EINE UMKEHRUNG DER STURM-LIOUVILLESCHEN EIGENWERTAUFGABE.

BESTIMMUNG DER DIFFERENTIALGLEICHUNG DURCH DIE EIGENWERTE.

Von

GÖRAN BORG

in Uppsala.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Bei der klassischen Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe handelt es sich bekanntlich darum, Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda\varrho(x) + g(x))y = 0 \tag{1}$$

zu finden, die ausserdem in den Endpunkten eines endlichen Intervalls, das wir der Einfachheit halber gleich $(0, \pi)$ nehmen, Randbedingungen der Form

$$\left.\begin{aligned} \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0 \\ \gamma y(\pi) + \delta y'(\pi) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

genügen. λ ist ein Parameter, $p(x)$, $\varrho(x)$, $g(x)$ sind wohldefinierte reelle Funktionen, $p(x)$, $\varrho(x) > 0$, und α, β, γ, δ Konstanten, für die $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, $|\gamma| + |\delta| \neq 0$ gilt. Die ausgezeichneten λ-Werte, für die solche Lösungen wirklich existieren, sind die Eigenwerte, die entsprechenden Lösungen sind die Eigenfunktionen.

Bei dieser wie bei allen Eigenwertaufgaben entstehen zwei Hauptprobleme: das *Eigenwertproblem* und das *Entwicklungsproblem*.[1] Beim ersten Problem ist man mit den Fragen der Existenz und der Eigenschaften der Eigenwerte beschäftigt, beim zweiten Problem untersucht man die Voraussetzungen, unter denen eine Funktion $f(x)$ in eine nach den Eigenfunktionen $y_n(x)$ fortschreitende Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x)$$

entwickelt werden kann.

[1] Vgl. KAMKE [1], S. 194. Wir werden im folgenden mehrfach seine Verkürzungen anwenden. Vgl. S. XVII.
[ ] bezieht sich auf das Literaturverzeichnis.

Im Gebiete des ersten Problems gab schon STURM[1] 1836 die wesentlichen Ergebnisse, die man nun unter dem Namen STURMS Oszillationssatz zusammen zu fassen pflegt. Seine Beweise sind von BÔCHER[2] bearbeitet und strenger gestaltet worden. Wir geben einige seiner Resultate an:

Es gibt unendlich viele Eigenwerte $\lambda_n : \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda < \cdots$ mit dem einzigen Häufungspunkt ∞, alle sind reell und einfach.

Jede Eigenfunktion $y_n(x)\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$ hat im offenen Intervall $(0, \pi)$ genau n Nullstellen.[3]

LIOUVILLE[4] hat sich in drei „mémoires" mit dem Entwicklungsproblem beschäftigt. Dabei gab er auch Abschätzungen der Eigenwerte und Eigenfunktionen für grosse Indizes n an. U. a. stammt von ihm die Transformation, durch die man die Gleichung (1) auf die Form

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + (\lambda + \varphi(x))\, y = 0 \tag{3}$$

bringen kann, dies jedoch unter der Voraussetzung, dass $p(x)$ und $\varrho(x)$ zweimal differenzierbar sind.

Die Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgabe dürfte eine der am eingehendsten behandelten Eigenwertaufgaben sein. Jedoch ist im Wesentlichen die Fragestellung dieselbe geblieben, so dass die Untersuchungen nach STURM und LIOUVILLE grösstenteils als Verschärfungen und Erweiterungen ihrer Ergebnisse im Gebiete der genannten Hauptprobleme erscheinen. Diese Probleme werden dadurch charakterisiert, dass die Dgl.[5] und die Randbedingungen vorgegeben sind und die Eigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen gesucht werden. Es gibt jedoch auch Ansätze zur Behandlung einiger anderer Probleme, die gewissermassen eine Umkehrung der obigen sind. Diese Probleme, denen die vorliegende Abhandlung gewidmet ist, sind von folgender Art: *Es sollen Eigenwerte und Randbedingungen als bekannt vorausgesetzt werden, während eine zugehörige Dgl. von Liouvilleschem Typus* (3) *und ihre Eigenschaften gesucht werden.*

Solche Probleme und ihre Bedeutung für die Physik sind von AMBARZUMIAN[6]

---

[1] STURM [1].

[2] BÔCHER [1], [3] S. 63 ff.

[3] Vgl. z. B. KAMKE [1] S. 260.

[4] LIOUVILLE [1], [2], [3].

[5] Dgl. ist eine Verkürzung von Differentialgleichung, vgl. Kamke [1] S. XVII. Wir werden sie im Folgenden anwenden.

[6] AMBARZUMIAN [1].

erwähnt. Wenn auch nicht ausgesprochen, findet man eine analoge Fragestellung bei INCE[1] und MARKOVIC[2] samt bei W. MOTHWURF.[3] Ihre Ergebnisse sollen im vierten Kapitel näher besprochen werden.

Die klassischen Eigenwertaufgaben sind aus Problemen der Physik entstanden. Die Dgl. (1) erhält man z. B. bei der Behandlung des Problems der Wärmeleitung in einem Stab. Mit $g(x) \equiv 0$ tritt sie bei vielen Problemen der elastischen Schwingungen auf, z. B. werden die Schwingungen einer Saite durch die Dgl. (1) mit $g(x) \equiv 0$ charakterisiert. Auch unser umgekehrtes Problem hängt mit Problemen der Physik zusammen, wie es schon AMBARZUMIAN bemerkt hat. Wenn man eine Saite eindeutig durch ihren Grundton und ihre Obertöne zu charakterisieren sucht, so erhält man offenbar ein Problem vom umgekehrten Typus. Es gibt aber auch andere Probleme der Physik, die mehr unmittelbar zur genannten Fragestellung führen. Folgendes Beispiel ist den Physikern wohlbekannt.

Bei der Reflexion der Elektronenstrahlung an der Grenze eines Kristallgitters hat man gefunden, dass der Reflexionskoeffizient von der Totalenergie der einfallenden Elektronen abhängig ist. Wenn man die Totalenergie als Abszisse und den Reflexionskoeffizienten als Ordinate wählt, so ergibt sich, dass die Ordinate in gewissen Intervallen approximativ konstante Werte annimmt, die zugleich die Maximalwerte der Ordinate sind. Die Lage dieser Intervalle, der Intervalle der Totalreflexion, ist charakteristisch.[4]

Diese Erscheinungen sind von KRONIG und PENNEY[5] in einem einfachen Falle mathematisch behandelt worden, nämlich wenn das Kristallgitter als eindimensional aufgefasst wird. Die Schrödingersche Wellengleichung der Elektronenbewegung im Kristallgitter erhält dabei die Form (3), hierbei ist λ der Totalenergie des Elektrons und $\varphi(x)$ dem inneren Potential des Kristallgitters proportional, also für die Kristallstruktur charakteristisch.[6] $\varphi(x)$ muss also periodisch sein, es sei ω die Periode. Die Gleichung (3) mit periodischem Koeffizienten $\varphi(x)$ hat wohlbekannte Eigenschaften. U. a. gilt, dass die Eigenwerte dieser Dgl. bei den Randbedingungen

---

[1] INCE [1]. [2] MARKOVIĆ [1].

[3] MOTHWURF [1]. Man hat auch umgekehrte Probleme im Gebiete der Randwertaufgaben studiert. Vgl. z. B. DEMTCHENKO [1], RIABOUCHINSKY [1], [2]. Vgl. auch LANGER [1].

[4] Vgl. z. B. RUPP [1]. Das Beispiel ist im Anschluss an Kronig und Penney[5] grob schematisiert.

[5] KRONIG und PENNEY [1].

[6] SCHRÖDINGER [1] S. 42, STRUTT [1], S. 7.

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = y(\omega) \\ y'(0) = y'(\omega) \end{array}\right\}(4) \quad \text{und} \quad \left.\begin{array}{l} y(0) = -y(\omega) \\ y'(0) = -y'(\omega) \end{array}\right\}(5)$$

die λ-Achse, die also der Energieachse entspricht, in zwei Arten von Intervallen zerlegen; es sind dies die sogenannten *Instabilitäts-* und *Stabilitäts-Intervalle.*[1] Wenn λ zu einem Intervall der vorigen Art gehört, hat die Gleichung (3) eine exponentiell nach Null abnehmende Lösung, die offenbar als die Darstellung einer gedämpften Welle aufgefasst werden kann. Wenn λ zu einem Intervall der letzten Art gehört, sind alle Lösungen von (3) beschränkt, oszillatorisch und haben nicht den Grenzwert Null. Sie können als die Darstellung durchgehender Wellen aufgefasst werden. Man deutet deshalb die Instabilitätsintervalle als das mathematische Gegenstück der Intervalle der Totalreflexion. Wenn man es dann so einrichtet, dass z. B. die Breite und Lage dieser Intervalle gemessen werden können, so entsteht die Frage, was man daraus hinsichtlich der Kristallstruktur schliessen kann. Nach dem oben Gesagten gilt es also, die Funktion $\varphi(x)$ aus der Kenntnis der Eigenwerte der Aufgaben (3), (4) und (3), (5) zu bestimmen. Wenn ausser $\varphi(x+\omega) = \varphi(x)$ auch $\varphi(-x) = \varphi(x)$ gilt, so sind die genannten Eigenwertaufgaben mit zwei Aufgaben von Sturm-Liouvillescher Art gleichbedeutend[2], so dass wir gerade ein Problem von unserer umgekehrten Art erhalten.

Bei der Behandlung der umgekehrten S-L Eigenwertaufgabe[3] in dieser Abhandlung soll die Dgl. von der Form (3) sein. Wir gehen folgendermassen vor:

Im ersten Kapitel zeigen wir einige allgemeine Züge der umgekehrten Aufgabe. Wenn wir die Folge von Eigenwerten der Aufgabe (3), (2) *das S-L Spektrum von $\varphi(x)$ (bei den Randbedingungen* (2)) nennen und die Folge von Fourierkoeffizienten der Entwicklung von $\varphi(x)$ nach den Funktionen des trigonometrischen Systems *die Fourierkoeffizientenfolge von $\varphi(x)$* nennen, so werden wir zuerst das S-L Spektrum mit der Fourierkoeffizientenfolge von $\varphi(x)$ vergleichen. Dadurch werden wir in dem allgemeinen Falle $\varphi(x) < L(0, \pi)$[4] zu einer Einteilung der umgekehrten Eigenwertaufgabe in drei Hauptfälle geführt, in denen eine weitgehende Analogie zwischen dem S-L Spektrum und der Fourierkoef-

---

[1] HAMEL [1]; HAUPT [1].

[2] Vgl. BÔCHER [2] S. 448. Vgl. auch Anm. 3, Satz P_2, Kap. 3.

[3] S-L wird als Verkürzung von „Sturm-Liouvilleschen" u. dgl. gebraucht.

[4] Mit der Bezeichnung $\varphi(x) < L^p(0, \pi)$ werden wir wie gewöhnlich angeben, dass $\varphi^p(x)$ im Lebesgueschen Sinn im Intervall $(0, \pi)$ integrierbar ist ($L^1 = L$). Diese Bezeichnung soll immer im folgenden angewandt werden.

fizientenfolge von $\varphi(x)$ vorliegt. In dem speziellen Falle: $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ totalstetig treten daneben Eigenschaften des S-L Spektrums auf, die nicht mit denen der Fourierkoeffizientenfolge verglichen werden können.

Die Analogie zwischen S-L Spektrum und Fourierkoeffizientenfolge von $\varphi(x)$ in den obigen drei Hauptfällen wenden wir dann zur Behandlung einiger Probleme der umgekehrten Art an: wir setzen Eigenschaften des S-L Spektrums als bekannt voraus und leiten daraus Regularitätseigenschaften von $\varphi(x)$ her.

Die Hauptprobleme der umgekehrten Eigenwertaufgabe liegen etwas tiefer. Sie sind sowohl aus den Problemen der Physik als auch aus der oben erwähnten Analogie zwischen dem S-L Spektrum und der Fourierkoeffizienten von $\varphi(x)$ entstanden. Es sind dies die folgenden:

Problem P. In welchem Masse ist die Dgl. (3), *d. h. die Funktion $\varphi(x)$ durch ein oder mehrere S-L Spektren eindeutig bestimmt?*

Problem P^*. 1. *Man gebe notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass eine Folge $\{\lambda_n\}_{n=0,1,2\ldots}$ ein S-L Spektrum bei vorgegebenen Randbedingungen einer Funktion $\varphi(x) < L^2(0, \pi)$ ist.*

2. *Wenn $\{\lambda_n\}_{n=0,1,2\ldots}$ ein S-L Spektrum einer Funktion $\varphi(x) < L^2(0, \pi)$ ist, die durch das Spektrum eindeutig bestimmt wird, so konstruiere man diese Funktion.*

Die Probleme P und P^*: 2 entstehen naturgemäss aus den Problemen der Physik. Das Problem P^*: 1 entspricht offenbar dem Problem, das im Gebiete der Fourierkoeffizienten von $\varphi(x)$ zu dem wohlbekannten Riesz-Fischerschen Satz führt.

Bei der Behandlung dieser Probleme müssen wir uns auf einige Spezialfälle obiger Hauptfälle beschränken. Es werden dabei einige vollständige Funktionensysteme verlangt, die wir im zweiten Kapitel untersuchen. Die Untersuchung muss in jedem der Spezialfälle gesondert durchgeführt werden.

Im dritten Kapitel fassen wir die Ergebnisse des zweiten Kapitels zu Existenz- und Eindeutigkeitssätzen zusammen. Hinsichtlich des Problems P ergibt sich im wesentlichen folgendes:

1. *$\varphi(x)$ wird im allgemeinen nicht durch ein einziges S-L Spektrum eindeutig bestimmt.*

Vielmehr gilt, dass ein S-L Spektrum in gewissem Sinn die „Hälfte" der Fourierkoeffizientenfolge von $\varphi(x)$ bestimmt. Die im zweiten Kapitel behandelten Spezialfälle führen zu einer Präzisierung dieser Aussage:

2. *Zu jeder beliebigen S-L Eigenwertaufgabe gehört wenigstens eine „ergänzende“ Eigenwertaufgabe, so dass folgendes gilt: ist ausser dem Spektrum der vorgegebenen S-L Eigenwertaufgabe das Spektrum einer ergänzenden S-L Eigenwertaufgabe bekannt, so wird dadurch $\varphi(x)$ eindeutig bestimmt.*

2'. *Bei der speziellen Form $R_1: y(0) = y(\pi) = 0$ oder $R_2: y'(0) = y'(\pi) = 0$ der S-L Randbedingungen gilt: wird die Funktion $\varphi(x)$ durch die Bedingung $\varphi(x) = \varphi(\pi - x)$ beschränkt, so ist sie durch ihr Spektrum bei den Randbedingungen R_1 oder den Randbedingungen R_2 eindeutig bestimmt.*

Hinsichtlich des Problems P^* haben wir in obigen Fällen der eindeutigen Bestimmtheit Existenz- und Konstruktionssätze „im Kleinen“ bewiesen, d. h. wir setzen voraus, dass die vorgegebene Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ sich in einer gewissen Nähe eines S-L Spektrums einer bekannten Funktion $\varphi(x)$ befindet.

Das vierte Kapitel ist einigen Beispielen gewidmet. Auch werden Ergebnisse, die innerhalb der vorliegenden Probleme früher erhalten worden sind, ein wenig diskutiert.

Kapitel 1.

Über den Zusammenhang zwischen den S-L Spektren und der Fourierkoeffizientenfolge einer Funktion $\varphi(x)$.

1. Wir beginnen damit, unsere in der Einleitung erwähnten Voraussetzungen zu präzisieren. Die Dgl. unserer S-L Eigenwertaufgabe soll in der Liouvilleschen Normalform

$$y'' + (\lambda + \varphi(x))y = 0 \tag{1}$$

geschrieben sein[1]. Die Randbedingungen sollen sich auf das Intervall $(0, \pi)$ beziehen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0 \\ \gamma y(\pi) + \delta y'(\pi) = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} |\alpha| + |\beta| > 0 \\ |\gamma| + |\delta| > 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Wir setzen voraus, dass $\varphi(x)$ reell und im Lebesgueschen Sinn im Intervall $(0, \pi)$ integrierbar ist, was wir wie folgt schreiben wollen:

$$\varphi(x) < L(0, \pi), \tag{3}$$

dass ferner

[1] Strich am Funktionenzeichen soll Differentiation nach der unabhängigen Variablen bedeuten.

$$\int_0^\pi \varphi(x)\,dx = 0 \tag{4}$$

und dass α, β, γ, δ reelle, endliche Konstanten sind. Die Bedingung (3) soll in dieser Abhandlung immer befriedigt sein.

Nebst der Eigenwertaufgabe (1), (2) werden wir die von der Dgl.

$$z'' + \varkappa z = 0 \tag{5}$$

und den Randbedingungen (2) gebildete Eigenwertaufgabe betrachten. Wenn die Eigenwerte der Aufgabe (1), (2) mit λ_n ($n = 0, 1, 2 \ldots$) und die der Aufgabe (5), (2) mit $\varkappa_n$ ($n = 0, 1, 2 \ldots$) bezeichnet werden, so wollen wir den Zusammenhang zwischen den S-L Spektren und der Fourierkoeffizientenfolge von $\varphi(x)$ mit Hilfe der *Eigenwertdifferenzen*

$$d_n = \lambda_n - \varkappa_n \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

untersuchen. Wir tun dies anfangs durch Abschätzung der Eigenwerte der Aufgaben (1), (2) und (5), (2). Die Methoden bei diesen Eigenwertabschätzungen gehen auf LIOUVILLE zurück[1]. LIOUVILLE und die Mathematiker, die nach ihm dieses Problem studiert haben, zielten mit ihren Abschätzungen grösstenteils darauf hin, über die Konvergenz gewisser Fourierentwicklungen nach den Eigenfunktionen entscheiden zu können. Da aber sowohl unser Ziel als auch unsere Voraussetzungen von den älteren verschieden sind, können wir durch Verschärfung alter Methoden noch etwas Neues gewinnen.

2. Unter den angegebenen Bedingungen ist die Dgl. (1) keine Dgl. im gewöhnlichen Sinn. Wir geben deshalb einige Eigenschaften dieser Art von Dglen. an.

Unter einer Lösung der Dgl. (1) wollen wir irgend eine Funktion $y(x)$ verstehen, die nebst $y'(x)$ totalstetig ist und die Dgl. fast überall (f. ü.)[2] befriedigt. Nach CARATHÉODORY[3] gibt es solche Lösungen. Er beweist dies in viel allgemeineren Fällen als dem vorliegenden mit Hilfe von Volterraschen Integralgleichungen. Im vorliegenden Fall wollen wir den Beweis mit Hilfe der Integralgleichung

---

[1] Vgl. LIOUVILLE [1], [2] besonders S. 22 ff., [3]; KAMKE [1] S. 262; HILB-SZÁSZ [1] S. 1256 f.; CALIGO [1].

[2] Im folgenden werden wir *f. ü.* als Verkürzung von *fast überall* anwenden.

[3] CARATHÉODORY [1] S. 665 ff.

$$y(x) = z(x) + \int_0^x H(x, t)\, \varphi(t)\, y(t)\, dt \tag{6}$$

andeuten, in der

$$\left.\begin{aligned} z(x) &= e \cos lx + g \sin lx, \\ l &= \sqrt{\lambda}\ (\lambda > 0);\ e, g \text{ Konstanten,} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$H(x, t) = -\frac{1}{l} \sin l(x - t)$$

ist. Hat diese Integralgleichung eine beschränkte Lösung $y(x)$, so müssen offenbar $y(x)$ und $y'(x)$ totalstetig sein und $y(x)$ der Dgl. (1) f. ü. genügen. Eine solche Lösung existiert. Denn die Gleichung (6) ergibt, wenigstens formal,

$$y(x) = z(x) + \sum_{p=1}^{\infty} \int_0^x \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{p-1}} H(x, x_1) \ldots H(x_{p-1}, x_p)\, z(x_p) \prod_{\nu=1}^{p} (\varphi(x_\nu)\, dx_\nu), \tag{8}$$

wobei $x_0 = x$ sein soll. Wir wollen beweisen, dass die Reihe konvergiert. Deshalb setzen wir

$$\varphi(x) = \psi(x) + \varepsilon(x)$$

mit

$$|\psi(x)| \leq M, \quad \int_0^{\pi} |\varepsilon(x)|\, dx < \varepsilon < l$$

und erhalten

$$\begin{aligned} |y(x) - z(x)| &\leq |z(x)|_{\text{Max}} \cdot \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} \frac{1}{l^p} \binom{p}{q} M^{p-q} \varepsilon^q \frac{x^{p-q}}{\underline{|p-q}} \right\} \\ &\leq |z(x)|_{\text{Max}} \cdot \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{Mx}{l}\right)^r \frac{1}{\underline{|r}} \sum_{q=0}^{\infty} \binom{r+q}{q} \left(\frac{\varepsilon}{l}\right)^q - 1 \right\}, \end{aligned}$$

also

$$|y(x) - z(x)| \leq |z(x)|_{\text{Max}} \cdot \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{l}} e^{Mx/(l-\varepsilon)} - 1 \right\}. \tag{9}$$

Ebenso wird

$$|y'(x) - z'(x)| \leq |z(x)|_{\text{Max}} \cdot l \cdot \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{l}} e^{Mx/(l-\varepsilon)} - 1 \right\}. \tag{10}$$

Die Veränderungen, die für $\lambda \leq 0$ eintreten, sind offenbar.

Man sieht nun leicht ein, dass die so gefundene beschränkte Funktion $y(x)$ (8) der Integralgleichung (6) genügt, woraus die Existenz einer Lösung der

Dgl. (1) folgt, die in einem vorgeschriebenen Punkt ($x = 0$) vorgeschriebene Werte $y(0)$ und $y'(0)$ annimmt. Diese Lösung ist auch die einzige. Denn wenn es noch eine Lösung $y_1(x)$ mit $y_1(0) = y(0)$, $y_1'(0) = y'(0)$ gäbe, so wäre $\eta(x) = y(x) - y_1(x)$ eine Lösung mit den Anfangswerten $\eta(0) = 0$, $\eta'(0) = 0$ der Dgl. (1), die also die Integralgleichung

$$\eta(x) + \int_0^x \int_0^t (\lambda + \varphi(\tau)) \eta(\tau) \, d\tau \, dt = 0 \tag{11}$$

befriedigen muss. Hieraus folgt nun leicht nach CARATHÉODORY, dass $\eta(x) \equiv 0$ sein muss[1]. Hiermit ist die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der oben genannten Art unserer Dgl. (1) bewiesen.

Für die Dglen. (1), (3), die also eigentlich nur als fast überall gültig aufzufassen sind, gilt wieder der Sturmsche Oszillationssatz, was leicht mit Hilfe der Bôcherschen Methoden bewiesen wird.[2]

3. Wir müssen bei der Untersuchung der Eigenwertaufgabe (1), (2) vier Fälle unterscheiden, je nachdem die Randbedingungen (2) von einer der folgenden Formen sind:

$$Ia: \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Bei dieser Form der Randbedingungen (2) wird (1), (2) die erste Eigenwertaufgabe nach HILBERT[3]. Wir werden die Randbedingungen Ia auch mit R_1 bezeichnen.

$$Ib: \begin{cases} \alpha y(0) + y'(0) = 0 \\ \gamma y(\pi) + y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Für $\alpha = \gamma = 0$ wird die Eigenwertaufgabe (1), (Ib) von der Form der zweiten Eigenwertaufgabe nach HILBERT[3]. Die entsprechenden Randbedingungen

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

wollen wir R_2 benennen.

$$IIa: \begin{cases} y(0) & = 0 \\ \gamma y(\pi) + y'(\pi) & = 0 \end{cases}$$

$$IIb: \begin{cases} \alpha y(0) + y'(0) & = 0 \\ y(\pi) & = 0. \end{cases}$$

Offenbar müssen die Randbedingungen (2) immer von einer dieser Formen sein.

---

[1] CARATHÉODORY [1] S. 672 ff. [2] BÔCHER [3]. [3] HILBERT [1] S. 41.

4. Die Funktion $\varphi(x)$ ist nur im Intervall $(0, \pi)$ definiert. Ausserhalb dieses Intervalls definieren wir sie durch die Festlegung

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(-x) = \varphi(x) \\ \varphi(x + 2\pi) = \varphi(x)\end{array}\right\}. \tag{12}$$

In bezug auf die weitere Festlegung (4) werden wir als *Fourierkoeffizientenfolge von* $\varphi(x)$ die folgende betrachten:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\cos n x\,dx \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

Wir wollen nun immer die Eigenwerte, Eigenfunktionen und Eigenwertdifferenzen von Null ausgehend numerieren. Dann gilt die in der Einleitung angegebene Formulierung des Sturmschen Oszillationssatzes. Wir nennen den Eigenwert λ_n den n:ten Eigenwert u. s. w.

Es soll nun ein Satz über die Eigenwertdifferenzen bewiesen werden.

Satz 1: *Für die Differenzen* $d_n = \lambda_n - \varkappa_n$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ *der Eigenwerte der beiden Eigenwertaufgaben* (1), (2) *und* (5), (2) *gelten die Ausdrücke der folgenden Tafel:*

Regularität von $\varphi(x)$ / Randbedingungen	$\varphi(x) < L(0, \pi)$	$\varphi(x) <$ Lip α[1] $0 < \alpha < 1$	$\varphi(x)$ von beschränkter Schwankung	$\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ totalstetig
I a	$\frac{a_{2n+2}}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$	$\frac{a_{2n+2}}{2} + O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)$	$\frac{a_{2n+2}}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$	$\frac{C_1}{(2n+2)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
II a	$\frac{a_{2n+1}}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$	$\frac{a_{2n+1}}{2} + O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)$	$\frac{a_{2n+1}}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$	$\frac{C_2}{(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
I b	$-\frac{a_{2n}}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$	$-\frac{a_{2n}}{2} + O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)$	$-\frac{a_{2n}}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$	$\frac{C_3}{(2n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
II b	$-\frac{a_{2n+1}}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$	$-\frac{a_{2n+1}}{2} + O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)$	$-\frac{a_{2n+1}}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$	$\frac{C_4}{(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Die Konstanten C sind wie folgt bestimmt:

$$C_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi^2(x)\,dx + \frac{1}{\pi}[\varphi'(\pi) - \varphi'(0)]$$

[1] Hiermit wird wie gewöhnlich gemeint, dass $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq$ Konst. $|x_1 - x_2|^\alpha$ ist, wenn $0 \leq x_1 \leq \pi$, $0 \leq x_2 \leq \pi$ ist.

$$C_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi^2(x)\,dx - \frac{1}{\pi}[4\gamma\varphi(\pi) + \varphi'(\pi) + \varphi'(0)]$$

$$C_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi^2(x)\,dx - \frac{1}{\pi}[4(\gamma\varphi(\pi) - \alpha\varphi(0)) + \varphi'(\pi) - \varphi'(0)]$$

$$C_4 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi^2(x)\,dx + \frac{1}{\pi}[4\alpha\varphi(0) + \varphi'(\pi) + \varphi'(0)].$$

Anm. Selbstverständlich gelten die Ausdrücke der ersten Kolumnen auch in dem speziellen Fall $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ totalstetig. In diesem Fall bildet aber der Fourierkoeffizient von $\varphi(x)$ nicht das Hauptglied.

Beweis: Zuerst bilden wir die Gleichung, die von den Eigenwerten der Aufgabe (5), (2) befriedigt ist. Setzen wir $k = \sqrt{\varkappa}$, so ist die Funktion

$$z(x) = A\cos kx + B\sin kx$$

eine Lösung der Dgl. (5). Wir bestimmen k, A und B so, dass sie eine Eigenfunktion der Dgl. (5) bei den Randbedingungen (2) wird. Dann muss k der *Eigenwertgleichung der Eigenwertaufgabe* (5), (2):

$$\begin{vmatrix} \alpha & , & \beta k \\ \gamma\cos k\pi - \delta k\sin k\pi, & & \gamma\sin k\pi + \delta k\cos k\pi \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

genügen. Nachdem der n:te Eigenwert $\varkappa_n$ aus dieser Gleichung bestimmt worden ist, erhält man leicht die entsprechenden Werte von A und B:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\beta k_n}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 k_n^2}}\cdot c_n = \frac{\gamma\sin k_n\pi + \delta k_n\cos k_n\pi}{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2 k_n^2}}\cdot c_n' \\ B_n &= -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 k_n^2}}\cdot c_n = -\frac{\gamma\cos k_n\pi - \delta k_n\sin k_n\pi}{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2 k_n^2}}\cdot c_n', \end{aligned} \tag{14}$$

wobei c_n eine beliebige Konstante und $c_n' = +c_n$ oder $-c_n$ ist. Es ist also

$$z_n(x) = A_n\cos k_n x + B_n\sin k_n x \tag{15}$$

die n:te Eigenfunktion von (5), (2).

Nun gehen wir zur Konstruktion der Eigenwertgleichung der Aufgabe (1), (2) über. Dann schreiben wir die Dgl. (1) auf die Form einer gestörten Dgl. (5):

$$y'' + \varkappa y + (\lambda - \varkappa + \varphi(x))y = 0, \tag{16}$$

zu der folgende Volterrasche Integralgleichung gehört:

$$y(x) = z(x) - \frac{1}{k}\int_0^x \sin k(x-t)\,(\lambda - \varkappa + \varphi(t))\,y(t)\,dt \qquad (k = \sqrt{\varkappa}). \tag{17}$$

Wählen wir nun $\lambda = \lambda_n = n$:tem Eigenwert von (1), (2), $\varkappa = \varkappa_n = n$:tem Eigenwert von (5), (2) und ferner $z(x) = z_n(x)$, so wird aus (17) eine Lösung der Dgl. (1) für $\lambda = \lambda_n$ in der folgenden Form erhalten:

$$\begin{aligned} y_n(x) = z_n(x) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^p} \int_0^x \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{p-1}} K(x, x_1)\, K(x_1, x_2) \cdots \\ \cdots K(x_{p-1}, x_p)\, z_n(x_p) \prod_{q=1}^{p} (\Phi(x_q)\, dx_q), \end{aligned} \tag{18}$$

worin

$$K(x, x_1) = -\sin k_n (x - x_1)$$

und

$$\Phi(x) = \lambda_n - \varkappa_n + \varphi(x) = d_n + \varphi(x) \tag{19}$$

ist. Für $x = 0$ genügt $y_n(x)$ den Randbedingungen (2). Wenn nun λ_n ein Eigenwert ist, muss also $y_n(x)$ eine Eigenfunktion sein. Durch Einsetzung von $y_n(x)$ in die Randbedingungen (2) für $x = \pi$ wird man so zur *Eigenwertgleichung*

$$\int_0^{\pi} z_n^2(x)\, \Phi(x)\, dx + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^p} \int_0^{\pi} \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_p} Q(x_1, \ldots x_{p+1}) \prod_{q=1}^{p+1} (\Phi(x_q)\, dx_q) = 0 \tag{20}$$

geführt, in der

$$Q(x_1, x_2 \ldots x_{p+1}) = z_n(x_1)\, K(x_1, x_2) \ldots K(x_p, x_{p+1})\, z_n(x_{p+1}) \tag{21}$$

ist und $\Phi(x)$ gemäss (19) definiert ist. Wenn $\varkappa_n$ genügend gross ist, so wird

$$d_n = \lambda_n - \varkappa_n$$

die kleinste Wurzel der transzendenten Gleichung für d_n: (20). Bei der Abschätzung dieser Wurzel müssen wir schrittweise vorgehen.

