SUR QUELQUES CONSÉQUENCES ARITHMÉTIQUES
DES FORMULES
DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

CH. HERMITE
à PARIS.

(Extrait du Bulletin de l'Académie des Sciences de St Pétersbourg. T. 29.)

Dans les Comptes-rendus de l'Académie de Berlin de 1875 (¹) M. KRONECKER a donné des propositions d'une grande importance que j'ai pour objet d'établir dans cette note, en me plaçant à un point de vue bien différent de celui de l'illustre géomètre. Posons avec les notations de l'auteur:

$$\begin{aligned}\vartheta_0(q) &= 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots\\ \vartheta_2(q) &= 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \dots\\ \vartheta_3(q) &= 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots\end{aligned}$$

et désignons par $F(n)$ le nombre des classes de formes quadratiques de déterminant $-n$ dont un au moins des coefficients extrêmes est impair, avec la convention d'écrire $F(n) - \frac{1}{2}$ au lieu de $F(n)$, lorsque n est un carré. Les théorèmes dont je vais m'occuper, consistent dans les relations suivantes

$$\text{(A)} \qquad 4\sum_0^\infty F(4n+2)q^{n+\frac{1}{2}} = \vartheta_2^2(q)\vartheta_3(q),$$

$$\text{(B)} \qquad 4\sum_0^\infty F(4n+1)q^{n+\frac{1}{4}} = \vartheta_2(q)\vartheta_3^2(q),$$

$$\text{(C)} \qquad 8\sum_0^\infty F(8n+3)q^{2n+\frac{3}{4}} = \vartheta_2^3(q),$$

(¹) *Über quadratische Formen von negativer Determinante,* p. 223.

qui révèlent une liaison étroite entre la théorie arithmétique des formes quadratiques et la théorie analytique des transcendantes elliptiques. Deux voies s'offrent pour conduire à ces beaux résultats, l'une qui les a fait découvrir, est celle de M. KRONECKER; elle part de la considération des modules singuliers qui donnent lieu à la multiplication complexe. Une seconde que j'ai indiquée succinctement dans une lettre adressée à M. LIOUVILLE, [1] repose plus sur l'analyse que sur l'arithmétique, la notion de classe s'y trouvant amenée par la considération des formes réduites. Elle m'a donné déjà la démonstration de l'équation (C); je me propose maintenant d'en tirer d'une manière plus directe cette même relation, et aussi d'établir les théorèmes (A) et (B) qui sont du plus grand intérêt. J'exposerai ensuite comme conséquence de cette méthode, quelques expressions des sommes $\sum_0^n F(4n+2)$, $\sum_0^n F(4n+1)$, $\sum_0^n F(8n+3)$, où l'on verra une nouvelle application de la fonction $E(x)$, représentant l'entier contenu dans x, qui a été récemment l'objet de plusieurs communications importantes de M. BOUNIAKOWSKY.

I.

La représentation des différentes classes de formes de déterminant négatif, s'obtient par des formes particulières auxquelles on donne le nom de réduites, et qui sont caractérisées de la manière suivante.

Désignons les par (A, B, C), et soit ε une quantité du signe de B, et égale en valeur absolue à l'unité; on aura les conditions:

$$A \leqq C, \qquad 2\varepsilon B \leqq A.$$

Mais faisons pour plus de précision la distinction entre les formes non ambigues et les formes ambigues. Les premières seront $(A, \pm B, C)$, en supposant B positif, différent de zéro, et excluant les cas d'égalité dans les conditions précédentes qui deviennent:

$$A < C, \qquad 2B < A.$$

[1] *Sur la théorie des fonctions elliptiques et ses applications à l'arithmétique.* Journal de M. LIOUVILLE, année 1862, p. 25.

Les autres ensuite seront de ces trois espèces:

$$(A, 0, C) \qquad A < C,$$

$$(2B, B, C) \qquad 2B < C,$$

$$(A, B, A) \qquad 2B < A,$$

et c'est seulement quand le déterminant changé de signe est un carré ou le triple d'un carré, qu'on doit prendre:

$$A = C, \quad \text{ou bien} \quad 2B = C, \; 2B = A.$$

Cette notion des formes réduites doit recevoir une modification légère en vue des recherches qui vont suivre, où nous considérerons exclusivement les formes dans lesquelles l'un au moins des coefficients extrêmes est impair. [1]

Convenons de désigner par a, a', a'', des nombres impairs, par b, b', des nombres pairs; elles se répartiront pour un déterminant impair, dans ces trois catégories:

$$\text{(I)}\ (a, b, a'), \qquad \text{(II)}\ (a, a', b), \qquad \text{(III)}\ (b, a', a),$$

et pour un déterminant pair dans les suivantes:

$$\text{(I)}\ (a, a'', a'), \qquad \text{(II)}\ (a, b', b), \qquad \text{(III)}\ (b, b', a).$$

Supposons maintenant ces formes réduites et admettons que les coefficients moyens soient positifs; je les ramenerai, comme on va voir, au premier type. En raisonnant, pour fixer les idées dans le premier cas, j'effectue la substitution au déterminant -1,

$$x = X + Y, \qquad y = -Y$$

dans la forme (II). Elle devient:

$$(a, a - a', a - 2a' + b)$$

et par conséquent du type (I) mais le coefficient moyen qui reste positif,

---

[1] Ce sera par conséquent l'ordre proprement primitif et ses dérivés lorsque le déterminant sera impair ou le double d'un nombre impair, seuls cas qui s'offrent dans les théorèmes de M. KRONECKER.

