# SUR LES RELATIONS ALGÉBRIQUES ENTRE LES INTÉGRALES INDÉFINIES.

PAR

ALEXANDRE OSTROWSKI

à BÂLE.

**1.** Le théorème démontré dans cette note se ramène à ceci: les *relations algébriques* entre les intégrales indéfinies se réduisent toujours à des *relations linéaires.*

Pour pouvoir donner un énoncé précis de ce théorème nous allons introduire la notion de corps $L$ de fonctions d'une variable $z$.

Un ensemble $R$ des fonctions de $z$ sera appelé un *corps* $L$ dans un domaine (ouvert) $D$ du plan des $z$, s'il jouit des trois propriétés suivantes:

A) Chaque fonction de $R$ est *uniforme* et holomorphe dans $D$, sauf au plus dans un ensemble dénombrable de singularités isolées.

B) Si $f(z)$ est une fonction de $R$, sa dérivée $f'(z)$ appartient aussi à $R$.

C) L'ensemble $R$ contient toutes les constantes complexes et est un *corps*, c'est à dire que si $\alpha$ et $\beta \neq 0$ sont deux grandeurs de $R$, les grandeurs $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ appartiennent aussi à $R$.

**2.** Alors on a le théorème suivant:

*Soit $R$ un corps $L$ dans le domaine $D$ du plan des $z$ et soient*

$$\varphi_\nu(z) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{2, 1}$$

*$n$ grandeurs de $R$ et*

$$\psi_\nu(z) = \int \varphi_\nu(z)\, dz \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{2, 2}$$

*leurs intégrales indéfinies. Soit*

$$F(w_1, \ldots, w_n; z) \tag{2, 3}$$

*un polynôme en* $w_1, \ldots, w_n$ *qui ne s'annule pas identiquement et dont les coefficients sont des fonctions de* $z$ *du corps* $R$.

*Alors, s'il existe une relation identique*

$$F(\psi_1(z), \ldots, \psi_n(z); z) \equiv 0, \tag{2, 4}$$

*il existe aussi une relation identique* *l i n é a i r e*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \psi_\nu(z) \equiv \gamma(z), \tag{2, 5}$$

*où* $\gamma(z)$ *est une fonction de* $R$ *et où* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *sont des grandeurs indépendantes de* $z$, *dont l'une au moins ne s'annule pas.*

**3. Démonstration.** Nous désignons par $P(z)$ le point de l'espace des $n+1$ variables complexes $w_1, \ldots, w_n, z$, donné par

$$w_1 = \psi_1(z), \ \ldots, \ w_n = \psi_n(z), \ z. \tag{3, 1}$$

Désignons par $\overline{F}$ l'ensemble de termes de (2, 3) en $w_1, \ldots, w_n$ dont les dimensions sont *maximum*. $\overline{F}$ est un polynôme homogène en $w_1, \ldots, w_n$ de dimension $d$. Nous pouvons évidemment supposer que $F$ soit choisi de manière que $d$ soit aussi petit que possible. Ordonnons les termes de $\overline{F}$ d'après le *principe lexicographique* et désignons alors *le plus haut terme* de $\overline{F}$ par

$$f(z)\, w_1^{\nu_1} \ldots w_n^{\nu_n}. \tag{3, 2}$$

Cela veut dire que les exposants de $w_1$ dans chaque terme de $\overline{F}$ sont $\leqq \nu_1$; dans chaque terme de $\overline{F}$ contenant $w_1^{\nu_1}$, l'exposant de $w_2$ est $\leqq \nu_2$ etc. On peut évidemment diviser $F$ par $f(z)$ de sorte que le premier terme de $\overline{F}$ peut être supposé dès le début de la forme

$$w_1^{\nu_1} \ldots w_n^{\nu_n}, \qquad \nu_1 + \cdots + \nu_n = d. \tag{3, 3}$$

Nous pouvons de plus supposer que parmi les plus hauts termes de $\overline{F}$ pour les différents polynômes $F$ satisfaisant à nos conditions, (3, 2) est *le plus bas*.

En différentiant la relation (2, 4) on voit que l'expression

$$\varphi_1(z)\frac{\partial F}{\partial w_1} + \cdots + \varphi_n(z)\frac{\partial F}{\partial w_n} + \frac{\partial F}{\partial z} \tag{3, 4}$$

s'annule en chaque point $P(z)$, $z \,\langle\, D$, où elle est régulière.

