varepsilon} f(z)$ peut dépasser tout nombre donné dans la partie du cercle de convergence intérieure à un cercle de centre 1, de rayon aussi petit que l'on voudra. D'autre part $(1-z)^{p+\varepsilon} f(z)$ tend vers zéro (nº 3) pour $z = 1$, sur tout contour non tangent au cercle de convergence. Il semble naturel de considérer p comme l'ordre d'infinitude de $f(z)$ au point singulier $z = 1$. Cependant il peut arriver que $(1-z)^{p-\varepsilon} f(z)$ ne devienne infini que pour des contours tangents au cercle de convergence, et tende vers zéro pour tout contour non tangent au point 1. D'autre part, si on développe $f(z)$ dans un cercle tangent intérieurement au premier, au point 1, il peut arriver que le nombre p diminue. Il est donc nécessaire d'examiner les conditions où cette définition sera précise.

Pour évaluer l'ordre d'infinitude au point 1, si on ne prend que des contours non tangents au cercle de convergence, l'ordre sera au plus égal à p.

7. Soit, en général, $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{1-z} = \sum_0^\infty b_n z^n$$

$$b_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

Soit ω l'ordre de $f(z)$, sur le cercle de convergence, c'est à dire la plus grande limite de $\frac{L|na_n|}{Ln}$; et Ω l'ordre de $\varphi(z)$, ou la plus grande limite de $\frac{L|nb_n|}{Ln}$. On a $\omega \leq \Omega$.

En effet, au nombre ε correspond un rang à partir du quel on a:

$$|b_n| < n^{\Omega - 1 + \varepsilon}$$

$$|a_n| = |b_n - b_{n-1}| < 2n^{\Omega - 1 + \varepsilon}, \text{ ou} < 2(n-1)^{\Omega - 1 + \varepsilon},$$

suivant le signe de l'exposant $\Omega - 1 + \varepsilon$. Comme $\frac{L(n-1)}{Ln}$ tend vers 1, on a, dans tous les cas: $\omega \leq \Omega$.

Si $\omega \geq 0$, on a $\Omega \leq \omega + 1$. En effet, au nombre ε correspond un rang q tel que

$$|a_n| < n^{\omega - 1 + \varepsilon}, \text{ si } n > q$$

$$b_n = b_q + a_{q+1} + a_{q+2} + \cdots + a_n$$

$$|b_n| < |b_q| + (q+1)^{\omega - 1 + \varepsilon} + (q+2)^{\omega - 1 + \varepsilon} + \cdots + n^{\omega - 1 + \varepsilon}.$$

Comme $\omega + \varepsilon > 0$, quelque soit le signe de $\omega + \varepsilon - 1$, on a:

$$|b_n| < |b_q| + \int_0^{n+1} x^{\omega - 1 + \varepsilon} dx = |b_q| + \frac{(n+1)^{\omega + \varepsilon}}{\omega + \varepsilon}$$

$$|nb_n| < n^{\omega + 1 + \varepsilon} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\omega + \varepsilon} \left(\frac{1}{\omega + \varepsilon} + \frac{|b_q|}{(n+1)^{\omega + \varepsilon}}\right).$$

Si, ε et q restant fixes, n augmente indéfiniment, on voit que $\Omega \leq \omega + 1 + \varepsilon$, quelque soit ε. Donc: $\Omega \leq \omega + 1$.

Si $\omega < 0$, à partir d'un rang déterminé $|a_n| < n^{\omega - 1 + \varepsilon}$. On peut supposer $\omega + \varepsilon < 0$; donc la série $\sum_0^\infty a_n$ est convergente, et $b_n = \sum_0^n a_n$ a une limite déterminée, pour $n = \infty$. Supposons cette limite nulle, ou

$$f(1) = \sum_0^\infty a_n = 0.$$

Alors

$$b_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = -a_{n+1} - a_{n+2} - \cdots.$$

A partir d'une valeur déterminée de n, on aura:

$$|b_n| < \sum_{n+1}^{\infty} n^{\omega - 1 + \varepsilon} < \int_n^{\infty} x^{\omega - 1 + \varepsilon} dx = -\frac{n^{\omega + \varepsilon}}{\omega + \varepsilon}.$$

On a encore $\Omega \leq \omega + 1$. Mais il suffirait de changer la valeur de a_0, ou d'ajouter une constante à $f(x)$, pour avoir $\Omega = 1$.

Ainsi, à condition que $f(1) = 0$, lorsque $\omega < 0$, on a, dans tous les cas:

$$\omega \leq \Omega \leq \omega + 1.$$

8. On a:

$$a_n = b_n - b_{n-1}$$

$$S_n = a_1 + \frac{a_2}{2^q} + \cdots + \frac{a_n}{n^q} = -b_0 + b_1\left(1 - \frac{1}{2^q}\right) + \cdots + b_{n-1}\left(\frac{1}{(n-1)^q} - \frac{1}{n^q}\right) + \frac{b_n}{n^q}.$$

Soit $q - \Omega + 1 = 2\varepsilon > 0$. Si n est assez grand, on a: $|b_n| < n^{\Omega - 1 + \varepsilon}$, $\left|\frac{b_n}{n^q}\right| < \frac{1}{n^{\varepsilon}}$, $\frac{b_n}{n^q}$ tend vers zéro, pour $n = \infty$.

$$b_n\left(\frac{1}{n^q} - \frac{1}{(n+1)^q}\right) = \frac{b_n}{n^{q+1}} q \left(1 - \frac{q+1}{2n} + \frac{(q+1)(q+2)}{2 \cdot 3 n^2} - \cdots\cdots\right)$$

La série $\sum \frac{b_n}{n^{q+1}}$ est convergente, ainsi que la série $\sum \frac{a_n}{n^q}$. Si p est le nombre défini au n° 2, on a:

$$p \leq \Omega - 1.$$

D'autre part, supposons que q ait une valeur positive; et que $|S_n| < A$, quelque soit n. On aura:

$$b_n = \sum_0^n a_n = a_0 + n^q S_n + \sum_1^{n-1} S_n (n^q - (n+1)^q)$$

$$|b_n| < A + A n^q + A \sum_1^{n-1} ((n+1)^q - n^q) = 2 A n^q.$$

Donc:

$$\Omega \leq q + 1.$$

Si p est positif ou nul, $\Omega \leq p + 1$. Par suite:

$$\Omega = p + 1.$$

Si p est négatif, nous supposerons $\sum\limits_0^\infty a_n = 0$. Soit $p < q < 0$; on aura:

$$b_n = \sum_0^n a_n = -\sum_{n+1}^\infty a_n = \sum_{n+1}^\infty (S_{n-1} - S_n) n^q = (n+1)^q S_n - \sum_{n+1}^\infty S_n (n^q - (n+1)^q)$$

car $n^q S_n$ tend vers zéro, pour $n = \infty$. Il existe un nombre A, tel que $|S_n| < A$, quelque soit n, et $|b_n| < 2A(n+1)^q$.

On a encore $\Omega \leq p + 1$, et $\Omega = p + 1$.

Dans tous les cas, à condition que $f(1) = 0$ lorsque $p < 0$, on a $p = \Omega - 1$.

Mais, lorsque $p < 0$, il suffirait d'ajouter une constante à $f(z)$ pour avoir $\Omega = 1 > p + 1$.

A la fonction $\frac{f(z)}{1-z}$ correspond un nombre $P \leq \Omega$. Mais il peut arriver que l'on ait $P < \Omega$, ainsi que nous en donnerons un exemple.

9. Soit p le nombre défini au n° 2, qui peut être positif, négatif, ou nul. Supposons $p > \omega - \frac{1}{2}$.

Soit

$$q > \omega - \frac{1}{2} \text{ et } \varepsilon = \frac{q - \omega}{2} + \frac{1}{4} > 0.$$

Soit x un nombre réel, $0 < x < 1$ et $\frac{z - x}{1 - x} = y$. Formons le développement:

$$f(z) = f(x + y(1-x)) = \sum_0^\infty y^n \frac{(1-x)^n}{1 \cdot 2 \cdots n} f^{(n)}(x) = \sum_0^\infty b_n y^n.$$

Si $z = 1$ est un point singulier, le rayon de convergence est encore 1. Soit:

$$T_n = \sum_{m=1}^n \frac{b_m}{m^q} = \sum_1^n \frac{(1-x)^m}{m^q} \sum_{\nu = m}^\infty x^{\nu - m} a_\nu \frac{\nu(\nu-1)\cdots(m+1)}{1 \cdot 2 \cdots (\nu - m)} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^\infty x^\nu a_\nu \left(\frac{\nu}{1} \frac{1-x}{x} + \frac{\nu(\nu-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \frac{1}{2^q} + \cdots + \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} \left(\frac{1-x}{x}\right)^n \frac{1}{n^q} \right).$$

Nous allons étudier l'ordre de grandeur de T_n, en supprimant des termes dont la somme restera finie, quelque soit n. A partir d'une valeur déterminée de n, on a $|a_n| < n^{\omega - 1 + \varepsilon} = n^{q - \frac{1}{2} - \varepsilon}$.

Les coefficients $\frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)}{1\cdot 2\cdots\mu}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\mu}$ augmentent avec μ, tant que $\mu<(1-x)(\nu+1)$. Supposons cette condition remplie, et ν assez grand. Posons alors:

$$t=|a_\nu|x^\nu\sum_1^\mu\frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)}{1\cdot 2\cdots\mu}\left(\frac{1-x}{x}\right)^\mu\frac{1}{\mu^q}<$$

$$<\nu^{q-\frac{1}{2}-\varepsilon}x^\nu\frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)}{1\cdot 2\cdots\mu}\left(\frac{1-x}{x}\right)^\mu\sum_1^\mu\frac{1}{\mu^q}.$$

Si $q>1$, $\sum_1^\mu\frac{1}{\mu^q}<\sum_1^\infty\frac{1}{\mu^q}$ reste fini.

Si $q<1$, $\sum_1^\mu\frac{1}{\mu^q}<\int_0^{\mu+1}\frac{dx}{x^q}=\frac{(\mu+1)^{1-q}}{1-q}$.

Si $q=1$, $\sum_1^\mu\frac{1}{\mu}<1+\int_1^\mu\frac{dx}{x}=1+L\mu$.