1) *Beweis der Abschätzung* $d_n = O(1)$.

Um obige Abschätzung zu zeigen, müssen wir zur Formel (8) zurückkehren. Wir setzen $l = l_n = \sqrt{\lambda_n}$, wobei λ_n der n:te Eigenwert von (1), (2) sein soll, und weiter

$$z(x) = \bar{z}_n(x) = e_n \cos l_n x + g_n \sin l_n x$$

mit

$$e_n = \frac{\beta l_n}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 l_n^2}} \cdot c_n, \qquad g_n = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 l_n^2}} \cdot c_n, \qquad c_n > 0.$$

Also ist

$$\alpha \bar{z}_n(0) + \beta \bar{z}_n'(0) = 0.$$

Die entsprechende Funktion $y(x)$ der Gleichung (8) muss dann eine n:te Eigenfunktion von (1), (2) sein. Da

$$|\bar{z}_n(x)|_{\text{Max}} = \sqrt{e_n^2 + g_n^2} = c_n$$

und für grosse λ_n

$$\int_0^\pi \bar{z}_n^2(x)\,dx = c_n^2\left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{l_n}\right)\right)$$

ist, so folgt aus den Ungleichungen (9) und (10), dass die (z. B. durch die Bedingung $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi y_n^2(x)\,dx = 1$) normierte n:te Eigenfunktion von (1), (2) folgendermassen geschrieben werden kann:

$$y_n(x) = \bar{z}_n(x) + O\left(\frac{1}{l_n}\right),$$

also

$$y_n'(x) = \bar{z}_n'(x) + O(1),$$

wobei $\bar{z}_n(x)$ wie $y_n(x)$ normiert gewählt werden kann. Es sind also alle normierten Eigenfunktionen $y_n(x)$ gleichmässig beschränkt, auch wenn nur $\varphi(x) < L(0, \pi)$ gilt.[1] Da nun

$$\gamma y_n(\pi) + \delta y_n'(\pi) = 0$$

ist, wird

$$\gamma\left(\bar{z}_n(\pi) + O\left(\frac{1}{l_n}\right)\right) + \delta(\bar{z}_n'(\pi) + O(1)) = 0$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 l_n^2}}\begin{vmatrix} \alpha & , \beta l_n \\ \gamma \cos l_n \pi - \delta l_n \sin l_n \pi, & \gamma \sin l_n \pi + \delta l_n \cos l_n \pi \end{vmatrix} + (\gamma + \delta l_n)\, O\left(\frac{1}{l_n}\right) = 0.$$

Nach Streichung der Glieder $O\left(\frac{1}{l_n}\right)$ und Ersetzung von l_n durch k in dieser Gleichung wird sie mit der Eigenwertgleichung (13) für die Eigenwerte $\varkappa_n$ der Eigenwertaufgabe (5), (2) identisch. Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.

[1] Diese Eigenschaft ist, wenn z. B. $\varphi(x)$ stetig ist, wohlbekannt. Vgl. z. B. COURANT-HILBERT [1] S. 288.

2) *Beweis der Formeln des Satzes bei den Voraussetzungen* $\varphi(x) < L(0, \pi)$, $\varphi <$ Lip α *und* $\varphi(x)$ *von beschränkter Schwankung.*

Diese werden aus der Eigenwertgleichung (20) unter der Voraussetzung $d_n = O(1)$ erhalten. Wir führen den Beweis nur in einem der Fälle Ia—IIb durch, nämlich im Fall

$$I\,b:\ \begin{cases} \alpha\, y(0) + y'(0) = 0 \\ \gamma\, y(\pi) + y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Die übrigen Fälle beweist man analog. Für k_n wird in diesem Fall aus (13) erhalten

$$k_n = n + \frac{1}{n\pi}(\gamma - \alpha) + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{22}$$

Aus (14) erhält man dann (für $c_n = 1$)

$$A_n = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad B_n = -\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{23}$$

Wir müssen zeigen, dass der Index n von k, A und B der richtige ist. Dies folgt daraus, dass die mit diesen Grössen gebildete Eigenfunktion $y(x)$ (Gleichung (18)) für n genügend gross sicher genau n Nullstellen im offenen Intervall $(0, \pi)$ hat. Nach dem Sturmschen Oszillationssatz[1] soll dann diese Funktion in unserer Numerierung $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ den Index n haben. Dasselbe gilt dann auch von k, A und B.

Wir schätzen nun die Glieder der Gleichung (20) der Reihe nach ab.

Das erste Glied von (20) erhält nach Einsetzung von $z_n(x)$ (Relation (15)) die Form

$$\begin{aligned}\int_0^\pi z_n^2(x)\,\Phi(x)\,dx = d_n\left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{A_n^2 - B_n^2}{2}\int_0^\pi \cos 2\,k_n x\,\varphi(x)\,dx\, + \\ + A_n B_n \int_0^\pi \sin 2\,k_n x\,\varphi(x)\,dx.\end{aligned} \tag{24}$$

Weiter ist nach (22)

$$\int_0^\pi \cos 2\,k_n x\,\varphi(x)\,dx = \int_0^\pi \cos 2\,n x\,\varphi(x)\,dx - 2\frac{\gamma - \alpha}{\pi n}\int_0^\pi \sin 2\,n x \cdot x\,\varphi(x)\,dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

so dass wir erhalten

[1] Vgl. die Einleitung S. 3.

$$\int_0^\pi z_n^2(x)\,\Phi(x)\,dx = d_n\left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{\pi}{4}a_{2n} + O\left(\frac{1}{n}\left|\int_0^\pi \sin 2\,n\,x\,\psi_1(x)\,dx\right| + \frac{1}{n^2}\right). \quad (25)$$

In dieser Relation ist $\psi_1(x)$ von n unabhängig und hat dieselben Regularitätseigenschaften wie $\varphi(x)$.

Im *zweiten Glied von* (20) zerlegen wir den Kern $Q(x_1, x_2)$ folgendermassen:

$$Q(x_1, x_2) = -\frac{1}{4}\sin 2\,k_n(x_1 - x_2) - \frac{A_n^2 - B_n^2}{4}(\sin 2\,k_n x_1 - \sin 2\,k_n x_2) +$$
$$+ \frac{A_n B_n}{2}(\cos 2\,k_n x_1 - \cos 2\,k_n x_2). \quad (26)$$

In bezug auf (23), die Definition $\Phi(x) = d_n + \varphi(x)$ und $d_n = O(1)$ erhält man dann

$$\frac{1}{k_n}\int_0^\pi\int_0^{x_1} Q(x_1, x_2)\,\Phi(x_1)\,\Phi(x_2)\,dx_1\,dx_2 =$$
$$= -\frac{1}{4\,k_n}\int_0^\pi\int_0^{x_1}(\sin 2\,k_n(x_1 - x_2) + \sin 2\,k_n x_1 - \sin 2\,k_n x_2)\,\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\,dx_1\,dx_2 -$$
$$-\frac{d_n}{4\,k_n}\int_0^\pi \sin 2\,k_n x_1\,\varphi(x_1)(2\,x_1 - \pi)\,dx_1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (27)$$

Entwickelt man noch $\sin 2\,k_n(x_1 - x_2)$ wird ersichtlich, dass alle Glieder rechts von (27) $\left(\text{ausser } O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ einen Faktor der Form

$$\frac{1}{k_n}\int_0^x \left.\begin{matrix}\cos 2\,k_n\,x_1\\ \sin 2\,k_n\,x_1\end{matrix}\right\}\psi_2(x_1)\,dx_1 \qquad (0 \le x \le \pi)$$

enthalten, in dem wiederum $\psi_2(x)$ von n unabhängig ist und dieselben Regularitätseigenschaften wie $\varphi(x)$ hat. Das zweite Glied von (20) erhält also in bezug auf (22) folgende Form

$$\frac{1}{k_n}\int_0^\pi\int_0^{x_1} Q(x_1, x_2)\,\Phi(x_1)\,\Phi(x_2)\,dx_1\,dx_2 = O\left(\underset{\substack{0\le x\le\pi\\ \psi_2(x)}}{\mathrm{Max}}\frac{1}{n}\left|\int_0^x \left.\begin{matrix}\cos 2\,n\,x_1\\ \sin 2\,n\,x_1\end{matrix}\right\}\psi_2(x_1)\,dx_1\right| + \frac{1}{n^2}\right). \quad (28)$$

Die übrigen Glieder von (20) können, weil $d_n = O(1)$ ist, nach der Zerlegung

$$\Phi(x) = \Psi(x) + \varepsilon(x), \quad |\Psi(x)| \le M, \quad \int_0^\pi |\varepsilon(x)|\,dx < \varepsilon$$

analog der Reihe (8) summiert werden, wodurch wir

$$\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{k_n^p} \int_0^{\pi} \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_p} Q(x_1, x_2 \ldots x_{p+1}) \prod_{q=1}^{p+1} (\Phi(x_q)\, dx_q) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{29}$$

erhalten.

Setzen wir nun die Ausdrücke (25), (28), (29) in die Gleichung (20) ein, so erhalten wir

$$d_n + \frac{1}{2} a_{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + r_n = 0, \tag{30}$$

worin

$$r_n = O\left(\underset{\substack{0 \le x \le \pi \\ \psi(x)}}{\mathrm{Max}} \frac{1}{n} \left| \int_0^x \begin{Bmatrix} \cos 2nx \\ \sin 2nx \end{Bmatrix} \psi(x)\, dx \right| \right)$$

ist und $\psi(x)$ wie $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ dieselben Regularitätseigenschaften wie $\varphi(x)$ hat. Wir brauchen nur noch r_n unter den verschiedenen Voraussetzungen hinsichtlich der Regularität von $\varphi(x)$ abzuschätzen, um die behaupteten Formeln zu erhalten.

Gilt nur $\varphi(x) < L(0, \pi)$ (d. h. $\psi(x) < L(0, \pi)$), so erhalten wir mit Hilfe des Riemann-Lebesgueschen Satzes[1]

$$r_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dann erhält man also aus (30):

$$d_n = -\frac{1}{2} a_{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

was die erste Behauptung des Satzes bei den Randbedingungen *Ib* ist.

Wenn $\varphi(x) < \mathrm{Lip}\ \alpha$, schätzen wir das Glied r_n wie folgt ab:

$$\frac{1}{n} \int_0^x \begin{Bmatrix} \cos 2nt \\ \sin 2nt \end{Bmatrix} \psi(t)\, dt = \frac{1}{n} \int_{\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}} \begin{Bmatrix} \cos 2nt \\ \sin 2nt \end{Bmatrix} \psi(t)\, dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

oder

$$\frac{1}{n} \int_0^x \begin{Bmatrix} \cos 2nt \\ \sin 2nt \end{Bmatrix} \psi(t)\, dt = \frac{1}{2n} \int_0^x \begin{Bmatrix} \cos 2nt \\ \sin 2nt \end{Bmatrix} \left(\psi(t) - \psi\left(t + \frac{\pi}{2n}\right)\right) dt +$$

$$+ O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right). \qquad (0 < \alpha < 1)$$

[1] Vgl. z. B. Hobson [1] S. 514.

Also wird die zweite Behauptung des Satzes erhalten:

$$d_n = -\frac{1}{2} a_{2n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right).$$

Wenn schliesslich $\varphi(x)$ von beschränkter Schwankung ist, erhält man mit Hilfe des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung die Abschätzung

$$\frac{1}{n}\int_0^x \begin{Bmatrix}\cos 2nt \\ \sin 2nt\end{Bmatrix} \psi(t)\,dt = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

so dass wir schliesslich aus (30) die dritte Behauptung unseres Satzes

$$d_n = -\frac{1}{2} a_{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

bekommen.

3) *Beweis der Formeln des Satzes unter der Voraussetzung $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ totalstetig.*

Eine grössere Regularität von $\varphi(x)$ führt nicht zu besseren Ausdrücken für das Restglied der vorangehenden Abschätzungen. Statt dessen tritt ein neues Hauptglied hervor, während der Fourierkoeffizient a_{2n} in das Restglied eingeht. Diese Verhältnisse werden in der letzten Kolumne der Tafel S. 11 dargestellt. Wir wollen nun die Formel des Falles Ib beweisen. Dabei müssen wir das Ergebnis der Abteilung 2) anwenden:

$$d_n = -\frac{1}{2} a_{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

d. h.

$$d_n = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

da dies offenbar für a_{2n} gilt, wenn $\varphi'(x)$ totalstetig ist.

Da nun $\varphi''(x) < L(0, \pi)$ ist, kann man *das erste Glied von* (20) durch zweimalige teilweise Integration abschätzen. Wir gehen vom Ausdruck (24) aus und erhalten

$$\int_0^\pi z_n^2(x)\,\Phi(x)\,dx = d_n\left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) +$$

$$+ \frac{1}{8n^2}\left[4(\gamma\varphi(\pi) - \alpha\varphi(0)) + \varphi'(\pi) - \varphi'(0)\right] + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \qquad (31)$$

Nehmen wir nun auf $d_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ und $k_n = O(n)$ Bezug, so erhält *das zweite Glied von* (20) nach der Zerlegung (26) die Form

$$\frac{1}{k_n}\int_0^\pi\int_0^{x_1} Q(x_1, x_2)\,\Phi(x_1)\,\Phi(x_2)\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= -\frac{1}{4k_n}\int_0^\pi\int_0^{x_1}\sin 2k_n(x_1 - x_2)\,\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\,dx_1\,dx_2 -$$

$$-\frac{A_n^2 - B_n^2}{2k_n}\int_0^\pi\int_0^{x_1}\sin 2k_n x_1\,\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\,dx_1\,dx_2 +$$

$$+\frac{A_n B_n}{k_n}\int_0^\pi\int_0^{x_1}\cos 2k_n x_1\,\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\,dx_1\,dx_2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{32}$$

Im ersten Glied rechts integrieren wir teilweise einmal und erhalten

$$-\frac{1}{4k_n}\int_0^\pi\int_0^{x_1}\sin 2k_n(x_1 - x_2)\,\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\,dx_1\,dx_2 = -\frac{1}{8n^2}\int_0^\pi \varphi^2(x)\,dx + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{33}$$

Die übrigen Glieder rechts von (32) sind $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, was nach einer teilweisen Integration ersichtlich wird. Also wird

$$\frac{1}{k_n}\int_0^\pi\int_0^{x_1} Q(x_1, x_2)\,\Phi(x_1)\,\Phi(x_2)\,dx_1\,dx_2 = -\frac{1}{8n^2}\int_0^\pi \varphi^2(x)\,dx + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{34}$$

Wir müssen nun auch *das dritte Glied von* (20) gesondert abschätzen Es wird nach Zerlegung

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{8} + q(x_1, x_2, x_3),$$

worin $q(x_1, x_2, x_3)$ eine Summe von trigonometrischen Funktionen der Form

$$\cos k_n(l' x_1 + m' x_2 + n' x_3), \quad \sin k_n(l' x_1 + m' x_2 + n' x_3)$$

ist mit l', m', n' = ganzen Zahlen, für die $0 < |l'| + |m'| + |n'| \leq 6$ gilt. Das dritte Glied von (20) erhält dann, in bezug auf $d_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, die Form

$$\frac{1}{k_n^2}\int_0^\pi\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} Q(x_1, x_2, x_3)\prod_{q=1}^{3}(\Phi(x_q)\,dx_q) = -\frac{1}{8\,k_n^2}\int_0^\pi\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\prod_{q=1}^{3}(\varphi(x_q)\,dx_q) +$$

$$+\frac{1}{k_n^2}\int_0^\pi\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} q(x_1, x_2, x_3)\prod_{q=1}^{3}(\varphi(x_q)\,dx_q) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\cdot$$

Da aber $\int\limits_0^\pi \varphi(x)\,dx = 0$ ist, wird auch

$$\int_0^\pi\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\prod_{q=1}^{3}(\varphi(x_q)\,dx_q) = 0.$$

Mit Hilfe des Riemann-Lebesgueschen Satzes können wir das folgende Integral mit dem oben genannten Kern $q(x_1, x_2, x_3)$ abschätzen; es wird $= o\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$

Zusammengefasst wird also

$$\frac{1}{k_n^2}\int_0^\pi\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} Q(x_1, x_2, x_3)\prod_{q=1}^{3}(\Phi(x_q)\,dx_q) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot \tag{35}$$

Schliesslich erhält man für *die übrigen Glieder von* (20) nach einer Summation, derjenigen analog, die zur Ungleichung (9) geführt hat:

$$\sum_{p=3}^{\infty}\frac{1}{k_n^p}\int_0^\pi\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_p} Q(x_1, x_2 \ldots x_{p+1})\prod_{q=1}^{p+1}(\Phi(x_q)\,dx_q) = O\left(\frac{1}{n^3}\right)\cdot \tag{36}$$

Die Relationen (31), (34), (35) und (36), in (20) eingesetzt, ergeben die Formel des Satzes bei den Randbedingungen Ib und der Regularität: $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ totalstetig.

Wenn die Randbedingungen (2) von der Form Ia bzw. IIa, IIb sind, erhalten die Grössen k_n, A_n und B_n andere Werte. Sie werden unmittelbar aus den Formeln (13) und (14) unter Beachtung des Sturmschen Oszillationssatzes erhalten. Sonst verläuft der Beweis wie oben. Der Beweis ist hiermit beendet.

Anm. Wenn die Randbedingungen (2) von der Form Ia oder Ib sind, gelten die Formeln des Satzes 1 unverändert, wenn $\varphi(x)$ ausserhalb $(0, \pi)$ statt durch die Relationen (12) durch die Festlegung

$$\varphi(x + \pi) = \varphi(x)$$

definiert wird.

5. Wir wollen in dieser Nr. die Analogie zwischen den Eigenwertdifferenzen $d_n = \lambda_n - \varkappa_n$ und den Fourierkoeffizienten von $\varphi(x)$, die durch den Satz 1 hervorgehobenen ist, in anderer Form darstellen.

Der Kürze halber bezeichnen wir mit $a_{n'}$ den Fourierkoeffizienten, der gemäss Satz 1 ($\varphi(x) < L(0, \pi)$) als Hauptglied in dem Ausdruck für d_n auftritt. Es soll also $n' = 2n + 2$ bzw. $2n$ bzw. $2n + 1$ sein, je nachdem die Randbedingungen der Eigenwertaufgaben (1), (2) und (5), (2), zu denen d_n gehört, von der Form Ia bzw. Ib bzw. II sind. Dann erhalten wir

Satz 2: *Wenn $\varphi(x) < L^2(0, \pi)$ und $d_n = \lambda_n - \varkappa_n$ die n:te Eigenwertdifferenz der Eigenwertaufgaben* (1), (2) *und* (5), (2) *ist, sind die Reihen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^p \quad \textit{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n'}|^p$$

für alle

$$p > \frac{2}{3}$$

gleichzeitig konvergent und divergent.

Beweis: Wenn $p > 1$ ist, erhält man unmittelbar aus dem Ausdruck

$$|d_n| = \frac{1}{2} |a_{n'}| + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

der aus Satz 1 folgt, nach Anwendung der Minkowskischen Ungleichung

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{2} a_{n'}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + O\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n'^p}\right),$$

was die Behauptung ergibt.

Wenn $p \leq 1$ ist, müssen wir zur Eigenwertgleichung (20) zurückkehren. In bezug auf die verschiedenen Formen Ia—IIb der Randbedingungen (2) erhalten die Grössen k_n bzw. A_n, B_n verschiedene Werte. Da aber der Beweis in allen Fällen wesentlich derselbe ist, führen wir ihn auch hier nur in dem Fall der Randbedingungen

$$Ib: \quad \begin{cases} \alpha y(0) + y'(0) = 0 \\ \gamma y(\pi) + y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

durch. Mit Hilfe der Relationen (22), (25), (27) und (29) können wir dann die Eigenwertgleichung (20) auf die folgende Form schreiben:

$$d_n\left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{\pi}{4} a_{2n} - \frac{1}{4n}\int_0^\pi\int_0^{x_1} \sin 2n(x_1 - x_2)\,\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\,dx_1\,dx_2 +$$

$$+ O\left(\frac{1}{n}\left|\int_0^\pi \sin 2nx\;\psi(x)\,dx\right| + \frac{1}{n^2}\right) = 0. \tag{37}$$

Die Funktion $\psi(x)$ ist von n unabhängig, und infolge $\varphi(x) < L^2(0, \pi)$ gilt auch

$$\psi(x) < L^2(0, \pi). \tag{38}$$

Die Behauptung des Satzes für den Fall Ib erhält man aus (37). Um dies zu zeigen, wollen wir zunächst beweisen:

wenn $\varphi(x) < L^2(0, \pi)$, so ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^\pi\int_0^{x_1} \sin 2n(x_1 - x_2)\,\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\,dx_1\,dx_2\right)^2 < \infty. \tag{39}$$

Denn bilden wir

$$\int_0^\pi\int_0^{x_1}\left[\varphi(x_1)\,\varphi(x_2) - \sum_{n=0}^{N} c_n \sin 2n(x_1 - x_2)\right]^2 dx_1\,dx_2$$

mit

$$c_n = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^{x_1} \sin 2n(x_1 - x_2)\,\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\,dx_1\,dx_2,$$

darauf Bezug nehmend, dass

$$\int_0^\pi\int_0^{x_1} \sin 2n(x_1 - x_2)\sin 2m(x_1 - x_2)\,dx_1\,dx_2 = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{\pi^2}{4}, & n = m, \end{cases}$$

ist, so wird nach Entwicklung des Quadrates die Ungleichung

$$\int_0^\pi\int_0^{x_1} [\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)]^2\,dx_1\,dx_2 - \frac{\pi^2}{4}\sum_{n=0}^{N} c_n^2 \geq 0$$

d. h.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$$

erhalten. Dies ist die Behauptung.

Mit Hilfe der elementaren Ungleichung

$$|\Sigma\, \alpha_\nu|^p \leq \Sigma\, |\alpha_\nu|^p \qquad (0 < p \leq 1)$$

erhalten wir nun aus (37) für $\frac{2}{3} < p \leq 1$ die Ungleichung

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |d_n|^p \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \left|\frac{1}{2}\, a_{2n}\right|^p +$$

$$+ \sum_{n=n_0}^{\infty} \left|\frac{1}{2\,n\,\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{x_1} \sin 2\,n\,(x_1 - x_2)\, \varphi(x_1)\, \varphi(x_2)\, dx_1\, dx_2\right|^p +$$

$$+ O\left[\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\left|\frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin 2\,n\,x\,\psi(x)\,dx\right|^p + \frac{1}{n^{2p}}\right)\right], \tag{40}$$

in der n_0 eine beliebige, grosse Zahl sein soll. Es sind offenbar, von

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left|\frac{1}{2}\, a_{2n}\right|^p$$

abgesehen, in bezug auf die Relation (39) und die Voraussetzung $\varphi < L^2$ (d. h. (38)) alle Glieder rechts von (40) von der Form

$$O\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \left|\frac{C_n}{n}\right|^p\right) \tag{41}$$

mit

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} C_n^2 < \infty.$$

Dann aber ist

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left|\frac{C_n}{n}\right|^p \leq \left\{\sum_{n=n_0}^{\infty} C_n^2\right\}^{\frac{p}{2}} \cdot \left\{\sum \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2p}{2-p}}\right\}^{\frac{2-p}{2}} \tag{42}$$

konvergent, wenn

$$p > \frac{2}{3}$$

ist. Es folgt also, dass, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}|^p < \infty$$

ist, auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^p < \infty$$

gilt.

Aus der Gleichung (37) kann auch eine Ungleichung derselben Form wie (40), aber mit Platzwechsel von $\sum |d_n|^p$ und $\sum \left|\frac{1}{2} a_{2n}\right|^p$, erhalten werden. Daraus folgt die Umkehrung obiger Behauptung. Der Beweis von Satz 2 ist damit beendet.

6. Durch die Sätze 1 und 2 treten allgemeine Züge der umgekehrten Eigenwertaufgabe hervor, vor allem die Analogie zwischen einem S-L Spektrum und einer Teilfolge der Fourierkoeffizientenfolge von $\varphi(x)$ $(\varphi(x) < L(0, \pi))$. Ein wesentlicher Zug ist auch das Hervortreten von Eigenschaften des S-L Spektrums von $\varphi(x)$, die kein Gegenstück im Gebiete der Fourierkoeffizienten von $\varphi(x)$ haben, und zwar mit wachsender Regularität von $\varphi(x)$ ($\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ totalstetig, vgl. Satz 1).

Die Analogie zwischen S-L Spektrum und einer Teilfolge der Fourierkoeffizientenfolge von $\varphi(x)$ kann zur Klassifikation der umgekehrten Eigenwertaufgabe angewandt werden. Gemäss Satz 1 gilt $(\varphi(x) < L(0, \pi))$

$$\left.\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{2} a_{2n+2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (I\,a) \\ d_n &= -\frac{1}{2} a_{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (I\,b) \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

$$d_n = \pm \frac{1}{2} a_{2n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (+\text{im Fall } II\,a, - \text{im Fall } II\,b). \tag{44}$$

Die Teilfolge der Fourierkoeffizientenfolge von $\varphi(x)$, die in dieser Weise durch ein S-L Spektrum bestimmt wird, ist also gewissermassen der „Hälfte" der ganzen gleich. Die Bestimmung der Funktion $\varphi(x)$ durch ein einziges S-L Spektrum scheint also im allgemeinen nicht möglich. Weil die Fourierkoeffizienten, die in den Formeln von Satz 1 vorkommen, für kleine Indizes nicht eindeutig bestimmt sind, können wir aber die umgekehrte Eigenwertaufgabe in drei Hauptfälle einteilen, in denen das S-L Spektrum der ganzen Folge von nicht verschwindenden Fourierkoeffizienten der Funktion $\varphi(x)$ in dem durch die Sätze 1 und 2 angegebenen Sinn analog ist. Diese Fälle sind offenbar folgende:

1. *Differentialgleichung:* $\varphi(x)$ soll durch die Bedingung

$$a_{2m+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \cos(2m+1)x\,dx = 0$$

$(m \geq m_0$, m_0 beliebige ganze Zahl) charakterisiert sein. Besonders:

$$\varphi(x) = \varphi(\pi - x) \text{ f. ü.} \qquad (a_{2m+1} = 0,\ m = 0, 1, 2 \ldots)$$

Randbedingungen:

$$Ia:\quad y(0) = y(\pi) = 0 \qquad \text{oder} \qquad Ib:\quad \begin{cases} \alpha\, y(0) + y'(0) = 0 \\ \gamma\, y(\pi) + y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Die Folge von Eigenwertdifferenzen sind dann durch die Formeln (43) gegeben ($n \geq m_0$).

2. *Differentialgleichung:* $\varphi(x)$ soll durch die Bedingung

$$a_{2m} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x) \cos 2\, m\, x\, dx = 0$$

($m \geq m_0$) charakterisiert sein. Besonders:

$$\varphi(x) = -\varphi(\pi - x)\ f.\ \ddot{u}. \qquad (a_{2m} = 0,\ m = 0,\ 1,\ 2\ \ldots)$$

Randbedingungen:

$$IIa:\quad \begin{cases} \qquad y(0) = 0 \\ \gamma\, y(\pi) + y'(\pi) = 0 \end{cases} \qquad \text{oder} \qquad IIb:\quad \begin{cases} \alpha\, y(0) + y'(0) = 0 \\ \qquad y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Die Folge von Eigenwertdifferenzen sind dann durch die Formeln (44) gegeben ($n \geq m_0$).

3. *Differentialgleichung:* $\varphi(x)$ soll eine beliebige Funktion $< L(0, \pi)$ sein $\left(\text{mit } \int_0^\pi \varphi(x)\, dx = 0,\ \text{Fourierkoeffizientenfolge } \{a_n\}_{n=1,2,3\ldots}\right)$.

Randbedingungen: Zwei Systeme von Randbedingungen sollen gegeben sein, von denen das erste von der Form Ia oder Ib ist und das zweite von der Form IIa oder IIb.

Die Folge von Eigenwertdifferenzen sind dann im ersten Fall durch die Formeln (43) und im zweiten Fall durch die Formeln (44) gegeben.

Wir werden später zeigen, dass diese Einteilung in dem Sinn notwendig ist, dass es im allgemeinen unmöglich ist, die Funktion $\varphi(x) < L(0, \pi)$ ohne weitere Beschränkung mit Hilfe eines einzigen S-L Spektrums zu bestimmen.

Später werden wir auch einige wichtige Spezialfälle der obigen drei Hauptfälle auswählen und genau behandeln. Wir werden zeigen, dass in diesen Fällen die eindeutige Bestimmung der Funktion $\varphi(x)$ durch die entsprechenden S-L Spektren wirklich möglich ist, so dass in diesen Fällen, besonders wenn $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ nicht totalstetig sind, eine weitgehende Analogie zwischen dem S-L Spektrum (oder vielmehr: der Folge von Eigenwertdifferenzen) und der Fourierkoeffizientenfolge von $\varphi(x)$ besteht.

7. Nun wollen wir ein spezielles, aber umfassendes Problem der umgekehrten Art ein wenig behandeln. Es ist dies folgendes: *Es sollen gewisse S-L Spektren von $\varphi(x)$ gegeben sein. Was kann aus den Eigenschaften dieser Spektren hinsichtlich der Regularität von $\varphi(x)$ gefolgert werden?* Offenbar ist es dabei angemessen, die Eigenschaften der S-L Spektren in entsprechende Eigenschaften der Fourierkoeffizientenfolge von $\varphi(x)$ zu „übersetzen" und danach die Theorie der Fourierreihen anzuwenden, mit deren Hilfe man in gewissen Fällen zu Aussagen über die Regularität von $\varphi(x)$ gelangen kann.