franchit la limite caractéristique des réduites. Il est en effet l'un des termes de la suite:

$$a-k,\quad a-k+2,\quad a-k+4,\ \ldots,\ a-1,$$

où k désigne le plus grand nombre impair contenu dans $\frac{a}{2}$. Toutefois le dernier coefficient ne cesse pas de satisfaire à la condition: $a-2a'+b>a$, puisqu'on doit supposer: $2a'<b$. Le même résultat s'obtenant à l'égard de la forme (III), qui est improprement équivalente à $(a,\ a',\ b)$ et par suite proprement équivalente à: $(a,\ a-a',\ a-2a'+b)$, nous avons cette conclusion, que toutes les classes de déterminant impair, sont représentées par les formes du type (I), $(A,\ \pm B,\ A')$ où l'on supposera:

$$B=0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ A-1,\quad \text{et:}\quad A\leqq A'.$$

Quant aux formes ambigues, deux cas sont à distinguer, suivant que le déterminant est $\equiv 1$, ou $\equiv 3 \pmod 4$. Dans le premier il n'existe que la seule espèce $(A,\ 0,\ A')$, A n'étant jamais égal à A'; mais dans le second cas, les formes ambigues sont d'une part: $(A,\ 0,\ A')$ avec la condition $A<A'$, puis: $(A,\ B,\ A)$ en prenant:

$$B=0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ A-1.$$

On établira de la même manière, en considérant les déterminants pairs, que les formes non ambigues se ramènent au premier type: $(A,\ \pm A'',\ A')$, où l'on doit supposer

$$A''=1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ A-2,\quad \text{et:}\quad A<A';$$

les formes ambigues sont ensuite:

$(A,\ A,\ A')$, avec l'inégalité: $A<A'$

puis: $(A,\ A'',\ A)$, en prenant encore.

$A''=1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ A-2.$

Cette seconde catégorie ne se présente d'ailleurs que lorsque le déterminant supposé pair est divisible par 8.

Nous avons exclu dans ce qui précède, les formes de l'ordre improprement primitif, et des dérivées de cet ordre, nous ajouterons à leur égard, pour les déterminants $\equiv 5 \pmod 8$, la remarque suivante. Ces formes pour de tels déterminants, sont du type $(2a, a'', 2a')$; en supposant a'' positif, elles seront réduites sous les conditions:

$$a'' \leqq a, \qquad a \leqq a'.$$

Admettons maintenant que le coefficient moyen soit l'un des termes de la suite:

$$a'' = 1, 3, 5, \ldots, 2a - 1,$$

les formes obtenues en prenant:

$$a'' = a + 2, a + 4, \ldots, 2a - 1$$

ne seront plus réduites mais elles le deviendront par la substitution précédemment employée:

$$x = X + Y, \qquad y = - Y.$$

En effet dans la transformée obtenue:

$$(2a, 2a - a'', 2a - 2a'' + 2a')$$

les conditions caractéristiques:

$$2a - a'' < a, \qquad 2a - a'' < a - a'' + a'$$

sont satisfaites, puisqu'elles reviennent à celles-ci:

$$a < a'', \qquad a < a'.$$

Toutefois il sera nécessaire, quand on aura:

$$a - a'' + a' < a, \quad \text{c'est-à-dire} \quad a' < a''$$

d'employer en outre la substitution $X = Y'$, $Y = X'$. Soit maintenant:

$$a'' = a + b, \qquad a' = a + b',$$

faisons aussi:

$$a - b = a_1;$$

la transformée précédente devient:

$$(2a_1 + 2b, a_1, 2a_1 + 2b'),$$

les nouveaux éléments a_1, b, b', étant entièrement arbitraires. On voit ainsi que cette forme donne deux fois la série complète des réduites, à savoir les réduites elles-mêmes, si l'on prend $b' > b$, puis leurs transformées par la substitution $X = Y'$, $Y = X'$, quand on suppose $b' < b$. Nous avons donc le résultat suivant dont nous ferons bientôt usage. Concevons que a, a', a'', parcourent la série des nombres impairs sous la condition:

$$a < a', \qquad a'' < 2a;$$

la forme: $(2a, a'', 2a')$ représentera d'une part, les formes ambigues, $(2a, a, 2a')$, puis celles-ci: $(2a, a', 2a')$, qui se ramènent à: $(2a, 2a - a', 2a)$; c'est par conséquent la suite complète et sans répétition des formes ambigues. Il y a à excepter toutefois la supposition de $a = a'$, c'est-à-dire la forme dérivée de $(2, 1, 2)$, qui s'offre seulement lorsque N est le triple d'un carré. Elle représentera en second lieu, et répétée trois fois, la série des formes non ambigues, équivalentes proprement ou improprement aux formes réduites dont le coefficient moyen est positif.

II.

Le théorème (A) de M. Kronecker qui consiste dans l'égalité:

$$4\sum_0^\infty F(4n+2)q^{n+\frac{1}{2}} = \vartheta_2^2(q)\vartheta_3(q),$$

s'obtient au moyen de ces séries, où j'écris pour abréger:

$$\vartheta_0, \ \vartheta_2, \ \vartheta_3, \quad \text{au lieu de} \quad \vartheta_0(q), \ \vartheta_2(q), \ \vartheta_3(q):$$

$$\vartheta_2\vartheta_3 \frac{H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)} = \sum_0 {}_n \frac{4q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sin(2n+1)x,$$

$$\vartheta_2 \frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)\Theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sin x} + 4\sum_1 {}_n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left[q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\right] \sin(2n+1)x.$$

La première est le développement de $\frac{2kK}{\pi}\sin\frac{2Kx}{\pi}$, la seconde que j'ai donnée sans démonstration,[1] a été établie ainsi que d'autres de même nature dont je ferai usage, dans une excellente thèse de doctorat de M. Biehler,[2] à laquelle je renvoie. Multiplions les membre à membre, puis intégrons entre les limites zéro et $\frac{\pi}{2}$, en employant les formules:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