Le rapport $\frac{1\cdot 2\cdots n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}$ tend vers 1, pour $n=\infty$. Il en résulte que

$$\frac{1\cdot 2\cdots\nu}{1\cdot 2\cdots\mu\cdot 1\cdot 2\cdots(\nu-\mu)}<A\left(\frac{\nu}{\nu-\mu}\right)^\nu\left(\frac{\nu-\mu}{\mu}\right)^\mu\sqrt{\frac{\nu}{\mu(\nu-\mu)}},$$

A restant fixe, quels que soient les nombres entiers ν et μ, $\nu>\mu$. Et:

$$t<A\nu^{q-\frac{1}{2}-\varepsilon}\left(\frac{\nu x}{\nu-\mu}\right)^\nu\left(\frac{\nu-\mu}{\mu}\,\frac{1-x}{x}\right)^\mu\sqrt{\frac{\nu}{\mu(\nu-\mu)}}\,\mu^\alpha,$$

où A est un autre nombre fixe; $\alpha=0$ si $q>1$, $\alpha=1-q$ si $q<1$, et $\alpha=\varepsilon$ si $q=1$.

Soit $\mu=\nu(1-x)-h$, $\frac{h}{\nu}$ tendant vers zéro, pour $\nu=\infty$. On aura:

$$t<A\nu^{q-\frac{1}{2}-\varepsilon}\left(1+\frac{h}{\nu x}\right)^{-\nu x-h}\left(1-\frac{h}{\nu(1-x)}\right)^{h-\nu(1-x)}\mu^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{A}{\sqrt{x}}\nu^{q-\frac{1}{2}-\varepsilon}\mu^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{-\frac{h^2}{2\nu x(1-x)}+\frac{h^3(1-2x)}{6\nu^2x^2(1-x)^2}-\cdots}$$

Si $h \geq \sqrt{K\nu L\nu}$, cette expression est de la forme

$$A' \nu^{q-1-\varepsilon+a-\frac{K}{2x(1-x)}}$$

qui sera le terme général d'une série convergente, si K est choisi assez grand. Il suffit que $\frac{K}{2x(\text{I}-x)}$ soit au moins égal au plus grand des deux nombres I et q. On peut ainsi supprimer, dans T_n, tous les termes tels que $\mu < \nu(\text{I}-x) - \sqrt{K\nu L\nu}$; la somme de ces termes reste toujours finie.

De même, soit $\mu = \nu(\text{I}-x)+h$, $h \geq \sqrt{K\nu L\nu}$, $\frac{h}{\nu}$ tendant vers zéro. On a:

$$|a_\nu| x^\nu \sum_{\mu}^{\nu} \frac{\nu(\nu-\text{I})\cdots(\nu-\mu+\text{I})}{\text{I}.2\cdots\mu}\left(\frac{\text{I}-x}{x}\right)^\mu \frac{\text{I}}{\mu^q} <$$

$$< \nu^{q-\frac{1}{2}-\varepsilon} x^\nu \frac{\nu(\nu-\text{I})\cdots(\nu-\mu+\text{I})}{\text{I}.2\cdots\mu}\left(\frac{\text{I}-x}{x}\right)^\mu \left(\frac{\text{I}}{\mu^q}+\frac{\text{I}}{(\mu+\text{I})^q}+\cdots+\frac{\text{I}}{\nu^q}\right) <$$

$$< A\,\nu^{q-\frac{1}{2}-\varepsilon}\left(\frac{\nu x}{\nu-\mu}\right)^\nu \left(\frac{\nu-\mu}{\mu}\,\frac{\text{I}-x}{x}\right)^\mu \sqrt{\frac{\nu}{\mu(\nu-\mu)}}\,\nu^a <$$

$$< \frac{A}{\sqrt{x(\text{I}-x)}}\,\nu^{q-1-\varepsilon+a}\left(\text{I}-\frac{h}{\nu x}\right)^{h-\nu x}\left(\text{I}+\frac{h}{\nu(\text{I}-x)}\right)^{-h-\nu(1-x)} =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{x(\text{I}-x)}}\,\nu^{q-1-\varepsilon+a}\,e^{-\frac{h^2}{2\nu x(1-x)}-\frac{h^3(1-2x)}{6\nu^2 x^2(1-x)^2}-\cdots}$$

expression de même forme, qui est le terme d'une série convergente.

On peut ainsi remplacer T_n par

$$T = \sum_{\nu=1}^{\infty} x^\nu a_\nu \sum_{\mu} \frac{\nu(\nu-\text{I})\cdots(\nu-\mu+\text{I})}{\text{I}.2\cdots\mu}\left(\frac{\text{I}-x}{x}\right)^\mu \frac{\text{I}}{\mu^q}$$

où μ ne prend que les valeurs comprises entre $\nu(\text{I}-x)-\sqrt{K\nu L\nu}$ et $\nu(\text{I}-x)+\sqrt{K\nu L\nu}$, telles que $\mu \leq n$. De sorte que

$$\nu(\text{I}-x)-\sqrt{K\nu L\nu} < n$$

$$\nu < \frac{n}{\text{I}-x}+\sqrt{\frac{Kn}{(\text{I}-x)^3}L\frac{n}{\text{I}-x}}+\frac{K}{2(\text{I}-x)^2}\left(\text{I}+L\frac{n}{\text{I}-x}\right)+\cdots$$

Les autres termes de ce développement tendent vers zéro, pour $n=\infty$.

Si $\mu = \nu(\text{I}-x)+h$

$$\frac{1}{\mu^q} = \frac{1}{\nu^q(1-x)^q}\left(1 - \frac{qh}{\nu(1-x)} + \frac{q(q+1)h^2}{2\nu^2(1-x)^2} - \cdots\right)$$

$$\left|\frac{1}{\mu^q} - \frac{1}{\nu^q(1-x)^q}\right| < \frac{A}{\nu^q}\sqrt{\frac{L\nu}{\nu}}$$

où A reste fixe.

$$\sum_{\mu}\frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)}{1\cdot 2\cdots\mu}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\mu} < \sum_{\mu=0}^{\nu} = \left(1+\frac{1-x}{x}\right)^{\nu} = \frac{1}{x^{\nu}}.$$

Si, dans T, on remplace $\frac{1}{\mu^q}$ par $\frac{1}{\nu^q(1-x)^q}$, la différence des deux valeurs a un module plus petit que

$$\sum_{1}^{\infty}\nu^{q-\frac{1}{2}-\varepsilon}\frac{A}{\nu^q}\sqrt{\frac{L\nu}{\nu}} = A\sum_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{L\nu}}{\nu^{1+\varepsilon}}$$

augmenté d'un nombre fixe, provenant des premiers termes a_ν. Comme cette série est convergente, on peut remplacer T_n par

$$T' = \sum_{\nu} x^{\nu} a_{\nu} \sum_{\mu}\frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)}{1\cdot 2\cdots\mu}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\mu}\frac{1}{\nu^q(1-x)^q}.$$

A partir d'un rang ν déterminé, chaque terme a un module inférieur à

$$|a_\nu|\frac{1}{\nu^q(1-x)^q} < \frac{1}{(1-x)^q\nu^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}.$$

Si $\nu > \frac{n}{1-x}$, il ne reste qu'un nombre de termes de l'ordre de $\sqrt{\frac{Kn}{(1-x)^3}L\frac{n}{1-x}}$, dont la somme est inférieure à

$$\frac{1}{(1-x)^{q+1-\varepsilon}n^{\varepsilon}}\sqrt{KL\frac{n}{1-x}}.$$

On peut donc supprimer ces termes, et supposer $\nu < \frac{n}{1-x}$.

De même, si

$$\nu(1-x) + \sqrt{K\nu L\nu} > n > \nu(1-x)$$

on a supposé $\mu \leq n$. Mais, pour les termes tels que $\mu > n$, on a:

$$\nu(1-x) < n < \mu < \nu(1-x) + \sqrt{K\nu L\nu},$$

$$\frac{n}{1-x} > \nu > \frac{n}{1-x} - \sqrt{\frac{Kn}{(1-x)^3} L \frac{n}{1-x} + \frac{K}{2(1-x)^2}\left(1 + L\frac{n}{1-x}\right) + \cdots}$$

Si on ajoute ces termes à T', à chaque valeur de ν correspondent des termes dont la somme a un module inférieur à $\frac{1}{(1-x)^q \nu^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$. ν prend un nombre de valeurs de l'ordre de $\sqrt{\frac{Kn}{(1-x)^3} L \frac{n}{1-x}}$. La somme de ces termes est inférieure à une expression qui reste finie, et tend vers zéro pour $n = \infty$.

On peut ainsi prendre T' avec tous les termes tels que $\nu < \frac{n}{1-x}$, et μ compris entre les deux valeurs $\nu(1-x) \pm \sqrt{K\nu L\nu}$.

Mais, si on fait varier μ de 0 à ν; on ajoute à T' les termes où μ varie de de 0 à $\nu(1-x) - \sqrt{K\nu L\nu}$ et de $\nu(1-x) + \sqrt{K\nu L\nu}$ à ν. Le coefficient de $\frac{a_\nu}{\nu^q(1-x)^q}$ est augmenté d'une somme de l'ordre de

$$\nu^{-\frac{1}{2}-\frac{K}{2x(1-x)}}$$

ce qui donne un produit de l'ordre de $\nu^{-1-\varepsilon-\frac{K}{2x(1-x)}}$. La somme de ces termes reste finie, et l'on peut faire varier μ de 0 à ν.

$$T'_n = \sum_\nu x^\nu a_\nu \frac{1}{\nu^q(1-x)^q} \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)}{1 \cdot 2 \cdots \mu} \left(\frac{1-x}{x}\right)^\mu = \frac{1}{(1-x)^q} \sum \frac{a_\nu}{\nu^q}$$

où ν prend les valeurs entières inférieures à $\frac{n}{1-x}$.

$T_n - \frac{1}{(1-x)^q} S_N$ a un module inférieur à un nombre fixe, quelque soit n, si $\frac{n}{1-x} - 1 < N \leq \frac{n}{1-x}$.

Si $q > p > \omega - \frac{1}{2}$, S_n reste fini, T_n reste aussi fini. Si $p > q > \omega - \frac{1}{2}$, $|S_n|$ ne reste pas fini, mais le terme général $\frac{a_n}{n^q}$ tend vers zéro. Si n augmente d'une unité, N augmente d'un nombre limité, S_N ne reste pas fini, et T_n ne peut pas rester fini. A la fonction $f(x + y(1-x)) = \Sigma b_n y^n$ correspond le même nombre p.

Si $p > \omega - \frac{1}{2}$, ce nombre p reste le même pour le développement dans tout cercle tangent intérieurement au premier, au point $z = 1$; p peut alors être considéré comme l'ordre d'infinitude au point 1.