Unsere Sätze im Gebiete dieses Problems können in jedem der obigen drei Hauptfälle formuliert und bewiesen werden; sie werden aber in den drei Fällen analog, weshalb wir uns damit begnügen, die Sätze in einem Fall auszusprechen und zu beweisen. Wir wählen dabei den ersten Fall und zwar nur die Eigenwertaufgabe

$$A: \begin{cases} y'' + (\lambda + \varphi(x))y = 0, \ \varphi(x) < L(0, \pi), \ \varphi(x) = \varphi(\pi - x) \ f.\,ü. \\ \quad y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Der erste Satz dieser Art ist folgender

Satz 3: *Hat die Folge von Eigenwertdifferenzen der Eigenwertaufgabe*

$$A: \begin{cases} y'' + (\lambda + \varphi(x))y = 0, \ \varphi(x) < L(0, \pi), \ \varphi(x) = \varphi(\pi - x) \ f.\,ü. \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

die Eigenschaft

$$\sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^p < \infty, \qquad 1 < p \leq 2,$$

so muss

$$\varphi(x) < L^q(0, \pi)$$

für $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ *sein*[1].

Beweis: Aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^p < \infty$$

folgt nach Satz 1

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{2} a_{2n+2}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + O\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\right) < \infty.$$

[1] In dem verkürzten Ausdruck: *die Eigenwertdifferenzen von* (1), (2) u. dgl. hat man sich offenbar: *und* (5), (2) hinzuzudenken. Hinsichtlich der Bedeutung von $\varphi(x) < L^q(0, \pi)$ vgl. S. 5. Fussnote 4.

Wenden wir nun den wohlbekannten Young-Hausdorffschen Satz[1] an, erhalten wir mit Hilfe obiger Ungleichung die Behauptung.

Ein wenig mehr besagt folgender Satz:

Satz 4: *Gilt in der Eigenwertaufgabe A (Satz 3) noch die Voraussetzung* $\varphi(x) < L^2(0, \pi)$, *und wird gesetzt*:

$$S_m(x) = \sum_{n=0}^{m} d_n \cos(2n+2)x \text{ und } \sigma_m(x) = \frac{1}{2m+2} \sum_{n=0}^{m} \bar{S}_n(x),$$

so ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Beschränktheit (Stetigkeit) von $\varphi(x)$, *dass die Folge* $\{\bar{\sigma}_m(x)\}_{m=0,1,2\ldots}$ *in* m *und* x *gleichmässig beschränkt (gleichmässig konvergent) ist.*[2]

Beweis: Es gilt

$$\varphi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos 2nx.$$

Die Teilsummen der Reihe sind $S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} a_{2n} \cos 2nx$, und wir setzen

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} S_n(x).$$

Nun ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Beschränktheit (Stetigkeit) von $\varphi(x)$, dass die Folge $\{\sigma_m(x)\}_{m=1,2,3\ldots}$ in m und x gleichmässig beschränkt (gleichmässig konvergent) ist[2].

Um die Behauptung des Satzes zu beweisen, brauchen wir also nur zu zeigen, dass die Folge $\{\bar{\sigma}_m(x)\}$ und die Folge $\{\sigma_m(x)\}$ gleichzeitig die oben verlangten Eigenschaften haben. Wir setzen zu diesem Zweck

$$\delta_n = d_n - \frac{1}{2} a_{2n+2}.$$

Also wird

$$\bar{S}_m(x) = \frac{1}{2} S_{m+1}(x) + \sum_{n=0}^{m} \delta_n \cos(2n+2)x.$$

Mit der Bezeichnung

$$r_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \delta_n \cos(2n+2)x$$

---

[1] Vgl. ZYGMUND [1] S. 190.

[2] Vgl. ZYGMUND [1] S. 79, FEJÉR [1]. Genau gesprochen: die Bedingungen sind dafür notwendig und hinreichend, dass $\varphi(x)$ einer Funktion mit den genannten Eigenschaften *f. ü.* gleich ist.

erhalten wir also

$$\bar{\sigma}_m(x) = \frac{1}{4}\sigma_{m+1}(x) + \frac{\sum_{n=0}^{m} r_n(x)}{2m+2}.$$

Nun ist die Folge $\{r_n(x)\}_{n=0,1,2\ldots}$ und also auch

$$\left\{\frac{\sum_{n=0}^{m} r_n(x)}{2m+2}\right\}_{m=0,1,2\ldots}$$

gleichmässig konvergent. Denn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}|\delta_n|$ können wir mit den Reihen der zwei letzten Zeilen von (40) abschätzen ($p = 1$). Die Formel (40), die eigentlich für den Fall der Form $I\,b$ der Randbedingungen (2) gebildet ist, gilt nämlich auch im vorliegenden Fall ($I\,a$). Da $\varphi(x) < L^2(0, \pi)$, findet man nach (41) und (42), dass sie konvergent ist. Hieraus folgt der Satz, der hiermit bewiesen ist.

Weitere Sätze dieser Art können leicht gefunden und bewiesen werden. Wir begnügen uns mit dem Obigen und schliessen mit einem Satz ab, in dem nur die Eigenwertdifferenzen selbst vorkommen.

Satz 5: *Gilt in der Eigenwertaufgabe A (Satz 3) noch die Voraussetzung*

1. *$\varphi(x)$ stückweise stetig, und ist dann*

$$d_n = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

so kann $\varphi(x)$ keine einfachen Unstetigkeiten haben[1].

2. *$\varphi(x)$ von beschränkter Schwankung, so ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\varphi(x)$ stetig sei, dass*

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \nu\,|d_\nu| = 0$$

gilt.

---

[1] d. h. es kann nie $\varphi(x_0 + 0) \neq \varphi(x_0 - 0)$ sein. Der Satz gilt auch, wenn wir nur $\varphi(x) < L(0, \pi)$ voraussetzen und dann die einfache Unstetigkeit in einem Punkt x_0 durch $\lim_{t=0} \varphi(x_0 - t) \neq \lim_{t=0} \varphi(x_0 + t)$ definieren und dabei die Existenz dieser Grenzwerte voraussetzen.

Beweis: 1. Wir werden uns auf einen Folgesatz eines Satzes von LUCÁCS stützen, der lautet[1]:

Wenn $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x)$ ist und $\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, so kann $f(x)$ keine einfachen Unstetigkeiten haben.

In unserem Fall ist $\varphi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos 2 n x$, also gilt die Behauptung des Satzes, wenn nur

$$a_{2n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ist. Da nun nach Satz 1

$$d_n = \frac{1}{2} a_{2n+2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ist und nach Voraussetzung $d_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, so gilt das oben Gesagte, und die Behauptung 1 ist bewiesen.

2. Hier wollen wir uns auf einen Wienerschen Satz stützen[2], der besagt:

Wenn $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x)$ von beschränkter Schwankung ist und $\varrho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ gesetzt wird, so ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $f(x)$ stetig sei, dass

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \nu \varrho_\nu = 0$$

gilt.

Da nun $\varrho_{2n} = |a_{2n}|$, $\varrho_{2n+1} = 0$ ist, so brauchen wir also nur zu zeigen, dass $\frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^{n} 2\nu |a_{2\nu}|$ und $\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \nu |d_\nu|$ gleichzeitig den Grenzwert Null haben, um unseren Satz zu beweisen. Wir erhalten nach Satz 1

$$d_n = \frac{1}{2} a_{2n+2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Hieraus folgt, wenn man

---

[1] Vgl. LUCÁCS [1] S. 108; ZYGMUND [1] S. 28.
[2] Vgl. z. B. ZYGMUND [1] S. 221; WIENER [1].

$$-\frac{1}{2n}\sum_{\nu=0}^{n}|a_{2\nu+2}| + \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} O\left(\frac{1}{\nu}\right) = o(1)$$

setzt,

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\nu|d_\nu| = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2n+2}\sum_{\nu=1}^{n+1} 2\nu|a_{2\nu}|\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) + o(1).$$

Also haben $\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\nu|d_\nu|$ und $\frac{1}{2n}\sum_{\nu=1}^{n}2\nu|a_{2\nu}|$ gleichzeitig den Grenzwert Null, woraus der Satz folgt.

Kapitel 2.

Über die Vollständigkeit einiger Funktionensysteme.

8. Im vorigen Kapitel (Nr. 6) haben wir die umgekehrte Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgabe in drei Hauptfälle eingeteilt, die durch eine gewisse Analogie zwischen den S-L Spektren und der Fourierkoeffizientenfolge der Funktion $\varphi(x)$ (Gleichung (1), Kap. 1) charakterisiert sind. Wie dort erwähnt, erweist sich diese Einteilung auch bei den Hauptproblemen P und P^* der umgekehrten S-L Eigenwertaufgabe[1] von Bedeutung. In dem vorliegenden und dem folgenden Kapitel werden wir die genannten Probleme untersuchen. Wir beschränken uns dabei auf vier wichtige Spezialfälle obiger Hauptfälle:

Im Gebiete des Hauptfalles 1. untersuchen wir folgende zwei Eigenwertaufgaben:

$$A:\begin{cases} \textit{Dgl: } y'' + (\lambda + \varphi(x))y = 0,\ \varphi(x) < L(0,\pi),\ \varphi(x) = \varphi(\pi - x)\ \textit{f. ü.} & (1)\\ \textit{Randbedingungen: } y(0) = y(\pi) = 0. & (R_1)\end{cases}$$

$$B:\begin{cases} \textit{Dgl: } (1) & \\ \textit{Randbedingungen: } y'(0) = y'(\pi) = 0. & (R_2)\end{cases}$$

Im Gebiete des Hauptfalles 3. untersuchen wir die Kombination folgender zwei Eigenwertaufgaben:

$$\begin{cases} \textit{Dgl: } & y'' + (\lambda + \varphi(x))y = 0,\ \varphi(x) < L(0,\pi) \qquad (2)\\ \textit{Randbedingungen: } & \begin{cases}\alpha y(0) + \beta y'(0) = 0,\ |\alpha| + |\beta| > 0\\ y(\pi) = 0.\end{cases}\end{cases}$$

[1] Vgl. die Einleitung S. 6.

$$\begin{cases} \textit{Dgl:} & (2) \\ \textit{Randbedingungen:} & \begin{cases} \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \ |\alpha| + |\beta| > 0 \\ \gamma y(\pi) + y'(\pi) = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Auch in diesem Fall entstehen zwei Unterabteilungen:

C: $\beta = 0$, wobei die Randbedingungen von der Form $I\,a$ bzw. $II\,a$ sind.

D: $\beta \neq 0$, wobei die Randbedingungen von der Form $II\,b$ bzw. $I\,b$ sind.

Es soll in diesem Kapitel immer folgende Normierung gelten:

$$\int_0^\pi \varphi(x)\,dx = 0. \tag{3}$$

In bezug auf die Probleme P und P^* sollen die Spektren und die Randbedingungen obiger Eigenwertaufgaben bekannt sein, während die Existenz und die Eindeutigkeit der zugehörigen Funktion $\varphi(x)$ bewiesen werden soll. Wir präzisieren unsere *Voraussetzungen*:

1. *Bei den Eigenwertaufgaben A und C sollen alle Eigenwerte bekannt sein.*

2. *Bei den Eigenwertaufgaben B und D sollen alle Eigenwerte ausser ev. dem kleinsten Eigenwert bei den Randbedingungen R_2 bzw. Ib:* $\begin{cases} \alpha y(0) + y'(0) = 0 \\ \gamma y(\pi) + y'(\pi) = 0 \end{cases}$ *bekannt sein.*

9. Die Randbedingungen R_2 sind vom Typus $I\,b$. Der Einfachheit halber nennen wir das Spektrum einer Dgl. (2) bei Randbedingungen $I\,b$, wenn der kleinste Eigenwert nicht mitgerechnet wird, *das reduzierte Spektrum der Dgl.* (2) *bei den Randbedingungen $I\,b$.*

Da wir unsere Probleme mit Hilfe vollständiger Systeme von beschränkten Funktionen lösen werden, die im Interwall $(0, \pi)$ definiert sind, führen wir die *Definition der Vollständigkeit* solcher Systeme an:

Das System $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,1,2\ldots}$ von beschränkten Funktionen $U_\nu(x)$ soll vollständig in bezug auf einen Raum im Lebesgueschen Sinn integrierbarer, im Intervall $(0, \pi)$ definierter Funktionen heissen, wenn jede Funktion $f(x)$ des Raumes, die die Bedingungen

$$\int_0^\pi f(x)\,U_\nu(x)\,dx = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2\ldots)$$

befriedigt, fast überall $= 0$ ist.

Wir werden auch folgende *Bezeichnungen* brauchen:

$L(0, \pi)$ soll der ganze Raum der in $(0, \pi)$ definierten und im Lebesgueschen Sinn integrierbaren Funktionen bedeuten.

Wenn $f(x)$ eine Funktion des Raumes $L(0, \pi)$ ist, schreiben wir $f(x) < < L(0, \pi)$.

Der Raum der Funktionen $f(x) < L(0, \pi)$, die die Eigenschaft

$$f(x) = f(\pi - x) \text{ f. ü.}^1$$

haben, nennen wir Lg.

Die entsprechenden Räume der quadratisch integrierbaren Funktionen nennen wir $L^2(0, \pi)$ bzw. $L^2 g$.

Die Eigenwertaufgabe A.

10. Der Einfachheit halber behandeln wir in allen Einzelheiten nur die Eigenwertaufgabe A:

$$y'' + (\lambda + \varphi(x))y = 0, \ \varphi(x) < Lg \tag{1}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{R_1}$$

die auch die einfachste ist. Zuerst werden wir dann in folgender Weise zu den genannten Funktionensystemen geführt.

In bezug auf das Problem P wollen wir untersuchen, ob die Funktion $\varphi(x) < Lg$ durch das Spektrum der Eigenwertaufgabe A eindeutig bestimmt wird. Ist dies nicht der Fall, gibt es noch eine Eigenwertaufgabe von derselben Form:

$$A': \begin{cases} z'' + (\lambda + \psi(x))z = 0, \ \psi(x) < Lg & (1') \\ z(0) = z(\pi) = 0, & (R_1) \end{cases}$$

von der wir voraussetzen können, *sie habe dasselbe Spektrum wie die Eigenwertaufgabe A*. Wir nehmen weiter an, es sei

$$\int_0^\pi \psi(x)\,dx = 0. \tag{3'}$$

Es seien $y_n(x)$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ die Eigenfunktionen der Eigenwertaufgabe A, $z_n(x)$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ die Eigenfunktionen der Aufgabe A' und λ_n ein gemein-

[1] f. ü. = fast überall. Vgl. S. 8.

samer Eigenwert. Aus (1) und (1') erhält man dann sogleich, in bezug auf die Randbedingungen $y_n(0) = y_n(\pi) = 0$ und $z_n(0) = z_n(\pi) = 0$:

$$\int_0^\pi [\varphi(x) - \psi(x)]\, y_n(x)\, z_n(x)\, dx = \begin{vmatrix} y_n(x) & z_n(x) \\ y_n'(x) & z_n'(x) \end{vmatrix} \Bigg|_0^\pi = 0^1. \tag{4}$$

Also können wir sagen: Wenn das System

$$\{y_n(x)\, z_n(x)\}_{n=0,1,2\ldots} \tag{5}$$

in bezug auf Lg vollständig ist, muss

$$\varphi(x) = \psi(x) \ f.\ \ddot{u}. \tag{6}$$

sein.

Wir werden die Eindeutigkeitsfrage (Problem P) hinsichtlich der Eigenwertaufgabe A mit Hilfe des Funktionensystems (5) lösen. Es wird sich zeigen, dass dieses System auch für das Problem P^* eine wichtige Rolle spielt.

Ein Hauptziel unserer Untersuchungen hinsichtlich der Eigenwertaufgabe A wird dann offenbar, zu zeigen, dass das System (5) in bezug auf Lg vollständig ist. Um dies zu tun, werden wir zuerst die Vollständigkeit dieses Systems in bezug auf den entsprechenden Raum $L^2 g$ beweisen. Dies soll in den zunächst folgenden Nummern getan werden. Dabei ist es vorteilhaft, nicht das System (5) selbst zu studieren, sondern das ein wenig abgeänderte System, das wir durch folgende *Definition A* festlegen:

$$U_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$U_{2n+2}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi y_n(x)\, z_n(x)\, dx - y_n(x)\, z_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots);$$

worin $y_n(x)$ und $z_n(x)$ durch folgende Bedingungen festgelegte Eigenfunktionen der Eigenwertaufgaben A bzw. A' sein sollen:

$$\int_0^\pi y_n^2(x)\, dx = \sqrt{2\pi}, \quad \int_0^\pi z_n^2(x)\, dx = \sqrt{2\pi}. \tag{7}$$

Man sieht leicht ein, dass die Vollständigkeit in bezug auf $L^2 g$ des obigen Systems mit der des Systems (5) gleichbedeutend ist[2].

---

[1] Man bemerke, dass dieselbe Relation für alle selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei den Dglen. (1) und (1') gilt.

[2] Vgl. Satz A_1 : 1.

Wir beweisen nun einige einfachen Eigenschaften des so definierten Systems.[1]

Hilfssatz A_1: *Es sei das System* $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ *durch die Definition* A *festgelegt. Dann gilt*

$$U_\nu(x) < L^2 g,$$

und es ist

$$U_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \nu x + \frac{E_\nu(x)}{\nu} \qquad (\nu = 0, 2, 4 \ldots)$$

$\left(\frac{E_\nu(x)}{\nu} = 0 \text{ für } \nu = 0\right)^1$ *mit* $E_\nu(x)$ *und* $\frac{d}{dx}\left(\frac{E_\nu(x)}{\nu}\right)$ *für alle* ν *und* x *gleichmässig beschränkt.*

Beweis: Die erste Behauptung kommt, da die Funktionen $U_\nu(x)$ beschränkt sind, darauf hinaus, das Bestehen der Relationen

$$U_\nu(x) = U_\nu(\pi - x) \tag{8}$$

zu beweisen. Gemäss der Definition A dieser Funktionen folgt (8) aus der Eigenschaft

$$y_n(x) = (-1)^n y_n(\pi - x) \tag{9}$$

der Eigenfunktionen $y_n(x)$ der Eigenwertaufgabe A und der entsprechenden Eigenschaft der Eigenfunktionen $z_n(x)$ der Aufgabe A'. Diese folgt ihrerseits in einfacher Weise aus der Symmetrie

$$\varphi(x) = \varphi(\pi - x), \quad \psi(x) = \psi(\pi - x) \quad f.\ ü.$$

der Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$. Bei der Eigenwertaufgabe A z. B. muss nebst $y_n(x)$ offenbar auch $y_n(\pi - x)$ eine Eigenfunktion sein, so dass man

$$y_n(x) = k\, y_n(\pi - x) \qquad (k \text{ eine Konstante})$$

erhält. Hieraus folgt nun leicht, in bezug auf STURMS Oszillationssatz, die Formel (9).

Die zweite Behauptung des Hilfssatzes beweist man durch einfache Abschätzung der Eigenfunktionen $y_n(x)$ und $z_n(x)$ für grosse Werte der Indizes n. Wenden wir die Formeln (13), (14) und (18) und die Bezeichnungen von Satz 1, Kap. 1, an, so finden wir, dass die Eigenfunktionen der Aufgaben A und A' der Integralgleichung

$$y_n(x) = B_n \sin(n+1)x - \frac{1}{n+1}\int_0^x \sin(n+1)(x - x_1)\,\Phi(x_1)\, y_n(x_1)\, dx_1$$

[1] Vgl. Fussnote 2, S. 35.

genügen. In dem oben genannten Satz zeigten wir weiter en passant, dass die normierten Eigenfunktionen $y_n(x)$ und $z_n(x)$ gleichmässig beschränkt $(n \to \infty)$ sind.[1] Nehmen wir dann auf die Festlegung (7) Bezug, erhalten wir

$$\left.\begin{matrix} y_n(x) \\ z_n(x) \end{matrix}\right\} = \sqrt[4]{\frac{8}{\pi}} \sin(n+1)x + \frac{R_{n+1}(x)}{n+1}, \tag{10}$$

worin $R_{n+1}(x) = O(1), \frac{d}{dx}\left(\frac{R_{n+1}(x)}{n+1}\right) = O(1)$ für alle $n \geqq 0$ und x sind. Einsetzung obiger Ausdrücke in die Definitionsformel $U_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi y_n(x) z_n(x)\, dx - y_n(x) z_n(x)$ ergibt die zweite Behauptung des Hilfssatzes, der damit bewiesen ist.

11. Das System $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ der Definition A kann als ein schiefwinkliges Koordinatensystem in dem Raum $L^2 g$ aufgefasst werden. Die obigen Ergebnisse zeigen dann den Weg an, die Vollständigkeit durch Studium der Transformation zu bestätigen, die dieses System mit dem orthogonalen, normierten und in bezug auf $L^2 g$ vollständigen Koordinatensystem $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \nu x\right\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ [2] verbindet. Wir werden dann in folgender Weise zum Studium eines unendlichen linearen Gleichungssystems im Hilbertschen Raum geführt.

Lassen wir $\varkappa$ wie ν die Folge 0, 2, 4 . . . durchlaufen, so gelten infolge des Hilfssatzes A_1 die Entwicklungen

$$U_\nu(x) = \sum_\varkappa r_{\nu\varkappa} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \varkappa x \qquad (\nu = 0, 2, 4 \ldots), \tag{11}$$

worin $\sum\limits_\varkappa$ die Summation über die Folge von Indizes $\varkappa = 0, 2, 4 \ldots$ bedeuten soll.[3] Weiter ist

$$r_{\nu\varkappa} = \int\limits_0^\pi U_\nu(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \varkappa x\, dx\,^2 \tag{12}$$

gesetzt. Es sei nun $f(x)$ eine beliebige Funktion $< L^2 g$. Mit den Bezeichnungen

---

[1] Vgl. S. 14.

[2] Es soll hier und im folgenden immer $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \nu x$ für $\nu = 0$ durch $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ersetzt werden.

[3] Bei den Eigenwertaufgaben A und B sollen $\varkappa$ und ν immer die Folge 0, 2, 4 . . . durchlaufen, und $\sum\limits_\varkappa$, $\sum\limits_\nu$ soll Summation über diese Folge bedeuten.

$$a_\nu = \int_0^\pi f(x)\, U_\nu(x)\, dx, \quad a_\nu = \int_0^\pi f(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \nu x\, dx \text{ [1]} \qquad (\nu = 0, 2, 4 \ldots) \quad (13)$$

erhält man aus (11) das unendliche Gleichungssystem

$$\sum_\varkappa r_{\nu\varkappa} a_\varkappa = \alpha_\nu \qquad (\nu = 0, 2, 4 \ldots). \quad (14)$$

Infolge des Hilfssatzes A_1 gilt

$$\sum_\nu \alpha_\nu^2 < \infty.$$

Dasselbe gilt offenbar auch von $\sum_\nu a_\nu^2$. Das Gleichungssystem (14) ist das erwähnte.

Es gibt offenbar immer eine Lösung $\{a_\nu\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ im Hilbertschen Raum des Systems (14) (d. h. eine Lösung, für die $\sum_\nu a_\nu^2 < \infty$ gilt). Gibt es nur eine, so hat das Gleichungssystem

$$\sum_\varkappa r_{\nu\varkappa} x_\varkappa = 0 \qquad (\nu = 0, 2, 4 \ldots) \quad (15)$$

nur die triviale Lösung $x_\nu = 0$ $(\nu = 0, 2, 4 \ldots)$ im Hilbertschen Raum. Dies bedeutet, dass jede Funktion $f(x) < L^2 g$, die zu allen Funktionen $U_\nu(x)$ $(\nu = 0, 2, 4 \ldots)$ orthogonal ist, auch zu allen Funktionen $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \nu x$ $(\nu = 0, 2, 4 \ldots)$ orthogonal sein muss, was $f(x) = 0$ f. ü. ergibt. Das System $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ ist dann vollständig. Also können wir sagen:

Wenn das Gleichungssystem (15), *in der die Koeffizienten $r_{\nu\varkappa}$ durch die Gleichungen* (12) *definiert sind, nur die triviale Lösung $x_\nu = 0$ $(\nu = 0, 2, 4 \ldots)$ im Hilbertschen Raum hat, ist das System $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ in bezug auf $L^2 g$ vollständig.*

Unser Problem der Vollständigkeit des Systems $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ (Def. A) ist also auf das Problem der eindeutigen Auflösbarkeit der Gleichungssysteme (14) und (15) zurückgeführt. Sie haben die einfache Eigenschaft, vollstetig im Hilbertschen Sinn zu sein. Dies ist mit der im folgenden Hilfssatz darzustellenden Eigenschaft der Koeffizientenmatrix $R = (r_{\nu\varkappa})$ gleichbedeutend.

Wir sagen, eine Matrix ist vollstetig, wenn die entsprechende bilineare Form vollstetig ist.[2]

---

[1] Man bemerke, dass hierdurch a_ν eine etwas andere Bedeutung als früher erhält, Vgl. S. 11.

[2] Wir werden die Benennungen der klassischen Arbeiten von HILBERT [1] und HELLINGER TOEPLITZ [1], anwenden.

Hilfssatz A_2: *Es seien die Koeffizienten der Matrix $R = (r_{\nu\varkappa})$*

$$r_{\nu\varkappa} = \int_0^\pi U_\nu(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \varkappa x \, dx \qquad (\nu, \varkappa = 0, 2, 4 \ldots)$$

mit den Funktionen $U_\nu(x)$ der Definition A gebildet. Dann ist

$$R = E + R^*,$$

wobei E die Einheitsmatrix und R^* vollstetig ist.

Beweis: Es ist

$$R = E + R^*$$

mit E gleich Einheitsmatrix und

$$R^* = (r_{\nu\varkappa} - \delta_{\nu\varkappa}),$$

worin $\delta_{\nu\varkappa}$ die Kroneckersche Symbole ist, d. h. $\delta_{\nu\varkappa} = \begin{cases} 0, \nu \neq \varkappa \\ 1, \nu = \varkappa. \end{cases}$

Wir wollen zeigen, dass R^* vollstetig ist. Bekanntlich ist dies der Fall, wenn

$$\sum_\nu \sum_\varkappa (r_{\nu\varkappa} - \delta_{\nu\varkappa})^2$$

konvergent ist.[1] Diese Reihe ist wirklich konvergent. Wir erhalten

$$\sum_\nu \sum_\varkappa (r_{\nu\varkappa} - \delta_{\nu\varkappa})^2 = \sum_\nu \left(1 - 2 r_{\nu\nu} + \sum_\varkappa r_{\nu\varkappa}^2\right). \tag{16}$$

Gemäss dem Hilfssatz A_1 wird

$$r_{\nu\nu} = \int_0^\pi U_\nu(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \nu x \, dx = 1 + \frac{1}{\nu} \int_0^\pi E_\nu(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \nu x \, dx. \tag{17}$$

Infolge der Parsevalschen Relation erhalten wir weiter

$$\sum_\varkappa r_{\nu\varkappa}^2 = \int_0^\pi U_\nu^2(x)\, dx = 1 + \frac{2}{\nu} \int_0^\pi E_\nu(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \nu x \, dx + \frac{1}{\nu^2} \int_0^\pi E_\nu^2(x)\, dx. \tag{18}$$

(17) und (18) eingesetzt in (16) ergibt, da nach Hilfssatz A_1 $E_\nu(x) = O(1)$ ist,

$$\sum_\nu \sum_\varkappa (r_{\nu\varkappa} - \delta_{\nu\varkappa})^2 = \sum_\nu{}' \frac{1}{\nu^2} \int_0^\pi E_\nu^2(x)\, dx < \infty \tag{19}$$

[1] Vgl. Hilbert [1] S. 150, 164.

$\sum_{\nu}'$ soll Summation über die Folge von Indizes $\nu = 2, 4, 6 \ldots$ bedeuten. Also ist R^* vollstetig. Der Beweis ist damit beendet.

12. Die einfache Theorie der vollstetigen Gleichungssysteme, die von HILBERT geschaffen ist, steht also nun zur Verfügung, wenn wir die Vollständigkeit des Systems $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ (Def. A, S. 33) zeigen werden. In bezug auf die Relation (19) kann sogar in weitem Umfang die v. Kochsche Theorie der absolut konvergenten Determinanten angewandt werden.[1] Die bisherigen Ergebnisse reichen aber nicht hin, um die eindeutige Auflösbarkeit der Gleichungssysteme (14) und (15) zu sichern. Dazu wird eine andere Eigenschaft der Funktionen $U_\nu(x)$ verlangt. Um sie herzuleiten, brauchen wir eine formale Eigenschaft beliebiger Produkte

$$u(x) = y(x) \cdot z(x)$$

von einer Lösung der Dgl.

$$y'' + (\lambda + \varphi(x))y = 0, \qquad \varphi(x) < L(0, \pi) \tag{2}$$

und einer Lösung $z(x)$ der Dgl.

$$z'' + (\lambda + \psi(x))z = 0, \qquad \psi(x) < L(0, \pi) \tag{2'}$$

bei demselben Parameterwert λ. Wir setzen hierbei nichts von den Spektren der Dglen. bei S-L Randbedingungen voraus.

Es gilt nämlich, dass ein solches Produkt $u(x)$ der Integrodifferentialgleichung

$$L(u) + 2\lambda u(x) + 2\lambda \int_0^x u'(t)\,dt = 0 \tag{20}$$

mit

$$L(u) \equiv u''(x) + (\varphi(x) + \psi(x))u(x) + \int_0^x [\varphi(t) + \psi(t)]\,u'(t)\,dt + \\ + \int_0^x \Delta(t) \int_0^t \Delta(\tau)\,u(\tau)\,d\tau\,dt + c(u)\int_0^x \Delta(t)\,dt + d(u) \tag{21}$$

[1] Vgl. H. v. KOCH [1]. Vgl. auch RIESZ [1] S. 33 f. f., S. 39. Die durch die Relation (19) ausgedrückte Eigenschaft der Matrix $R = (r_{\nu\varkappa})$ kann leicht dazu angewandt werden, die Vollständigkeit des Systems $\{U_\nu(x)\}$ „im Kleinen" zu beweisen, d. h. unter Beschränkung von $\int_0^\pi |\varphi(x)|\,dx$ und $\int_0^\pi |\psi(x)|\,dx$, was gemäss der Relation (4) zu einer Eindeutigkeit „im Kleinen" der Funktion $\varphi(x)$ führt. Diese Eigenschaft, die den umgekehrten S-L Eigenwertaufgaben charakteristisch ist, ist mit einer wohlbekannten Eigenschaft der v. Kochschen Determinanten gleichbedeutend. Vgl. Riesz [1] S. 38.

f. ü. genügt. In dieser Gleichung ist

$$\left.\begin{aligned} \varDelta(x) &= \varphi(x) - \psi(x) \\ c(u) &= \begin{vmatrix} y\,(0) & z\,(0) \\ y'(0) & z'(0) \end{vmatrix} \\ d(u) &= -2\,y'(0)\,z'(0) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Die Gleichung wird durch einfache Rechnungen aus (2) und (2′) gewonnen. Es ist

$$u''(x) = y''z + 2\,y'z' + y\,z'' = -2\,\lambda\,u(x) - (\varphi + \psi)\,u(x) + 2\,y'z' \quad f.\,ü. \tag{23}$$

$$\begin{aligned} y'(x)\,z'(x) &= y'(0)\,z'(0) - \int_0^x [(\lambda + \varphi(t))\,y\,z' + (\lambda + \psi(t))\,y'z]\,dt = \\ &= y'(0)\,z'(0) - \lambda\int_0^x u'(t)\,dt - \int_0^x [\varphi(t)\,y\,z' + \psi(t)\,y'z]\,dt \end{aligned} \tag{24}$$

$$y'z - y\,z' = -c(u) - \int_0^x [\varphi(t) - \psi(t)]\,u(t)\,dt. \tag{25}$$

Aus den Gleichungen (24) und (25) folgt

$$\begin{aligned} 2\,y'(x)\,z'(x) = -d(u) - 2\,\lambda\int_0^x u'(t)\,dt - \int_0^x [\varphi(t) + \psi(t)]\,u'(t)\,dt\, - \\ - c(u)\int_0^x \varDelta(t)\,dt - \int_0^x \varDelta(t)\int_0^t \varDelta(\tau)\,u(\tau)\,d\tau\,dt. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck für $2\,y'(x)\,z'(x)$, in die Gleichung (23) eingesetzt, gibt die verlangte Gleichung (20).