D'autre part, dans le polynôme (3, 4) en $w_1, \ldots, w_n$ les termes de la dimension maximum $d$ sont tous contenus dans $\frac{\partial F}{\partial z}$. Et puisque la dérivée partielle de (3, 3) par rapport à $z$ est identiquement nulle, le plus haut parmi les termes de dimension $d$ en (3, 4) écrits dans l'ordre lexicographique, doit être plus bas que (3, 3). Donc, l'expression (3, 4) *s'annule identiquement* en $w_1, \ldots, w_n, z$, et nous voyons que notre fonction $F$ satisfait à l'équation différentielle

$$\varphi_1(z)\frac{\partial F}{\partial w_1} + \cdots + \varphi_n(z)\frac{\partial F}{\partial w_n} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \tag{3, 5}$$

**4.** Or, les $n$ expressions $\varphi_\nu \frac{\partial F}{\partial w_\nu}$ ne contiennent pas de termes de dimension $d$ en $w_1, \ldots, w_n$. Donc, les termes de dimension $d$ en $\frac{\partial F}{\partial z}$ doivent se détruire, ce qui n'est possible que si les coefficients de ces termes sont *indépendants* de $z$. Donc $\bar{F}$ est un polynôme en $w_1, \ldots, w_n$ *à coefficients constants.*

Soit $\nu_k$ le premier des $n$ exposants $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$, qui est $> 0$. Dans ce cas $\bar{F}$ ne dépend que de $w_k, w_{k+1}, \ldots, w_n$. Rassemblons dans l'expression (3, 4) les coefficients de

$$P = w_k^{\nu_k - 1} w_{k+1}^{\nu_{k+1}} \cdots w_n^{\nu_n}. \tag{4, 1}$$

Désignons par $-\gamma(z)$ le coefficient de (4, 1) en $F$ et soient

$$1, \ \beta_{k+1}, \ \beta_{k+2}, \ \ldots, \ \beta_n$$

les coefficients (constants) des autres termes de $F$:

$$w_k P, \ w_{k+1} P, \ w_{k+2} P, \ \ldots, \ w_n P,$$

qui engendrent (4, 1) par différentiation.

Alors le coefficient total de $P$ dans (3, 4) est évidemment égal à

$$\nu_k \varphi_k + (\nu_{k+1} + 1)\beta_{k+1}\varphi_{k+1} + \cdots + (\nu_n + 1)\beta_n \varphi_n - \gamma'(z). \tag{4, 2}$$

D'autre part, d'après (3, 5), la somme (4, 2) s'annule identiquement. Il résulte, en intégrant, la relation

$$\nu_k \psi_k + (\nu_{k+1} + 1)\beta_{k+1}\psi_{k+1} + \cdots + (\nu_n + 1)\beta_n \psi_n = \gamma(z) + \text{const}. \tag{4, 3}$$

Or, ici $\gamma$ est l'un des coefficients de $F$, donc une grandeur de $R$. En outre, les coefficients de la relation (4, 3) ne sont pas tous $= 0$, puisque $\nu_k$ est positif.

Notre théorème est démontré.

Ce théorème peut d'ailleurs être considérablement généralisé.

En reserrant un peu les hypothèses portant sur les intégrales (2, 2) on peut démontrer que l'existence d'une relation (2, 4) a pour conséquence l'existence d'une relation linéaire *non seulement quand $F$ est un polynôme*, mais aussi si $F$ s'obtient à partir des variables $w_1, \ldots, w_n$ et des grandeurs de $R$ en combinant les signes des fonctions algébriques, du logarithme et de la fonction exponentielle. On peut même admettre, à côté du logarithme et de la fonction exponentielle, les intégrales des fonctions algébriques et leurs fonctions inverses.[1]

La démonstration de ce résultat exige toutefois des développements assez étendus qui sortent du cadre de cette note.

---

[1] Ce résultat généralise, en le précisant, un énoncé de M. J. F. Ritt (Trans. Am. Math. Soc., **25**, 211—222, 1923) d'après lequel une intégrale indéfinie $w$ d'une fonction élémentaire de $z$ au sens de Liouville est elle-même élémentaire au sens de Liouville si elle satisfait à une équation $F(w, z) = 0$, où $F(w, z)$ est une fonction élémentaire au sens de Liouville, c'est-à-dire formée au moyen des signes de fonctions algébriques, du logarithme et de la fonction exponentielle.

Bâle, le 25 juin 1945.