On trouvera ainsi:

$$\vartheta_2^2\vartheta_3 = 4S + 8S_1,$$

si l'on pose pour abréger:

$$S = \sum_0 {}_n \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1 - q^{2n+1}}$$

$$S_1 = \sum_1 {}_n \frac{q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+n+\frac{1}{2}}}{1 - q^{2n+1}} \left[q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\right].$$

Je développe maintenant ces expressions suivant les puissances de q en remplaçant $\frac{1}{1 - q^{2n+1}}$ par $1 + q^{2n+1} + q^{2(2n+1)} + \ldots$, et j'obtiens d'abord:

$$S = \sum q^{\frac{1}{2}aa'},$$

où a et a' parcourent la série entière des nombres impairs. Soit ensuite:

$$a'' = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2a - 1,$$

et l'on aura:

$$S_1 = \sum q^{\frac{1}{4}(a^2+2aa'-a''^2)}$$

---

(1) *Sur les théorèmes de M. Kronecker relatifs aux formes quadratiques* (Comptes-rendus, Juillet 1862).

(2) *Sur les développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce* (Paris, Gauthier-Villars, 1879).

Désignant donc par N un nombre impair quelconque, et par $\varphi(N)$, le nombre de ses diviseurs, nous pouvons déjà écrire:

$$S = \Sigma\, \varphi(N) q^{\frac{1}{2}N}.$$

En passant à la seconde somme S_1, nous poserons:

$$a^2 + 2aa' - a''^2 = 2N,$$

de sorte que $2N$ sera le déterminant changé de signe de la forme quadratique $(a,\ a'',\ a+2a')$. Cela étant, nous établissons que nous avons ainsi obtenu le type de nos nouvelles réduites pour un déterminant impairement pair, représenté par $(A,\ A'',\ A')$, en montrant que la différence $A - A'$ est nécessairement le double d'un nombre impair. Or on a:

$$AA' - A''^2 = 2N,$$

et par conséquent:

$$AA' \equiv 3 \pmod 4.$$

En multipliant par le nombre impair A', nous en conclurons:

$$A \equiv 3A' \pmod 4$$

d'où:

$$A - A' \equiv 2A' \pmod 4$$

comme il fallait le faire voir. Soit donc pour un moment: $f(2N)$ le nombre des classes non ambigues de déterminant $-2N$; il est clair qu'on obtient, puisqu'on exclut les valeurs négatives de A'':

$$S_1 = \sum \tfrac{1}{2} f(2N) q^{\frac{1}{2}N},$$

et le développement de $\vartheta_2^2\vartheta_3$ s'offre sous la forme suivante:

$$\vartheta_2^2\vartheta_3 = 4\sum [\varphi(N) + f(2N)]\, q^{\frac{1}{2}N}$$

Mais le nombre des classes ambigues de déterminant $-2N$ étant $\varphi(N)$, la somme $\varphi(N) + f(2N)$, est précisément la fonction $F(2N)$ de M. Kronecker, dont la proposition se trouve ainsi démontrée.

III.

Le second théorème de l'illustre géomètre se tire des séries suivantes:

$$\vartheta_2\vartheta_3 \frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)} = \frac{1}{\sin x} + \sum_0 {}_n \frac{4q^{2n+1}}{1 - q^{2n+1}} \sin(2n+1)x$$

$$\vartheta_3 \frac{\Theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)} = 2\sum_0 {}_n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} [1 + 2q^{-1} + \ldots + 2q^{-n^2}] \sin(2n+1)x.$$

En les multipliant membre à membre, et intégrant entre les limites zéro et $\frac{\pi}{2}$, on en déduit cette expression:

$$\vartheta_2\vartheta_3^2 = 2S + 4S_1,$$

où l'on a:

$$S = \sum_0 {}_n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} [1 + 2q^{-1} + \ldots + 2q^{-n^2}],$$

$$S_1 = \sum_0 {}_n \frac{q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+2n+1}}{1 - q^{2n+1}} [1 + 2q^{-1} + \ldots + 2q^{-n^2}].$$

Cela posé, désignons encore par a un nombre impair quelconque, et soit $b = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots, \pm(a-1)$, la première série prend cette nouvelle forme:

$$S = \sum q^{\frac{1}{4}(a^2-b^2)}$$

et l'on en conclut facilement:

$$S = \sum \varphi(N) q^{\frac{1}{4}N},$$

N parcourant la série des entiers impairs $\equiv 1 \pmod 4$. Soit en effet:

$$a^2 - b^2 = \delta\delta'$$

δ et δ' étant deux diviseurs conjugués de N; on aura nécessairement $\delta \equiv \delta' \pmod 4$, et les deux systèmes d'égalités:

$$a + b = \delta, \qquad a - b = \delta',$$

ou bien:

$$a - b = \delta, \qquad a + b = \delta',$$

détermineront toujours pour a un nombre impair, et pour b un nombre pair, qui change de signe en passant de l'un à l'autre; le cas où N est un carré correspondant à $b = 0$.

La quantité S_1, développée suivant les puissances de q, donne ensuite:

$$S_1 = \Sigma\, q^{\frac{1}{4}(a^2+4ac-b^2)}.$$

où l'on doit faire:

$$\begin{aligned} a &= 1,\ 3,\ 5,\ \dots \\ b &= 0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \dots,\ \pm (a-1), \\ c &= 1,\ 2,\ 3,\ \dots. \end{aligned}$$