Si $p < 0$, cette définition suppose que $f(z)$ est nul pour $z = 1$, ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur à $-p$ (n° 4). On peut toujours remplir cette condition en ajoutant à $f(z)$ un polynôme de degré inférieur à $-p$.

Si $p \leq \omega - \frac{1}{2}$, ce nombre ne sera l'ordre d'infinitude, qu'à condition qu'il reste le même dans tout cercle tangent intérieurement au premier, au point $z = 1$.

10. Au point $z = e^{\vartheta i}$ correspond un nombre p, tel que la série $\sum \frac{a_n}{n^{p+\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ soit convergente, et $\sum \frac{a_n}{n^{p-\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ divergente. On peut ramener ce point à $z = 1$ par un changement de variable.

Si p reste le même pour le développement de $f(z)$ dans tout cercle tangent intérieurement au premier au point $z = e^{\vartheta i}$, p sera l'ordre d'infinitude en ce point. Si $p < 0$ cela suppose qu'on a d'abord ajouté à $f(z)$ un polynôme tel que $f(z)$ soit nul pour $z = e^{\vartheta i}$, ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur à $-p$. Si $p < \omega - \frac{1}{2}$, ce nombre est l'ordre d'infinitude.

A chaque point du cercle de convergence correspond un nombre $p \geq \omega - 1$. Soit P le plus grand de ces nombres, ou leur plus grande limite s'il y en a une infinité supérieurs à $\omega - 1$. On a toujours $p \leq P$, et il y a des points tels que $p > P - \varepsilon$. Si $P > \omega - \frac{1}{2}$, ce nombre P est l'ordre d'infinitude maximum aux points singuliers du cercle de convergence.

Si $P \leq \omega - \frac{1}{2}$, il faudra considérer, en chaque point singulier, des cercles tangents intérieurement au premier, pour définir l'ordre d'infinitude.

II. Ordre d'infinitude de la fonction.

11. Il existe un nombre Q tel que la série $\sum \frac{|a_n|}{n^{Q+\varepsilon}}$ soit convergente, et la série $\sum \frac{|a_n|}{n^{Q-\varepsilon}}$ divergente (n° 2). On a toujours:

$$P \leq Q \leq \omega.$$

Si $P = Q$, la série $\sum \frac{a_n}{n^{P+\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ est uniformément convergente, pour toute valeur de ϑ; cette fonction de ϑ a un module qui reste plus petit qu'un nombre déterminé fixe.

Mais, si $P < Q$, il peut arriver que la série $\sum \frac{a_n}{n^{P+\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ ne soit pas uniformément convergente. Cette série trigonométrique peut être une fonction discontinue de ϑ, ayant une valeur déterminée pour chaque valeur de ϑ. Cette fonction peut alors augmenter indéfiniment dans le voisinage de $\vartheta = \vartheta_0$, bien que la série $\sum \frac{a_n}{n^{P+\varepsilon}} e^{n\vartheta_0 i}$ soit convergente, et prenne une valeur finie. Dans ce cas, la fonction $\sum \frac{a_n}{n^{P+\varepsilon}} z^n$ ne reste pas finie sur le cercle de convergence, son module peut dépasser tout nombre donné. Il faut alors distinguer l'ordre d'infinitude maximum aux points singuliers du cercle de convergence, et l'ordre d'infinitude de la fonction dans le cercle de convergence.

12. Supposons que la série $\sum_0^\infty \frac{a_n}{n^q} e^{n\vartheta i}$ soit uniformément convergente pour $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$; c'est à dire que, à toute valeur de $\varepsilon > 0$, correspond un nombre n' tel que $\left|\sum_n^\infty \frac{a_n}{n^q} e^{n\vartheta i}\right| < \varepsilon$, pour toute valeur $n \geq n'$, et quelque soit ϑ. Ce nombre n' ne dépend que de ε, il est indépendant de ϑ. Il existe alors un nombre A tel que $\left|\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^q} e^{n\vartheta i}\right| < A$ quelque soit ϑ.

Si $\alpha > 0$, la série $\sum \frac{a_n}{n^{q+\alpha}} e^{n\vartheta i}$ est aussi uniformément convergente; en effet, soit ϑ une valeur déterminée, et $\sum_{n+1}^\infty \frac{a_n}{n^q} e^{n\vartheta i} = R_n$

$$a_n e^{n\vartheta i} = n^q (R_{n-1} - R_n).$$

La série $\sum \frac{a_n}{n^{q+\alpha}} e^{n\vartheta i}$ est convergente (n° 10). Soit:

$$R'_n = \sum_{n+1}^\infty \frac{a_n}{n^{q+\alpha}} e^{n\vartheta i} = \frac{R_n}{(n+1)^\alpha} - \sum_{n+1}^\infty R_n \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right).$$

Si $n \geq n'$, nombre qui correspond à ε, on a $|R_n| < \varepsilon$, et

$$|R'_n| < \frac{\varepsilon}{(n+1)^a} + \varepsilon \sum_{n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{(n+1)^a}\right) = \frac{2\varepsilon}{(n+1)^a}.$$

Supposons $n > n'$ et $n + 1 > 2^{\frac{1}{a}}$, on aura $|R'_n| < \varepsilon$. n est indépendant de ϑ, la série est uniformément convergente.

Il existe donc un nombre q tel que la série $\sum \frac{a_n}{n^{q+\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ soit uniformément convergente, quelque soit $\varepsilon > 0$, la série $\sum \frac{a_n}{n^{q-\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ n'étant pas uniformément convergente. On a:

$$P \leq q \leq Q.$$

Au nombre ε correspond un nombre A tel que $\left|\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^{q+\varepsilon}} e^{n\vartheta i}\right| < A$ qelque soit ϑ.

13. A étant un nombre fixe, supposons inversement que l'on ait $\left|\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^q} e^{n\vartheta i}\right| < A$ quelque soit ϑ, ce qui suppose la série $\sum \frac{a_n}{n^q} e^{n\vartheta i}$ convergente pour toute valeur de ϑ. Il en résulte que, pour toutes valeurs de n et $\lambda > 1$, on aura (n° 5):

$$\left|\frac{a_q}{n^q} e^{n\vartheta i} + \frac{a_{n+1}}{(n+1)^q} e^{(n+1)\vartheta i} + \cdots + \frac{a_{n+\lambda-1}}{(n+\lambda-1)^q} e^{(n+\lambda-1)\vartheta i}\right| < A' L\lambda$$

A' étant également fixe.

Donnons à ϑ et m des valeurs déterminées, et posons:

$$\sum_n^{m-1} \frac{a_n}{n^q} e^{n\vartheta i} = S_n$$

$$|S_{m-1}| < A', \quad |S_n| < A' L(m-n).$$

Soit $\alpha < 0$, et:

$$\sum_n^{m-1} \frac{a_n}{n^{q+a}} e^{n\vartheta i} = \sum_n^{m-1} \frac{S_n - S_{n+1}}{n^a} = \frac{S_n}{n^a} - \sum_{n+1}^{m-1} S_n \left(\frac{1}{(n-1)^a} - \frac{1}{n^a}\right)$$

$$\left|\sum_n^{m-1} \frac{a_n}{n^{q+a}} e^{n\vartheta i}\right| < \frac{2A'}{n^a} L(m-n).$$

Décomposons la somme Σ en une suite de sommes de termes successifs commençant aux valeurs $n_0 = n$, $n_1 = 2n$, $\cdots n_\nu = 2^\nu n$ et $m < 2^{\nu+1} n$. On aura:

$$\left|\sum_n^m \frac{a_n}{n^{q+a}} e^{n\vartheta i}\right| < 2A'\left(\frac{Ln}{n^a} + \frac{L(2n)}{(2n)^a} + \cdots + \frac{L(2^\nu n)}{(2^\nu n)^a}\right) <$$

$$< \frac{2A'}{n^a}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{Ln + \nu L2}{2^{\nu a}} = A'\frac{2^{a+1}}{n^a}\frac{(2^a - 1)Ln + L2}{(2^a - 1)^2}$$

$$\left|\sum_n^\infty \frac{a_n}{n^{q+a}} e^{n\vartheta i}\right| < A''\frac{Ln}{n^a},$$

A'' étant un nombre fixe, indépendant de n et de ϑ, lorsque a est donné. $\frac{Ln}{n^a}$ tend vers zéro, pour $n = \infty$; à toute valeur de $\varepsilon > 0$, on peut faire corrrespondre un nombre n, à partir du quel $A''\frac{Ln}{n^a} < \varepsilon$. Donc la série $\sum \frac{a_n}{n^{q+a}} e^{n\vartheta i}$ est uniformément convergente.

Inversement, si q est le plus petit nombre tel que la série $\sum \frac{a_n}{n^{q+\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ soit uniformément convergente (n° 12); quelque soit le nombre A, il y aura des valeurs de ϑ telles que $\left|\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^{q-\varepsilon}} e^{n\vartheta i}\right| > A$. Cette fonction de ϑ peut prendre des valeurs de module aussi grand que l'on voudra, bien que, si $P < q - \varepsilon$, la série $\sum \frac{a_n}{n^{q-\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ soit convergente pour toute valeur de ϑ.

14. Soit q un nombre positif tel que la série $\sum \frac{a_n}{n^q} e^{n\vartheta i}$ soit uniformément convergente. Si $n \geq n'$, on aura:

$$R_n = \sum_{n+1}^\infty \frac{a_n}{n^q} e^{n\vartheta i}, \qquad |R_n| < \varepsilon,$$

$$z = \varrho e^{\vartheta i}, \qquad 0 < \varrho < 1,$$

$$f(z) = \sum_0^{n'} a_n z_n + \sum_{n'+1}^\infty n^q (R_{n-1} - R_n)\varrho^n =$$

$$= \sum_0^{n'} a_n z^n + (n'+1)^q R_{n'} \varrho^{n'+1} + \sum_{n'+1}^\infty R_n((n+1)^q \varrho^{n+1} - n^q \varrho^n).$$

ε et n' restant fixes, il existe un nombre A, tel que $\left|\sum_0^{n'} a_n z^n\right| < A$, quelque soit ϑ, si $\varrho \leq 1$. Soit N le nombre entier pour le quel $n^q \varrho^n$ a la plus grande valeur (n° 3); supposons $1-\varrho$ assez petit pour que N soit supérieur à n', ou $1>\varrho>e^{\frac{q}{1-n'}}$. On aura:

$$|f(z)|<A+2\varepsilon N^q\varrho^N\leq A+2\varepsilon\left(\frac{q}{-eL\varrho}\right)^q$$

$$(1-\varrho)^q|f(z)|<A(1-\varrho)^q+2\varepsilon\left(\frac{q}{e}\right)^q$$

expression qui reste finie.