Aus der Gleichung (20) kann man eine Formel herleiten, die die Rolle einer Greenschen Formel für diese Gleichung spielt. Wir führen zuerst eine abgekürzte Schreibweise ein. Unter der „*belasteten Integration*" des Produkts zweier Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ wollen wir folgende Operation verstehen:

$$I(u(x),\,v(x)) = \frac{1}{2}\int_0^\pi [u(x)\,v'(x) - u'(x)\,v(x)]\,dx = \int_0^\pi u(x)\,v'(x)\,dx - \frac{1}{2}\,u(x)\,v(x)\Big/_0^\pi \tag{26}$$

(Die Reihenfolge der Glieder $u(x)$ und $v(x)$ ist also wesentlich).

Es seien nun $y(x)$ und $z(x)$ Lösungen der Dglen. (2) bzw. (2′) bei dem Parameterwert $\lambda = \lambda_u$, dann setzen wir

$$u(x) = y(x) \cdot z(x), \qquad (\lambda = \lambda_u).$$

Es seien weiter $\eta(x)$ und $\zeta(x)$ Lösungen von (2) bzw. (2') bei dem Parameterwert $\lambda = \lambda_v$ und

$$v(x) = \eta(x)\zeta(x), \qquad (\lambda = \lambda_v),$$

so dass $u(x)$ und $v(x)$ Lösungen von (20) für $\lambda = \lambda_u$ bzw. $\lambda = \lambda_v$ sind. Dann erhält man

$$4(\lambda_u - \lambda_v) I[(y(x)z(x)), (\eta(x)\zeta(x))] =$$

$$= \Bigg[\begin{vmatrix} y\ (x) & z\ (x) \\ y'(x) & z'(x) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \eta\ (x) & \zeta\ (x) \\ \eta'(x) & \zeta'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y\ (x) & \eta\ (x) \\ y'(x) & \eta'(x) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z\ (x) & \zeta\ (x) \\ z'(x) & \zeta'(x) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} y\ (x) & \zeta\ (x) \\ y'(x) & \zeta'(x) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z\ (x) & \eta\ (x) \\ z'(x) & \eta'(x) \end{vmatrix} \Bigg]_0^\pi. \qquad (27)$$

Diese Formel erhält man durch teilweise Integration von $\int_0^\pi L(u)\, v'\, dx$. Es wird zuerst

$$\int_0^\pi [L(u)v' + L(v)u']\, dx = u'(x)\, v'(x) \Big/_0^\pi - \int_0^\pi v(t)\varDelta(t)\, dt \cdot \int_0^\pi u(t)\varDelta(t)\, dt -$$

$$- c(u)\int_0^\pi v(t)\varDelta(t)\, dt - c(v)\int_0^\pi u(t)\varDelta(t)\, dt +$$

$$+ u(x)\left(\int_0^x (\varphi + \psi)v'\, dt + \int_0^x \varDelta(t)\int_0^t \varDelta(\tau)v(\tau)\, d\tau\, dt + c(v)\int_0^x \varDelta(t)\, dt + d(v)\right)\Big/_0^\pi +$$

$$+ v(x)\left(\int_0^x (\varphi + \psi)u'\, dt + \int_0^x \varDelta(t)\int_0^t \varDelta(\tau)u(\tau)\, d\tau\, dt + c(u)\int_0^x \varDelta(t)\, dt + d(u)\right)\Big/_0^\pi. \qquad (28)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (2) und (2') können die Integrale der ersten und zweiten Zeile rechts in Determinantenform geschrieben werden, z. B. wird

$$\int_0^\pi v(t)\varDelta(t)\, dt = \begin{vmatrix} \eta\ (x) & \zeta\ (x) \\ \eta'(x) & \zeta'(x) \end{vmatrix} \Big/_0^\pi.$$

Beachtet man die Definition der Konstanten $c(u)$ und $c(v)$, so gehen die entsprechenden Glieder der ersten und zweiten Zeile nach einigen einfachen Reduktionen in

$$- \begin{vmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \eta(x) & \zeta(x) \\ \eta'(x) & \zeta'(x) \end{vmatrix} \Big/_{0}^{\pi}$$

über.

Die letzte Zeile von (28) wird mit Hilfe des Ausdrucks für das Produkt

$$2\, y'(x)\, z'(x),$$

S. 39, auf die Form

$$v(x)\left(-2\, y'(x)\, z'(x) - 2\, \lambda_u \int_0^x u'(t)\, dt\right)\Big/_{0}^{\pi}$$

gebracht. Analog reduziert man die vorletzte Zeile. Rechts von (28) kommt hierdurch nun der Ausdruck

$$u'(x)\, v'(x) - 2\, v(x)\, y'(x)\, z'(x) - 2\, u(x)\, \eta'(x)\, \zeta'(x) \Big/_{0}^{\pi}$$

vor. Man sieht nach leichten Rechnungen ein, dass er auf die Form

$$- \left[\begin{vmatrix} y(x) & \eta(x) \\ y'(x) & \eta'(x) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z(x) & \zeta(x) \\ z'(x) & \zeta'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y(x) & \zeta(x) \\ y'(x) & \zeta'(x) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z(x) & \eta(x) \\ z'(x) & \eta'(x) \end{vmatrix} \right]_0^{\pi}$$

gebracht werden kann. Nach diesen Reduktionen enthält das rechte Glied von (28) nur den Ausdruck rechts von (27) (mit umgekehrtem Vorzeichen) nebst den Gliedern

$$-2\, \lambda_u\, v(x) \int_0^x u'(t)\, dt - 2\, \lambda_v\, u(x) \int_0^x v'(t)\, dt \Big/_{0}^{\pi} .$$

Bringt man diese in das linke Glied von (28), wendet die Gleichung (20) und die Definition der belasteten Integration (26) an, so erhält man leicht die verlangte Formel (27).

Anm. Offenbar können analoge Formeln hergeleitet werden, wenn anstatt der Gleichungen (2) und (2') Gleichungen der Form

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda\, \varrho(x) + g(x))\, y = 0$$

gegeben sind. Dies dürfte in den Fällen von Nutzen sein, in denen $p(x)$ und

$\varrho(x)$ Nullstellen haben oder anderweitig nicht die Bedingungen dafür befriedigen, dass obige Gleichung auf die Liouvillesche Normalform (2) gebracht werden kann.

Mit Hilfe der Greenschen Formel (27) können wir nun eine Eigenschaft des Systems $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ herleiten, die den Beweis der Vollständigkeit unter der einzigen Voraussetzung $\varphi(x) < Lg$, $\psi(x) < Lg$ ermöglicht. Zuerst erinnern wir an folgende Definition:

Das von den beiden Folgen beschränkter Funktionen $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ und $\{V_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ gebildete System

$$\{U_\nu(x),\ V_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$$

soll im Intervall $(0, \pi)$ biorthogonal und normiert heissen, wenn

$$\int\limits_0^\pi U_\nu(x)\, V_\mu(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \nu \neq \mu \\ 1, & \nu = \mu \end{cases}$$

gilt.

Die genannte Eigenschaft sprechen wir nun in folgendem Hilfssatz aus.

Hilfssatz A_3: *Es sei das Funktionensystem $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ durch die Definition A festgelegt. Dann gibt es ein System $\{V_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ beschränkter Funktionen mit $V_\nu(x) < L^2 g$ so dass das System*

$$\{U_\nu(x),\ V_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$$

biorthogonal und normiert ist.

Beweis: Wir beweisen zuerst die Behauptung für $\nu > 0$. Wir wenden dabei die zu den Dglen. (1) und (1') gehörige Formel (27) an. Gemäss der Definition A S. 33 ist $U_\nu(x)$ für $\nu = 2n + 2$ mit der Funktion $y_n(x)\, z_n(x)$ verknüpft. Wir wollen deshalb die Funktion $u(x)$ der Formel $(27) = y_n(x)\, z_n(x)$ wählen. Also wird auch $\lambda_u = \lambda_n$ (λ_n gleich dem n:ten Eigenwert der Aufgabe A). Offenbar soll nun die Funktion $V_\mu(x)$ $(\mu = 2m + 2)$ mit Hilfe der Funktion $v(x) = \eta(x)\, \zeta(x)$ (Formel (27)) so definiert werden, dass $\lambda_v = \lambda_m$ wird und dabei folgende Forderungen befriedigt sind:

1) $\int\limits_0^\pi U_\nu(x)\, V_\mu(x)\, dx$ soll, vom Faktor $4(\lambda_n - \lambda_m)$ abgesehen, mit dem linken Glied von (27) übereinstimmen.

2) das entsprechende rechte Glied von (27) soll verschwinden.

3) $$\int\limits_0^\pi U_\nu(x)\, V_\nu(x)\, dx = 1.$$

Denn dann folgt aus 1) und 2) und der Formel (27)

$$4(\lambda_m - \lambda_n)\int_0^\pi U_\nu(x)\; V_\mu(x)\,dx = 0,$$

also, da immer $\lambda_m \neq \lambda_n$ ist, wenn $m \neq n$ ist,

$$\int_0^\pi U_\nu(x)\; V_\mu(x)\,dx = 0, \qquad \nu \neq \mu \tag{29}$$

$(\nu, \mu > 0)$ und aus 3) die Normierung des Systems.

Um diese drei Forderungen zu befriedigen, werden wir von der Form des linken Gliedes von (27) veranlasst, $V_\nu(x)$ wie folgt zu wählen:

$$V_{2n+2}(x) = (y_n(x)\,\zeta_n(x))' \qquad (n = 0, 1, 2\ldots), \tag{30}$$

worin $y_n(x)$ eine durch (7) festgelegte Eigenfunktion der Eigenwertaufgabe A und $\zeta_n(x)$ eine Lösung der Dgl.

$$z'' + (\lambda + \psi(x))\,z = 0, \qquad \psi(x) < Lg \tag{1'}$$

für $\lambda = \lambda_n$ (gleich dem n:ten Eigenwert der Aufgabe A) sein sollen.

Infolge der Randbedingungen R_1: $y(0) = y(\pi) = 0$ findet man, dass $(\nu = 2n + 2)$

$$\int_0^\pi V_\nu(x)\,dx = y_n(x)\,\zeta_n(x)\Big/_0^\pi = 0 \quad (\nu > 0), \tag{31}$$

woraus folgt, dass die Forderung 1) befriedigt ist, d. h. es gilt

$$1) \qquad \int_0^\pi U_\nu(x)\; V_\mu(x)\,dx = -I\left[(y_n(x)\,z_n(x)),\,(y_m(x)\,\zeta_m(x))\right]. \tag{32}$$

2) Setzen wir in (27)

$$u = y_n(x)\,z_n(x), \quad \lambda_u = \lambda_n$$

$$v = y_m(x)\,\zeta_m(x), \quad \lambda_v = \lambda_m,$$

d. h. $y = y_n$, $z = z_n$, $\eta = y_m$, $\zeta = \zeta_m$, finden wir sogleich, dass das rechte Glied, sogar unabhängig von der Wahl der Funktion $\zeta_m(x)$ verschwindet, so dass die Forderung 2) befriedigt ist.

3) Die Forderung 3) ist, gemäss der Relation (32), einer Anfangsbedingung für $\zeta_n(x)$ in einem beliebigen Punkt $x = x_0$ gleichbedeutend. Es ist nach (26)

$$I[(y_n(x)z_n(x)),\ (y_n(x)\zeta_n(x))] = \frac{1}{2}\int_0^\pi [(y_n\ z_n)(y_n\zeta_n)' - (y_n z_n)'(y_n\zeta_n)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi y_n^2(x)\begin{vmatrix} z_n(x) & \zeta_n(x) \\ z_n'(x) & \zeta_n'(x)\end{vmatrix}dx. \qquad (33)$$

Da nun die Wronskische Determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} z_n(x) & \zeta_n(x) \\ z_n'(x) & \zeta_n'(x)\end{vmatrix}$$

einen von x unabhängigen Wert hat, folgt die obige Behauptung, und die Forderung 3) ergibt, wenn $x_0 = \frac{\pi}{2}$ gewählt wird, in bezug auf (32) und die Festlegung (7),

$$W\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\zeta_n\left(\frac{\pi}{2}\right)z_n'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \zeta_n'\left(\frac{\pi}{2}\right)z_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\int_0^\pi y_n^2(x)\,dx} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}. \qquad (34)$$

Wird $\zeta_n(x)$ gemäss (34) gewählt, was immer möglich ist, folgt aus obigem unmittelbar die Biorthogonalität und Normierung des Systems $\{U_\nu(x),\ V_\nu(x)\}_{\nu=2,4,6\ldots}$

$\zeta_n(x)$ ist aber nicht eindeutig bestimmt. Wir können noch eine Anfangsbedingung im Punkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$ vorschreiben. Sie wird wie folgt gewählt:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_{2k}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\ \zeta_{2k+1}'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0,\ k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots \end{aligned}\right\}. \qquad (35)$$

Dann bilden (34) und (35) ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten $\zeta_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und $\zeta_n'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, das immer lösbar ist, wenn nur

$$z_{2k}\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0,\ z_{2k+1}'\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \qquad (36)$$

gilt (d. h. $z_n(x)$ darf nicht die Anfangsbedingungen (35) befriedigen). Dies ist aber der Fall. $z_n(x)$ befriedigt die Relation

$$z_n(x) = (-1)^n z_n(\pi - x), \qquad (9')$$

woraus

$$z'_{2k}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad z_{2k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

folgt. Da $\int\limits_0^\pi z_n^2(x)\,dx = \sqrt{2\pi}$ ist, müssen die Bedingungen (36) befriedigt sein.

Die Wahl der Anfangsbedingungen (35) hat nun die Eigenschaft $V_\nu(x) = V_\nu(\pi - x)$ d. h.

$$V_\nu(x) < L^2 g \tag{37}$$

zur Folge. Denn aus Symmetriegründen folgt (vgl. Hilfssatz A_1)

$$\zeta_n(x) = (-1)^{n+1}\zeta_n(\pi - x),$$

und die Funktionen $y_n(x)$ befriedigen die Relation (9). Dies ergibt nach der Definition (30) die Behauptung (37).

Schliesslich: die behauptete Beschränktheit der Funktionen $V_\nu(x)\,(\nu > 0)$ ist offenbar, so dass alle Behauptungen für $\nu > 0$ bewiesen sind.

Wir definieren nun

$$V_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \tag{30'}$$

Gemäss der Definition A und (30) erhält man in bezug auf die Relationen (31)

$$\int\limits_0^\pi U_\nu(x)\,V_0(x)\,dx = \int\limits_0^\pi U_0(x)\,V_\nu(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \nu \neq 0 \\ 1, & \nu = 0 \end{cases}.$$

Da $U_0(x)$, $V_0(x)$ beschränkt sind und $< L^2 g$, ist hiermit der Hilfssatz endgültig bewiesen.

13. Es ist nun leicht, die Vollständigkeit des Systems $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ (Def. A) zu beweisen. Bevor wir zu diesem Beweis übergehen, führen wir HILBERTS klassisches Ergebnis hinsichtlich vollstetiger Gleichungssysteme an.

Alternativsatz: Wenn die Matrix $R = (r_{\nu\varkappa})$ $(\nu, \varkappa = 0, 2, 4 \ldots)$ von der folgenden Form ist:

$$R = E + R^*,$$

wo E die Einheitsmatrix und R^* vollstetig ist so gilt:

Entweder hat das unhomogene System

$$\sum_\varkappa r_{\nu\varkappa} a_\varkappa = \alpha_\nu \quad (\nu = 0, 2, 4 \ldots) \tag{14}$$

und gleichzeitig das transponierte System

$$\sum_{\nu} r_{\nu\varkappa} a'_{\nu} = \alpha'_{\varkappa} \quad (\varkappa = 0, 2, 4 \ldots) \tag{14'}$$

für beliebige rechte Seiten von konvergenter Quadratsumme eine eindeutig bestimmte Lösung von konvergenter Quadratsumme, oder das homogene System

$$\sum_{\varkappa} r_{\nu\varkappa} x_{\varkappa} = 0 \quad (\nu = 0, 2, 4 \ldots) \tag{15}$$

und gleichzeitig das transponierte System

$$\sum_{\nu} r_{\nu\varkappa} x'_{\nu} = 0 \quad (\varkappa = 0, 2, 4 \ldots) \tag{15'}$$

besitzt mindestens eine nicht identisch verschwindende Lösung von konvergenter Quadratsumme[1].

Wir sprechen auch zwei Folgesätze aus.

Folgesatz 1: Es seien unter denselben Bedingungen wie im Alternativsatz die Systeme (15) und (15') lösbar. Wenn $\{x_{\nu}^{(i)}\}$ $(i = 1, 2, \ldots j)$ die linear unabhängigen Lösungen des Systems (15') sind, so ist für die Lösbarkeit des unhomogenen Systems (14) notwendig, dass

$$\sum_{\nu} x_{\nu}^{(i)} \alpha_{\nu} = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \ldots j)$$

gilt. Entsprechendes gilt für das transponierte System (14')[2].

Folgesatz 2: Damit die Systeme (15) und (15') unter der Bedingung $R = E + R^*$ nur die triviale Lösung $x_{\nu} = 0$ $(\nu = 0, 2, 4 \ldots)$ im Hilbertschen Raum haben, ist notwendig und hinreichend, dass eine der quadratischen Formen

$$\sum_{\nu}\Big(\sum_{\varkappa} r_{\nu\varkappa} x_{\varkappa}\Big)^2, \quad \sum_{\varkappa}\Big(\sum_{\nu} r_{\nu\varkappa} x_{\nu}\Big)^2$$

für alle $\{x_{\nu}\}$ mit $\sum x_{\nu}^2 = 1$

$$\geq m^2 > 0$$

ist.

14. In dieser Nummer sollen die Sätze der Vollständigkeit hinsichtlich des Systems $\{U_{\nu}(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ bewiesen werden. Wir sprechen sie jedoch mit Hilfe

[1] Vgl. z. B. Hellinger-Toeplitz [1] S. 1409 f.

[2] Vgl. die Bedingung: notwendig und hinreichend, z. B. bei Hellinger-Toeplitz [1] S. 1412, Hilbert [1] S. 168 f.

des anfänglichen Systems $\{y_n(x)\, z_n(x)\}_{n=0,1,2\ldots}$ aus. Weiter brauchen wir Analoga des Riesz-Fischerschen Satzes und der Parsevalschen Relation. Sie werden auch hier bewiesen.

Unser erster Satz der Vollständigkeit bezieht sich auf den Raum $L^2 g$. Es ist der folgende:

Satz A_1: *Es sei das Funktionensystem* $\{y_n(x)\, z_n(x)\}_{n=0,1,2\ldots}$ *mit den durch* (7) *festgelegten Eigenfunktionen der Eigenwertaufgaben A bzw. A′ gebildet. Dann gilt*

1. *Das System ist in bezug auf* $L^2 g$ *vollständig.*

2. *Zu jeder Zahlenfolge* $\{c_n\}_{n=0,1,2\ldots}$ *mit* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$ *gehört eindeutig in* $L^2 g$ *eine Funktion* $f(x) < L^2 g$, *für die*

$$\int_0^\pi f(x)\, dx = 0$$

$$c_n = \int_0^\pi f(x)\, y_n(x)\, z_n(x)\, dx \quad (n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots)$$

ist.

3. *Es gibt zwei von* $f(x)$ *unabhängige, endliche, positive Konstanten m und M, so dass*

$$m^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leq \int_0^\pi f^2(x)\, dx \leq M^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$$

gilt.

Beweis: 1. Das System $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ der Definition A ist in bezug auf $L^2 g$ vollständig. Denn das entsprechende Gleichungssystem (15) hat nur die triviale Lösung $x_\nu = 0$ $(\nu = 0, 2, 4, \ldots)$. Hätte nämlich (15) eine nichttriviale Lösung, so muss, weil $R = E + R^*$ ist (Hilfssatz A_2), auch (15′) eine nichttriviale Lösung haben (Alternativsatz). Es sei $\{x_\nu\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ eine solche Lösung, die wir so wählen können, dass $\sum\limits_\nu x_\nu^2 = 1$ wird. Da aber auch das System (14) immer eine Lösung besitzt, wenn die α_ν durch (13) definiert sind, folgt aus dem Folgesatz 1, S. 46, dass

$$\sum_\nu x_\nu\, \alpha_\nu = 0 = \sum_\nu x_\nu \int_0^\pi f(x)\, U_\nu(x)\, dx$$

für jede Funktion $f(x) < L^2 g$ sein muss. Dies ist aber unmöglich. Denn in der Folge $\{x_\nu\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ muss es mindestens eine Zahl $x_\mu \neq 0$ geben, es sei z. B.

$x_\nu = 0$ für $\nu < \mu$, $x_\mu \neq 0$. Dann wählen wir $f(x) = V_\mu(x) < L^2 g$ und erhalten gemäss dem Hilfssatz A_3 den Widerspruch

$$\sum_\nu x_\nu \alpha_\nu = x_\mu \neq 0.$$

Also kann (15) nur die triviale Lösung $x_\nu = 0$ ($\nu = 0, 2, 4 \ldots$) haben, und das System $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ ist infolge der Aussage von Nr. 11 S. 36 in bezug auf $L^2 g$ vollständig.

Hieraus folgt fast unmittelbar die erste Behauptung des Satzes. Gilt nämlich ($f(x) < L^2 g$)

$$\int_0^\pi f(x)\, y_n(x)\, z_n(x)\, dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots),$$

so erhält man, da nach dem Hilfssatz A_1 und der Def. A

$$y_n(x)\, z_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi y_n(x)\, z_n(x)\, dx - U_{2n+2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1 - \cos(2n+2)x) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ist,

$$\int_0^\pi f(x)\, dx + o(1) = 0$$

und also auch

$$\int_0^\pi f(x)\, U_\nu(x)\, dx = 0 \qquad (\nu = 0, 2, 4 \ldots)$$

d. h. $f(x) = 0$ f. ü.

2. Die entsprechende Behauptung hinsichtlich des Systems $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ (Def. A) ist richtig. Denn in der Abteilung 1 dieses Beweises ist gezeigt, dass das Gleichungssystem (15) nur die triviale Lösung $x_\nu = 0$ ($\nu = 0, 2, 4 \ldots$) hat. Infolge $R = E + R^*$ und des Alternativsatzes hat dann das Gleichungssystem (14) für jede Wahl der Folge $\{\alpha_\nu\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ mit $\sum_\nu \alpha_\nu^2 < \infty$ eine eindeutig bestimmte Lösung, es sei $\{a_\nu\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ die der Folge $\{\alpha_\nu\}$ entsprechende Lösung. Dann gibt es weil $\sum_\nu a_\nu^2 < \infty$ ist, gemäss dem Riesz-Fischerschen Satz eine Funktion $< L^2 g$

$$f(x) \sim \sum_\varkappa a_\varkappa \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \varkappa x,$$

für die man mit Hilfe der Parsevalschen Relation und den Gleichungen (14) findet:

$$\int_0^\pi f(x)\, U_\nu(x)\, dx = \sum_\varkappa r_{\nu\varkappa}\, a_\varkappa = \alpha_\nu. \tag{38}$$

Infolge der Voraussetzung $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$ können wir auf diese Weise speziell die zu der Folge $\{\alpha_\nu\}$ mit $\alpha_0 = 0$, $\alpha_{2n+2} = -c_n$ gehörige Funktion $f(x)$ bestimmen. Sie ist gemäss dem Ergebnis der Abteilung 1 dieses Beweises in $L^2 g$ eindeutig bestimmt. Nehmen wir auf die Definition A der Funktionen $U_\nu(x)$ Bezug, folgt sogleich aus den Relationen (38), dass diese Funktion $f(x)$ die behauptete ist.

3. Das Gleichungssystem (14) stellt eine beschränkte Transformation im Hilbertschen Raum dar. Also gilt

$$\sum_\nu a_\nu^2 \le \frac{1}{m^2} \sum_\nu \alpha_\nu^2,$$

worin $\frac{1}{m^2}$ die obere Schranke dieser Transformation ist[1]. Weiter gilt, gemäss dem Folgesatz 2, infolge der eindeutigen Auflösbarkeit des Gleichungssystems (14)

$$\frac{\sum_\nu \alpha_\nu^2}{\sum_\nu a_\nu^2} = \frac{\sum_\nu \left(\sum_\varkappa r_{\nu\varkappa}\, a_\varkappa\right)^2}{\sum_\nu a_\nu^2} \ge \frac{1}{M^2} > 0, \tag{39}$$

wenn wir die Konstante m^2 dieses Satzes durch $\frac{1}{M^2}$ ersetzen. Aus diesen Ungleichungen erhalten wir mit der obigen Wahl $\alpha_0 = 0$, $\alpha_{2n+2} = -c_n$ und in bezug auf die Parsevalsche Relation

$$\sum_\nu a_\nu^2 = \int_0^\pi f^2(x)\, dx$$

die Behauptung 3. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Die Vollständigkeit in bezug auf $L^2 g$ eines Funktionensystems hat nicht allgemein die Vollständigkeit in bezug auf $L g$ zur Folge. Wir müssen deshalb diese letzte Eigenschaft unseres Systems gesondert beweisen.

[1] Vgl. z. B. Riesz [1] S. 79, 81.

Satz A_2: *Das Funktionensystem* $\{y_n(x) z_n(x)\}_{n=0,1,2\ldots}$, *das im Satz* A_1 *definiert ist, ist in bezug auf* Lg *vollständig.*

Beweis: Wie im Satz A_1 folgt die Vollständigkeit des Systems

$$\{y_n(x) z_n(x)\}_{n=0,1,2\ldots}$$

aus derjenigen des Systems $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ der Def. A. Wir brauchen deshalb die Behauptung nur für dieses System zu beweisen. Dabei gehen wir so vor, dass wir das Gleichungssystem (14) wirklich auflösen. Zu diesem Zweck bilden wir mit den Funktionen $V_\nu(x)$ des Hilfssatzes A_3 die Koeffizienten

$$\varrho_{\nu\varkappa} = \int_0^\pi V_\nu(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \varkappa x \, dx \qquad (\nu, \varkappa = 0, 2, 4 \ldots).^1$$

Wir wollen zeigen, dass diese Koeffizienten folgende Eigenschaften haben:

1) $$\sum_\mu r_{\nu\mu} \varrho_{\varkappa\mu} = \begin{cases} 0, & \nu \neq \varkappa \\ 1, & \nu = \varkappa. \end{cases}$$

2) $$P = (\varrho_{\nu\varkappa}) = E + P^*,$$

wobei E die Einheitsmatrix und P^* vollstetig ist.

3) $$\sum_\nu |\varrho_{\nu\varkappa}| < \infty.$$

Sind 1) und 2) befriedigt, erhält offenbar das Lösungssystem von (14) folgende Form

$$a_\varkappa = \sum_\nu \varrho_{\nu\varkappa} \alpha_\nu \qquad (\varkappa = 0, 2, 4 \ldots)$$

oder

$$\int_0^\pi f(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \varkappa x \, dx = \sum_\nu \varrho_{\nu\varkappa} \int_0^\pi f(x) \, U_\nu(x) \, dx,$$

und diese Relationen sind für alle $f(x) < L^2 g$ gültig. Infolge der Eigenschaft 3) können wir aber die Integrations- und Summationsordnung umkehren, so dass wir erhalten

$$\int_0^\pi f(x) \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \varkappa x - \sum_\nu \varrho_{\nu\varkappa} U_\nu(x)\right] dx = 0.^1$$

---

[1] Es soll immer $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \varkappa x$ für $\varkappa = 0$ durch $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ersetzt werden.

Weil nun $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos \varkappa x$ und $\sum\limits_{\nu} \varrho_{\nu\varkappa} U_\nu(x)$ stetig sind und zu $L^2 g$ gehören, folgt also ($f(x)$ beliebig $< L^2 g$)

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos \varkappa x = \sum_{\nu} \varrho_{\nu\varkappa} U_\nu(x), \qquad (\varkappa = 0, 2, 4 \ldots),$$

und die Reihe ist absolut konvergent. Hieraus folgt unmittelbar, dass jede Funktion $g(x) < L g$, für die $\int\limits_0^\pi g(x)\, U_\nu(x)\, dx = 0$ $(\nu = 0, 2, 4 \ldots)$ gilt, auch den Relationen $\int\limits_0^\pi g(x)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos \nu x\, dx = 0$ $(\nu = 0, 2, 4 \ldots)$ genügt, d. h. $g(x) = 0$ f. ü., woraus die Behauptung folgt.

Wir brauchen also nur noch obige Eigenschaften 1), 2) und 3) zu beweisen.