Soit maintenant:

$$a^2 + 4ac - b^2 = N;$$

on voit que N sera $\equiv 1 \pmod 4$, et représente le déterminant changé de signe de la forme $(a,\ b,\ a + 4c)$. Nous trouvons ainsi l'expression $(A,\ \pm B,\ A')$ que nous avons déjà considérée, car le produit AA' étant $\equiv 1 \pmod 4$, la différence $A' - A$ est un multiple de quatre. Or il a été établi que cette forme donne d'abord la série entière et sans répétition des réduites non ambigues, puis les formes ambigues de l'espèce $(A,\ 0,\ A')$, où l'on a: $A < A'$. C'est donc la totalité des diverses formes, moins celles qui sont représentées par $(A,\ B,\ A)$, en prenant:

$$B = 0,\ 2,\ 4,\ \dots,\ A - 1.$$

Le nombre de ces dernières est pour une valeur donnée de N, le nombre des solutions de l'équation

$$A^2 - B^2 = N,$$

avec la condition que B soit positif. On doit donc comme tout-à l'heure poser en désignant par δ et δ' deux diviseurs conjugués de $4N$

$$A - B = \delta, \qquad A + B = \delta',$$

mais prendre maintenant $\delta' > \delta$, de sorte que le nombre cherché est $\frac{1}{2}\varphi(N)$, lorsque N n'est pas un carré. Dans ce dernier on obtient évidemment: $\frac{\varphi(N) - 1}{2} + 1$, ou bien: $\frac{\varphi(N) + 1}{2}$. De ce que nous venons d'établir résulte que si l'on désigne par $F(N)$ le nombre des classes de formes quadratiques de déterminant $-N$, on obtient:

$$S_1 = \sum [F(N) - \tfrac{1}{2}\varphi(N)]\, q^{\frac{1}{4}N}$$

en convenant, lorsque N est un carré, de remplacer $F(N)$ par $F(N) - \frac{1}{2}$. Or on a trouvé:

$$S = \sum \varphi(N) q^{\frac{1}{4}N};$$

nous avons par conséquent:

$$\vartheta_2\vartheta_3^2 = 4(S + 2S_1) = 4\sum F(N) q^{\frac{1}{4}N}$$

comme il s'agissait de l'établir.

IV.

Le troisième théorème de M. Kronecker, exprimé par l'égalité:

$$8\sum_0^\infty F(8n+3) q^{2n+\frac{3}{4}} = \vartheta_2^3(q)$$

se conclut du développement:

$$\vartheta_2 \frac{\theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)\theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)H_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)} = \frac{2}{\sin 2x} + \sum \frac{8q^{2n}}{1 - q^{2n}} \sin 2nx$$

où il faut prendre:

$$n = 1, 3, 5, \ldots$$

et de celui-ci

$$\vartheta_2 \frac{H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) H_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)} = 4\sum q^{n^2}\left[q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\right]\sin 2nx$$

dans lequel n parcourt la série des nombres entiers.

En opérant comme précédemment nous trouverons d'abord:

$$\vartheta_2^3 = 8(S + 2S_1),$$

où l'on a fait, en supposant $a = 1, 3, 5, \ldots$

$$S = \sum q^{a^2}\left[q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}\right],$$

$$S_1 = \sum \frac{q^{a^2+2a}}{1-q^{2a}}\left[q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}\right].$$

La première suite pouvant s'écrire:

$$S = \Sigma\, q^{\frac{1}{4}(4a^2-a'^2)}$$

$$a' = 1, 3, 5, \ldots, 2a-1,$$

nous poserons $N = 4a^2 - a'^2$; ce sera un entier $\equiv 3 \pmod 8$, et nous désignerons par δ et δ' deux de ses diviseurs conjugués. Cela fait, soit:

$$2a - a' = \delta, \qquad 2a + a' = \delta';$$

ces conditions détermineront pour a et a' des entiers impairs, puisqu'on a: $\delta \equiv 3\delta' \pmod 8$, et en prenant $\delta < \delta'$, a' sera positif. Le coefficient de $q^{\frac{1}{4}N}$ sera ainsi la moitié du nombre des diviseurs de N, et nous écrirons:

$$S = \sum \frac{1}{2}\varphi(N) q^{\frac{1}{4}N}.$$

Le développement de S_1 suivant les puissances de q étant:

$$S_1 = \Sigma\, q^{\frac{1}{4}(4a^2+4ab-a''^2)}$$

$$a = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots;\ b = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots;\ a'' = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2a-1$$

ou bien:

$$S_1 = \Sigma\, q^{\frac{1}{4}(4aa'-a''^2)}$$

en posant:

$$a' = a + b.$$

Nous ferons:

$$N = 4aa' - a''^2,$$

ce sera donc encore un entier $\equiv 3 \pmod 8$, qui se présente comme le déterminant changé de signe de la forme $(2a,\ a'',\ 2a')$ et de ce que nous avons établi § I, à l'égard de ces formes, donne la conclusion suivante.

Soit pour des classes improprement primitives, (N) le nombre total des formes ambigues, $f(N)$ la moitié du nombre des classes non ambigues, le nombre des solutions de l'équation:

$$aa' - a''^2 = N$$

est: $(N) + 3f(N)$, en exceptant le seul cas où N est le triple d'un carré, la quantité précédente devant être alors diminuée d'une unité.

On a ainsi:

$$S_1 = \sum [(N) + 3f(N)]q^{\frac{1}{4}N};$$

or on sait que $(N) = \frac{1}{2}\varphi(N)$, de sorte qu'ayant obtenu:

$$S = \sum \frac{1}{2}\varphi(N)q^{\frac{1}{4}N} = \Sigma\,(N)q^{\frac{1}{4}N}$$

nous en déduisons:

$$S + 2S_1 = \sum 3[(N) + 2f(N)]q^{\frac{1}{4}N}$$

et par suite:

$$\vartheta_2^3 = 24\sum [(N) + 2f(N)]q^{\frac{1}{4}N}.$$

Le procédé que je viens d'employer conduit comme on voit au nombre total des classes improprement primitives de déterminant $-N$, représenté par $(N) + 2f(N)$, celui que j'ai donné antérieurement, (Journal de LIOUVILLE, 1862, p. 25), fournissant sous la forme même qu'a obtenue M. KRONECKER, l'équation:

$$\vartheta_2^3 = 8 \sum F(N) q^{\frac{1}{4}N},$$

où $F(N)$ désigne le nombre des classes proprement primitives. Du rapprochement de ces deux expressions résulte donc la relation des *Disquisitiones Arithmeticae*

$$F(N) = 3[(N) + 2f(N)]$$

et dans le cas où N est le triple d'un carré:

$$F(N) = 3[(N) + 2f(N)] - 2.$$

M. LIPSCHITZ a donné de la même relation, une démonstration arithmétique aussi simple qu'élégante dans son beau mémoire publié dans le T. 53 du Journal de CRELLE: *Einige Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen.*

V.