Si q est le nombre défini au n° 2, que nous supposons positif ou nul, $(1-\varrho)^{q+\varepsilon}f(\varrho e^{\vartheta i})$ tend vers zéro, pour $\varrho=1$, quelque soit la façon dont varie ϑ.

D'autre part $|(1-\varrho)^{q-\varepsilon}f(\varrho e^{\vartheta i})|$ *ne reste pas fini*. En effet, s'il existait un nombre fixe A tel que l'on ait, quelque soient ϑ et $\varrho<1$,

$$(1-\varrho)^{q-\varepsilon}|f(\varrho e^{\vartheta i})|<A,$$

aux nombres A et ε correspondrait un nombre B (n° 5) tel que $\left|\sum_1^n\frac{a_n}{n^{q-\frac{\varepsilon}{2}}}e^{n\vartheta i}\right|<B$ quelque soit n; $\left|\sum_1^n\frac{a_n}{n^{q-\frac{\varepsilon}{2}}}e^{n\vartheta i}\right|$ resterait fini, et la série $\sum\frac{a_n}{n^{q-\frac{\varepsilon}{2}}}e^{n\vartheta i}$ serait uniformément convergente.

On peut dire que q est l'ordre d'infinitude de $f(z)$ à l'intérieur du cercle de convergence.

Si $q>P$ et $0<\varepsilon<q-P$, la série $\sum_1^\infty\frac{a_n}{n^{q-\varepsilon}}e^{n\vartheta i}$ est convergente pour toute valeur de ϑ, mais son module peut dépasser tout nombre donné. Quelque soit A, il existe des valeurs de z, intérieures au cercle de convergence, telles que $|(1-\varrho)^{q-\varepsilon}f(\varrho e^{\vartheta i})|>A$. Cependant, quelque soit ϑ, ce produit tend vers zéro, si ϱ tend vers 1. L'ordre d'infinitude en un point quelconque du cercle de convergence est au plus égal à P, qui peut être inférieur à l'ordre d'infinitude q à l'intérieur du cercle de convergence.

15. Supposons q négatif, $-\lambda\leq q<1-\lambda$ (n° 4). Soit $z_0=e^{\vartheta_0 i}$ un point arbitraire du cercle de convergence, et

$$\varphi(z)=f(z_0)+(z-z_0)f'(z_0)+\cdots+\frac{(z-z_0)^{\lambda-1}}{1.2\cdots(\lambda-1)}f^{(\lambda-1)}(z_0).$$

Les coefficients de ce polynôme sont des séries uniformément convergentes.

$f(z) - \varphi(z)$ s'annule, pour $z = z_0$, ainsi que ses $\lambda - 1$ premières dérivées.

Pour la fonction $f'(z) = \sum_1^\infty n a_n z^{n-1}$, on a $\omega' = \omega + 1$. Les deux séries $\sum \frac{a_n}{n^q}$ et $\sum \frac{n a_n}{(n-1)^{p+1}} = \sum \frac{a_n}{n^p}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-p-1}$ sont convergentes, ou divergentes, pour les mêmes valeurs de p. Les deux séries $\sum \frac{a_n}{n^p} e^{n\vartheta i}$ et $\sum \frac{n a_n}{(n-1)^{p+1}} e^{(n-1)\vartheta i}$ sont uniformément convergentes pour les mêmes valeurs de p. A la fonction $f'(z)$ correspondent les nombres $p' = p + 1$, $P' = P + 1$ et $q' = q + 1$ (n° 2, 10 et 12). A la fonction $f^{(\lambda)}(z)$ correspond le nombre $q_\lambda = q + \lambda \geq 0$.

Supposons $q > P$, $0 < \varepsilon < q - P$. La série $\sum \frac{a_n}{n^{q-\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ est convergente, sans être uniformément convergente. On peut former des arcs de plus en plus petits sur les quels la convergence n'est pas uniforme. Il y a un point $e^{\vartheta_0 i}$ tel que cette série puisse prendre une valeur de module supérieur à un nombre donné quelconque A sur un arc aussi petit que l'on voudra terminé en ce point. Il y a des valeurs de z telles que

$$(1 - \varrho)^{q+\lambda-\varepsilon} \left| f^{(\lambda)}(\varrho e^{\vartheta i}) \right| > A. \qquad \text{(n° 14)}$$

$f^{(\lambda)}(z)$ est une fonction continue. A chaque valeur de ϑ (entre certaines limites) correspondent des valeurs de $\varrho < 1$, vérifiant cette inégalité. Lorsque ϑ tend vers ϑ_0, ϱ tend vers 1, et l'inégalité cesse d'être vérifiée à la limite. Pour cette suite de valeurs de z on a

$$(z - z_0)^{q+\lambda-\varepsilon} \left| f^{(\lambda)}(z) \right| > A.$$

On peut encore dire que q est l'ordre d'infinitude de la fonction $f(z)$ dans le cercle de convergence, ce qui veut dire que $q + \lambda$ est celui de $f^{(\lambda)}(z)$, ou qu'il existe des valeurs de $z = \varrho e^{\vartheta i}$ et $z_0 = e^{\vartheta_0 i}$ telles que le module de

$$(z - z_0)^{q-\varepsilon}\left(f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0) - \cdots - \frac{(z - z_0)^{\lambda-1}}{1 \cdot 2 \cdots (\lambda - 1)} f^{(\lambda-1)}(z_0)\right)$$

puisse dépasser tout nombre donné.

16. Supposons que ϑ ne varie que sur un arc déterminé $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1$. Il existe, de même, un nombre q' tel que la série $\sum_1^\infty \frac{a^n}{n^{q'+\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ soit uniformément convergente sur cet arc, $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^{q'-\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ n'étant pas uniformément convergente.

Au nombre ε correspond un nombre A tel que $\left|\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^{q'+\varepsilon}} e^{n\vartheta i}\right| < A$, pour ces valeurs de ϑ. Quelque soit A', il existe des valeurs de ϑ, sur cet arc, telles que $\left|\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^{q'-\varepsilon}} e^{n\vartheta i}\right| > A'$.

q' est l'ordre d'infinitude de $f(z)$ sur l'arc considéré, $q' + \lambda$ est celui de la dérivée d'ordre λ, $f^{(\lambda)}(z)$.

Si $\vartheta_1 - \vartheta_0$ tend vers zéro, l'arc ayant pour limite un point $e^{\vartheta i}$, il peut arriver que q' ait une limite plus grande que l'ordre d'infinitude en ce point. Il faut alors distinguer deux ordres d'infinitude en ce point. L'un est l'ordre d'infinitude au point $e^{\vartheta i}$ considéré isolément, c'est le nombre p (n° 2) correspondant à un cercle tangent intérieurement au premier et de rayon aussi petit que l'on voudra. Mais, si $p > \omega - \frac{1}{2}$, cet ordre d'infinitude reste égal à p. L'autre $q' \geq p$ est l'ordre d'infinitude de $f(z)$ sur un arc infiniment petit comprenant le point $e^{\vartheta i}$. On a toujours

$$p \leq q' \leq \omega,$$

où ω est l'ordre au même point défini par M. Hadamard.

III. Exemples.

17. L'ordre en un point peut changer avec le cercle de convergence. Considérons, par exemple, la fonction $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^{c_n}$, où c_n représente une suite de nombres entiers tels que $c_{n+1} - c_n > \alpha \sqrt{c_n L c_n}$, α étant fixe. Pour cette fonction le cercle de convergence est une coupure. Soit ω l'ordre sur le cercle de rayon 1, c'est à dire la plus grande limite de $\frac{L(a_n c_n)}{L c_n}$. Formons le développement:

$$f(x + y(1-x)) = \Sigma b_m y_m, \quad 0 < x < 1$$

$$b_m = \left(\frac{1-x}{x}\right)^m \sum \frac{c_n(c_n-1)\cdots(c_n-m+1)}{1.2\cdots m} a_n x^{c_n}.$$

Soit $c_n = \frac{m}{1-x} + h$; le coefficient de a_n peut se mettre sous la forme:

$$A\left(\frac{1-x}{x}\right)^m x^{c_n}\left(\frac{c_n}{c_n-m}\right)^{c_n}\left(\frac{c_n-m}{m}\right)^m\sqrt{\frac{c_n}{2\pi m(c_n-m)}}=$$
$$=A\left(1+h\frac{1-x}{m}\right)^{c_n}\left(1+h\frac{1-x}{mx}\right)^{m-c_n}\sqrt{\frac{c_n}{2\pi m(c_n-m)}}.$$

A tend vers 1, si m, c_n et c_n-m augmentent indéfiniment.

Si $|h|<\frac{mx}{1-x}$, cette expression peut s'écrire:

$$A\sqrt{\frac{c_n}{2\pi m(c_n-m)}}\,e^{-\frac{h^2(1-x)^2}{2mx}+\frac{h^3(1-x)^2}{6m^2x^2}(1-x^2)-\cdots}$$

Si $h=\pm\frac{1}{1-x}\sqrt{2KxmLm}$, cette expression est de l'ordre de $m^{-K-\frac{1}{2}}$. Le rapport $\frac{c_n}{c_n-m}x$, de deux coefficients consécutifs de b_m, diminue si c augmente. Mais comme $c_{n+1}-c_n=h'-h>\alpha\sqrt{c_nLc_n}$, le rapport de deux coefficients consécutifs de termes non nuls tend vers zéro si $c_n>\frac{m}{1-x}$, et augmente indéfiniment si $c_{n+1}<\frac{m}{1-x}$. A partir d'un rang déterminé $|a_n|<c_n^{\omega-1+\varepsilon}$. Si $K>\frac{1-x}{8x}\alpha^2$, à partir d'un rang déterminé il restera un seul terme c_n entre les rangs $c=\frac{m}{1-x}\pm\pm\frac{1}{1-x}\sqrt{2KxmLm}$. Il en résulte:

$$|b_m|<A'm^{\omega-1+\varepsilon-K-\frac{1}{2}},$$

A' restant fixe. Cette expression est au plus de l'ordre de $m^{\omega-\frac{3}{2}+\varepsilon}$.