1) folgt aus dem Hilfssatz A_3:

$$\sum_{\mu} r_{\nu\mu}\,\varrho_{\varkappa\mu} = \int\limits_0^\pi U_\nu(x)\, V_\varkappa(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \nu \neq \varkappa \\ 1, & \nu = \varkappa. \end{cases}$$

2) Wir setzen $\nu = 2n + 2$ und

$$y_n(x)\,\zeta_n(x) = v_\nu(x).$$

Die Funktion $y_n(x)$ ist im Hilfssatz A_1 durch die Relation (10) abgeschätzt. Die Funktion $\zeta_n(x)$ ist im Hilfssatz A_3 durch die Anfangsbedingungen (34), (35) festgelegt. Daraus folgt leicht

$$\zeta_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt[4]{\frac{\pi}{8}}\,\frac{1}{n+1}\cos(n+1)x + \frac{\overline{R}_{n+1}(x)}{(n+1)^2},$$

worin $\overline{R}_{n+1}(x) = O(1)$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{R}_{n+1}(x)}{n+1}\right) = O(1)$ ist. Also wird $(\nu = 2n+2)$

$$v_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2n+2}\sin(2n+2)x + \frac{\overline{E}_{2n+2}(x)}{(2n+2)^2}, \tag{40}$$

und nach der Definition von $V_\nu(x)$ (30), (30'):

$$V_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos \nu x + \frac{1}{\nu}\frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{E}_\nu(x)}{\nu}\right) \qquad (\nu = 0, 2, 4 \ldots) \tag{41}$$

mit

$$\overline{E}_\nu(x) = O(1), \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\nu}\,\overline{E}_\nu(x)\right) = O(1).$$

Wie im Hilfssatz A_2 folgt nun die Eigenschaft 2).

3) Wir schätzen die Koeffizienten

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\varrho_{\nu\varkappa} = v_\nu(x)\cos\varkappa x\Big|_0^\pi + \varkappa\int_0^\pi \sin\varkappa x\, v_\nu(x)\,dx \tag{42}$$

ab. Für $\lambda_n \neq 0$ erhält man mit Hilfe der Gleichung (20) $(\nu = 2n+2)$

$$\varkappa\int_0^\pi \sin\varkappa x\, v_\nu(x)\,dx = -\frac{\varkappa}{4\lambda_n}\int_0^\pi \sin\varkappa x\,(v_\nu'' + M(v_\nu))\,dx, \tag{43}$$

worin wir

$$L(v_\nu) - 2\lambda_n v_\nu(0) - v_\nu''(x) = M(v_\nu)$$

gesetzt haben. Es sei weiter $4\lambda_n \neq \varkappa^2$, $\nu \neq \varkappa$, so erhält man nach zweimaliger teilweiser Integration

$$\int_0^\pi v_\nu''(x)\sin\varkappa x\,dx = -\varkappa v_\nu(x)\cos\varkappa x\Big|_0^\pi - \varkappa^2\int_0^\pi v_\nu(x)\sin\varkappa x\,dx.$$

Setzt man dies in die Gleichung (43) ein, erhält man nach leichten Vereinfachungen

$$\varkappa\int_0^\pi \sin\varkappa x\, v_\nu(x)\,dx = \frac{\varkappa^2}{4\lambda_n - \varkappa^2} v_\nu(x)\cos\varkappa x\Big|_0^\pi - \frac{\varkappa}{4\lambda_n - \varkappa^2}\int_0^\pi M(v_\nu)\sin\varkappa x\,dx. \tag{44}$$

Führen wir schliesslich die Ausdrücke für $M(v_\nu)$ und $L(v_\nu)$ ein, und wenden wir die Relationen (40) an, so erhalten wir nach einigen teilweisen Integrationen aus (44) und (42) die Abschätzung

$$|\varrho_{\nu\varkappa}| \leq \frac{K}{|4\lambda_n - \varkappa^2|}\left(1 + \frac{\varkappa}{\nu}\right) \quad (K \text{ Konstante}), \tag{45}$$

die also für $\lambda_n \neq 0$, $4\lambda_n \neq \varkappa^2 \neq \nu^2 \neq 0$ gültig ist. Hieraus folgt unmittelbar die Eigenschaft 3), weil nach Satz 1, Kap. 1 $\lambda_n = O(n^2)$ ist. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Anm. 1. Beschränkt man sich auf das Studium der Funktionensysteme $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ und $\{V_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$, so können allen Ergebnissen eine mehr symmetrische Form erteilt werden. Nehmen wir auf die Eigenschaft 2) (im Beweise von Satz A_2) Bezug, so finden wir leicht, dass auch das System $\{V_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ in bezug auf $L^2 g$ vollständig ist. Ist dann $f(x)$ eine beliebige Funktion $< L^2 g$ und

$$\alpha_\nu = \int_0^\pi f(x)\, U_\nu(x)\, dx, \; \beta_\nu = \int_0^\pi f(x)\, V_\nu(x)\, dx,$$

so erhält man eine einfache „Parsevalsche Relation" in der Form

$$\int_0^\pi f^2(x)\, dx = \sum_\nu \alpha_\nu \beta_\nu.$$

Der Zusammenhang zwischen den beiden Funktionensystemen $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ und $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos \nu x\right\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ kann besonders einfach ausgedrückt werden. Es ist

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos \varkappa x = \sum_\nu \varrho_{\nu\varkappa}\, U_\nu(x) \qquad (\varkappa = 0, 2, 4\ldots).$$

$$U_\nu(x) = \sum_\varkappa r_{\nu\varkappa} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos \varkappa x \qquad (\nu = 0, 2, 4\ldots).$$

Beide Reihen sind absolut konvergent (was für die letzte Reihe wie im Satz A_2 für die erste bewiesen wird), die Matrizen $R = (r_{\nu\varkappa})$ und $P = (\varrho_{\nu\varkappa})$ sind von der Form $E + R^*$ bzw. $E + P^*$ (R^* und P^* vollstetig), und es ist

$$\sum_\mu r_{\nu\mu}\varrho_{\varkappa\mu} = \begin{cases} 0, & \nu \neq \varkappa \\ 1, & \nu = \varkappa. \end{cases}$$

Anm. 2. Man erhält aus den Formeln (39), dass die Konstante M des Satzes $A_1 \geq 1$ ist. Mit Hilfe der Relation (41) erhält man für $f(x) = V_\nu(x)$:

$$M^2 \sum_\nu \alpha_\nu^2 = M^2 \geq \sum_\nu \alpha_\nu^2 = \int_0^\pi V_\nu^2(x)\, dx = 1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \to 1,\; \nu \to \infty.$$

Die Eigenwertaufgabe B.

15. In der Eigenwertaufgabe B:

$$\begin{cases} y'' + (\lambda + \varphi(x))\, y = 0 \qquad \varphi(x) < L g & (1) \\ \qquad y'(0) = y'(\pi) = 0 & (\mathrm{R}_2) \end{cases}$$

setzen wir gemäss 2) S. 31 nur *das reduzierte Spektrum* als bekannt voraus.

Hierdurch, wie auch durch die neuen Randbedingungen R_2, werden einige Modifikationen im Vergleich zum Verfahren bei der Eigenwertaufgabe A notwendig, die wir kurz angeben werden.

Wir nehmen wieder an, es gebe noch eine Eigenwertaufgabe

$$B'\colon \begin{cases} z'' + (\lambda + \psi(x))z = 0 & \psi(x) < Lg \qquad (1') \\ z'(0) = z'(\pi) = 0 & \qquad (R_2) \end{cases}$$

($\psi(x)$ soll die Bedingung (3') befriedigen), *deren reduziertes Spektrum mit dem der Eigenwertaufgabe B übereinstimmt.*

Wir führen zuerst ein modifiziertes Hilfssystem durch folgende *Definition B* ein:

$$U_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$U_{2n}(x) = y_n(x)\, z_n(x) - \frac{1}{2} y_n(0)\, z_n(0) \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots),$$

wobei $y_n(x)$ und $z_n(x)$ durch die Bedingungen (7) *festgelegte Eigenfunktionen der Eigenwertaufgaben B bzw. B' sein sollen.*

Die Vollständigkeit dieses Systems wird mit Hilfe der entsprechenden Gleichungssysteme (14) und (15) bewiesen, dem Verfahren im Fall A analog. Durch formale Erweiterung erhalten wir analog den entsprechenden Sätzen A:

Hilfssatz B_1: $U_\nu(x) < L^2 g,\ U_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \nu x + \frac{E_\nu(x)}{\nu} \qquad (\nu = 0, 2, 4 \ldots).$

Hilfssatz B_2: $R = (r_{\nu\varkappa}) = E + R^* \ (\nu, \varkappa = 0, 2, 4 \ldots),\ r_{\nu\varkappa} = \int\limits_0^\pi U_\nu(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \varkappa x \, dx.$

Hieraus folgt, dass die Gleichungssysteme (14) und (15) vollstetig sind. Die eindeutige Auflösbarkeit dieser Systeme wird durch folgenden Hilfssatz gesichert.

Hilfssatz B_3: *Es sei das Funktionensystem $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ durch die Definition B festgelegt. Dann gibt es ein System $\{V_\nu(x)\}_{\nu=0,2,4\ldots}$ beschränkter Funktionen mit $V_\nu(x) < L^2 g$, so dass das System*

$$\{U_\nu(x),\ V_\nu(x)\}_{\nu=2,4,6\ldots} \tag{46}$$

biorthogonal und normiert ist, während für $V_0(x)$ gilt:

$$\int\limits_0^\pi U_\nu(x)\, V_0(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \nu \neq 0 \\ 1, & \nu = 0. \end{cases} \tag{47}$$

Beweis: Die Behauptung hinsichtlich des Systems (46) ($\nu > 0$) ist der im Hilfssatz A_3 für $\nu > 0$ analog. Wir wählen hier

$$V_{2n}(x) = (y_n(x)\,\zeta_n(x))' \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots), \tag{48}$$

wobei $y_n(x)$ die durch die Bedingung (7) festgelegte n:te Eigenfunktion der Aufgabe B und $\zeta_n(x)$ eine Lösung der Dgl. (1') für den n:ten Eigenwert $\lambda = \lambda_n$ der Eigenwertaufgabe B sein sollen. Dann gilt (vgl. die Forderungen 1), 2) und 3) im Hilfssatz A_3) für $\nu = 2n$, $\mu = 2m$:

$$1) \qquad \int_0^\pi U_\nu(x)\,V_\mu(x)\,dx = I\,[(y_n(x)\,z_n(x)),\,(y_m(x)\,\zeta_m(x))], \tag{32'}$$

denn rechts steht nach der Definition (26)

$$\int_0^\pi (y_n(x)\,z_n(x))\,(y_m(x)\,\zeta_m(x))'\,dx - \frac{1}{2}\,y_n(x)\,z_n(x)\,y_m(x)\,\zeta_m(x)\,\Big/_0^\pi,$$

was infolge der Eigenschaft $y_n(\pi)\,z_n(\pi) = y_n(0)\,z_n(0)$ (Hilfssatz B_1) in

$$\int_0^\pi (y_n(x)\,z_n(x))\,(y_m(x)\,\zeta_m(x))'\,dx - \frac{1}{2}\,y_n(0)\,z_n(0)\,[y_m(x)\,\zeta_m(x)]_0^\pi \tag{49}$$

übergeht. Gemäss der Definition B hat aber der Ausdruck links von (32') gerade diese Form (49). Die Relation (32') ist damit bewiesen. Die Konstanten $\frac{1}{2}\,y_n(0)\,z_n(0)$ sind gerade zu diesem Zweck in die Funktionen $U_\nu(x)$ eingeführt.

2) Für $u(x) = y_n(x)\,z_n(x)$ und $v(x) = y_m(x)\,\zeta_m(x)$ verschwindet das rechte Glied von (27), unabhängig von der Wahl der Funktion $\zeta_m(x)$.

Die Funktion $\zeta_m(x)$ kann nun eindeutig bestimmt werden, wenn man die Eigenschaft

$$3) \qquad \int_0^\pi U_\nu(x)\,V_\nu(x)\,dx = I\,[(y_n(x)\,z_n(x)),\,(y_n(x)\,\zeta_n(x))] = +1$$

und die Erfüllung der Anfangsbedingungen (35) verlangt (vgl. Hilfssatz A_3).

Aus 1), 2) und 3) folgt die Biorthogonalität und Normierung des Systems (46) (vgl. Hilfssatz A_3). Aus 3) und (35) folgt $V_\nu(x) < L^2 g$ und es sind die $V_\nu(x)$ beschränkt. Die Behauptungen für $\nu > 0$ sind damit bewiesen.

Um die Behauptung (47) zu beweisen, gehen wir wie folgt vor. Wir setzen

$$V_0(x) = (y_0(x)\,\zeta_0(x))', \tag{48'}$$

worin $y_0(x)$ die durch (7) festgelegte 0:te Eigenfunktion der Aufgabe B ist und $\zeta_0(x)$ eine Lösung der Dgl. (1′) für den 0:ten Eigenwert $\lambda = \lambda_0$ der Eigenwertaufgabe B, es sei λ_0 ein Eigenwert der Eigenwertaufgabe B' oder nicht. Wir wählen $\zeta_0(x)$ so, dass sie die Anfangsbedingungen (35) für $n = 2k = 0$ befriedigt, d. h. es soll

$$\zeta_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

sein. Dann versuchen wir diese Lösung so zu bestimmen, dass sie die Bedingung der Behauptung (47):

$$\int_0^\pi U_0(x)\, V_0(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(y_0(\pi)\,\zeta_0(\pi) - y_0(0)\,\zeta_0(0)\right) = 1 \tag{50}$$

befriedigt. Wie früher folgt aber nun aus der Symmetrie der Funktion $\psi(x)$:

$$\zeta_0(x) = -\zeta_0(\pi - x),$$

und da $y_0(x) = y_0(\pi - x)$ (vgl. Gl. (9)) ist, geht also (50) in

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\, y_0(\pi)\,\zeta_0(\pi) = 1 \tag{51}$$

über. Die Relation (51) kann aber immer durch angemessene Wahl der Funktion $\zeta_0(x)$ befriedigt werden. Denn erstens ist $y_0(\pi) \neq 0$, weil $y_0'(\pi) = 0$ und $\int_0^\pi y_0^2(x)\, dx = \sqrt{2\pi}$ ist. Zweitens ist auch $\zeta_0(\pi)$ immer $\neq 0$, wenn $\zeta_0(x) \not\equiv 0$ ist, denn λ_0 ist sicher $< \lambda_1$ (der erste Eigenwert der Eigenwertaufgaben B und B'), und dieser gemeinsame Eigenwert der Eigenwertaufgaben B und B' ist gemäss STURMS Oszillationssatz dadurch charakterisiert, dass die entsprechenden Eigenfunktionen $y_1(x)$ und $z_1(x)$ nur eine Nullstelle im offenen, infolge der Randbedingungen R_2: $y'(0) = y'(\pi) = 0$ sogar im abgeschlossenen Intervall $\langle 0, \pi \rangle$ haben. Dasselbe muss dann auch von $\zeta_0(x)$ gelten. Also kann $\zeta_0(x)$ so gewählt werden, dass auch die Relation (51) befriedigt wird.

Wir brauchen also nur noch die Orthogonalität zu beweisen:

$$\int_0^\pi U_\nu(x)\, V_0(x)\, dx = 0, \qquad \nu > 0.$$

Diese folgt sogleich aus der Greenschen Formel (27), denn man findet leicht, dass die obigen Forderungen 1) und 2) befriedigt sind, auch wenn $\mu = 0$, $\nu > 0$ ist, und ferner ist immer $\lambda_n \neq \lambda_0$, wenn $n \neq 0$.

Aus obigem folgt nun allgemein $V_\nu(x) < L^2 g \, (\nu \geq 0)$ und $V_\nu(x)$ beschränkt, was den Beweis beendet.

Anm. Wenn wir vorausgesetzt hätten, es sei auch λ_0 ein gemeinsamer Eigenwert der Eigenwertaufgaben B und B', so hätten wir nicht obige spezielle Untersuchung hinsichtlich der Funktion $V_0(x)$ gebraucht. Es wird sich aber zeigen, dass hinsichtlich des Problems P die Voraussetzung, dass λ_0 bekannt sein soll, überflüssig ist und hinsichtlich des Problems P^* keine Voraussetzung möglich ist, wenn die übrigen Eigenwerte vorgeschrieben werden, weil gemäss den Ergebnissen im Gebiete des Problems P λ_0 sich als von diesen Eigenwerten nicht unabhängig erweist (vgl. Nr. 18).

Die Sätze der Vollständigkeit können nun bewiesen werden.

Satz B_1: *Es sei das Funktionensystem* $\{y_n(x) z_n(x)\}_{n=1,2,3\ldots}$ *mit den durch* (7) *festgelegten Eigenfunktionen der Eigenwertaufgaben B bzw. B' gebildet. Dann gelten die Behauptungen des Satzes A_1, wenn die Folge $n = 0, 1, 2 \ldots$ durch die Folge $n = 1, 2, 3 \ldots$ ersetzt wird.*

Der Beweis ist formal derselbe wie der des Satzes A_1. Wir brauchen nur A durch B zu ersetzen und die durch die Definition B bedingten Veränderungen zu beachten (es soll $\alpha_{2n} = +c_n$ statt $\alpha_{2n+2} = -c_n$ gewählt werden). Wir bemerken jedoch, dass der Beweis der ersten Behauptung des Satzes, der darauf hinauskommt, die Unmöglichkeit einer Relation

$$\sum_\nu x_\nu \int_0^\pi f(x)\, U_\nu(x)\, dx = 0$$

für alle $f(x) < L^2 g$, wenn $\sum_\nu x_\nu^2 = 1$ ist, zu zeigen, wesentlich davon abhängt, dass die Funktion $V_0(x)$ wie oben bestimmt werden kann.

Satz B_2: *Das Funktionensystem* $\{y_n(x) z_n(x)\}_{n=1,2,3\ldots}$ *des Satzes B_1 ist in bezug auf Lg vollständig.*

Beweis: Das System $\{U_\nu(x), V_\nu(x)\}_{\nu=0,1,2\ldots}$ ist nicht im allgemeinen biorthogonal und normiert. Deshalb können wir nicht gleich einfach wie oben den Beweis aus dem entsprechenden im Fall A erhalten. Wir müssen zuerst obiges System durch ein biorthogonales und normiertes System ersetzen. Dies wird wie folgt getan.

Wir setzen $(f(x) < L^2 g)$

$$\varrho_{\nu\varkappa} = \int_0^\pi V_\nu(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \varkappa x \, dx, \quad \beta_\nu = \int_0^\pi f(x) V_\nu(x) \, dx, \quad a_\nu = \int_0^\pi f(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \nu x \, dx$$

und erhalten folgendes Gleichungssystem:

$$\sum_\varkappa \varrho_{\nu\varkappa} a_\varkappa = \beta_\nu \qquad (\nu = 0, 2, 4 \ldots). \tag{14'}$$

Dieses Gleichungssystem ist, wie das entsprechende Gleichungssystem (14), für alle rechte Seiten mit $\sum\limits_\nu \beta_\nu^2 < \infty$ eindeutig auflösbar. Um dies zu zeigen, braucht man nur wie bei dem Gleichungssystem (14) die Eigenschaft $P = (\varrho_{\nu\varkappa}) = E + P^*$ der Matrix des Gleichungssystems zu zeigen und dann den Hilfssatz B_3 anzuwenden. Die Eigenschaft $P = E + P^*$ zeigt man durch Abschätzung der Funktionen $V_\nu(x)$: $V_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \nu x + O\left(\frac{1}{\nu}\right)$, woraus wie im Hilfssatz A_2 obige Eigenschaft folgt. Dann ist also das Gleichungssystem (14′) vollstetig. Die eindeutige Auflösbarkeit dieses Systems wird nun durch den Hilfssatz B_3 gesichert (vgl. den Beweis der ersten Behauptung des Satzes A_1).

Wählen wir dann $\beta_0 = 1$, $\beta_\nu = 0$ $(\nu = 2, 4, 6 \ldots)$, so gehört hierzu ein eindeutig bestimmtes Lösungssystem $\{a_\nu\}_{\nu = 0, 2, 4 \ldots}$ mit $\sum\limits_\nu a_\nu^2 < \infty$. Gemäss dem Riesz-Fischerschen Satz gibt es also eine Funktion $f(x) = U_0^*(x) \sim \sum\limits_\varkappa a_\varkappa \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \varkappa x < L^2 g$. Für sie gilt offenbar

$$\int_0^\pi U_0^*(x) \, V_\nu(x) \, dx = \sum_\varkappa \varrho_{\nu\varkappa} a_\varkappa = \beta_\nu = \begin{cases} 0, & \nu \neq 0 \\ 1, & \nu = 0. \end{cases}$$

Das System $\{U_\nu(x), V_\nu(x)\}^*$, in dem das Zeichen $*$ andeuten soll, dass $U_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ durch $U_0^*(x)$ ersetzt worden ist, ist dann biorthogonal und normiert. Dieses System ist das verlangte. Wir bilden das zum System $\{U_\nu(x)\}^*$ gehörige Gleichungssystem (14) und lösen es auf. Wie im Hilfssatz A_3 finden wir dann zuletzt

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \varkappa x = \varrho_{0\varkappa} U_0^* + \sum_\nu{}' \varrho_{\nu\varkappa} U_\nu(x) \ f. ü. \qquad (\varkappa = 0, 2, 4 \ldots)$$

$\left(\sum\limits_\nu{}'\right.$ soll Summation über die Folge $\nu = 2, 4, 6 \ldots$ bedeuten$\left.\right)$, wobei die Reihe rechts absolut konvergent ist. Da $\cos \varkappa x$ und $\sum_{\nu}' \varrho_{\nu\varkappa} U_\nu(x)$ stetig sind, kann auch $U_0^*(x)$ stetig gewählt werden, so dass obige Gleichungen überall gültig werden. Ist dann $g(x)$ eine Funktion $< Lg$, die den Bedingungen

$$\int_0^\pi g(x)\, U_\nu(x)\, dx = 0 \qquad (\nu = 0, 2, 4 \ldots)$$

genügt, so wird auch

$$0 = \int_0^\pi g(x)\, U_0(x)\, dx = \int_0^\pi g(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, dx = \int_0^\pi g(x) \Big[\varrho_{00}\, U_0^*(x) + \sum_{\nu}' \varrho_{\nu 0}\, U_\nu(x)\Big]\, dx =$$
$$= \varrho_{00} \int_0^\pi g(x)\, U_0^*(x)\, dx.$$

Da gemäss Hilfssatz B_3

$$\varrho_{00} = \int_0^\pi V_0(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, dx = \int_0^\pi V_0(x)\, U_0(x)\, dx = 1$$

ist, folgt

$$\int_0^\pi g(x)\, U_0^*(x)\, dx = 0$$

und also

$$\int_0^\pi g(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \varkappa x\, dx = \varrho_{0\varkappa} \int_0^\pi g(x)\, U_0^*(x)\, dx +$$
$$+ \sum_{\nu}' \varrho_{\nu\varkappa} \int_0^\pi g(x)\, U_\nu(x)\, dx = 0 \qquad (\varkappa = 0, 2, 4 \ldots),$$

woraus wir $g(x) = 0$ f. ü. erhalten. Also ist das System $\{U_\nu(x)\}_{\nu = 0, 2, 4 \ldots}$ in bezug auf Lg vollständig. In einfacher Weise folgt hieraus die Vollständigkeit in bezug auf Lg des Systems $\{y_n(x)\, z_n(x)\}_{n = 1, 2, 3 \ldots}$ (vgl. Satz A_1, Abt. 1).

Anm. Für das System $\{U_\nu(x), V_\nu(x)\}^*$ gilt die Anm. 1, S. 52 und für die Konstante M des Satzes B_1 gilt die Anm. 2 S. 53.

Wir haben nun vom Hauptfall 1, Nr. 6, der die Randbedingungen $R_1 \equiv$ $\equiv Ia$: $y(0) = y(\pi) = 0$ und Ib: $\begin{cases} \alpha y(0) + y'(0) = 0 \\ \gamma y(\pi) + y'(\pi) = 0 \end{cases}$ umfasst, die Randbedingungen Ia hinsichtlich der Vollständigkeit des entsprechenden Systems (5) in von uns verlangtem Umfang erschöpfend behandelt. Bei den Randbedingungen $I\,b$ haben wir nur den Spezialfall $\alpha = \gamma = 0$ behandelt. Wenn in den Randbedingungen $I\,b$ $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$, gelten die Ergebnisse im Fall $\alpha = \gamma = 0$ im allgemeinen nicht mehr. Dies beruht darauf, dass die Funktionen $U_\nu(x)$ und $V_\nu(x)$ nicht mehr die Eigenschaft $U_\nu(x) < L^2 g$, $V_\nu(x) < L^2 g$ besitzen. Wir geben ein Beispiel an, in dem eine Eigenwertaufgabe (1), $(I\,b)$ zu einem in bezug auf $L^2 g$ nicht vollständigen System $\{y_n(x) z_n(x)\}_{n=1,2,3\ldots}$ führt:

Die Eigenfunktionen für $n > 0$ der Eigenwertaufgabe

$$y'' + \lambda y = 0, \begin{cases} m\,y(0) + y'(0) = 0 \\ m\,y(\pi) + y'(\pi) = 0 \end{cases} \qquad m \text{ ganze Zahl} > 0$$

sind von der Form

$$y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}(n \cos n x - m \sin n x) \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

Wählen wir dann als Gleichung (1') dieselbe Gleichung wie oben, erhalten wir

$$y_n(x) z_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{n^2 - m^2}{2(n^2 + m^2)} \cos 2 n x - \frac{m n}{m^2 + n^2} \sin 2 n x \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots; n \neq m)$$

$$y_m(x) z_m(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 2 m x.$$

Offenbar ist die Funktion $\cos 2 m x < L^2 g$ zu allen Funktionen des Systems $\{y_n(x) z_n(x)\}_{n=1,2,3\ldots}$ orthogonal. Dieses System ist also nicht in bezug auf $L^2 g$ vollständig.

Die Eigenwertaufgaben C und D.

16. Die Ergebnisse bei den Eigenwertaufgaben A und B zeigen, dass die entsprechenden Funktionensysteme $\{y_n(x) z_n(x)\}$ in gewissem Sinn in bezug auf „die Hälfte" des Raumes $L(0, \pi)$ vollständig sind. Das Ergebnis am Ende von Nr. 15 zeigt, dass diese „Hälfte" nicht immer gleich einfach zu charakterisieren ist wie in den genannten Fällen $(L g)$. Wir werden in dieser Nr. zeigen, dass zu einer beliebigen S-L Eigenwertaufgabe jedoch immer eine „ergänzende" S-L Eigenwertaufgabe gehört, so dass das System $\{y_n(x) z_n(x)\}$ der ersten Aufgabe durch das entsprechende System der zweiten Aufgabe zu einem in bezug auf $L(0, \pi)$ vollständigen System ergänzt werden kann.

Die Eigenwertaufgaben C sind folgende:

$$C: \begin{cases} y'' + (\lambda + \varphi(x))y = 0, \qquad \varphi(x) < L(0,\pi) & (2) \\ y(0) = y(\pi) = 0 & (I\,a) \\ \left.\begin{array}{r} y(0) = 0 \\ \gamma y(\pi) + y'(\pi) = 0 \end{array}\right\}. & (II\,a) \end{cases}$$

Wie gewöhnlich bilden wir die entsprechenden Eigenwertaufgaben C' bei der Dgl.

$$z'' + (\lambda + \psi(x))z = 0, \qquad \psi(x) < L(0,\pi) \tag{2'}$$

(es soll $\psi(x)$ der Bedingung (3') genügen) und nehmen an, *die Aufgaben C und C' haben dieselben Eigenwerte.*

Wir sprechen sofort unsere Hauptsätze aus:

Satz C_1: *Es sei das System*

$$\{y_n(x)\, z_n(x)\}_{n=0,1,2\ldots}$$

mit den durch (7) *festgelegten Eigenfunktionen der Eigenwertaufgaben* (2), ($I\,a$) *bzw.* (2'), ($I\,a$) *und das System*

$$\{\bar{y}_n(x)\, \bar{z}_n(x)\}_{n=0,1,2\ldots}$$

mit den durch (7) *festgelegten Eigenfunktionen der Eigenwertaufgaben* (2), ($II\,a$) *bzw.* (2'), ($II\,a$) *gebildet. Dann gilt*

1. *Die Funktionen dieser beiden Systeme bilden zusammen ein in bezug auf $L^2(0,\pi)$ vollständiges System.*

2. *Zu jeder Zahlenfolge $\{c_n\}_{n=0,1,2\ldots}$ und $\{\bar{c}_n\}_{n=0,1,2\ldots}$ mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(c_n^2 + \bar{c}_n^2) < \infty$ gehört eindeutig eine Funktion $f(x) < L^2(0,\pi)$, für die*

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

$$c_n = \int_0^{\pi} f(x)\, y_n(x)\, z_n(x)\, dx, \quad \bar{c}_n = \int_0^{\pi} f(x)\, \bar{y}_n(x)\, \bar{z}_n(x)\, dx$$

ist.

3. *Es gibt zwei von $f(x)$ unabhängige Konstanten m und M, $0 < \begin{Bmatrix} m \\ M \end{Bmatrix} < \infty$, so dass*

$$m^2 \sum_{n=0}^{\infty}(c_n^2 + \bar{c}_n^2) \le \int_0^{\pi} f^2(x)\,dx \le M^2 \sum_{n=0}^{\infty}(c_n^2 + \bar{c}_n^2)$$

gilt.

Satz C_2: *Das zusammengesetzte Funktionensystem, das im Satz C_1 definiert ist, ist in bezug auf $L(0, \pi)$ vollständig.*

Die Beweise dieser Sätze werden grösstenteils durch formale Erweiterungen aus den Beweisen im Fall A erhalten. Zuerst führen wir das Hilfssystem $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,1,2\ldots}$ durch folgende *Definition C* ein:

$$U_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$U_{2n+2}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi y_n(x)\, z_n(x)\, dx - y_n(x)\, z_n(x)$$

$$U_{2n+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \bar{y}_n(x)\, \bar{z}_n(x)\, dx - \bar{y}_n(x)\, \bar{z}_n(x),$$

wobei die Bezeichnungen dieselben wie im Satz C_1 sind. Zu diesem System gehört das Gleichungssystem (15) mit $\nu, \varkappa = 0, 1, 2 \ldots$. Dieses Gleichungssystem ist vollstetig infolge folgender Eigenschaften des Systems $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,1,2\ldots}$:

Hilfssatz C_1: $U_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \nu x + \frac{E_\nu(x)}{\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2 \ldots).$

Hilfssatz C_2: $R = (r_{\nu\varkappa}) = E + R^* \qquad (\nu, \varkappa = 0, 1, 2 \ldots).$

(Diese Hilfssätze werden formal wie die entsprechenden Hilfssätze A_1 und A_2 erhalten). Die eindeutige Auflösbarkeit des Gleichungssystems, die mit der Vollständigkeit des Systems $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,1,2\ldots}$ in bezug auf $L^2(0, \pi)$ gleichbedeutend ist (vgl. Nr. 11) wird durch folgenden Hilfssatz gesichert:

Hilfssatz C_3: *Es sei das Funktionensystem $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,1,2\ldots}$ durch die Definition C festgelegt. Dann gibt es ein System $\{V_\nu(x)\}_{\nu=0,1,2\ldots}$ beschränkter Funktionen, so dass das System*

$$\{U_\nu(x),\ V_\nu(x)\}_{\nu=0,1,2\ldots}$$

biorthogonal und normiert ist.