Il me reste à indiquer des conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques dans lesquelles intervient la fonction $E(x)$; elles se tirent de la remarque suivante:

J'observe d'abord que si l'on pose:

$$f(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n + \ldots,$$

le développement suivant les puissances croissantes de la variable du quotient $\frac{f(x)}{1-x}$, donne la relation:

$$\frac{f(x)}{1-x} = A_0 + (A_0 + A_1)x + \ldots + (A_0 + A_1 + \ldots + A_n)x^n + \ldots$$

Cherchons pareillement le coefficient de x^n dans le développement de la quantité $\frac{f(x^a)}{1-x}$, où a désigne un nombre entier quelconque. Comme on peut écrire:

$$\frac{f(x^a)}{1-x} = \sum A_\mu x^{a\mu+\lambda},$$

$$\lambda = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mu = 0, 1, 2, \ldots$$

nous poserons la condition $a\mu + \lambda = n$, qui donne évidemment pour μ les valeurs: $0, 1, 2, \ldots, E\left(\frac{n}{a}\right)$. Soit donc pour abréger l'écriture: $\nu = E\left(\frac{n}{a}\right)$, il est clair qu'on aura:

$$\frac{f(x^a)}{1-x} = \sum (A_0 + A_1 + \ldots + A_\nu) x^n;$$

c'est la relation analytique que je vais employer, et je l'appliquerai d'abord en supposant $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Nous obtenons dans ce cas la formule suivante:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^a)} = \sum \left[1 + E\left(\frac{n}{a}\right)\right] x^n$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Multiplions ensuite les deux membres par x^b, b désignant un entier positif, on en tire:

$$\frac{x^b}{(1-x)(1-x^a)} = \sum \left[1 + E\left(\frac{n}{a}\right)\right] x^{n+b},$$

puis en changeant n en $n-b$:

$$\frac{x^b}{(1-x)(1-x^a)} = \sum \left[1 + E\left(\frac{n-b}{a}\right)\right] x^n.$$

On voit que dans cette nouvelle relation il est nécessaire de prendre $E\left(\frac{n-b}{a}\right) = 0$ lorsque $n-b$ est négatif; nous ferons désormais cette convention, et en remarquant que: $1 + E(x) = E(x+1)$, nous écrirons plus simplement:

$$\frac{x^b}{(1-x)(1-x^a)} = \sum E\left(\frac{n+a-b}{a}\right) x^n.$$

Il convient de joindre à cette formule celle qui donne le développement de la fraction $\frac{x^b}{(1-x)(1+x^a)}$, et qu'on obtient par l'identité:

$$\frac{x^b}{(1-x)(1+x^a)} = \frac{x^b(1-x^a)}{(1-x)(1-x^{2a})}.$$

Nous trouvons de cette manière:

$$\frac{x^b}{(1-x)(1+x^a)} = \sum \left[E\left(\frac{n+2a-b}{2a}\right) - E\left(\frac{n+a-b}{2a}\right)\right] x^n,$$

ce qui conduit à introduire une nouvelle fonction $E_1(x)$, definie par la condition:

$$E_1(x) = E\left(x + \frac{1}{2}\right) - E(x).$$

On a ainsi sous une forme plus simple:

$$\frac{x^b}{(1-x)(1+x^a)} = \sum E_1\left(\frac{n+a-b}{2a}\right) x^n.$$

Je me bornerai à remarquer à l'égard de la quantité $E_1(x)$, qu'elle est toujours égale à zéro lorsque la différence $x - E(x)$ est moindre que $\frac{1}{2}$, et à l'unité si l'on suppose $x - E(x) \geqq \frac{1}{2}$, c'est ce que montrent les relations:

$$E_1(x+1) = E_1(x),$$

$$E_1\left(x + \frac{1}{2}\right) = 1 - E_1(x),$$

$$E_1(x) = E(2x) - 2E(x).$$

J'appliquerai encore la formule:

$$\frac{f(x^a)}{1-x} = \sum (A_0 + A_1 + \ldots + A_\nu)x^n$$

à un cas plus général en prenant: $f(x) = \frac{1}{(1-x)^k}$, où k est un entier quelconque. Nous aurons alors:

$$A_n = \frac{k(k+1)\ldots(k+n-1)}{1.2\ldots n},$$

et l'on sait d'ailleurs que la somme: $A_0 + A_1 + \ldots + A_\nu$ a pour valeur

$$\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+\nu)}{1.2\ldots\nu}, \quad \text{ou bien:} \quad \frac{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)}{1.2\ldots k}.$$