D'autre part, considérons une suite de termes tels que $|a_n|>(c_n)^{\omega-1-\varepsilon}$, et soit:

$$(1-x)\,c_n\leq m<1+(1-x)\,c_n.$$

On a:

$$|b_m|>\frac{A}{\sqrt{2\pi m}}(c_n)^{\omega-1-\varepsilon}-A'm^{\omega-1+\varepsilon-K-\frac{1}{2}}$$

On peut supposer $2\varepsilon<K$; il en résulte que $\frac{L|b_m|}{Lm}$ a pour plus grande limite $\omega-\frac{3}{2}$.

Sur le cercle de centre $x, f(z)$ est d'ordre $\omega - \frac{1}{2}$, $y = 1$, $z = 1$ est le seul point singulier de ce cercle, il est d'ordre $\omega - \frac{1}{2}$.

18. Sur le premier cercle de convergence, de centre $z = 0$, le point $z = 1$ est d'ordre ω. En effet, on a:

$$\sqrt{c_{n+1}} - \sqrt{c_n} > \sqrt{c_n + \alpha \sqrt{c_n L c_n}} - \sqrt{c_n} = \frac{\alpha \sqrt{c_n L c_n}}{\sqrt{c_n} + \sqrt{c_n + \alpha \sqrt{c_n L c_n}}}$$

expression qui augmente indéfiniment avec c_n, et n. Quelque soit le mombre K, à partir d'un rang déterminé, on a:

$$\sqrt{c_{n+1}} - \sqrt{c_n} > K$$

$$\sqrt{c_{n+p}} > \sqrt{c_n} + Kp > n + p \qquad \text{si } p > \frac{n}{K - 1};$$

en supposant n fixe, on voit qu'à partir d'un rang déterminé on a $c_{n+p} > (n+p)^2$; ou $c_n > n^2$ à partir d'un rang n'.

$$\left| \frac{a_n}{c_n^{\omega - \varepsilon}} \right| < c_n^{-1+\varepsilon+\varepsilon'} < \frac{1}{n^{2(1-\varepsilon-\varepsilon')}}.$$

Si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, on peut supposer $\varepsilon' < \frac{1}{2} - \varepsilon$, la série $\sum \frac{|a_n|}{c_n^{\omega - \varepsilon}}$ est convergente. La série $\sum \frac{a_n}{c_n^{\omega-\varepsilon}} e^{c_n \vartheta i}$ est uniformément convergente. La fonction $\sum_0^\infty \frac{a_n}{c_n^{\omega-\varepsilon}} e^{c_n \vartheta i}$ est finie et continue pour toute valeur de ϑ. Formons l'expression:

$$x = m \int_{-\vartheta}^{\vartheta} e^{-m\vartheta i} \sum_0^\infty \frac{a_n}{c_n^{\omega-\varepsilon}} e^{c_n \vartheta i} = 2m \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{c_n^{\omega-\varepsilon}} \frac{\sin (c_n - m)\vartheta}{c_n - m}.$$

Soit $m = c_{n'}$, où n' prend des valeurs telles que

$$|a_{n'}| > c_{n'}^{\omega - 1 - \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Le terme $2m \frac{a_{n'}}{c_{n'}^{\omega-\varepsilon}} \vartheta$ a un module supérieur à $2\vartheta c_{n'}^{\frac{\varepsilon}{2}}$, qui augmente indéfiniment avec n'.

Les autres termes de x ont une somme finie. En effet, si $n < n'$, on a une somme de module inférieur à

$$2c_{n'}\sum_0^{n'-1}\frac{|a_n|}{c_n^{\omega-\varepsilon}(c_{n'}-c_n)}<2\sum\frac{c_{n'}}{c_n^{1-\varepsilon-\varepsilon'}(c_{n'}-c_n)}=2\sum_0^{n'-1}c_n^{\varepsilon+\varepsilon'}\left(\frac{1}{c_n}+\frac{1}{c_{n'}-c_n}\right)$$

la série $\sum\limits_0^\infty c_n^{\varepsilon+\varepsilon'-1}$ est convergente.

Si n dépasse un rang déterminé

$$c_{n'}-c_n>K(n'-n)\,(\sqrt{c_{n'}}+\sqrt{c_n})>K(n'-n)\sqrt{c_{n'}}$$

$$\sum_n^{n'-1}\frac{c_n^{\varepsilon+\varepsilon'}}{c_{n'}-c_n}<\frac{1}{K}c_{n'}^{\varepsilon+\varepsilon'-\frac{1}{2}}\sum_n^{n'-1}\frac{1}{n'-n}<\frac{1+Ln'}{Kn'^{1-2\varepsilon-2\varepsilon'}}$$

expression qui reste finie, et tend vers zéro, pour $n'=\infty$.

Si $n>n'$, on a, dans x, une somme de termes de module inférieur à

$$2c_{n'}\sum_{n'+1}^{\infty}\frac{|a_n|}{c_n^{\omega-\varepsilon}(c_n-c_{n'})}<c_{n'}\sum\frac{2}{c_n^{1-\varepsilon-\varepsilon'}(c_n-c_{n'})}<$$

$$\sum_{n'+1}^{\infty}\frac{2}{K(n-n')\,c_n^{\frac{1}{2}-\varepsilon-\varepsilon'}}<\sum\frac{2}{K(n-n')n^{1-2\varepsilon-2\varepsilon'}}<$$

$$<\sum\frac{2}{K(n-n')^{2-2\varepsilon-2\varepsilon'}}=\frac{2}{K}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^{2(1-\varepsilon-\varepsilon')}}.$$

Donc, quelque soit ϑ, x ne reste pas fini, si m augmente indéfiniment. La fonction $\sum\frac{a_n}{c_n^{\omega-\varepsilon}}z^{c_n}$ n'est pas à écart fini, sur un arc comprenant $z=1$, qui est un point singulier d'ordre ω.

Tout point $z=e^{\vartheta i}$ est d'ordre ω sur le cercle de convergence de centre o. Mais il est d'ordre $\omega-\frac{1}{2}$ sur un cercle tangent intérieurement au point $e^{\vartheta i}$.

19. Pour déterminer l'ordre d'infinitude de $f(z)$ (n° 16), soit $q>\omega-1$, et

$$T_n=\sum_1^n\frac{b_m}{m^q}=\sum_1^n\frac{(1-x)^m}{m^q}\sum x^{c_\nu-m}a_\nu\frac{c_\nu(c_\nu-1)\cdots(c_\nu-m+1)}{1.2\cdots m}=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}x^{c_\nu}a_\nu\sum_{\mu=1}^{n}\frac{c_\nu(c_\nu-1)\cdots(c_\nu-\mu+1)}{1.2\cdots\mu}\left(\frac{1-x}{x}\right)^\mu\frac{1}{\mu^q}.$$

Nous allons étudier l'ordre de grandeur de T_n, en supprimant des termes dont la somme restera finie, quelque soit n. Les calculs du n° 9 montrent qu'on peut ne donner à μ que les valeurs comprises entre $(1-x)c_\nu \pm \sqrt{Kc_\nu Lc_\nu}$ où $\frac{K}{2x(1-x)}$ est au moins égal au plus grand des deux nombres $\frac{3}{2}$ et $q+\frac{1}{2}$.

Et comme on a, en outre, $\mu \leq n$, on aura:

$$c_\nu < \frac{n}{1-x} + \sqrt{\frac{Kn}{(1-x)^3} L\frac{n}{1-x} + \frac{K}{2(1-x)^2}\left(1 + L\frac{n}{1-x}\right)}.$$

Il ne reste, dans T_n, qu'un nombre limité de termes a_ν, tels que $c_\nu > \frac{n}{1-x}$; chacun donne une somme de module inférieur à $A\frac{|a_\nu|}{c_\nu{}^q} < A c_\nu{}^{\omega-1-q+\varepsilon}$ expression qui reste finie, ainsi que A, car on peut supposer $0<\varepsilon<q-\omega+1$. On peut ainsi supposer $c_\nu < \frac{n}{1-x}$.

En posant $\mu=(1-x)c_\nu+h$, on a

$$T=\sum_\nu x^{c_\nu} a_\nu \sum_\mu \frac{c_\nu(c_\nu-1)\cdots(c_\nu-\mu+1)}{1\,.\,2\cdots\mu}\left(\frac{1-x}{x}\right)^\mu \frac{1}{c_\nu{}^q(1-x)^q}\left(1-\frac{qh}{c_\nu(1-x)}+\frac{q(q+1)h^2}{2c_\nu{}^2(1-x)^2}\cdots\right).$$

Mais $h<\sqrt{Kc_\nu Lc_\nu}$, la série

$$\sum x^{c_\nu}|a_\nu| \sum_{\mu=0}^{c_\nu} \frac{c_\nu(c_\nu-1)\cdots(c_\nu-\mu+1)}{1\,.\,2\cdots\mu}\frac{\sqrt{Lc_\nu}}{c_\nu{}^{q+\frac{1}{2}}}\left(\frac{1-x}{x}\right)^\mu = \sum|a_\nu|\frac{\sqrt{Lc_\nu}}{c_\nu{}^{q+\frac{1}{2}}} < \sum\frac{\sqrt{Lc_\nu}}{c_\nu{}^{q-\omega+\frac{3}{2}-\varepsilon}}$$

est convergente; il en résulte qu'on peut remplacer T par

$$T' = \sum x^{c_\nu} a_\nu \sum \frac{c_\nu(c_\nu-1)\cdots(c_\nu-\mu+1)}{1\,.\,2\cdots\mu}\left(\frac{1-x}{x}\right)^\mu \frac{1}{c_\nu{}^q(1-x)^q}.$$

On a supposé $\mu \leq n$ lorsque

$$(1-x)c_\nu + \sqrt{Kc_\nu Lc_\nu} > n > (1-x)c_\nu$$

$$\frac{n}{1-x} > c_\nu > \frac{n}{1-x} - \sqrt{\frac{Kn}{(1-x)^3}L\frac{n}{1-x} + \frac{K}{2(1-x)^2}\left(1+L\frac{n}{1-x}\right)}.$$

Mais il ne reste qu'un nombre limité de termes a_ν vérifiant ces conditions, et si on ajoute les termes tels que $\mu > n$, leur somme reste finie, quelque soit n. Dans T', on a alors $c_\nu < \frac{n}{1-x}$, et μ reste compris entre $(1-x)c_\nu \pm \sqrt{Kc_\nu Lc_\nu}$.