Beweis: Wir wählen hier

$$\left.\begin{aligned} V_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ V_{2n+2}(x) &= (y_n(x)\,\zeta_n(x))' \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots) \\ V_{2n+1}(x) &= (\bar{y}_n(x)\,\bar{\zeta}_n(x))' \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

wobei $\zeta_n(x)$ eine Lösung der Dgl. (2′) für den n:ten Eigenwert $\lambda = \lambda_n$ der Eigenwertaufgabe (2), $(I\,a)$ und $\bar{\zeta}_n(x)$ eine Lösung der Dgl. (2′) für den n:ten Eigenwert $\lambda = \bar{\lambda}_n$ der Eigenwertaufgabe (2), $(II\,a)$ sein sollen.

Es sei zuerst $\nu > 0$. Setzen wir

$$u_n(x) = y_n z_n,\ \ v_m(x) = y_m \zeta_m;\ \ \bar{u}_n(x) = \bar{y}_n \bar{z}_n,\ \ \bar{v}_m(x) = \bar{y}_m \bar{\zeta}_m.$$

Wie im Hilfssatz A_3 erzielen wir eine der Relation (32) analoge Relation

$$1) \qquad \int\limits_0^\pi U_\nu(x)\, V_\mu(x)\, dx = -I(u, v)$$

mit $u = u_n$ oder $u = \bar{u}_n$ je nachdem ν gerade $= 2n + 2$ oder ungerade $= 2n + 1$ ist und mit entsprechender Festlegung von v.

Weiter verlangen wir, dass

2) bei der obigen Wahl der Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ das rechte Glied der Relation (27) verschwinden soll.

Man sieht sogleich ein, dass die Forderung 2) für jede Wahl der Funktion ζ_m $(\bar{\zeta}_m)$ befriedigt ist, wenn $u = u_n$, $v = v_m$ oder $u = \bar{u}_n$, $v = \bar{v}_m$ gesetzt wird, wie dies im Hilfssatz A_3 der Fall war. Wenn aber $u = u_n$, $v = \bar{v}_m$ oder $u = \bar{u}_n$, $v = v_m$ ist, bleibt im allgemeinen der Ausdruck (rechts von 27)

$$\left[\begin{vmatrix} y\ (x) & \eta\ (x) \\ y'(x) & \eta'(x) \end{vmatrix}\begin{vmatrix} z\ (x) & \zeta\ (x) \\ z'(x) & \zeta'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y\ (x) & \zeta\ (x) \\ y'(x) & \zeta'(x) \end{vmatrix}\begin{vmatrix} z\ (x) & \eta\ (x) \\ z'(x) & \eta'(x) \end{vmatrix}\right]_{x=\pi},$$

in der also $y = y_n$, $z = z_n$; $\eta = \bar{y}_m$, $\zeta = \bar{\zeta}_m$ oder $y = \bar{y}_n$, $z = \bar{z}_n$; $\eta = y_m$, $\zeta = \zeta_m$ zu setzen ist, von Null verschieden, weil $y_n(x)$, $z_n(x)$ einerseits und $\bar{y}_m(x)$, $\bar{z}_m(x)$ andererseits für $x = \pi$ verschiedenen Randbedingungen genügen. Die Funktion $\zeta_m(\bar{\zeta}_m)$ ist aber noch unbestimmt. Wählen wir $\zeta_m(x)$ so, dass $\zeta_m(x)$ die Randbedingungen der Funktionen $\bar{y}_n(x)$ und $\bar{z}_n(x)$ für $x = \pi$ befriedigt, d. h.

$$\gamma\, \zeta_m(\pi) + \zeta_m'(\pi) = 0 \tag{53}$$

und $\bar{\zeta}_m(x)$ in entsprechender Weise:

$$\bar{\zeta}_m(\pi) = 0, \tag{54}$$

so verschwindet auch dieser Ausdruck, und wir erhalten im rechten Glied von (27) Null.

Wählen wir $\zeta_m(x)$ und $\bar{\zeta}_m(x)$ wie oben, erhält man

$$\int_0^\pi V_\nu(x)\,dx = \left\{\begin{matrix} y_n(x)\ \zeta_n(x)\Big/_0^\pi \\ \\ \bar{y}_n(x)\ \bar{\zeta}_n(x)\Big/_0^\pi \end{matrix}\right\} = 0 \qquad (\nu > 0). \tag{55}$$

Nehmen wir nun auf die Definition der belasteten Integration (26) Bezug, finden wir sogleich, dass die Forderung 1) befriedigt ist. Weiter ist die Forderung 2) befriedigt. Dann folgt gemäss der Relation (27) z. B. ($\nu = 2n+2,\ \mu = 2m+2$)

$$4(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^\pi U_\nu(x)\, V_\mu(x)\,dx = 0.$$

Analoge Relationen werden erhalten, wenn ν oder μ oder beide Indizes ungerade sind. Weil $\lambda_m \neq \lambda_n$, $\bar\lambda_m \neq \bar\lambda_n$ für $n \neq m$ ist, $\lambda_m \neq \bar\lambda_n$, folgt also

$$\int_0^\pi U_\nu(x)\, V_\mu(x)\,dx = 0 \qquad \nu \neq \mu$$

($\nu > 0$).

Schliesslich verlangen wir die Normierung des Systems:

$$3) \qquad \int_0^\pi U_\nu(x)\, V_\nu(x)\,dx = -I(u(x),\, v(x)) = 1.$$

Man findet wie im Hilfssatz A_3, dass diese Bedingung mit einer Anfangsbedingung für $\zeta_m(\bar\zeta_m)$ in einem beliebigen Punkt gleichbedeutend ist. Da zur Bestimmung von $\zeta_m(\bar\zeta_m)$ schon die Anfangsbedingungen (53), (54) vorliegen, erhalten wir also z. B. für $\zeta_m(x)$ folgendes System von Anfangsbedingungen:

$$\gamma\,\zeta_n(\pi) + \zeta_n'(\pi) = 0 \tag{53}$$

$$-z_n'(\pi)\,\zeta_n(\pi) + z_n(\pi)\,\zeta_n'(\pi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{34'}$$

Weil $\gamma z_n(\pi) + z_n'(\pi) \neq 0$ ist, folgt hieraus die Möglichkeit, die Funktionen $\zeta_n(x)$ wie verlangt zu bestimmen. Ein gleiches gilt für $\bar\zeta_n(x)$.

Damit haben wir gefunden, dass das System $\{U_\nu(x),\ V_\nu(x)\}_{\nu=1,2,3\ldots}$ biorthogonal und normiert ist. Aus den Definitionen C und (52) und mit Hilfe der Relation (55) erhält man

$$\int_0^\pi U_0(x)\, V_\nu(x)\,dx = \int_0^\pi U_\nu(x)\, V_0(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \nu \neq 0 \\ 1, & \nu = 0. \end{cases}$$

Da offenbar die Funktionen $V_\nu(x)$ beschränkt sind, ist hiermit der Hilfssatz bewiesen.

Anm. Man sieht sogleich ein, dass der einzige nichttriviale Punkt in diesem Beweis, der im Verhältnis zum Beweis des Hilfssatzes A_3 neu ist, mit der Wahl der Funktion $\zeta_n(\bar{\zeta}_n)$ verknüpft ist

Nunmehr kann man die Beweise obiger Sätze durch formale Erweiterung aus den entsprechenden Beweisen der Sätze A_1 und A_2 unmittelbar erhalten. Hiermit schliessen wir die Behandlung der Eigenwertaufgaben C ab.

Die Eigenwertaufgaben D sind folgende

$$\begin{cases} y'' + (\lambda + \varphi(x))\, y = 0, \quad \varphi(x) < L(0, \pi) & (2) \\ \left.\begin{aligned} \alpha\, y(0) + y'(0) = 0 \\ \gamma\, y(\pi) + y'(\pi) = 0 \end{aligned}\right\} & (I\,b) \\ \left.\begin{aligned} \alpha\, y(0) + y'(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{aligned}\right\}, & (II\,b) \end{cases}$$

und *es ist nur das reduzierte Spektrum von* (2), $(I\,b)$ *bekannt.* Hierdurch wird die Behandlung dieser Eigenwertaufgaben derjenigen der Eigenwertaufgabe B analog, in derselben Weise wie die Eigenwertaufgaben C der Eigenwertaufgabe A analog behandelt wurden. Es gilt hier analog der Anmerkung am Ende des Beweises des Hilfssatzes C_3, dass die Wahl der Funktionen $\zeta_n(x)\,(\bar{\zeta}_n(x))$ die einzige nichttriviale Erweiterung im Verhältnis zum Fall B ist. Deshalb führen wir den Beweis nicht durch, sondern begnügen uns damit, die Hauptsätze auszusprechen. Wie gewöhnlich nehmen wir dabei an, *die entsprechenden Eigenwertaufgaben D' bei der Dgl.* (2') *haben dieselben* (*reduzierten*) *Spektren wie die Eigenwertaufgaben D.* Dann ergibt sich:

Satz D_1: *Es sei das System*

$$\{y_n(x)\, z_n(x)\}_{n=1, 2, 3 \ldots}$$

mit den durch (7) *festgelegten Eigenfunktionen der Eigenwertaufgaben* (2), $(I\,b)$ *bzw.* (2'), $(I\,b)$ *und das System*

$$\{\bar{y}_n(x)\, \bar{z}_n(x)\}_{n=0, 1, 2 \ldots}$$

mit den durch (7) *festgelegten Eigenfunktionen der Eigenwertaufgaben* (2), $(II\,b)$ *bzw.* (2'), $(II\,b)$ *gebildet. Dann gelten die Behauptungen des Satzes C_1, wenn die Folge $\{c_n\}_{n=0, 1, 2 \ldots}$ durch die Folge $\{c_n\}_{n=1, 2, 3 \ldots}$ ersetzt wird.*

Satz D_2: *Das von den beiden Funktionensystemen* $\{y_n(x)\,z_n(x)\}_{n=1,2,3\ldots}$ *und* $\{\bar{y}_n(x)\,\bar{z}_n(x)\}_{n=0,1,2\ldots}$ *des Satzes* D_1 *gebildete zusammengesetzte System ist in bezug auf* $L(0, \pi)$ *vollständig.*

Da immer die Sturm-Liouvilleschen Randbedingungen von einer der Formen Ia—IIb sind, folgt aus obigem der am Anfang dieser Nr. erwähnte Sachverhalt, dass zu jeder Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe eine ergänzende Eigenwertaufgabe gehört, so dass die entsprechenden Systeme $\{y_n(x)\,z_n(x)\}$ zusammen ein in bezug auf $L(0, \pi)$ vollständiges System bilden.

Kapitel 3.

Eindeutigkeits- und Existenzsätze.

17. In diesem Kapitel werden wir unsere Hauptergebnisse hinsichtlich der Probleme P und P^*[1] angeben. Wir behandeln zuerst das Problem P, d. h. das Problem, inwieweit eine Funktion $\varphi(x) < L(0, \pi)$ durch ihre S-L Spektren eindeutig bestimmt wird.

Wenn die Randbedingungen von der Form Ib: $\begin{cases}\alpha\,y(0) + y'(0) = 0\\ \gamma\,y(\pi) + y'(\pi) = 0\end{cases}$ sind, soll immer das entsprechende Spektrum *ein reduziertes* sein[2]. Wenn die Randbedingungen in allgemeiner Form gegeben sind, schreiben wir statt nur Spektrum: (reduziertes) Spektrum, womit gemeint wird, dass das Spektrum reduziert sein soll, wenn diese Randbedingungen gerade die Form Ib haben.

Wir wollen auch den Ausdruck: *ergänzende Eigenwertaufgabe* in derselben Bedeutung wie in der Nr. 16 anwenden. Wir definieren den Begriff genau in folgendem Satz, der unser Hauptsatz hinsichtlich des Problems P ist.

Satz P: 1) *Die Funktion* $\varphi(x)$ *einer Dgl.*

$$y'' + (\lambda + \varphi(x))\,y = 0,\ \varphi(x) < L(0, \pi) \tag{1}$$

ist nie durch die Kenntnis des (reduzierten) Spektrums bei den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \alpha\,y(0) + \beta\,y'(0) &= 0 \qquad |\alpha| + |\beta| > 0 \\ \gamma\,y(\pi) + \delta\,y'(\pi) &= 0 \qquad |\gamma| + |\delta| > 0 \end{aligned} \tag{2}$$

eindeutig bestimmt.

---

[1] Vgl. die Einleitung, S. 6.

[2] Hinsichtlich der Bedeutung des reduzierten Spektrums, vgl. S. 31.

2) *Ist auch das (reduzierte) Spektrum einer ergänzenden Eigenwertaufgabe:*

$$\begin{cases} Dgl.\ (1) \\ Randbedingungen: \begin{cases} \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0 & |\alpha| + |\beta| > 0 \\ \gamma' y(\pi) + \delta' y'(\pi) = 0 & |\gamma'| + |\delta'| > 0 \end{cases} \end{cases} \tag{3}$$

mit

$$\delta\delta' = 0, \ |\delta| + |\delta'| > 0$$

bekannt, so wird $\varphi(x)$ eindeutig bestimmt.

3) *Ist ein einziger Eigenwert der (reduzierten) Spektren obiger Eigenwertaufgaben nicht bekannt, so bleibt $\varphi(x)$ unbestimmt.*

Beweis: Die Behauptungen 1) und 3) sind Folgerungen aus dem späteren Satz P^*.

Die Behauptung 2) beweist man mit Hilfe der Sätze C_2 und D_2, Kap. 2. Wie man unmittelbar einsieht, ist die ergänzende Eigenwertaufgabe so gewählt, dass die Kombination obiger Eigenwertaufgaben entweder mit der kombinierten Eigenwertaufgabe C oder D übereinstimmt. Um die Ideen zu fixieren, möge $\beta = 0$ sein. Die Kombination der Randbedingungen (2) und (3) ist dann mit der folgenden übereinstimmend:

$$y(0) = y(\pi) = 0 \quad (I\,a) \text{ und } \quad \left.\begin{aligned} y(0) = 0 \\ \gamma y(\pi) + y'(\pi) = 0 \end{aligned}\right\} \ (II\,a),$$

und es liegen also die Eigenwertaufgaben C, Kap. 2, vor. Der Einfachheit halber wollen wir $\int_0^\pi \varphi(x)\,dx = 0$ voraussetzen, was offenbar keine Beschränkung bedeutet. Wenn nun die Dgl.

$$z'' + (\lambda + \psi(x))z = 0, \ \psi(x) < L(0, \pi) \tag{4}$$

dieselben Spektren bei obigen Randbedingungen $I\,a$ und $II\,a$ wie die Dgl. (1) hat, erhält man die der Relation (4), Kap. 2 analogen Relationen

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\pi [\varphi(x) - \psi(x)]\, y_n(x)\, z_n(x)\, dx = 0 \\ \int_0^\pi [\varphi(x) - \psi(x)]\, \bar{y}_n(x)\, \bar{z}_n(x)\, dx = 0 \end{aligned}\right. \quad (n = 0, 1, 2 \ldots), \tag{5}$$

worin $y_n(x)$, $z_n(x)$ Eigenfunktionen der Dgl. (1) bzw. (4) bei den Randbedingungen $(I\,a)$ und $\bar{y}_n(x)$, $\bar{z}_n(x)$ entsprechende Eigenfunktionen bei den Randbedingungen $(II\,a)$ sein sollen.

Wie man unmittelbar findet, gilt nun nach der Festlegung (7), Kap. 2, z. B.

$$y_n(x)\, z_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(1 - \cos(2n+2)x) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

auch wenn $\int\limits_0^\pi \psi(x)\, dx \neq 0$ ist. Also folgt aus (5) $\int\limits_0^\pi [\varphi(x) - \psi(x)]\, dx = o(1)$ d. h.

$$\int\limits_0^\pi [\varphi(x) - \psi(x)]\, dx = 0,$$

so dass auch $\int\limits_0^\pi \psi(x)\, dx = 0$ sein muss.

Nach obigen Festlegungen und Ergebnissen ist also die Kombination der Eigenwertaufgaben (1), $(I\,a)$ und (1), $(II\,a)$ mit der kombinierten Eigenwertaufgabe C, Kap. 2 identisch, und die Kombination (4), $(I\,a)$ und (4), $(II\,a)$ ist mit der kombinierten Eigenwertaufgabe C' identisch. Gemäss Satz C_2, Kap. 2 folgt also aus den Relationen (5)

$$\varphi(x) = \psi(x) \;\; f.\ \ddot{u}.,$$

was unsere Behauptung ist. Analog beweist man im Fall $\beta \neq 0$. Hiermit ist der Beweis beendet.

Anm. Man könnte auch die Randbedingungen der ergänzenden Eigenwertaufgabe auf die Form

$$\begin{aligned} \alpha' y(0) + \beta' y'(0) &= 0 \qquad |\alpha'| + |\beta'| > 0 \\ \gamma y(\pi) + \delta y'(\pi) &= 0 \qquad |\gamma| + |\delta| > 0 \end{aligned}$$

mit $\beta\beta' = 0$, $|\beta| + |\beta'| > 0$ schreiben. Denn dieser Fall wird nach der Transformation $x' = \pi - x$ von derselben Form wie der obige. Gerade deshalb ist er auch nur eine triviale Erweiterung des obigen Falles.

Kehren wir einen Augenblick zu den Ausführungen der Nr. 6 zurück. Gemäss obigem Satz können wir sagen, dass die ganze Fourierkoeffizientenfolge der Funktion $\varphi(x)$ durch zwei angemessen gewählte S-L Spektren eindeutig bestimmt wird, und dass dazu eines nicht hinreicht (Hauptfall 3. Nr. 6). Man kann dann vermuten, dass ein einziges Spektrum eine gewisse Teilfolge der Fourierkoeffizientenfolge eindeutig bestimmen soll (die „Hälfte", vgl. Nr. 6, besonders die Hauptfälle 1 und 2). In bezug auf das Ergebnis am Ende von Nr. 15 scheint es schwer, diese Teilfolge bei allgemeinen Randbedingungen zu charakterisieren; das Ergebnis dürfte wohl auch von geringem Interesse sein. Wir haben jedoch zwei

Eigenwertaufgaben: A und B, Kap. 2, behandelt, in denen diese Charakterisierung einfach ist. Sie ergeben folgende Sätze:

Satz P_1: *Die Funktion $\varphi(x)$ einer Dgl.* (1) *ist durch die Kenntnis des Spektrums der Dgl. bei den Randbedingungen R_1: $y(0) = y(\pi) = 0$ eindeutig bestimmt, wenn die Bedingung*

$$\varphi(x) = \varphi(\pi - x) \ f.\ ü.$$

auferlegt wird.

Satz P_2: *Die Funktion $\varphi(x)$ einer Dgl.* (1) *ist durch die Kenntnis des reduzierten Spektrums der Dgl. bei den Randbedingungen R_2: $y'(0) = y'(\pi) = 0$ eindeutig bestimmt, wenn die Bedingung*

$$\varphi(x) = \varphi(\pi - x) \ f.\ ü.$$

auferlegt wird.

Die Beweise sind dem von Satz P: 2 analog. Wir stützen uns aber hier auf die Sätze A_2 und B_2 statt auf die Sätze C_2 und D_2, Kap. 2. Das im Satz P: 3 angegebene Verhältnis gilt in analoger Form auch hier.

Anm. 1. Die Frage, ob die im Satz P angegebenen ergänzenden Eigenwertaufgaben die einzigen sind, bleibt unentschieden. Dies hängt von der von uns angewandten Methode ab.

Anm. 2. Gemäss den obigen Sätzen P, P_1 und P_2 ist der Inhalt der Sätze des vorigen Kapitels einfacher als der dort ausgedrückte. Z. B. sind die Eigenwertaufgaben A und A' identisch. In den Sätzen A ist es also angemessen, $y_n(x) z_n(x)$ durch $y_n^2(x)$ zu ersetzen. Entsprechendes gilt in den anderen Fällen B—D.

Anm. 3. Es ist einfach, zu zeigen, dass die Eigenwertaufgaben (3), (4) und (3), (5) der Einleitung für $\omega = \pi$ und $\varphi(-x) = \varphi(x)$ dieselben Eigenwerte und Eigenfunktionen wie die Eigenwertaufgaben A und B, Kap. 2 haben[1]. Aus obigen Sätzen P_1 und P_2 folgt also, dass, *wenn $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\varphi(x + \pi) = \varphi(x)$ ist, die Funktion $\varphi(x)$ durch die Instabilitätsintervalle eindeutig bestimmt wird.*

18. Die im Kap. 1 hervorgehobene Analogie zwischen dem (reduzierten) Spektrum und der Fourierkoeffizientenfolge von $\varphi(x)$ in den drei Hauptfällen von Nr. 6 wird durch obige Sätze in den hier behandelten Fällen (Eigenwertaufgaben A—D, Kap. 2) vertieft. Wie in der Nr. 6 erwähnt, treten im speziellen

---

[1] Vgl. Bôcher [2] S. 448. Er erwähnt nur den Fall der Randbedingungen $\begin{cases} y(0) = y(\pi) \\ y'(0) = y'(\pi) \end{cases}$.

Fall: $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ totalstetig auch andere Eigenschaften des S-L Spektrums hervor, die kein Gegenstück im Gebiet der Fourierreihen haben. Analog verhält es sich, wenn es sich um die eindeutige Bestimmung der Funktion $\varphi(x)$ durch S-L Spektren handelt. Wir erhalten folgenden einfachen Satz:

Wenn in der Dgl.

$$y'' + (\lambda + \varphi(x))y = 0, \qquad \int_0^\pi \varphi(x)\,dx = 0,$$

$\varphi'(0) = \varphi'(\pi)$ *ist,* $\varphi(x)$ *nebst* $\varphi'(x)$ *totalstetig ist und ihr Spektrum bei den Randbedingungen*

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

unendlich viele Quadrate ganzer Zahlen enthält, so muss

$$\varphi(x) \equiv 0$$

sein.

Beweis: Da man nach Satz 1, Kap. 1,

$$d_n = \lambda_n - (n+1)^2 = o(1)$$

hat, so muss es offenbar nach Voraussetzung eine Folge n_ν geben, so dass

$$d_{n_\nu} = \lambda_{n_\nu} - (n_\nu + 1)^2 = 0, \qquad n_\nu \to \infty$$

gilt. Hieraus und aus den Voraussetzungen, dass $\varphi(x), \varphi'(x)$ totalstetig und $\varphi'(0) = \varphi'(\pi)$ ist, folgt nun nach dem genannten Satz

$$C_1 = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\pi \varphi^2(x)\,dx + \varphi'(\pi) - \varphi'(0)\right] = o(1)$$

und also

$$\int_0^\pi \varphi^2(x)\,dx = o(1), \qquad n_\nu \to \infty,$$

was die Behauptung beweist.

Entsprechende Behauptungen können mit Hilfe von Satz 1, Kap. 1 auch bei anderen Randbedingungen bewiesen werden.

Bei der speziellen Form $I\,b$: $\begin{cases} \alpha y(0) + y'(0) = 0 \\ \gamma y(\pi) + y'(\pi) = 0 \end{cases}$ der Randbedingungen (2) haben wir nur mit dem reduzierten Spektrum gearbeitet. Wie früher erwähnt, nimmt der Eigenwert λ_0 eine besondere Stellung ein. Da die Funktion $\varphi(x)$ auch ohne die Kenntnis dieses Eigenwerts in den Eigenwertaufgaben der Sätze P und P_2 eindeutig bestimmt wird, erweist sich also λ_0 als von den übrigen Eigenwerten dieser Aufgaben nicht unabhängig. In einem einfachen Falle kann umgekehrt die Kenntnis von λ_0 die Kenntnis aller übrigen Eigenwerte ersetzen. Wir erhalten folgenden recht trivialen Satz:

Es möge die Dgl.

$$y'' + (\lambda + \varphi(x))y = 0, \qquad \varphi(x) < L(0, \pi)$$

mit $\int\limits_0^\pi \varphi(x)\,dx = 0$ *bei den Randbedingungen*

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

den kleinsten Eigenwert $\lambda_0 = 0$ *haben. Dann muss* $\varphi(x) = 0$ *f. ü. sein.*

Beweis: Der kleinste Eigenwert entspricht einer Eigenfunktion $y(x) \neq 0$ im abgeschlossenen Intervall $\langle 0, \pi \rangle$. Also erhält man

$$0 = \int\limits_0^\pi \frac{y''}{y}\,dx + \int\limits_0^\pi (\lambda_0 + \varphi(x))\,dx = \frac{y'(x)}{y(x)}\Bigg/_0^\pi + \int\limits_0^\pi \frac{y'^2}{y^2}\,dx,$$

woraus

$$y'(x) = 0$$

und

$$\varphi(x) = \frac{y''(x)}{y(x)} = 0 \quad f.\ ü.$$

folgt.

19. Wir gehen nun zum Problem P^* über. Unsere wesentlichen Ergebnisse sind Existenzsätze „im Kleinen", was hier eine Beschränkung bedeutet, die aus folgendem Satz hervorgeht. Dieser Satz entspricht dem Satz P:

Satz P^*: *Es sei* $\{\lambda_n\}$ *das (reduzierte) Spektrum der Eigenwertaufgabe* (1), (2) *und* $\{\mu_n\}$ *das (reduzierte) Spektrum einer ergänzenden Eigenwertaufgabe* (1), (3) *(Satz P). Dann gibt es eine Zahl* $\varrho > 0$, *so dass eine Zahlenfolge* $\{\overset{*}{\lambda}_n\}$ *und eine Zahlenfolge* $\{\overset{*}{\mu}_n\}$, *die der Bedingung*

$$\sum |\lambda_n - \overset{*}{\lambda}_n|^2 + \sum |\mu_n - \overset{*}{\mu}_n|^2 \leq \varrho^2 \tag{6}$$

genügen, die (reduzierten) Spektren einer und nur einer Dgl.

$$y'' + (\overset{*}{\lambda} + \overset{*}{\varphi}(x))y = 0 \tag{7}$$

mit

$$\overset{*}{\varphi}(x) - \varphi(x) < L^2(0, \pi) \tag{8}$$

und

$$\int\limits_0^\pi (\overset{*}{\varphi}(x) - \varphi(x))\,dx = 0 \tag{9}$$

bei den Randbedingungen (2) *bzw.* (3) *darstellen.*

Anm. Wie gewöhnlich lassen wir n die Folge $n = 1, 2, 3 \ldots$ durchlaufen, wenn $\{\lambda_n\}$ oder $\{\mu_n\}$ ein Spektrum bei den Randbedingungen $I\,b$: $\begin{cases} \alpha\, y(0) + y'(0) = 0 \\ \gamma\, y(\pi) + y'(\pi) = 0 \end{cases}$ (d. h. ein reduziertes Spektrum) ist und die Folge $n = 0, 1, 2 \ldots$ bei den übrigen Formen der Randbedingungen. Die entsprechende Summation soll sich auf dieselbe Folge beziehen.

Beweis: 1. *Vorbereitung.*

Der Einfachheit halber nehmen wir an, es sei

$$\int_0^\pi \varphi(x)\, dx = 0, \tag{10}$$

was offenbar keine Beschränkung bedeutet. Die behauptete Relation (9) geht dann in

$$\int_0^\pi \overset{*}{\varphi}(x)\, dx = 0 \tag{9'}$$

über. Weiter beschränken wir uns wie im Satz P darauf, den Fall $\beta = 0$ zu beweisen, so dass die Kombination der Randbedingungen (2) und (3) mit der folgenden Kombination übereinstimmt:

$$y(0) = y(\pi) = 0 \quad (I\,a) \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} y(0) = 0 \\ \gamma\, y(\pi) + y'(\pi) = 0 \end{aligned}\right\} (II\,a).$$

Die Lösungen der Dgl. (1) wollen wir in diesem Beweis mit $z(x)$ und $\zeta(x)$ bezeichnen, die der behaupteten Dgl. (7) mit $y(x)$. Dann führen wir eine gemeinsame Numerierung der Eigenfunktionen und Eigenwerte der Eigenwertaufgaben (1), $(I\,a)$ und (1), $(II\,a)$ durch, indem wir der n:ten Eigenfunktion der ersten Eigenwertaufgabe den Index $\nu = 2n + 2$ und der n:ten Eigenfunktion der zweiten Eigenwertaufgabe den Index $\nu = 2n + 1$ erteilen und die Eigenwerte in entsprechender Weise numerieren. Die Eigenfunktionen werden also hiernach mit $z_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, 3 \ldots)$ bezeichnet, und die Eigenwerte $\{\lambda_n\}$ und $\{\mu_n\}$ werden in einer einzigen Folge $\{\lambda_\nu\}_{\nu=1,2,3\ldots}$ geordnet. In entsprechender Weise verfahren wir mit den Eigenfunktionen und Eigenwerten der behaupteten Dgl. (7) bei obigen Randbedingungen. Ihre Eigenfunktionen und Eigenwerte werden also mit $y_\nu(x)$ bzw. $\overset{*}{\lambda}_\nu$ bezeichnet. Wir bemerken, dass hierdurch die Bedingung (6) die Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\lambda_\nu - \overset{*}{\lambda}_\nu|^2 \leq \varrho^2 \tag{6'}$$

erhält.