Il suffit donc pour obtenir le développement cherché de remplacer ν par $E\left(\frac{n}{a}\right)$ dans cette expression. Mais soit afin d'abréger l'écriture:

$$E_k(x) = \frac{E(x)E(x+1)\ldots E(x+k-1)}{1.2\ldots k},$$

on aura ainsi:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^a)^k} = \sum E_k\left(\frac{n+a}{a}\right)x^n,$$

puis en raisonnant comme plus haut:

$$\frac{x^b}{(1-x)(1-x^a)^k} = \sum E_k\left(\frac{n+a-b}{a}\right)x^n.$$

Ce résultat établi, nous en tirons la formule relative à la fonction: $\frac{x^b}{(1-x)(1+x^a)^k}$, en la mettant sous la forme: $\frac{x^b(1-x^a)^k}{(1-x)(1-x^{2a})^k}$. Soit par exemple $k = 2$, un calcul facile donne la relation:

$$\frac{x^b}{(1-x)(1+x^a)^2} = \sum E\left(\frac{n+2a-b}{2a}\right)\left[1 - 2E_1\left(\frac{n-b}{2a}\right)\right]x^n;$$

mais on peut suivre une autre voie, et en posant:

$$\frac{1}{(1+x)^k} = A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n + \ldots$$

chercher la valeur de la somme: $A_0 + A_1 + \dots + A_\nu$. Il suffit pour cela d'avoir le coefficient de x^ν dans le développement de la fraction $\frac{1}{(1-x)(1+x)^k}$, et c'est ce que donne la décomposition en fractions simples, qui permet d'écrire:

$$\frac{2^k}{(1-x)(1+x)^k} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{(1+x)^2} + \dots + \frac{2^{k-1}}{(1+x)^k}.$$

La quantité cherchée s'offre ainsi sous la forme:

$$\frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^\nu}{2^k}\left[1 + 2(\nu+1) + 2^2\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{1.2} + \dots + 2^{k-1}\frac{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k-1)}{1.2\dots(k-1)}\right];$$

le coefficient de x^n, dans le développement de $\frac{1}{(1-x)(1+x^a)^k}$ est donc obtenu explicitement au moyen de l'élément $\nu = E\left(\frac{n}{a}\right)$, tandis qu'en partant de la fonction $\frac{(1-x^a)^k}{(1-x)(1-x^{2a})^k}$, ce même coefficient s'exprimera d'une manière toute différente, au moyen de $E\left(\frac{n}{2a}\right)$ et $E\left(\frac{n}{2a} + \frac{1}{2}\right)$. Soit $k = 1$, pour considérer le cas le plus simple, nous aurons la relation:

$$E\left(\frac{n+2a}{2a}\right) - E\left(\frac{n+a}{2a}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^{E\left(\frac{n}{a}\right)}\right]$$

ou plutôt:

$$E\left(\frac{n+a}{2a}\right) - E\left(\frac{n}{2a}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - (-1)^{E\left(\frac{n}{a}\right)}\right]$$

puis si l'on fait $\frac{n}{2a} = x$:

$$E\left(x + \frac{1}{2}\right) - E(x) = \frac{1}{2}\left[1 - (-1)^{E(2x)}\right]$$
$$= \sin^2 \frac{\pi E(2x)}{2}$$

ce qui se vérifie immédiatement.

Je ne m'écarterai point de mon but en cherchant en ce moment à approfondir les relations de cette nature, et je me bornerai à remarquer que de ces identités fort simples:

$$\frac{x^a}{(1-x)(1-x^a)} = \frac{x^a[1+x^a+x^{2a}+\ldots+x^{(m-1)a}]}{(1-x)(1-x^{ma})},$$

$$\frac{x^a}{(1-x)(1-x^a)^2} = \frac{x^a[1+x^a+x^{2a}+\ldots+x^{(m-1)a}]^2}{(1-x)(1-x^{ma})^2},$$

on conclut les propriétés suivantes de $E(x)$ et $E_2(x)$:

$$E(x)+E\left(x+\frac{1}{m}\right)+E\left(x+\frac{2}{m}\right)+\ldots+E\left(x+\frac{m-1}{m}\right)=E(mx),$$

$$E_2\left(x+\frac{1}{m}\right)+2E_2\left(x+\frac{2}{m}\right)+\ldots+(m-1)E_2\left(x+\frac{m-1}{m}\right)$$
$$+E_2\left(x-\frac{1}{m}\right)+2E_2\left(x-\frac{2}{m}\right)+\ldots+(m-1)E_2\left(x-\frac{m-1}{m}\right)$$
$$=E_2(mx)-mE_2(x).$$

VI.

J'appliquerai les résultats qui viennent d'être établis en premier lieu à la série d'EULER:

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\ldots+\frac{x^a}{1-x^a}+\ldots=\sum\varphi(n)x^n$$

où $\varphi(n)$ désigne le nombre des diviseurs de n. La relation:

$$\frac{x^a}{(1-x)(1-x^a)}=\sum E\left(\frac{n}{a}\right)x^n$$

donne alors, comme on voit, la proposition arithmétique bien connue

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)=\sum E\left(\frac{n}{a}\right)$$
$$a=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

Et pareillement si l'on pose:

$$\frac{f(1)x}{1-x}+\frac{f(2)x^2}{1-x^2}+\ldots+\frac{f(a)x^a}{1-x^a}+\ldots=\sum F(n)x^n,$$

de sorte qu'on ait:

$$F(n)=f(1)+f(d)+f(d')+\ldots$$

en désignant par d, d', etc. tous les diviseurs de n, nous obtenons:

$$F(1)+F(2)+\ldots+F(n)=\sum E\left(\frac{n}{a}\right)f(a)$$
$$a=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Supposons en particulier que $f(n)$ soit un polynôme quelconque de degré k, qu'on pourra écrire ainsi:

$$f(n)=A+Bn+C\frac{n(n+1)}{1.2}+\ldots+K\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{1.2\ldots k}.$$

Au moyen d'une transformation dont Jacobi a donné des exemples dans les formules du § 40 des *Fundamenta,* nous aurons:

$$\frac{f(1)x}{1-x}+\frac{f(2)x^2}{1-x^2}+\ldots+\frac{f(a)x^a}{1-x^a}+\ldots$$
$$=\sum\frac{Ax^a}{1-x^a}+\sum\frac{Bx^a}{(1-x^a)^2}+\ldots+\sum\frac{Kx^a}{(1-x^a)^{k+1}}$$
$$a=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

On en conclut l'égalité.

$$\sum E\left(\frac{n}{a}\right)f(a)=A\sum E\left(\frac{n}{a}\right)+B\sum E_2\left(\frac{n}{a}\right)+\ldots+K\sum E_{k+1}\left(\frac{n}{a}\right),$$

et par conséquent celles-ci:

$$\sum E\left(\frac{n}{a}\right)a=\sum E_2\left(\frac{n}{a}\right),$$
$$\sum E\left(\frac{n}{a}\right)\frac{a(a+1)}{2}=\sum E_3\left(\frac{n}{a}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

qui offrent autant de nouvelles propriétés de la fonction $E(x)$.