Mais, si μ varie de o à c_ν, on ajoute à T' des termes dont la somme a un module inférieur à une expression de l'ordre de

$$\sum_\nu \frac{|a_\nu|}{c_\nu^{q+\frac{1}{2}+\frac{K}{2x(1-x)}}} < \sum c_\nu^{\omega - q - \frac{3}{2} - \frac{K}{2x(1-x)}}$$

qui est une série convergente. On a alors:

$$T'_n = \sum x^{c_\nu} a_\nu \frac{1}{c_\nu^q (1-x)^q} \sum_{\mu=0}^{c_\nu} \frac{c_\nu(c_\nu - 1)\cdots(c_\nu - \mu + 1)}{1 \cdot 2 \cdots \mu} \left(\frac{1-x}{x}\right)^\mu = \frac{1}{(1-x)^q} \sum \frac{a_\nu}{c_\nu^q}.$$

Si $\frac{n}{1-x} + 1 > N \geq \frac{n}{1-x}$ on aura $c_\nu \leq N$. $T'_n - \frac{1}{(1-x)^q} S_N$ a un module qui reste fini. Donc, si $p > \omega - 1$, le nombre p reste le même sur tout cercle tangent au cercle de convergence au point $z = 1$, p est l'ordre d'infinitude en ce point.

20. Soit, par exemple, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{c_n}$

$$n^\alpha - A < c_n < n^\alpha + A,$$

A et α restant finis, $\alpha > 2$. On a:

$$\frac{1}{(n^\alpha + A)^\beta} < \frac{1}{c_n^\beta} < \frac{1}{(n^\alpha - A)^\beta}.$$

La série $\sum \frac{1}{c_n^\beta}$ est convergente si $\beta > \frac{1}{\alpha}$, divergente si $\beta \leq \frac{1}{\alpha}$. Au point $z = 1$ correspond le nombre $p = \frac{1}{\alpha}$, qui est l'ordre d'infinitude en ce point. Sur un cercle tangent intérieurement au point 1, ce point est d'ordre $\frac{1}{2} > \frac{1}{\alpha}$, bien que ce point 1 soit le seul point singulier du nouveau cercle de convergence. Tous les points du premier cercle de convergence sont d'ordre $\omega = 1$, ils sont d'ordre $\frac{1}{2}$ sur tout cercle tangent intérieurement. L'ordre d'infinitude de la fonction dans le premier cercle est $\frac{1}{\alpha}$, puisque la série $\sum \frac{1}{c_n^{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}}$ est convergente. Mais l'ordre d'infinitude des divers points singuliers n'est pas le même. Supposons que l'on ait la fonction particulière

$$f(z) = \sum_0^\infty z^{n^3}.$$

Les points $z = e^{n\frac{\pi i}{4}}$, $e^{2n\frac{\pi i}{7}}$, $e^{2n\frac{\pi i}{9}}$, ont l'ordre d'infinitude $\frac{1}{3}$ comme $z=1$. Pour les points $z = e^{n\frac{\pi i}{3}}$, $e^{n\frac{\pi i}{5}}$, $e^{(2n+1)\frac{\pi i}{7}}$, $e^{(2n+1)\frac{\pi i}{9}}$ on trouve $p = 0$.

Si l'on a $c^n - A < c_n < c^n + A$, $c > 1$, la série $\sum \frac{1}{c_n{}^\beta}$ est convergente si $\beta > 0$. On a $p = 0$ en tout point du cercle de convergence, l'ordre d'infinitude de chacun d'eux est égal ou inférieur à zéro.

21. Pour une série quelconque $f(z) = \sum\limits_0^\infty a_n z^n$, d'ordre ω, supposons $|S_n| < A$ quelque soit n, $S_n = \sum\limits_1^n \frac{a_n}{n^q}$. Formons le développement:

$$f(x + y(1-x)) = \Sigma\, b_m y^m, \qquad 0 < x < 1$$

$$b_m = (1-x)^m \left[a_m + a_{m+1} \frac{m+1}{1} x + \cdots + a_{m+\nu} \frac{(m+1)\cdots(m+\nu)}{1 . 2 \cdots \nu} x^\nu + \cdots \right] =$$

$$= (1-x)^m \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \frac{(m+1)\cdots(m+\nu)}{1 . 2 \cdots \nu} (m+\nu)^q (S_{m+\nu} - S_{m+\nu-1}) =$$

$$= (1-x)^m \left[-m^q S_{m-1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \frac{(m+1)\cdots(m+\nu)}{1 . 2 \cdots \nu} S_{m+\nu} \left((m+\nu)^q - \frac{(m+\nu+1)^{q+1}}{\nu+1} x \right) \right]$$

$$\frac{|b_m|}{(1-x)^m} < A m^q + A \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\nu-1} \frac{(m+1)\cdots(m+\nu-1)}{1 . 2 \cdots (\nu-1)} \left| (m+\nu-1)^q - \frac{(m+\nu)^{q+1}}{\nu} x \right|$$

$$(m+\nu-1)^q - \frac{(m+\nu)^{q+1}}{\nu} x = (m+\nu)^q \left(1 - x\frac{m+\nu}{\nu} - \frac{q}{m+\nu} + \frac{q(q-1)}{2(m+\nu)^2} - \cdots \right)$$

Si $\left| \nu - \frac{mx}{1-x} \right| > \frac{1}{2}$, on a

$$\left| \frac{\frac{1}{m+\nu}}{1 - x\frac{m+\nu}{\nu}} \right| = \frac{1}{\left| \nu(1-x) + m(1-2x) - \frac{m^2}{\nu} x \right|} < \frac{2}{1-x} \frac{2mx + 1 - x}{2m + 1 - x}$$

expression qui reste finie. Cette condition est remplie sauf pour une valeur de ν. Il en résulte:

$$|b_m| < A m^q (1-x)^m + A' m^{q-\frac{3}{2}} +$$

$$+ A' \sum_1^{\infty} x^{\nu-1} \frac{(m+1)\cdots(m+\nu-1)}{1 . 2 \cdots (\nu-1)} (m+\nu)^q (1-x)^m \left| 1 - x\frac{m+\nu}{\nu} \right|$$

où A' reste fini.

Soit $\nu = \frac{mx}{1-x} + h$, $|h| < \frac{mx}{1-x}$.

$$x^{\nu-1}\frac{(m+1)\cdots(m+\nu-1)}{1\,.\,2\cdots(\nu-1)}(1-x)^m\left|1-x\frac{m+\nu}{\nu}\right|$$

reste dans un rapport fini avec

$$\left(\frac{m+\nu}{m}(1-x)\right)^m\left(\frac{m+\nu}{\nu}x\right)^\nu\sqrt{\frac{\nu}{m(m+\nu)}}\left|1-x\frac{m+\nu}{\nu}\right| =$$

$$= \left(1+\frac{h(1-x)}{m}\right)^{m+\nu}\left(1+h\frac{1-x}{mx}\right)^{-\nu}|h|(1-x)\frac{1}{\sqrt{m\nu(m+\nu)}} =$$

$$= \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\frac{|h|}{m^{\frac{3}{2}}}\left(1-h\frac{1-x^2}{2mx}+h^2\frac{(3+2x+3x^2)(1-x)^2}{8m^2x^2}+\cdots\right)e^{-h^2\frac{(1-x)^2}{2mx}+h^3\frac{(1-x)^3(1+x)}{6m^2x^2}-\cdots}$$

Dans b_m, on peut supposer $\left|\frac{h}{m}\right|$ inférieur à un nombre fixe ε; car si $\left|\frac{h}{m}\right| > \varepsilon$, le rapport de deux termes consécutifs est inférieur à un nombre plus petit que 1, si $h > 0$; et supérieur à un nombre plus grand que 1, si $h < 0$. Les termes sont inférieurs à toute puissance de m. On a donc, à partir d'une valeur déterminée de m:

$$|b_m| < A'' m^{q-\frac{3}{2}} \sum |h| e^{-h^2\frac{(1-x)^2}{2mx}},$$

où $h = \alpha + \nu$, α restant fixe, et ν prenant les valeurs entières comprises entre $-\varepsilon m$ et $+\varepsilon m$. Cette expression est du même ordre de grandeur que

$$m^{q-\frac{1}{2}}\int_0^\infty e^{-h^2\frac{(1-x)^2}{2mx}}\frac{h\,dh}{m} = \frac{x}{(1-x)^2}m^{q-\frac{1}{2}}.$$

Il en résulte que la fonction $\Sigma b_m y^m$ est au plus de l'ordre $q + \frac{1}{2}$.

Si p est le nombre correspondant au point 1 (n° 2), sur un cercle c' tangent intérieurement au premier en ce point, l'ordre de la fonction est $\omega' \leq p + \frac{1}{2}$.

Soit un cercle c'' tangent au point 1, intérieurement au premier et extérieurement au cercle c'. Sur ce cercle c'' on aura $p'' \geq \omega' - \frac{1}{2}$.

Par exemple, pour la fonction $f(z)$ du n° 17, on a $\omega' = \omega - \frac{1}{2}$, $p'' \geq \omega - 1$. Si en un point $z = e^{\vartheta i}$, on a $p = \omega - 1$, le nombre p restera égal à $\omega - 1$ sur tout cercle tangent en ce point, et l'ordre d'infinitude est $\omega - 1$.

Par exemple, si $|c^n - c_n|$ reste fini, $c > 1$, tous les points du cercle de convergence ont le même ordre d'infinitude $p = \omega - 1$.