Wir können nun unserem Problem eine angemessene Formulierung geben. Nehmen wir einen Augenblick an, es gebe eine Dgl. (7). Wir schreiben sie dann in der Form einer gestörten Dgl. (1):

$$y'' + (\lambda + \varphi(x))\, y + (\overset{*}{\lambda} - \lambda + \overset{*}{\varphi}(x) - \varphi(x))\, y = 0.$$

Es sei $\zeta_\nu(x)$ eine von $z_\nu(x)$ unabhängige Lösung der Dgl. (1) bei dem Parameterwert $\lambda = \lambda_\nu$, so gewählt, dass

$$D_\nu = \begin{vmatrix} z_\nu(x) & \zeta_\nu(x) \\ z'_\nu(x) & \zeta'_\nu(x) \end{vmatrix} = \begin{cases} \sqrt{\lambda_\nu}, & \lambda_\nu \geq 1 \\ 1, & \lambda_\nu < 1 \end{cases} \tag{11}$$

wird. Die Eigenfunktion $y_\nu(x)$ erhält dann folgende Form ($x_0 = x$):

$$y_\nu(x) = z_\nu(x) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{D_\nu^p} \int_0^x \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{p-1}} K_\nu(x, x_1) \ldots K_\nu(x_{p-1}, x_p)\, z_\nu(x_p) \prod_{q=1}^{p} \Phi_\nu(x_q)\, dx_q,$$

worin

$$K_\nu(x, x_1) = z_\nu(x)\, \zeta_\nu(x_1) - z_\nu(x_1)\, \zeta_\nu(x)$$

$$\Phi_\nu(x) = \overset{*}{\lambda}_\nu - \lambda_\nu + \overset{*}{\varphi}(x) - \varphi(x) \tag{12}$$

ist (vgl. Satz 1, Kap. 1). $y_\nu(x)$ befriedigt wie $z_\nu(x)$ die Randbedingungen Ia oder IIa für $x = 0$, je nachdem ν gerade oder ungerade ist. Da dies auch im Punkte $x = \pi$ gelten muss, erhält man mit den Bezeichnungen

$$\delta_\nu = \overset{*}{\lambda}_\nu - \lambda_\nu, \qquad \Delta(x) = \overset{*}{\varphi}(x) - \varphi(x)$$

die Eigenwertgleichung

$$\int_0^\pi z_\nu^2(x)\, \Delta(x)\, dx + \delta_\nu \int_0^\pi z_\nu^2(x)\, dx +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{D_\nu^p} \int_0^\pi \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_p} Q_\nu(x_1, x_2, \ldots x_{p+1}) \prod_{q=1}^{p+1} \Phi_\nu(x_q)\, dx_q = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3 \ldots), \tag{13}$$

mit

$$Q_\nu(x_1, x_2, \ldots x_{p+1}) = z_\nu(x_1)\, K_\nu(x_1, x_2) \ldots K_\nu(x_p, x_{p+1})\, z_\nu(x_{p+1}).$$

Unser Satz ist nun offenbar bewiesen, wenn wir eine Funktion $\overset{*}{\varphi}(x)$ *eindeutig bestimmen können, die den Bedingungen* (8), (9') *und alle Relationen* (13) *befriedigt.*

Bevor wir zur Konstruktion dieser Funktion $\overset{*}{\varphi}(x)$ übergehen, bemerken wir folgendes: unsere Eigenwertaufgaben (1), (Ia) und (1), (IIa) bilden zusammen eine kombinierte Eigenwertaufgabe C, Kap. 2. Nach Satz P gilt nun, dass die

Eigenwertaufgabe C', Kap. 2 mit der Eigenwertaufgabe C identisch ist. Wir können also die Funktionen $y_n(x) z_n(x)$ des Satzes C_1 durch die Quadrate $y_n^2(x)$ und die Funktionen $\bar{y}_n(x) \bar{z}_n(x)$ durch die Quadrate $\bar{y}_n^2(x)$ ersetzen. (Hierbei sind die Bezeichnungen des Satzes C_1 angewandt. Die Eigenfunktionen $y_n(x)$, $z_n(x)$ dürfen also nicht mit den Eigenfunktionen $y_\nu(x)$, $z_\nu(x)$ dieses Beweises verwechselt werden). Gemäss unserer oben durchgeführten Numerierung der Eigenfunktionen gilt aber $z_{2n+2}(x) = y_n(x)$ und $z_{2n+1}(x) = \bar{y}_n(x)$. Also: Der Satz C_1, Kap. 2 gilt, wenn die Funktionen $y_n(x) z_n(x)$ durch unsere oben definierten Eigenfunktionen $z_{2n+2}^2(x)$ und die Funktionen $\bar{y}_n(x) \bar{z}_n(x)$ durch die Funktionen $z_{2n+1}^2(x)$ ersetzt werden. Wir legen dann auch $z_\nu(x)$ durch die Bedingung (7), Kap. 2 fest: $\int_0^\pi z_\nu^2(x)\, dx = \sqrt{2\pi}$.

2. *Bestimmung der Funktion $\overset{*}{\varphi}(x)$ durch sukzessive Approximationen.*

Als erste Approximation suchen wir eine Funktion $\varphi_1(x)$, die, statt $\overset{*}{\varphi}(x)$ in die Gleichungen (13) eingesetzt, die Summe der zwei ersten Glieder jeder Relation (13) gleich 0 werden lässt und ausserdem die Bedingung $\int_0^\pi \varphi_1(x)\, dx = 0$ befriedigt. Wir suchen also die Funktion $\Delta_1(x) = \varphi_1(x) - \varphi(x)$, die durch die Gleichungen

$$\int_0^\pi z_\nu^2(x) \Delta_1(x)\, dx = -\delta_\nu \int_0^\pi z_\nu^2(x)\, dx = -\delta_\nu \sqrt{2\pi} \quad (\nu = 1, 2, 3 \ldots) \tag{14}$$

$$\int_0^\pi \Delta_1(x)\, dx = 0$$

bestimmt wird. Eine solche Funktion existiert immer und ist in $L^2(0, \pi)$ eindeutig bestimmt. Dies folgt aus dem Satz C_1:2, Kap. 2. Wählen wir nämlich die Konstanten c_n und $\bar{c}_n$ dieses Satzes in der folgenden Weise: $c_n = -\delta_{2n+2}\sqrt{2\pi}$, $\bar{c}_n = -\delta_{2n+1}\sqrt{2\pi}$, so ergibt sich aus der Voraussetzung (6')

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n^2 + \bar{c}_n^2) = 2\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu^2 = 2\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} |\overset{*}{\lambda}_\nu - \lambda_\nu|^2 \leq 2\pi \varrho^2 < \infty. \tag{15}$$

Beachten wir nun die Bemerkung am Ende der Abteilung 1 dieses Beweises, folgt obige Behauptung. Unsere erste Approximation wird also

$$\varphi_1(x) = \Delta_1(x) + \varphi(x) \text{ mit } \Delta_1(x) < L^2(0, \pi), \int_0^\pi \Delta_1(x)\, dx = 0.$$

Die folgenden Approximationen werden in ähnlicher Weise erhalten. Allgemein bestimmen wir gemäss Satz C_1:2 (Kap. 2) $\Delta_i(x)$ aus den Gleichungen

$$\int_0^\pi z_\nu^2(x)\,\Delta_i(x)\,dx + \delta_\nu \int_0^\pi z_\nu^2(x)\,dx +$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{D_\nu^p} \int_0^\pi \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_p} Q_\nu(x_1, x_2, \ldots x_{p+1}) \prod_{q=1}^{p+1} \Phi_{\nu, i-1}(x_q)\,dx_q = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3 \ldots) \quad (16)$$

$$\int_0^\pi \Delta_i(x)\,dx = 0, \tag{16'}$$

worin

$$\Phi_{\nu, i-1}(x) = \delta_\nu + \Delta_{i-1}(x) \tag{17}$$

gesetzt worden ist. Unsere i:te Approximation wird also

$$\varphi_i(x) = \Delta_i(x) + \varphi(x) \text{ mit } \Delta_i(x) < L^2(0, \pi), \quad \int_0^\pi \Delta_i(x)\,dx = 0.$$

Wir müssen nun zeigen, dass die Folge $\{\Delta_i(x)\}_{i=1,2,3\ldots}$ in $L^2(0, \pi)$ konvergent ist. Wir beweisen dann zuerst die folgende Behauptung:

Wenn ϱ genügend klein ist, so gilt

$$\int_0^\pi \Delta_i^2(x)\,dx \leq K^2$$

mit einer von i unabhängigen Konstante K, gleichgültig wie die Zahlenfolge $\{\overset{*}{\lambda}_\nu\}_{\nu=1,2,3\ldots}$ unter Beachtung der Bedingung (6′) gewählt wird.

Wir geben eine grobe Abschätzung der oberen Schranke solcher ϱ-Werte an. Wir setzen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\int_0^\pi \Delta_i(x)\, z_\nu^2(x)\,dx \right)^2 = \sigma_i^2 \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots) \tag{18}$$

und erhalten aus dem Satz C_1:3 (Kap. 2) gemäss der Bemerkung am Ende der Abteilung 1 dieses Beweises mit der Bezeichnung $\|f(x)\| = \left\{ \int_0^\pi f^2(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{2}}$:

$$\|\Delta_i(x)\| \leq M \cdot \sigma_i \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots). \tag{19}$$

Wir wollen die σ_i abschätzen. Es gilt zuerst nach (14) und (15)

$$\sigma_1 = \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} \leq \varrho \sqrt{2\pi}. \tag{20}$$

Um weiter zu gelangen, bemerken wir, dass die Funktionen $z_\nu(x)$ durch die Bedingung $\int\limits_0^\pi z_\nu^2(x)\,dx = \sqrt{2\pi}$ (Gleichung (7), Kap. 2) festgelegt und die Funktionen $\zeta_\nu(x)$ durch (11) so bestimmt sind, dass wir setzen können

$$\operatorname*{Max}_{\nu>0} |K_\nu(x_q, x_{q+1})| \leq M_1, \quad \operatorname*{Max}_{\nu>0} |z_\nu(x_1) z_\nu(x_{p+1})| \leq M_1. \tag{21}$$

Also ist nach der Definition der Funktion $Q_\nu(x_1, x_2, \ldots x_{p+1})$ (Gleichung (13))

$$Q_\nu(x_1, x_2, \ldots x_{p+1}) \leq M_1^{p+1}.$$

Die Gleichungen (16) geben nun mit Hilfe der Minkowskischen Ungleichung

$$\sigma_i \leq \sigma_1 + \left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{D_\nu^p}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{x_1}\cdots\int\limits_0^{x_p} M_1^{p+1}\prod_{q=1}^{p+1}|\Phi_{\nu,i-1}(x_q)|\,dx_q\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

Durch wiederholte Anwendung der Formel

$$\left|\int\limits_0^x f(t)\left(\frac{t^m}{\underline{|m}}\right)^{\frac{1}{2}} dt\right| \leq ||f(x)|| \cdot \left(\frac{x^{m+1}}{\underline{|m+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (0 \leq x \leq \pi)$$

und der Minkowskischen Ungleichung wird für die Summe des rechten Gliedes von (22), wenn wir sie mit Σ bezeichnen,

$$\left|\sum\right|^{\frac{1}{2}} \leq \left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{D_\nu^p} M_1^{p+1} ||\Phi_{\nu,i-1}||^{p+1}\left(\frac{\pi^{p+1}}{\underline{|p+1}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sum_{p=1}^{\infty}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{D_\nu^{2p}} M_1^{2p+2} ||\Phi_{\nu,i-1}||^{2p+2}\frac{\pi^{p+1}}{\underline{|p+1}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

erhalten. Wir führen noch die Bezeichnungen

$$s_0 = \left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{D_\nu^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (D_\nu = O(\nu),\ D_\nu \geq 1)$$

und

$$S(r) = s_0 \sum_{p=1}^{\infty} M_1^{p+1}(p+1)\left\{\frac{\pi^{p+1}}{\underline{|p+1}}\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot r^{p-1}$$

ein. Die Reihe $S(r)$ ist offenbar eine ganze Funktion von r. Also erhält man aus (22)

$$\sigma_i \leq \sigma_1 + \left(\operatorname*{Max}_{\nu>0} ||\Phi_{\nu,i-1}(x)||\right)^2 \cdot S\left(\operatorname*{Max}_{\nu>0} ||\Phi_{\nu,i-1}(x)||\right). \tag{23}$$

Nun wollen wir zeigen, dass die Behauptung S. 75 für

mit
$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \frac{1}{8 M \sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} \\ q^2 &= 16 \pi s_0^2 M^2 M_1^2 (e^{\pi M_1^2} - 1) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

gilt. Denn unter diesen Bedingungen ist *erstens*

$$r S(r) < \frac{1}{4M} \tag{25}$$

für

$$0 \leq r \leq 4 \sqrt{2\pi} M \varrho . \tag{26}$$

Um dies zu beweisen, bemerken wir, dass $r S(r)$ mit r monoton von Null an wächst. Es sei r_0 die Wurzel von

$$r_0 S(r_0) = \frac{1}{4M}.$$

Mit Hilfe der Cauchyschen Ungleichung erhält man ($r_0 < 1$, sonst ist nichts zu beweisen)

$$\frac{1}{4M} = s_0 \sqrt{\pi} M_1 \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{p+1}\, r_0^p \sqrt{\frac{(\pi M_1^2)^p}{\underline{|p}}} <$$
$$< s_0 \sqrt{\pi} M_1 \left\{ \frac{1-(1-r_0^2)^2}{(1-r_0^2)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ e^{\pi M_1^2} - 1 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Hieraus wird

$$r_0^2 > 1 - \frac{q}{\sqrt{1+q^2}}$$

mit dem oben angeführten Wert von q erhalten, also auch

$$r_0 > \frac{1}{\sqrt{2(1+q^2)}}.$$

Dies beweist die Behauptung.

Gemäss der Gl. (17), der ersten Gleichung (19) und der Gl. (20) erhalten wir folgende Abschätzung

$$\operatorname*{Max}_{\nu>0} \| \Phi_{\nu,1}(x) \| \leq \operatorname*{Max}_{\nu>0} \{ \| \Delta_1(x) \| + | \delta_\nu | \sqrt{\pi} \} \leq \| \Delta_1(x) \| + \sigma_1 \leq M \sigma_1 + \sigma_1 .$$

Also wird, da $M \geq 1$ (Vgl. Satz A_2, Anm. 2, Kap. 2),

$$\operatorname*{Max}_{\nu>0} \| \Phi_{\nu,1}(x) \| \leq 2 M \sigma_1 .$$

Nun erhalten wir nach der Gleichung (23) *zweitens*

$$\sigma_2 \leq \sigma_1 + (2\, M\sigma_1)^2\, S(2\, M\sigma_1).$$

Aber $2\, M\sigma_1 \leq 2\, M \cdot \varrho\sqrt{2\pi}$, also gilt die Ungleichung (26), und (25) d. h.

$$\sigma_2 < \sigma_1 + 2\, M\, \sigma_1 \cdot \frac{1}{4\, M} = \sigma_1 \left(1 + \frac{1}{2}\right). \tag{27}$$

Wir wollen zeigen, dass die Ungleichungen

$$\sigma_i \leq \sigma_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\right), \tag{28}$$

die also für $i = 1, 2$ gelten, für alle i gültig sind. Mögen sie für $i = 1, 2 \ldots i'$ gelten, dann gibt die Relation (19)

$$\operatorname*{Max}_{\nu > 0} \|\Phi_{\nu, i'}(x)\| \leq \|\Delta_{i'}(x)\| + \sigma_1 \leq 2\, M\sigma_{i'}$$

wenn $\sigma_{i'} \geq \sigma_1$, sonst wäre (28) unmittelbar befriedigt, und es wäre nichts zu beweisen. Aus (23) erhalten wir dann

$$\sigma_{i'+1} \leq \sigma_1 + (2\, M\sigma_{i'})^2\, S(2\, M\sigma_{i'}).$$

Aber nun ist nach (28)

$$2\, M\, \sigma_{i'} < \frac{2\, M\sigma_1}{1 - \frac{1}{2}} = 4\, M\, \sigma_1 \leq 4\sqrt{2\pi}\, M\varrho,$$

d. h. die Ungleichung (25) kann angewandt werden, und wir erhalten

$$\sigma_{i'+1} < \sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_{i'} \leq \sigma_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{i'}\right).$$

Die Ungleichung (28) gilt also für alle $i = 1, 2, 3 \ldots$ Also gilt auch für alle i

$$\sigma_i \leq 2\, \sigma_1$$

und gemäss (19) und (20)

$$\|\Delta_i(x)\| \leq 2\, M\sigma_1 \leq 2\sqrt{2\pi}\, M \cdot \varrho. \tag{29}$$

Hiermit ist die Behauptung S. 75 bewiesen.

Wir schliessen nun damit ab zu zeigen, dass mit dem ϱ-Wert von (24) die Folge

$$\{\Delta_i(x)\}_{i=1,2,3\ldots}$$

in $L^2(0, \pi)$ konvergent ist.

Wir erhalten aus den Gleichungen (16)

$$\int_0^\pi (\varDelta_i(x) - \varDelta_{i+1}(x)) z_\nu^2(x)\, dx +$$

$$+ \sum_{p=1}^\infty \frac{1}{D_\nu^p} \int_0^\pi \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_p} Q_\nu(x_1, x_2, \ldots x_{p+1}) \left[\prod_{q=1}^{p+1} \Phi_{\nu, i-1}(x_q) - \prod_{q=1}^{p+1} \Phi_{\nu, i}(x_q) \right] dx_1 \cdots dx_{p+1} =$$

$$= 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3 \ldots) \tag{30}$$

$$\int_0^\pi (\varDelta_i(x) - \varDelta_{i+1}(x))\, dx = 0. \tag{30'}$$

Den Klammerausdruck der Gleichungen (30) schreiben wir in der Form

$$\sum_{r=1}^{p+1} \Phi_{\nu, i-1}(x_1) \cdots \Phi_{\nu, i-1}(x_{r-1}) \cdot [\varDelta_{i-1}(x_r) - \varDelta_i(x_r)]\, \Phi_{\nu, i}(x_{r+1}) \cdots \Phi_{\nu, i}(x_{p+1}).$$

Also erhalten wir

$$\left\{ \sum_{\nu=1}^\infty \left[\int_0^\pi (\varDelta_i(x) - \varDelta_{i+1}(x)) z_\nu^2(x)\, dx \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \| \varDelta_{i-1}(x) - \varDelta_i(x) \| \cdot s_0 \cdot \sum_{p=1}^\infty \| \Phi^{(i)}(x) \|^p \cdot M_1^{p+1} (p+1) \left(\frac{\pi^{p+1}}{\underline{|p+1}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

worin $\| \Phi^{(i)}(x) \| = \operatorname*{Max}_{\nu > 0} \begin{cases} \| \Phi_{\nu, i}(x) \| \\ \| \Phi_{\nu, i-1}(x) \| \end{cases}$ sein soll. Mit Anwendung des Satzes C_1, Kap. 2 und der Definition von $S(r)$ bekommen wir nun

$$\| \varDelta_i(x) - \varDelta_{i+1}(x) \| \leq M \| \varDelta_{i-1}(x) - \varDelta_i(x) \| \cdot \| \Phi^{(i)}(x) \|\, S(\| \Phi^{(i)}(x) \|).$$

Aber nach (29) ist

$$\| \Phi^{(i)}(x) \| \leq 2 M \sigma_1 + \sigma_1 < 4 M \sigma_1 \leq 4 \sqrt{2\pi}\, M \varrho,$$

so dass wieder die Ungleichung (25) angewandt werden kann, was

$$\| \varDelta_i(x) - \varDelta_{i+1}(x) \| < \frac{1}{4} \| \varDelta_{i-1}(x) - \varDelta_i(x) \|$$

ergibt. Hieraus erhalten wir sukzessive

$$\| \varDelta_i(x) - \varDelta_{i+1}(x) \| < \left(\frac{1}{4} \right)^{i-1} \| \varDelta_1(x) - \varDelta_2(x) \|,$$

also, wenn $m < n$,

$$\| \varDelta_m(x) - \varDelta_n(x) \| < \| \varDelta_1(x) - \varDelta_2(x) \| \cdot \sum_{k=m-1}^{n-2} \left(\frac{1}{4} \right)^k.$$

Es ist also

$$\lim_{m, n \to \infty} \| \varDelta_m(x) - \varDelta_n(x) \| = 0.$$

Folglich existiert die Grenzfunktion $\varDelta(x) < L^2(0, \pi)$.

Wir setzen zuletzt

$$\overset{*}{\varphi}(x) = \varDelta(x) + \varphi(x).$$

3. *Beweis, dass die Funktion* $\overset{*}{\varphi}(x)$ *die gesuchte ist.*

Wir bilden nun mit der oben gefundenen Funktion $\overset{*}{\varphi}(x)$ die Dgl. (7). Wenn sie die gesuchte ist, muss sie gemäss den Ausführungen der ersten Abteilung dieses Beweises die Relationen (13) befriedigen. Dies ist in der Tat der Fall. Um dies zu zeigen, bilden wir die Differenz des linken Gliedes von (13) und des linken Gliedes von (16) und schätzen sie ab:

$$\left| \int_0^\pi [\varDelta(x) - \varDelta_i(x)]\, z_\nu^2(x)\, dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{D_\nu^p} \int_0^\pi \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_p} Q_\nu(x_1, x_2, \ldots x_{p+1}) \left[\prod_{q=1}^{p+1} \varPhi_\nu(x_q) - \prod_{q=1}^{p+1} \varPhi_{\nu, i-1}(x_q) \right] dx_1 \cdots dx_{p+1} \right| \leq$$

$$\leq \| \varDelta(x) - \varDelta_i(x) \| \cdot \| z_\nu^2(x) \| + \| \varDelta(x) - \varDelta_{i-1}(x) \| \to 0, \qquad i \to \infty.$$

Da nun das linke Glied von (16) $= 0$ ist, so folgt, dass alle Gleichungen (13) befriedigt sind ($\nu = 1, 2, 3 \ldots$).

Weiter ist

$$\int_0^\pi \overset{*}{\varphi}(x)\, dx = \int_0^\pi [\varDelta(x) - \varDelta_i(x)]\, dx \to 0, \qquad i \to \infty$$

und, da $\varDelta(x) < L^2(0, \pi)$, gilt:

$$\overset{*}{\varphi}(x) - \varphi(x) < L^2(0, \pi).$$

Gemäss Satz P ist schliesslich $\overset{*}{\varphi}(x)$ durch die Spektren bei den Randbedingungen $I\,a$ und $II\,a$ eindeutig bestimmt. Nach den Ausführungen in der ersten Abteilung dieses Beweises ist also $\overset{*}{\varphi}(x)$ die gesuchte Funktion und die zugehörige Dgl. (7) die behauptete Dgl.

Analog erhält man den Beweis im Fall $\beta \neq 0$. Hiermit ist der Beweis beendet.

Anm. Aus diesem Satz folgen unmittelbar die Behauptungen 1) und 3) von Satz P.

Den Eigenwertaufgaben A und B entsprechend erhalten wir analoge Existenzsätze P_1^* und P_2^*. Dem Satz P^* analog bestätigen sie die Möglichkeit, eine Dgl. $y'' + (\overset{*}{\lambda} + \overset{*}{\varphi}(x))y = 0$ zu konstruieren, deren (reduziertes) Spektrum bei den Randbedingungen R_1: $y(0) = y(\pi) = 0$ bzw. R_2: $y'(0) = y'(\pi) = 0$ eine vorgegebene Punktfolge ist, die durch eine der Relation (6) analoge Relation auf die Umgebung eines bekannten (reduzierten) Spektrums einer Dgl. $y'' + (\lambda + \varphi(x))y = 0$, $\varphi(x) < Lg$, bei den Randbedingungen R_1 bzw. R_2 beschränkt ist. Hierbei befriedigt die Funktion $\overset{*}{\varphi}(x)$ die Bedingung $\overset{*}{\varphi}(x) - \varphi(x) < L^2 g$.

Die Sätze P^*, P_1^* und P_2^* enthalten das Wesentliche, was wir von dem Problem P^* sagen können. Sie entsprechen offenbar im Gebiete der Eigenwertdifferenzen (der S-L Spektren) von $\varphi(x)$ dem Riesz-Fischerschen Satz im Gebiete der Fourierkoeffizienten, aber nur „im Kleinen", weil die Grösse ϱ klein angenommen werden muss. Diese Beschränkung kann nicht ohne weiteres aufgehoben werden. Sie ist u. a. durch die Eigenschaft $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ des S-L Spektrums bedingt, die kein Gegenstück im Gebiete der Fourierkoeffizienten hat. Diese Sätze können jedoch zur Behandlung „im Grossen" des Problems P^* angewandt werden, wenigstens theoretisch und in einer Weise, die an analytische Fortsetzung erinnert. Um die Ideen zu fixieren, betrachten wir folgenden Fall, andere Fälle werden analog behandelt:

Problem P^*: 1. Es sei die Punktfolge $\{\lambda_n\}_{n=0,1,2\ldots}$ vorgegeben. Ist sie das Spektrum einer Eigenwertaufgabe

$$\begin{cases} y'' + (\lambda + \varphi(x))y = 0, \quad \varphi(x) < L^2 g, \quad \int\limits_0^\pi \varphi(x)\,dx = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0\,? \end{cases}$$

Um dies zu untersuchen, bilden wir eine Kette von S-L Spektren in folgender Weise:

Wir wählen $\varphi(x) \equiv 0$ und bilden das zu der Dgl. $y'' + \lambda y = 0$ bei den Randbedingungen $y(0) = y(\pi) = 0$ gehörige Spektrum $\{(n+1)^2\}$ und berechnen den Radius ϱ_0 nach Satz P_1^* (vgl. die Relation (24)). Dann nehmen wir eine Folge $\{\lambda_{n1}\}$, so dass

$$|\lambda_n - \lambda_{n1}| < |\lambda_n - (n+1)^2|$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_{n1} - (n+1)^2|^2 < \varrho_0^2$$

wird. Nach Satz P_1^* können wir dann die Dgl.

$$y'' + (\lambda + \varphi_1(x))y = 0, \quad \varphi_1(x) < L^2 g, \quad \int_0^\pi \varphi_1(x)\,dx = 0$$

mit dem Spektrum $\{\lambda_{n1}\}$ und dem Radius ϱ_1 bilden.

Nun können wir wieder ein neues Spektrum konstruieren, das der gegebenen Punktfolge noch näher kommt, indem wir die Folge $\{\lambda_{n2}\}$ durch die Bedingungen

$$|\lambda_n - \lambda_{n2}| < |\lambda_n - \lambda_{n1}|$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_{n2} - \lambda_{n1}|^2 < \varrho_1^2$$

festlegen. Wenn man in dieser Weise nach endlich vielen Schritten s ein Spektrum $\{\lambda_{ns}\}$ mit dem Radius ϱ_s konstruieren kann, so dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n - \lambda_{ns}|^2 < \varrho_s^2$$

gilt, so ist nach Satz P_1^* die vorgegebene Folge $\{\lambda_n\}$ das Spektrum einer Dgl.

$$y'' + (\lambda + \varphi_{s+1}(x))y = 0, \quad \varphi_{s+1}(x) < L^2 g, \quad \int_0^\pi \varphi_{s+1}(x)\,dx = 0$$

bei den Randbedingungen $y(0) = y(\pi) = 0$.

Gibt es keine solche Kette von Spektren, so ist auch nicht die vorgegebene Folge $\{\lambda_n\}$ ein Spektrum der verlangten Art. Denn ist $\{\lambda_n\}$ das Spektrum der Eigenwertaufgabe

$$y'' + (\lambda + \varphi(x))y = 0, \quad \varphi(x) < L^2 g, \quad \int_0^\pi \varphi(x)\,dx = 0 \tag{31}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0,$$

so bilden die Spektren, die zu den Dglen.

$$y'' + (\lambda + \beta_{s'}\varphi(x))y = 0$$

für $s' = 0, 1, 2 \ldots s$ bei angemessener Wahl von $\beta_{s'}$, s gehören, eine endliche Kette, mit deren Hilfe die Konstruktion der Gleichung (31) möglich ist.

Die Möglichkeit, eine endliche Kette von S-L Spektren in obigem Sinn zu konstruieren, erweist sich also als notwendig und hinreichend dafür, dass $\{\lambda_n\}_{n=0,1,2\ldots}$ ein S-L Spektrum bei den Randbedingungen R_1 einer Dgl. $y'' + (\lambda + \varphi(x))y = 0$, $\int_0^\pi \varphi(x)\,dx = 0$ mit $\varphi(x) < L^2 g$ sein soll. Speziell erweisen sich hierdurch die Bedingungen

$$\lambda_n < \lambda_{n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} | \lambda_n - (n+1)^2 |^2 < \infty$$

als notwendig (Problem $P^*: 1$).

Durch die obige Konstruktionsmethode erhält man dann auch die Funktion $\varphi(x)$ (Problem $P^*: 2$).

Kapitel 4.

Einige Anwendungen.

20. Um die Ergebnisse der vorhergehenden Kapitel etwas zu erläutern, wollen wir nun einige Beispiele betrachten. Wir beginnen damit, zu untersuchen, inwieweit eine unhomogene schwingende Saite mit festen Endpunkten und konstanter Länge durch Grundton und Obertöne eindeutig bestimmt wird. Die entsprechende Eigenwertaufgabe ist bekanntlich die folgende:

$$\frac{d^2 z}{d t^2} + \lambda \varrho(t) z(t) = 0 \tag{1}$$

$$z(0) = z(l) = 0. \tag{2}$$

Wir haben dabei die spannende Kraft konstant gleich 1 angenommen und mit $\varrho(t)$ die Masse pro Längeneinheit der Saite, mit l die Länge der Saite bezeichnet. Offenbar kommt unser Problem darauf hinaus, zu untersuchen, inwieweit die Funktion $\varrho(t)$ durch die Eigenwerte dieser Eigenwertaufgabe eindeutig bestimmt wird.

Wir setzen nun voraus, dass $\varrho'(t)$ totalstetig ist ($\varrho(t) > 0$), so dass die Gleichung in der Liouvilleschen Normalform

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + (\bar{l}^2 \cdot \lambda + \varphi(x)) y = 0 \tag{3}$$

geschrieben werden kann. Diese Transformation wird durch folgende Formeln vermittelt:

$$x = \frac{1}{\bar{l}} \int_0^t \sqrt{\varrho(t)}\, dt, \quad \bar{l} = \frac{1}{\pi} \int_0^l \sqrt{\varrho(t)}\, dt \tag{4}$$

$$y(x) = \sqrt[4]{\varrho(t)}\, z(t) \tag{4'}$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\sqrt[4]{\varrho(t)}} \frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt[4]{\varrho(t)}\right). \tag{5}$$

Hierbei werden die Randbedingungen: $y(0) = y(\pi) = 0$.

Es soll nun also $\varrho(t)$ variieren können, während die Eigenwerte λ_n $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ fest sind. Es ergibt sich hieraus folgende notwendige Bedingung, die von allen Funktionen $\varrho(t)$ befriedigt sein muss: Es muss für alle $\varrho(t)$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^l \sqrt{\varrho(t)}\, dt = \text{Konstante} = \bar{l}$$

sein.