Remarquons encore au sujet de la série d'EULER qu'elle a été mise par CLAUSEN sous la forme suivante:

$$x\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+x^4\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)+\ldots+x^{a^2}\left(\frac{1+x^a}{1-x^a}\right)+\ldots,$$

on a donc:

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)=\sum\left[E\left(\frac{n+a-a^2}{a}\right)+E\left(\frac{n-a^2}{a}\right)\right],$$

et l'on voit que dans le second membre les valeurs de a ne doivent pas dépasser l'entier contenu dans $\sqrt{n}$, que je désignerai par ν, pour abréger. Remarquons maintenant qu'on peut écrire:

$$E\left(\frac{n+a-a^2}{a}\right)=E\left(\frac{n}{a}\right)+1-a$$

$$E\left(\frac{n-a^2}{a}\right)=E\left(\frac{n}{a}\right)-a$$

et que l'on a:

$$\sum_1^\nu(2a-1)=\nu^2,$$

nous en conclurons la formule:

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)=2\sum E\left(\frac{n}{a}\right)-\nu^2$$
$$a=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \nu$$

dont j'ai donné ailleurs une démonstration arithmétique. (¹)

Après la fonction $\varphi(n)$ se présentent celles que M. KRONECKER a considérées dans son célèbre travail, sur le nombre des classes de formes quadratiques de déterminant négatif (Journal de BORCHARDT, T. 57, p. 248), et qui se rapportent aux sommes des diviseurs des nombres. Elles sont désignées et définies comme il suit:

$X(n)$ somme de tous les diviseurs impairs de n,
$\Phi(n)$ somme de tous les diviseurs de n,

(¹) *Sur quelques points dans la théorie des nombres:* Extrait d'une lettre à M. LIPSCHITZ, Acta Mathematica, T. 2, p. 299.

$\Psi'(n)$ excès de la somme des diviseurs de n supérieurs à $\sqrt{n}$, sur la somme des diviseurs moindres que $\sqrt{n}$,

$\Phi'(n)$ excès de la somme des diviseurs de n de la forme $8k \pm 1$, sur la somme des diviseurs de la forme $8k \pm 3$,

$\Psi''(n)$ excès de la somme des diviseurs $8k \pm 1$, supérieurs à $\sqrt{n}$, et des diviseurs $8k \pm 3$, moindres que $\sqrt{n}$, sur la somme des diviseurs $8k \pm 1$ moindres que $\sqrt{n}$, et des diviseurs $8k \pm 3$, plus grands que $\sqrt{n}$.

L'illustre géomètre donne ensuite les équations suivantes, où je suppose pour plus de clarté:

$$a = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots$$
$$b = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots$$
$$c = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

à savoir:

$$\Sigma\,[2 + (-1)^c]\,X(c)q^c = \sum\left[\frac{q^a}{(1-q^a)^2} + \frac{q^b}{(1-q^b)^2}\right]$$

$$\Sigma\,\Phi(c)q^c = \sum \frac{cq^c}{1-q^c} = \sum \frac{q^c}{(1-q^c)^2}$$

$$\Sigma\,\Psi(c)q^c = \sum \frac{q^{c^2+c}}{(1-q^c)^2}$$

$$\Sigma\,\Phi'(a)q^a = \sum (-1)^{\frac{1}{8}(a^2-1)} \frac{aq^a}{1-q^{2a}}$$

$$\Sigma\,\Psi'(a)q^a = \sum (-1)^{\frac{1}{8}(a^2+7)}\, a\,\frac{q^{a^2}(1+q^{2a})-q^a}{1-q^{2a}}.$$

Nous pouvons par conséquent exprimer au moyen de la fonction $E(x)$ les diverses sommes

$$X(1) + X(3) + X(5) + \cdots,$$

$$X(2) + X(4) + X(6) + \ldots \text{ et } \Phi(1) + \Phi(2) + \Phi(3) + \ldots, \text{ etc.}$$

Mais parmi les résultats qu'on trouve ainsi, les plus simples et les plus élégants ont été obtenus pour la première fois par M. Lipschitz, à qui j'en dois la communication. En désignant par A, B, C, des nombres entiers de même nature que a, b, c, l'éminent géomètre a établi, par une méthode purement arithmétique, les formules suivantes:

$$X(1) + X(3) + \ldots + X(A) = \sum E_2\left(\frac{A+a}{2a}\right),$$

$$\Phi(1) + \Phi(2) + \ldots + \Phi(C) = \sum E_2\left(\frac{C}{c}\right),$$

$$\Psi(1) + \Psi(2) + \ldots + \Psi(C) = \sum E_2\left(\frac{C-c^2}{c}\right).$$

Et sans nul doute des procédés semblables donneraient aussi les relations d'une forme moins simple:

$$X(2) + X(4) + \ldots + X(B)$$
$$= \frac{1}{3}\sum\left[aE\left(\frac{B}{2a}\right) + bE_1\left(\frac{B}{2b}\right)\right],$$

$$\Phi'(1) + \Phi'(3) + \ldots + \Phi'(A)$$
$$= \sum(-1)^{\frac{1}{8}(a^2-1)} aE\left(\frac{A+a}{2a}\right)$$

$$\Psi'(1) + \Psi'(3) + \ldots + \Psi'(A)$$
$$= \sum(-1)^{\frac{1}{8}(a^2+7)} a\left[E\left(\frac{A+2a-a^2}{2a}\right) + E\left(\frac{A-a^2}{2a}\right) - E\left(\frac{A+a}{2a}\right)\right].$$