22. Pour une série quelconque, d'ordre ω, formons le développement:

$$f(\varrho e^{\Theta i} + (1 - \varrho) y) = \Sigma b_m y^m, \quad 0 < \varrho < 1$$

$$b_m = (1 - \varrho)^m \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{m+\nu} \frac{(m+1)\cdots(m+\nu)}{1 \cdot 2 \cdots \nu} \varrho^\nu e^{\nu \Theta i}.$$

Soit B_m le maximum du module de b_m, lorsque Θ varie de 0 à 2π, ϱ restant fixe. On sait que (n° 5):

$$B_m \geq (1 - \varrho)^m |a_{m+\nu}| \frac{(m+1)\cdots(m+\nu)}{1 \cdot 2 \cdots \nu} \varrho^\nu,$$

où ν prend une valeur arbitraire. Cette expression est de l'ordre de

$$\left(\frac{m+\nu}{m}(1-\varrho)\right)^m \left(\frac{m+\nu}{\nu}\varrho\right)^\nu |a_{m+\nu}| \sqrt{\frac{m+\nu}{2\pi m\nu}}.$$

Supposons $m + \nu$ choisi de façon que $|a_{m+\nu}| > (m+\nu)^{\omega - 1 - \varepsilon}$ et ensuite $m = (m+\nu)(1-\varrho) + h$, $0 \leq h < 1$. A étant un nombre fixe, on aura:

$$B_m > A\, m^{\omega - 1 - \varepsilon - \frac{1}{2}}$$

$$\frac{Lm B_m}{Lm} > \frac{LA}{Lm} + \omega - \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Il y a donc au moins un point $e^{\Theta i}$ pour le quel la fonction est d'ordre $\omega' \geq \omega - \frac{1}{2}$ sur le cercle de rayon $1 - \varrho$ (arbitraire) tangent intérieurement au premier cercle de convergence. Sur tout cercle tangent au même point, de rayon compris entre $1 - \varrho$ et 0, on a:

$$P'' \geq \omega' - \frac{1}{2} \geq \omega - 1$$

Supposons $P = \omega - 1$, (n° 10), c'est à dire qu'en tout point du cercle de convergence $p = \omega - 1$. Il y a au moins un point $e^{\Theta i}$ pour le quel on aura $p' = \omega - 1$ sur tout cercle tangent intérieurement; donc $P = \omega - 1$ est l'ordre d'infinitude maximum aux points singuliers.

23. Considérons la fonction:

$$f(z) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^\beta} e^{\pi i n^{\frac{1}{\alpha}}} z^n,$$

où α est un nombre entier plus grand que 1. $z = 1$ est le seul point singulier du cercle de convergence (Acta Mathematica T. 22). La série $\sum \frac{1}{n^{1-\frac{1}{\alpha}}} e^{\pi i n^{\frac{1}{\alpha}}}$ est divergente; en effet, si n prend les valeurs entières comprises entre $\left(2K \pm \frac{1}{4}\right)^\alpha$,

$$\left|\pi n^{\frac{1}{\alpha}} - 2K\pi\right| < \frac{\pi}{4},$$

$$\left|\sum \frac{1}{n^{1-\frac{1}{\alpha}}} e^{\pi i n^{\frac{1}{\alpha}}}\right| > \sum \frac{\cos\left(\pi n^{\frac{1}{\alpha}}\right)}{n^{1-\frac{1}{\alpha}}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\left(2K-\frac{1}{4}\right)^\alpha}^{\left(2K+\frac{1}{4}\right)^\alpha} \frac{dx}{x^{1-\frac{1}{\alpha}}} = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}};$$

si K augmente indéfiniment, cette somme ne tendant pas vers zéro, la série est divergente.

Supposons $\beta > 1 - \frac{1}{\alpha}$ et $n = (2K)^\alpha + \mu$, $0 \leq \mu \leq (2K+2)^\alpha - (2K)^\alpha - 1$

$$\sum \frac{1}{n^\beta} e^{\pi i n^{\frac{1}{\alpha}}} = \sum \frac{1}{(2K)^{\alpha\beta}\left(1 + \frac{\mu}{(2K)^\alpha}\right)^\beta} e^{\frac{\pi i}{\alpha}\mu (2K)^{1-\alpha}\left[1 + \frac{\frac{1}{\alpha}-1}{2}\frac{\mu}{(2K)^\alpha} + \cdots\right]}$$

Mais la somme $\sum\limits_0^\mu \frac{2}{K^{\alpha\beta}} \frac{\mu}{K^\alpha} = \frac{\mu(\mu+1)}{K^{\alpha\beta+\alpha}}$ est de l'ordre de $\frac{4^\alpha \alpha^2}{K^{\alpha\beta+2-\alpha}}$ qui est le terme d'une série convergente. $\frac{\mu}{K^{\alpha-1}}$ reste fini. Si on développe chaque terme suivant les puissances de $\frac{\mu}{(2K)^\alpha}$, on ramène la série $\sum \frac{1}{n^\beta} e^{\pi i n^{\frac{1}{\alpha}}}$ à la somme de séries convergentes, et de la série dont le terme général est

$$\sum \frac{1}{(2K)^{\alpha\beta}} e^{\frac{\pi i}{\alpha}\mu (2K)^{1-\alpha}} = \frac{1}{(2K)^{\alpha\beta}} \cdot \frac{e^{\frac{\pi i}{\alpha} 2K\left(\left(1+\frac{1}{K}\right)^\alpha - 1\right)} - 1}{e^{\frac{\pi i}{\alpha}(2K)^{1-\alpha}} - 1}.$$

Le module $\frac{-1}{(2K)^{\alpha\beta}} \frac{\sin\frac{\pi}{\alpha} K\left[\left(1+\frac{1}{K}\right)^\alpha - 1\right]}{\sin\frac{\pi}{2\alpha}(2K)^{1-\alpha}}$ est de l'ordre de $\frac{2}{(2K)^{\alpha\beta}} \frac{\alpha(\alpha-1)}{(2K)^{2-\alpha}}$.

Il en résulte que la série est convergente. La fonction $f(z)$ est d'ordre $\omega = 1 - \beta$. Au point $z = 1$, on a $p = 1 - \beta - \frac{1}{\alpha}$. Pour les autres points du cercle de convergence, qui ne sont pas singuliers, $p = -\beta$. Mais, quoique la série $\sum \frac{1}{n^\beta} e^{\pi i n^{\frac{1}{\alpha}} + \theta n i}$ soit convergente, quelque soit Θ, si $\beta > 1 - \frac{1}{\alpha}$, la convergence n'est pas uniforme et $q > p$. Considérons en effet la somme:

$$X = \sum_{K=1}^{\infty} \sum_{\mu} \frac{1}{[(2K)^\alpha + \mu]^\beta} e^{\pi i n^{\frac{1}{\alpha}} + \theta n i}, \quad n = (2K)^\alpha + \mu$$

$$0 \leq \mu \leq (2K+2)^\alpha - (2K)^\alpha - 1, \quad \beta > 1 - \frac{1}{\alpha}, \quad -\pi \leq \Theta \leq \pi.$$

Comme $\sum \frac{1}{K^{\alpha\beta}} \sum_{1}^{\mu} \frac{\mu}{K^\alpha} = \sum \frac{\mu(\mu+1)}{2K^{\alpha\beta+\alpha}}$ reste fini. La somme X reste finie, quelque soit Θ, en même temps que

$$\sum \frac{1}{K^{\alpha\beta}} \sum e^{\theta i (2K)^\alpha + \mu i \left[\theta + \frac{\pi}{\alpha(2K)^{\alpha-1}}\right]}$$

et comme $\frac{(2K)^{\alpha-1}}{K^{\alpha\beta}}$ reste fini, on peut supprimer un nombre déterminé de valeurs de K. Cette série devient:

$$\sum \frac{1}{K^{\alpha\beta}} e^{\theta i (2K)^\alpha} \frac{e^{\theta i \left((2K+2)^\alpha - (2K)^\alpha\right) + \frac{2K\pi i}{\alpha}\left(\left(1+\frac{1}{K}\right)^\alpha - 1\right)} - 1}{e^{\left(\theta + \frac{\pi}{\alpha(2K)^{\alpha-1}}\right)\frac{i}{2}} \, 2i \sin\frac{1}{2}\left(\Theta + \frac{\pi}{\alpha(2K)^{\alpha-1}}\right)}.$$

L'arc $x = \frac{1}{2}\left(\Theta + \frac{\pi}{\alpha(2K)^{\alpha-1}}\right)$ reste compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$; $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$ reste, en valeur absolue, inférieur à un nombre fixe; et comme la série $\sum \frac{1}{K^{\alpha\beta}}$ est convergente, $\alpha\beta > \alpha - 1 \geq 1$, X reste fini en même temps que

$$X' = \sum \frac{1}{K^{\alpha\beta}} e^{-\left(\theta + \frac{\pi}{\alpha(2K)^{\alpha-1}}\right)\frac{i}{2}} \frac{e^{\theta i (2K+2)^\alpha + \frac{2K\pi i}{\alpha}\left(\left(1+\frac{1}{K}\right)^\alpha - 1\right)} - e^{\theta i (2K)^\alpha}}{\Theta + \frac{\pi}{\alpha(2K)^{\alpha-1}}}.$$

Si $0 \leq \Theta \leq \pi$ cette expression reste finie. Soit:

$$\Theta = -\frac{\pi}{\alpha(2H)^{\alpha-1}}, \quad N \leq H < N+1,$$

où N est un nombre entier. Nous supposerons que K ne varie que de 2 à $N-3$ et de $N+3$ à ∞.

Soit $N' = \frac{N}{2}$ ou $\frac{N+1}{2}$. On a:

$$\sum_{1}^{N'} \frac{1}{K^{\alpha\beta+1}(K^{1-\alpha}-H^{1-\alpha})} < \sum_{1}^{N'} \frac{1}{K^{\alpha\beta+2-\alpha}(1-2^{1-\alpha})} < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha\beta+2-\alpha}}$$

$$\sum_{N'+1}^{N-3} \frac{1}{K^{\alpha\beta+1}(K^{1-\alpha}-H^{1-\alpha})} < \sum \frac{H^{\alpha-1}}{(\alpha-1)K^{\alpha\beta}(H-K)} < \frac{2^{\alpha-1}}{\alpha-1}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha\beta+2-\alpha}}$$

$$\sum_{N+3}^{\infty} \frac{1}{K^{\alpha\beta+1}(H^{1-\alpha}-K^{1-\alpha})} < \sum \frac{1}{(\alpha-1)K^{\alpha\beta+1-\alpha}(K-H)} < \frac{1}{\alpha-1}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha\beta+2-\alpha}}$$

Ces expressions restent finies. Il en résulte qu'en négligeant des termes qui restent toujours finis, on peut remplacer X' par

$$e^{-\Theta\frac{i}{2}}\sum \frac{e^{\Theta i(2K+2)^\alpha}-e^{\Theta i(2K)^\alpha}}{K^{\alpha\beta}\left(\Theta+\frac{\pi}{\alpha(2K)^{\alpha-1}}\right)}$$

et X reste fini en même temps que

$$\sum \frac{e^{\Theta i(2K+2)^\alpha}-e^{\Theta i(2K)^\alpha}}{K^{\alpha\beta}(H^{1-\alpha}-K^{1-\alpha})} \qquad \begin{cases} 2 \leq K \leq N-3 \\ N+3 \leq K < \infty \end{cases}$$

que l'on peut encore remplacer par

$$\sum \frac{1}{H^{1-\alpha}-K^{1-\alpha}}\left(\frac{e^{\Theta i(2K+2)^\alpha}}{(K+1)^{\alpha\beta}}-\frac{e^{\Theta i(2K)^\alpha}}{K^{\alpha\beta}}\right) =$$

$$= \frac{-e^{4^\alpha\Theta i}}{2^{\alpha\beta}(H^{1-\alpha}-1)} + \frac{e^{(2N-4)^\alpha\Theta i}}{(N-2)^{\alpha\beta}(H^{1-\alpha}-(N-3)^{1-\alpha})} - \frac{e^{(2N+6)^\alpha\Theta i}}{(N+3)^{\alpha\beta}(H^{1-\alpha}-(N+2)^{1-\alpha})} +$$

$$+ \sum\left(\frac{1}{H^{1-\alpha}-(K-1)^{1-\alpha}}-\frac{1}{H^{1-\alpha}-K^{1-\alpha}}\right)\frac{e^{(2K)^\alpha\Theta i}}{K^{\alpha\beta}}.$$

Mais

$$[(2N-4)^\alpha-(2N)^\alpha]\Theta = 4\pi\left(\frac{N}{H}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{\alpha-1}{N}+2\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{3N^2}\cdots\right) =$$

$$= 4\pi\left(1-\frac{\alpha-1}{1}\frac{H-N}{N}+\cdots\right)\left(1-\frac{\alpha-1}{N}+\cdots\right)$$

où $0 \leq H-N < 1$.