Dies folgt leicht aus den Eigenwertabschätzungen im Satz 1, Kap. 1. Nehmen wir an, die „Massendichte" $\varrho(t)$ entspreche der Konstante $\bar{l}$ und der Funktion $\varphi(x)$ und die „Massendichte" $\varrho_1(t)$ der Konstante $\bar{l}_1$ und der Funktion $\varphi_1(x)$ aber demselben Spektrum wie $\varrho(t)$. Aus der Gleichung (3) und nach Satz 1, Kap. 1, erhält man dann unmittelbar:

$$\bar{l}^2 \lambda_n + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\, dx = (n+1)^2 + o(1) = \bar{l}_1^2 \lambda_n + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi_1(x)\, dx,$$

d. h.

$$\bar{l}^2 - \bar{l}_1^2 = O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Führen wir die Bezeichung $\lambda' = \bar{l}^2 \cdot \lambda$ ein, so liegt das Problem der eindeutigen Bestimmung der Funktion $\varphi(x)$ der Eigenwertaufgabe

$$y'' + (\lambda' + \varphi(x))\, y = 0 \tag{6}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{R_1}$$

vor. Gemäss Satz P, Kap. 3, ist mehr als ein Spektrum für die eindeutige Bestimmung notwendig, wenn von $\varphi(x)$ nur $\varphi(x) < L(0, \pi)$ vorausgesetzt wird. Verlangen wir auch die Eigenschaft der Symmetrie

$$\varphi(x) = \varphi(\pi - x) \ \textit{f. ü.},$$

kann gemäss Satz P_1 durch ein einziges Spektrum eindeutige Bestimmtheit erreicht werden. Betrachten wir zuerst diesen Fall. Wir setzen dann voraus, dass

$$\varrho(t) = \varrho(l - t)$$

ist. Es folgt, dass auch $\varphi(x) = \varphi(\pi - x)$ f. ü. sein muss. Denn aus (5) erhält man leicht

$$\varphi(x(t)) = \varphi(x(l-t)) \text{ } f. \text{ } ü.$$

und aus (4)

$$x(l-t) = \frac{1}{l}\int_0^{l-t} \sqrt{\varrho(t)}\,dt = \pi - \frac{1}{l}\int_0^{t} \sqrt{\varrho(l-t)}\,dt = \pi - x(t),$$

woraus obige Behauptung folgt. Wir erhalten also gemäss Satz P_1, Kap. 3, dass $\varphi(x)$ durch das Spektrum von (6), (R_1) unter der Bedingung $\varrho(t) = \varrho(l-t)$ eindeutig bestimmt wird, d. h. durch die Eigenwerte der Eigenwertaufgabe (1), (2). Dann gilt aber dasselbe von $\varrho(t)$. Diese Funktion wird aus der Dgl. (5) bestimmt. Es mögen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ ein System von Fundamentallösungen dieser Gleichung bilden, so erhält man

$$\sqrt[4]{\varrho(t)} = g(x, c_1, c_2) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Aber die Konstanten c_1 und c_2 werden durch die Bedingungen $t(0) = 0$, $t(\pi) = l$ und $g(x, c_1, c_2) = g(\pi - x, c_1, c_2)$ festgelegt. Man erhält aus den ersten Bedingungen

$$\int_0^{\pi} \left(y_1(x) + \frac{c_2}{c_1} y_2(x)\right)^{-2} \frac{dx}{c_1^2} = \frac{l}{l} \tag{7}$$

und aus der letzten Bedingung

$$g'_x\left(\frac{\pi}{2}, c_1, c_2\right) = 0 \tag{8}$$

oder

$$\frac{c_2}{c_1} = -\frac{y'_1\left(\frac{\pi}{2}\right)}{y'_2\left(\frac{\pi}{2}\right)},$$

wenn $y'_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, was immer durch angemessene Wahl des Systems von Fundamentallösungen erreicht werden kann. Gibt es nun eine physikalisch brauchbare Lösung $g(x)$ des Anfangswertproblems (5), (8), was nach Voraussetzung der Fall ist, d. h. eine Lösung, für die $g^4(x) > 0$ ist, so wird sie offenbar durch Hinzufügung der Bedingung (7) eindeutig bestimmt. Schliesslich kann man aus der Dgl.

$$dx = \frac{1}{l}\sqrt{\varrho(t)}\,dt = \frac{1}{l}\,g^2(x)\,dt$$

$(g^2(x) > 0)$ x als eindeutige Funktion von t (es soll $x(0) = 0$ sein) und dann $\varrho(t) = g^4(x)$ als eindeutige Funktion von t darstellen. Also gilt:

Wenn die Masse pro Längeneinheit $\varrho(t)$ einer an den Enden befestigten Saite von konstanter Länge, die durch eine konstante Kraft gespannt wird, in bezug auf die Mitte der Saite symmetrisch ist und ausserdem genügend regulär ist ($\varrho'(t)$ totalstetig), so ist die Saite durch Grundton und Obertöne eindeutig bestimmt.

Lässt man die Bedingung der Symmetrie fallen, so gibt es nach Satz P andere Saiten mit demselben Grundton und denselben Obertönen. Durch die Kenntnis der Obertöne bei einer nicht symmetrischen Einspannung, z. B. von der Form

$$z(0) = z'(l) = 0,$$

nebst der Kenntnis der Obertöne im vorigen Fall kann man wieder zu einer eindeutigen Bestimmung gelangen. Da indessen diese Randbedingungen bei der Transformation (4) in

$$y(0) = 0, \quad -\frac{l}{4}\varrho'(l)\,\varrho^{-\frac{3}{2}}(l)\,y(\pi) + y'(\pi) = 0$$

übergehen, so müssen wir ausserdem $\varrho'(l) \cdot \varrho^{-\frac{3}{2}}(l) =$ Konstante voraussetzen. Unter diesen Bedingungen erhalten wir wie oben, aber nun mit Hilfe des Satzes P, dass die Funktion $\varrho(t)$ eindeutig bestimmt wird.

In diesem Zusammenhang erwähnen wir ein Ergebnis von W. Mothwurf[1], das folgendes besagt:

Wenn eine Saite bei festliegenden Endpunkten und konstanter spannender Kraft für jede beliebige Länge der Saite nur harmonische Obertöne hat, so muss die Masse pro Längeneinheit der Saite die Form

$$\varrho(t) = \frac{d}{(e + f \cdot t)^4} \tag{9}$$

haben, worin d, e und f Konstante sind.

Die einfache Behauptung, dass in diesem Fall die Obertöne wirklich harmonisch sind, geht auf Euler zurück.

Wir haben immer eine konstante Länge der Saite vorausgesetzt, was eine wesentliche Erweiterung bedeutet. Es kann im allgemeinen auch nicht ein so einfaches Ergebnis mehr gelten, wenn wir im obigen Satz die Voraussetzung „jede beliebige Länge“ durch „konstante Länge“ ersetzen. Wenn wir aber Regularitätsbedingungen hinzufügen, können wir ein analoges Ergebnis auch in diesem letzten Fall erhalten. Um dies zu zeigen, beginnen wir damit, das Problem für unsere Dgl. (6) zu formulieren.

[1] W. Mothwurf [1].

Wir nehmen zuerst die Funktion $\varrho'(t)$ totalstetig an, so dass wir die Gleichung (6) erhalten. Die Voraussetzung, dass die Obertöne harmonisch sein sollen, bedeutet, dass

$$\lambda_n = (n+1)^2 \cdot c_0 \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

mit c_0 konstant, sein muss. Mit Hilfe von Satz 1, Kap. 1 ergibt sich nun wie oben

$$\bar{l}^2 \lambda_n + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x)\, dx = \bar{l}^2 (n+1)^2 \cdot c_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x)\, dx = (n+1)^2 + o(1),$$

woraus

$$c_0 \bar{l}^2 = 1, \quad \int_0^\pi \varphi(x)\, dx = 0$$

folgt. Also wird

$$\lambda_n' = \bar{l}^2 \lambda_n = (n+1)^2.$$

Es handelt sich also um eine Dgl. (6), deren Eigenwerte alle bei den Randbedingungen $y(0) = y(\pi) = 0$ die Form $\lambda_n' = (n+1)^2$ haben. Ausserdem ist $\int_0^\pi \varphi(x)\, dx = 0$.

Diese Eigenschaften hat die Dgl., wenn $\varphi(x) \equiv 0$ ist. Wenn wir verlangen, dass $\varphi'(x)$ ($\varrho'''(t)$) totalstetig und $\varphi'(0) = \varphi'(\pi)$ sein soll, so ist gemäss dem Satz S. 70 die Dgl. (6) mit $\varphi(x) \equiv 0$ die einzige mit den obigen Eigenschaften. Die zugehörige Funktion $\varrho(t)$ wird aus der Dgl. (5) bestimmt:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt[4]{\varrho(t)}\right) = \frac{1}{\sqrt{\varrho(t)}} \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\varrho(t)}}\right) = 0,$$

also:

$$\varrho(t) = \frac{1}{(at+b)^4} \quad a, b \text{ Konstante.}$$

Dies ist ein Ergebnis, das dem Mothwurfschen analog ist. *Die oben genannte Behauptung ist also stichhaltig, auch wenn die Worte „jede beliebige Länge der Saite" durch „konstante Länge der Saite unter der Voraussetzung $\varrho'''(t)$ totalstetig, $\varphi'(0) = \varphi'(\pi)$" ersetzt werden.*

Wir wollen auch bemerken, dass eigentlich nur

$$\lambda_{n_\nu} = (n_\nu + 1)^2 \cdot c_0$$

für eine beliebige Folge $n_\nu \to \infty$ verlangt wird, um obiges Ergebnis zu erhalten.

21. Nun wollen wir das Ergebnis von Ambarzumian[1], das in der Einleitung erwähnt ist, ein wenig betrachten. Er setzt voraus, die Gleichungen

[1] Ambarzumian [1].

$$\mu \frac{d^2 y}{d x^2} + (\lambda + \varphi(x)) y = 0 \tag{10}$$

($\varphi(x)$ stetig) und

$$\nu \frac{d^2 z}{d x^2} + \lambda z = 0$$

haben dieselben Eigenwerte $\lambda_n = n^2 \nu$ ($n = 0, 1, 2 \ldots$) bei den Randbedingungen

$$y'(0) = y'(\pi) = 0.$$

Die Behauptung ist, dass

$$\mu = \nu$$

und

$$\varphi(x) \equiv 0$$

gilt.

Aus

$$\lambda_n = n^2 \mu + O(1) = n^2 \nu$$

folgt $\mu = \nu$, und aus

$$\int_0^\pi (\varphi(x) - 0)\, y_n(x) z_n(x)\, dx = 0$$

folgt (vgl. Satz P, Kap. 3)

$$\int_0^\pi \varphi(x)\, dx = 0.$$

Da nun $\lambda_0 = 0$ vorausgesetzt wird, folgt endgültig $\varphi(x) = 0$ f. ü. aus dem Satz S. 71, der gerade durch die Untersuchungen von AMBARZUMIAN veranlasst ist. AMBARZUMIAN hat einen anderen und weit längeren Weg zum Beweis angewandt, aber auch sein Beweis fusst wesentlich auf der Voraussetzung $\lambda_0 = 0$. Nach den Bemerkungen S. 70 sieht man sogleich ein, das dasselbe Ergebnis unter viel weniger Voraussetzungen erhalten werden kann. Man braucht z. B. nur anzunehmen, dass $\lambda_0 = 0$ und $\int_0^\pi \varphi(x)\, dx = 0$ sind.

22. Schliesslich wollen wir ein bekanntes Problem betrachten. Es handelt sich darum, die Eigenschaften der Funktion $\varphi(x)$ anzugeben, wenn die Instabilitätsintervalle der Dgl.[1]

$$\left.\begin{aligned} y'' + (\mu + \varphi(x)) y = 0 \\ \varphi(x + \pi) = \varphi(x) \ f.\ ü., \quad \int_0^\pi \varphi(x)\, dx = 0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

ganz oder teilweise verschwinden.

[1] Wir begnügen uns in dieser Nr. damit, $\varphi(x) < L^2(0, \pi)$ anzunehmen.

Einige Eigenschaften der Instabilitätsintervalle sind schon in der Einleitung erwähnt. Wir erinnern hier an einige weitere einfache Eigenschaften derselben. Bilden wir die Eigenwertaufgaben

$$\left.\begin{aligned} &\textit{Dgl.}\ (11) \\ &\textit{Randbedingungen:}\ y(0) = y(\pi) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad y'(0) = y'(\pi) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} &\textit{Dgl.}\ (11) \\ &\textit{Randbedingungen:}\ y(0) = -y(\pi) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad y'(0) = -y'(\pi) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Die Eigenwerte der ersten Eigenwertaufgabe nennen wir μ_n, die der letzten $\bar{\mu}_n$.

Nach HAUPT[1] gelten nun folgende Ungleichungen

$$-\infty < \mu_0 < \cdots < \mu_{2n-1} \leq \mu_{2n} < \bar{\mu}_{2n} \leq \bar{\mu}_{2n+1} < \mu_{2n+1} \leq \mu_{2n+2} < \ldots,$$

und es gilt, dass obige Eigenwerte gerade die Randpunkte der Instabilitätsintervalle bilden. Die Instabilitätsintervalle sind also folgende:

$$(-\infty, \mu_0),\ (\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1),\ (\mu_1, \mu_2), \ldots (\mu_{2n-1}, \mu_{2n}),\ (\bar{\mu}_{2n}, \bar{\mu}_{2n+1}), \ldots$$

Wir numerieren sie der angegebenen Ordnung nach, so dass das erste Intervall die Ordnungsnummer 0 erhält und allgemein das Intervall (μ_{2n-1}, μ_{2n}) die Ordnungsnummer $2n$ und das Intervall $(\bar{\mu}_{2n}, \bar{\mu}_{2n+1})$ die Ordnungsnummer $2n+1$. Die Eigenwerte der Eigenwertaufgabe (12) bilden also die Randpunkte der Instabilitätsintervalle von gerader Ordnungsnummer, die der Eigenwertaufgabe (13) bilden die Randpunkte der Instabilitätsintervalle von ungerader Ordnungsnummer.

Weiter gilt nach HAUPT, dass die zu den Eigenwerten μ_{2n-1} und μ_{2n} gehörigen Eigenfunktionen im halboffenen Intervall $0 \leq x < \pi$ genau $2n$ Nullstellen und die zu den Eigenwerten $\bar{\mu}_{2n}$ und $\bar{\mu}_{2n+1}$ gehörigen Eigenfunktionen in demselben Intervall genau $2n+1$ Nullstellen haben.

Wir kehren nun zu dem anfangs erwähnten Problem zurück. INCE[2] und später MARKOVIĆ[3] haben die Behauptung ausgesprochen, dass, wenn noch

$$\varphi(-x) = \varphi(x)$$

ist, kein einziges Instabilitätsintervall verschwinden kann, wenn nicht auch dabei entweder $\varphi(x) \equiv \textit{Konstante}$ oder auch $\varphi\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \varphi(x)$ gilt. Ince setzt dabei $\varphi(x)$

[1] Vgl. HAUPT [1]. Er nimmt $\varphi(x)$ stetig an. Seine Ergebnisse können leicht zum Fall $\varphi(x) < L^2(0, \pi)$ erweitert werden. Vgl. auch HAMEL [1]. [2] INCE [1]. [3] MARKOVIĆ [1].

stetig voraus; seine Beweise scheinen aber gültig zu sein — wenn sie richtig sind — auch wenn nur die Beschränktheit der Funktion $\varphi(x)$ vorausgesetzt wird. Ihre Behauptung dürfte aber nicht richtig sein. Man kann auf das Beispiel der Meissnerschen Gleichung[1] verweisen, die einfach auf die Form (11) mit $\varphi(-x) = \varphi(x)$ transformiert werden kann, und bei der die oben ausgeschlossenen Ergebnisse auftreten. Man kann auch ein Gegenbeispiel dadurch konstruieren, dass man $\varphi(x)$ gleich einer Funktion mit der Periode $\frac{\pi}{p}$ $(p > 2)$ nimmt, für die ausserdem $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\varphi(x) \not\equiv$ *Konst.* gilt. Wie man leicht einsieht, verschwinden in diesem Fall sämtliche Instabilitätsintervalle ausser ev. denen mit den Ordnungsnummern np $(n = 0, 1, 2 \ldots)$, und es ist im allgemeinen $\varphi\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \not\equiv \varphi(x)$.

Man kann jedoch eine Behauptung der obigen Art aussprechen, aber es wird viel mehr an Voraussetzungen verlangt. Unser Satz ist folgender:

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass alle Instabilitätsintervalle von ungerader Ordnungsnummer der Dgl.

$$y'' + (\mu + \varphi(x))\,y = 0, \quad \varphi(x) < L^2(0, \pi), \quad \varphi(x + \pi) = \varphi(x) \; f.\,ü.$$

verschwinden, ist, dass

$$\varphi\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \varphi(x) \; f.\,ü.$$

gilt.

Beweis: Wir beweisen zuerst die Notwendigkeit der Bedingung.

Gemäss obiger Numerierung bedeutet das Verschwinden der Instabilitätsintervalle von ungerader Ordnung, dass die Eigenwerte der Eigenwertaufgabe (13) paarweise zusammenfallen. Dann betrachten wir nebst der genannten Eigenwertaufgabe die folgende

$$\left.\begin{aligned} z'' + (\mu + \psi(x))\,z &= 0 \\ z(0) &= -z(\pi) \\ z'(0) &= -z'(\pi) \end{aligned}\right\}, \qquad (14)$$

worin $\psi(x) = \varphi\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ sein soll. Sie hat offenbar dieselben Eigenwerte wie die Eigenwertaufgabe (13). Also liegt ein Problem vor, das den von uns behandelten Eindeutigkeitsproblemen bei den Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgaben analog ist.

[1] Vgl. STRUTT [1] S. 39 f.

Wenn $\bar{\mu}_{2n}$ ein Eigenwert der Eigenwertaufgabe (13) (und also der Eigenwertaufgabe (14)) ist, so ist also $\bar{\mu}_{2n} = \bar{\mu}_{2n+1}$, und es sind alle Lösungen der Dgl. (11) für $\mu = \bar{\mu}_{2n}$ Eigenfunktionen der Eigenwertaufgabe (13).[1] Es sei dann $y_n(x)$ diejenige Lösung von (11), für die

$$y_n(0) = 0, \quad \int_0^{\pi} y_n^2(x)\,dx = \sqrt{2\pi}$$

gilt, und $\eta_n(x)$ diejenige Lösung, für die

$$\eta_n'(0) = 0, \quad \int_0^{\pi} \eta_n^2(x)\,dx = \sqrt{2\pi}$$

gilt. Es sei ferner

$$(-1)^n y_n\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \zeta_n(x)$$

$$(-1)^{n+1} \eta_n\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = z_n(x).$$

Die Funktionen $z_n(x)$ und $\zeta_n(x)$ sind also Eigenfunktionen der Eigenwertaufgabe (14).

Nun gehen wir wie im Kapitel 2 vor (Eigenwertaufgabe A). Wir definieren ein Hilfssystem $\{U_\nu(x)\}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} U_{2n}(x) &= \frac{1}{2}(\eta_n(x)\zeta_n(x) - y_n(x)z_n(x)) \\ U_{2n+1}(x) &= \frac{1}{2}(y_n(x)\zeta_n(x) + z_n(x)\eta_n(x)) \end{aligned} \qquad (n = 0, 1, 2\ldots)$$

Diesen Funktionen entsprechen also die Eigenwerte $\bar{\mu}_{2n}$ und $\bar{\mu}_{2n+1}$. Setzen wir nun

$$\Delta(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

erhalten wir leicht die der Relation (4), Kap. 2 analoge Relation

$$\int_0^{\pi} \Delta(x)\cdot U_\nu(x)\,dx = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2\ldots).$$

Nun gilt

$$\Delta\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\Delta(x) \quad f.\,ü.$$

Wenn wir also die Vollständigkeit des Systems $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,1,2\ldots}$ in bezug auf den Raum der Funktionen $f(x) < L^2(0,\pi)$ mit obiger Eigenschaft $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$

[1] Vgl. Haupt [1].

$= -f(x)$ *f. ü.* beweisen können, folgt die Behauptung: $\varDelta(x) = \varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$ $= 0$ *f. ü.* Wir wollen diesen Beweis im wesentlichen durchführen. Dabei erhalten wir zuerst, dem Hilfssatz A_1 analog,

$$U_\nu\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -U_\nu(x)$$

$$U_{2n}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2(2n+1)x + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$U_{2n+1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2(2n+1)x + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Wir bilden nun das zu obigem Funktionensystem gehörende Gleichungssystem (14), Kap. 2, wobei $f(x)$ eine Funktion des oben erwähnten Raumes sein soll und die $r_{\nu\varkappa}$, α_ν, a_ν in analoger Weise wie im Kap. 2 definiert sein sollen. Aus obigen Eigenschaften der Funktionen $U_\nu(x)$ folgt wie gewöhnlich die Vollstetigkeit dieses Gleichungssystems (vgl. Hilfssatz A_2).

Die Vollständigkeit des Systems $\{U_\nu(x)\}$ in bezug auf den oben genannten Raum ist gesichert, falls dieses Gleichungssystem eindeutig auflösbar ist. Die eindeutige Auflösbarkeit folgt ihrerseits in gewöhnlicher Weise, wenn wir ein System $\{V_\nu(x)\}_{\nu=0,1,2\ldots}$ beschränkter Funktionen finden können, die diesem Raum angehören und so beschaffen sind, dass das System

$$\{U_\nu(x),\ V_\nu(x)\}_{\nu=0,1,2\ldots}$$

biorthogonal und normiert wird (vgl. Hilfssatz A_3 und den Beweis von Satz A_1: 1). Wir deuten den Beweis dafür an, dass es ein solches System gibt. Wir wählen

$$V_{2n}(x) = U'_{2n+1}(x)$$

$$V_{2n+1}(x) = U'_{2n}(x).$$

Es gilt dann zuerst

$$V_\nu\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -V_\nu(x),$$

so dass die Funktionen $V_\nu(x)$ dem fraglichen Raum zugehören und beschränkt sind.

Nehmen wir auf die Eigenschaft $U_\nu(\pi) = U_\nu(0)$ Bezug, die aus den Randbedingungen von (13) unmittelbar folgt, finden wir gemäss der Definition (26), Kap. 2

$$1)\quad \int_0^\pi U_{2n}(x)\,V_{2k}(x)\,dx = \frac{1}{4}\{I[(\eta_n\zeta_n),(y_k\zeta_k)] + I[(\eta_n\zeta_n),(z_k\eta_k)] -$$
$$- I[(y_n z_n),(y_k\zeta_k)] - I[(y_n z_n),(z_k\eta_k)]\}. \tag{15}$$

2) Bilden wir nun das zu jedem dieser vier I-Ausdrücke gehörige rechte Glied von (27), Kap. 2, finden wir, dass es gleich 0 sein muss. Entsprechendes gilt für jede andere Kombination von Funktionen $U_\nu(x)$, $V_\varkappa(x)$. Also gilt, gemäss (27), Kap. 2,

$$\int_0^\pi U_\nu(x)\,V_\varkappa(x)\,dx = 0, \qquad \bar{\mu}_\nu \neq \bar{\mu}_\varkappa. \tag{16}$$

Gemäss der Hauptschen Reihe von Ungleichungen (S. 89) und der Voraussetzung gilt aber $\bar{\mu}_\nu \neq \bar{\mu}_\varkappa$, wenn $\nu \neq \varkappa$, ausser wenn $\nu = 2n$, $\varkappa = 2n+1$ $(n = 0, 1, 2\ldots)$ ist oder umgekehrt. In diesem Fall gilt aber

$$\int_0^\pi U_{2n}(x)\,V_{2n+1}(x)\,dx = \frac{1}{2}U_{2n}^2(x)\Big/_0^\pi = 0 \text{ und} \int_0^\pi U_{2n+1}(x)\,V_{2n}(x)\,dx = \frac{1}{2}U_{2n+1}^2(x)\Big/_0^\pi = 0.$$

Also gelten die Relationen (16), wenn $\nu \neq \varkappa$ ist. Die Biorthogonalität des Systems $\{U_\nu(x),\ V_\nu(x)\}_{\nu=0,1,2\ldots}$ ist damit gesichert.

3) Wenn $\nu = \varkappa$ ist, erhält man leicht aus der Formel (15), dass

$$\int_0^\pi U_\nu(x)\ V_\nu(x)\,dx \neq 0$$

ist.

Die oben gefundenen Eigenschaften des Systems $\{U_\nu(x),\ V_\nu(x)\}_{\nu=0,1,2\ldots}$ reichen schon hin, um die Vollständigkeit des Systems $\{U_\nu(x)\}_{\nu=0,1,2\ldots}$ in bezug auf den oben erwähnten Raum der Funktionen $f(x) < L^2(0,\pi)$ mit $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -f(x)$ $f.\ ü.$ zu beweisen (vgl. den Beweis von Satz $A_1:1$). Also folgt

$$\varphi(x) = \psi(x) = \varphi\left(x+\frac{\pi}{2}\right) f.\ ü.$$

Die Bedingung des Satzes ist also notwendig.

Die Bedingung ist aber auch hinreichend. Man sieht dies aus folgendem ein. Wenn $\varphi\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \varphi(x)$ f. ü. und $y(x)$ die zu einem beliebigen Eigenwert μ von (13) gehörige Eigenfunktion ist, so muss offenbar auch $z(x) = y\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

eine Lösung sein, und es gilt:

$$z(0) = -z(\pi)$$
$$z'(0) = -z'(\pi).$$

Es muss also entweder zwei unabhängige Eigenfunktionen der Eigenwertaufgabe (13) bei dem Eigenwert μ geben, oder auch ist

$$z(x) = y\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = Konst.\ y(x).$$

Das letzte ist aber unmöglich, denn sonst müsste $y(x)$ zwei Nullstellen mit dem Abstand $\frac{\pi}{2}$ haben, woraus folgt, dass $y(x)$ im Intervall $0 \leq x < \pi$ eine gerade Anzahl von Nullstellen haben müsste. Gemäss dem Ergebnis von HAUPT S. 89 haben aber die Eigenfunktionen von (13) eine ungerade Anzahl von Nullstellen in diesem Intervall. Also muss es bei jedem Eigenwert zwei unabhängige Eigenfunktionen geben. Dies ist bekanntlich mit dem Verschwinden der Instabilitätsintervalle gleichbedeutend.[1]

Aus obigem Satz kann man insbesondere herleiten, dass *das Verschwinden aller Instabilitätsintervalle notwendig* $\varphi(x) = Konst.$ *f. ü. zur Folge hat.*

Literaturverzeichnis.[2]

V. AMBARZUMIAN, [1] Über eine Frage der Eigenwerttheorie. — Zeitschrift f. Phys. 53 (1929) S. 690—695.

M. BÔCHER, [1] The theorems of oscillation of Sturm and Klein. — Bulletin Americ. Math. Soc. (2) 4 (1898) S. 295—313, 365—376.

——, [2] Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Encyklopädie II, 1 (1899—1916) S. 437—463.

——, [3] Leçons sur les méthodes de Sturm. — Paris 1917.

D. CALIGO, [1] Complementi alla valutazione asintotica delle funzioni di Sturm-Liouville. — Atti Accad. Ital., Rend. (7) 3 (1942) S. 643—650. Ref. Zentrbl. f. Math. 27 (1943) S. 312.

C. CARATHÉODORY, [1] Vorlesungen über reelle Funktionen. — Leipzig 1918.

R. COURANT—D. HILBERT, [1] Methoden der mathematischen Physik I. — Berlin 1931.

[1] Vgl. HAUPT [1]. In analoger Weise beweist man die obige Behauptung S. 90 hinsichtlich Funktionen $\varphi(x)$ mit der Periode $\frac{\pi}{p}$ $(p > 2)$.

[2] Es sind die Verkürzungen bei KAMKE [1] S. XVII ff. angewandt.

B. DEMTCHENKO, [1] Sur un problème inverse au problème de Dirichlet. — C. R. Paris 189 (1929) S. 725—726.

L. FEJÉR, [1] Untersuchungen über Fouriersche Reihen. — Math. Annalen 58 (1904) S. 51—69.

G. HAMEL, [1] Über die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten. — Math. Annalen 73 (1913) S. 371—412.

O. HAUPT, [1] Über lineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Bemerkungen zur Arbeit gleichen Titels von Herrn Hamel. — Math. Annalen 79 (1919) S. 278—285.

E. HELLINGER—O. TOEPLITZ, [1] Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. — Encyklopädie II, 3 (1927) S. 1335—1601.

E. HILB—O. SZÁSZ, [1] Allgemeine Reihenentwicklungen. — Encyklopädie II, 3 (1923) S. 1229—1276.

D. HILBERT, [1] Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. — Leipzig und Berlin 1912.

E. W. HOBSON, [1] The theory of functions II. — Cambridge 1926.

E. L. INCE, [1] Periodic solutions of a linear differential equation of the second order with periodic coefficients. — Proceedings Cambridge 23 (1926) S. 44—46.

E. KAMKE, [1] Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. — Leipzig 1942.

H. v. KOCH, [1] Sur la convergence des déterminants infinis. — Rendiconti Palermo 28 (1909) S. 255—266.

R. DE L. KRONIG—W. G. PENNEY, [1] Quantum mechanics of elektrons in crystal lattices. — Proceedings Soc. London 130 (1931) S. 499—513.

R. E. LANGER, [1] An inverse problem in differential equations. — Bulletin Americ. Math. Soc. (2) 39 (1933) S. 814—820.

J. LIOUVILLE, [1] Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable. — Journal de Math. (1) 1 (1836) S. 253—265.

— —, [2] Second mémoire. — Journal de Math. (1) 2 (1837) S. 16—35.

— —, [3] Troisième mémoire. — Journal de Math. (1) 2 (1837) S. 418—436.

F. LUCÁCS, [1] Über die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe. — Journal für Math. 150 (1920) S. 107—112.

Ž. MARKOVIĆ, [1] Sur les solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient périodique. — Proceedings London Math. Soc. (2) 31 (1930) S. 417—438.

W. MOTHWURF, [1] Über Saiten mit nur harmonischen Obertönen. — Monatshefte f. Math. 40 (1933) S. 93—96.

D. RIABOUCHINSKY, [1] Sur la détermination d'une surface d'après les données qu'elle porte. — C. R. Paris 189 (1929) S. 629—632.

— —, [2] Sur quelques problèmes relatifs au potentiel. — Bulletin Sc. Math. (2) 53 (1929) S. 291—306.

F. Riesz, [1] Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. — Paris 1913.

E. Rupp, [1] Über Elektronenreflexion und Beugung an Einkristallflächen. — Annalen Phys. (5) 1 (1929) S. 801—813.

E. Schrödinger, [1] Abhandlungen zur Wellenmechanik. — Leipzig 1928.

M. J. O. Strutt, [1] Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. — Ergebnisse Math. I, 3. Berlin 1932.

C. Sturm, [1] Sur les équations différentielles linéaires du second ordre. — Journal de Math. (1) 1 (1836) S. 106—186.

N. Wiener, [1] The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients. — Massachusetts' Journal of Math. 3 (1924) S. 72—94.

A. Zygmund [1] Trigonometrical series. — Warszawa-Lwow 1935.