$(2N+6)^\alpha\Theta$ donne un développement analogue. On peut ainsi, en supprimant des termes toujours finis, remplacer les trois premiers termes de l'expression précédente par

$$\frac{e^{(2N)^\alpha \Theta i}}{N^{\alpha\beta}}\left(\frac{-1}{H^{1-\alpha}-1}+\frac{1}{H^{1-\alpha}-(N-3)^{1-\alpha}}-\frac{1}{H^{1-\alpha}-(N+2)^{1-\alpha}}-\frac{1}{H^{1-\alpha}}\right)=$$

$$\frac{e^{(2N)^\alpha \Theta i}}{N^{\alpha\beta}}\sum\left(\frac{-1}{H^{1-\alpha}-(K-1)^{1-\alpha}}+\frac{1}{H^{1-\alpha}-K^{1-\alpha}}\right)$$

et X par

$$\sum\left(\frac{e^{(2N)^\alpha \Theta i}}{N^{\alpha\beta}}-\frac{e^{(2K)^\alpha \Theta i}}{K^{\alpha\beta}}\right)\frac{K^{1-\alpha}-(K-1)^{1-\alpha}}{(H^{1-\alpha}-(K-1)^{1-\alpha})(H^{1-\alpha}-K^{1-\alpha})}.$$

Mais

$$\sum\left|\left(\frac{1}{N^{\alpha\beta}}-\frac{1}{K^{\alpha\beta}}\right)\frac{K^{1-\alpha}-(K-1)^{1-\alpha}}{(H^{1-\alpha}-(K-1)^{1-\alpha})(H^{1-\alpha}-K^{1-\alpha})}\right|$$

reste fini. En effet

$$\sum_{N+3}^{\infty}\left(\frac{1}{N^{\alpha\beta}}-\frac{1}{K^{\alpha\beta}}\right)\left(\frac{1}{H^{1-\alpha}-(K-1)^{1-\alpha}}-\frac{1}{H^{1-\alpha}-K^{1-\alpha}}\right)=$$

$$=\frac{\frac{1}{N^{\alpha\beta}}-\frac{1}{(N+3)^{\alpha\beta}}}{H^{1-\alpha}-(N+2)^{1-\alpha}}+\sum_{N+3}^{\infty}\frac{\frac{1}{K^{\alpha\beta}}-\frac{1}{(K+1)^{\alpha\beta}}}{H^{1-\alpha}-K^{1-\alpha}}<$$

$$<\frac{3\alpha\beta}{N^{\alpha\beta+1}((N+1)^{1-\alpha}-(N+2)^{1-\alpha})}+\sum\frac{\alpha\beta}{K^{\alpha\beta+1}((N+1)^{1-\alpha}-K^{1-\alpha})}<$$

$$<\frac{3\alpha\beta}{(\alpha-1)N^{\alpha\beta+1-\alpha}}\left(1+\frac{1}{N}\right)^\alpha+\alpha\beta\sum_{N+3}^{\infty}\frac{1}{K^{\alpha\beta+1-\alpha}(K-N-1)}$$

expressions qui restent finies, car $\alpha\beta+1-\alpha>0$

$$\sum_{2}^{N-3}\left(\frac{1}{N^{\alpha\beta}}-\frac{1}{K^{\alpha\beta}}\right)\left(\frac{1}{H^{1-\alpha}-(K-1)^{1-\alpha}}-\frac{1}{H^{1-\alpha}-K^{1-\alpha}}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{N^{\alpha\beta}}-\frac{1}{2^{\alpha\beta}}\right)\left(\frac{1}{H^{1-\alpha}-1}\right)-\left(\frac{1}{N^{\alpha\beta}}-\frac{1}{(N-3)^{\alpha\beta}}\right)\frac{1}{H^{1-\alpha}-(N-3)^{1-\alpha}}+$$

$$+\sum_{2}^{N-4}\frac{1}{H^{1-\alpha}-K^{1-\alpha}}\left(\frac{1}{K^{\alpha\beta}}-\frac{1}{(K+1)^{\alpha\beta}}\right)$$

expressions qui restent finies, comme on peut le voir en séparant la somme Σ en deux par la valeur N'.

On peut ainsi remplacer X par

$$X'' = e^{(2N)^a \theta i} \sum \frac{1 - e^{((2K)^a - (2N)^a)\theta i}}{N^{a\beta}} \frac{K^{1-a} - (K-1)^{1-a}}{(H^{1-a} - (K-1)^{1-a})(H^{1-a} - K^{1-a})}$$

expression dont le module est supérieur à

$$R = \sum \frac{2 \sin^2 \frac{(2K)^a - (2N)^a}{2} \Theta}{N^{a\beta}(H^{1-a} - (K-1)^{1-a})(H^{1-a} - K^{1-a})} (-K^{1-a} + (K-1)^{1-a}).$$

Supposons $H = N$, $K = N + \mu$, $|\mu| < \sqrt{\frac{N}{\alpha - 1}}$ on aura

$$R > \frac{2 \sin^2 (\alpha - 1) \pi \frac{\mu^2}{2N} \left(1 + \frac{\alpha - 2}{3} \frac{\mu}{N} + \cdots\right)}{(\alpha - 1) \mu (\mu - 1) N^{a\beta - a}} \left(1 - \alpha \frac{(\alpha - 2) \mu (\mu - 1)}{12 N^2} + \cdots\right)$$

qui est de l'ordre de

$$\frac{1}{2} (\alpha - 1) \pi^2 \sum \frac{\mu^2}{N^{2 + a\beta - a}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{N^{a\beta - a + \frac{1}{2}}}$$

et augmente indéfiniment avec N si $\beta < 1 - \frac{1}{2\alpha}$.

Si $\beta = 1 - \frac{1}{2\alpha}$, on voit de même, quel que soit Θ, que les termes de X'' tels que $|\mu| < \sqrt{\frac{N}{\alpha - 1}}$ donnent une somme qui reste finie; et les autres termes donnent une somme de module inférieur à

$$\sum \frac{1}{K^a N^{a\beta} (H^{1-a} - K^{1-a})^2} < \sum \frac{\sqrt{N}}{(K - N)^2} < \sqrt{N} \sum_{\sqrt{N}}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

expression qui reste finie.

La série $\sum \frac{1}{n^\beta} e^{\pi i n^{\frac{1}{a}} + n\theta i}$ est convergente si $\beta > 1 - \frac{1}{\alpha}$ mais la convergence n'est uniforme que si $\beta > 1 - \frac{1}{2\alpha}$. Si $\alpha > 2$, pour la fonction $f(z)$, l'ordre $\omega = 1 - \beta$; les deux ordres d'infinitude au point $z = 1$ (nº 16) sont $p = 1 - \frac{1}{\alpha} - \beta$ et $q' = 1 - \frac{1}{2\alpha} - \beta$.

Aux autres points du cercle de convergence, qui ne sont pas singuliers, on aurait $p = q' = -\beta$.

24. Considérons la fonction particulière

$$f(z) = \sum_1^\infty n e^{\pi i n^{\frac{1}{3}}} z^n$$

d'ordre $\omega = 2$, l'ordre d'infinitude du point $z = 1$ est $p = \frac{5}{3}$. Soit:

$$\varphi(z) = (1 - z) \sum_1^\infty n e^{\pi i n^{\frac{1}{3}}} z^n = \sum_1^\infty \left(n e^{\pi i n^{\frac{1}{3}}} - (n-1) e^{\pi i (n-1)^{\frac{1}{3}}}\right) z^n =$$

$$= \sum_1^\infty z^n e^{\pi i n^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{\pi i}{3} n^{\frac{1}{3}} + 1 + \frac{\pi^2}{18 n^{\frac{1}{3}}} - \frac{2\pi i}{9 n^{\frac{2}{3}}} - \frac{\pi^3 i}{2 \cdot 3^4 n} + \cdots\right)$$

$\varphi(z)$ est d'ordre $\omega = \frac{4}{3}$, l'ordre d'infinitude du point $z = 1$ est $p = 1$.

Il semblerait naturel que, l'ordre d'infinitude de $f(z)$ au point 1 étant $\frac{5}{3}$, celui de $(1 - z) f(z)$ soit $\frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$, tandis qu'il est égal à 1. Cela doit provenir des points singuliers qui, sans être sur le cercle de convergence, sont infiniment voisins de $z = 1$, et ne sont pas modifiés par la multiplication par $1 - z$.

De même

$$(1 - z)^2 \sum_1^\infty n e^{\pi i n^{\frac{1}{3}}} z^n = \sum z^n \left(n e^{\pi i n^{\frac{1}{3}}} - 2(n-1) e^{\pi i (n-1)^{\frac{1}{3}}} + (n-2) e^{\pi i (n-2)^{\frac{1}{3}}}\right) =$$

$$= \sum z^n e^{\pi i n^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{-\pi^2}{9 n^{\frac{1}{3}}} + \frac{4\pi i}{9 n^{\frac{2}{3}}} + \frac{\pi^3 i}{27 n} + \cdots\right)$$

Pour cette fonction $\omega = \frac{2}{3}$, $p = \frac{1}{3}$.

Montpellier le 1 novembre 1910

E. Fabry.