La dernière peut encore s'écrire:

$$\Psi'(1) + \Psi'(3) + \ldots + \Psi'(A)$$
$$= \sum\left[(-1)^{\frac{1}{8}(a^2-1)} aE\left(\frac{A+a}{2a}\right)\right] - \left[\sum(-1)^{\frac{1}{8}(a^2-1)} a\right]$$
$$- 2\sum\left[(-1)^{\frac{1}{8}(a^2-1)} aE\left(\frac{A-a^2}{2a}\right)\right],$$

et l'on devra prendre les deux dernières sommes, en s'arrêtant à la valeur de a qui est donnée par le plus grand nombre impair contenu dans $\sqrt{A}$.

VII.

Une autre application, à laquelle je m'arrêterai un moment, concerne la fonction qui représente le nombre des solutions de l'équation $x^2 + y^2 = c$. En la désignant par $f(c)$, la théorie des fonctions elliptiques donne les relations:

$$\frac{2K}{\pi} = \sum_0 {}_c f(c) q^c = 1 + 4 \sum \frac{(-1)^{\frac{a-1}{2}} q^a}{1 - q^a},$$

$$\frac{2kK}{\pi} = \sum_0 {}_c f(8c + 2) q^{\frac{4c+1}{2}} = 4 \sum \frac{(-1)^{\frac{a-1}{2}} \sqrt{q^a}}{1 - q^a},$$

dont la première nous conduit immédiatement au théorème d'Eisenstein:

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(C) = 4 \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} E\left(\frac{C}{a}\right).$$

De la seconde nous tirons ensuite:

$$f(2) + f(10) + \ldots + f(8C + 2) = 4 \sum_0 {}_c (-1)^c E\left(\frac{2C - c}{2c + 1}\right);$$

mais ces formules ne sont pas les seules auxquelles mène la théorie des fonctions elliptiques. Jacobi a obtenu en effet, dans le dernier paragraphe des *Fundamenta*, ces développements d'une autre forme:

$$\frac{2k'K}{\pi} = 1 + 4 \sum_c \frac{(-1)^c q^{\frac{c^2+c}{2}}}{1 + q^c},$$

$$\frac{2kK}{\pi} = 4 \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} \sqrt{q^{a^2}} \frac{1 + q^{2a}}{1 - q^{2a}},$$

et le premier devient, si l'on change q en $-q$:

$$\frac{2K}{\pi} = 1 - 4 \sum_1 {}_c \frac{(-1)^c q^{2c^2-c}}{1 - q^{2c-1}} + 4 \sum_1 {}_c \frac{(-1)^c q^{2c^2+c}}{1 + q^{2c}}.$$

J'en ai déduit les formules suivantes, que je me borne à énoncer, me réservant d'y revenir dans une autre occasion.

1°. Soit: $n = E\left(\frac{\sqrt{8C+1}+1}{4}\right)$, et posons pour abréger:

$$S = E\left(\frac{C}{1}\right) - E\left(\frac{C}{3}\right) + \ldots - (-1)^n E\left(\frac{C}{2n-1}\right)$$

$$S_1 = E_1\left(\frac{C+1}{4}\right) + E_1\left(\frac{C+2}{8}\right) + \ldots + E_1\left(\frac{C+n}{4n}\right).$$

on aura:

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(C) = 4\left[S + S_1 - n\sin^2\frac{n\pi}{2}\right].$$

2°. Soit ensuite: $n = E\left(\frac{\sqrt{4C+1}+1}{2}\right)$, nous obtenons:

$$f(2) + f(10) + \ldots + f(8C+2)$$

$$= 8\left[E\left(\frac{C}{1}\right) - E\left(\frac{C-1.2}{3}\right) + E\left(\frac{C-2.3}{5}\right) - \ldots - (-1)^n E\left(\frac{C-n^2+n}{2n-1}\right)\right] + 4\sin^2\frac{n\pi}{2}.$$

Enfin on trouve dans le second volume des oeuvres de GAUSS (*De nexu inter multitudinem classium*, etc., p. 279), la formule:

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(C) = 4\sum E(\sqrt{C - c^2})$$
$$c = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ E(\sqrt{n}),$$

qui est d'une nature toute différente. La remarque suivante que j'emploverai tout-à-l'heure pour un autre objet, en donne une démonstration facile.

Soit: $f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^4 + \ldots + A_n x^{n^2} + \ldots$, le coefficient d'un terme quelconque du développement de la fonction: $\frac{f(x)}{1-x}$, se tire de l'égalité:

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum A_\mu x^{\mu^2+\lambda}$$
$$\mu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$
$$\lambda = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

en posant la condition:

$$\mu^2 + \lambda = n.$$

Nous avons ainsi les valeurs $\mu = 0, 1, 2, \ldots, E(\sqrt{n})$, et en faisant pour abréger l'écriture, $\nu = E(\sqrt{n})$, il est clair qu'on obtient:

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum [A_0 + A_1 + \ldots + A_\nu] x^n.$$

On aurait d'une manière plus générale, si l'on désigne par c un entier quelconque, et qu'on fasse alors $\nu = E\left(\sqrt{\frac{n}{c}}\right)$:

$$\frac{f(x^c)}{1-x} = \sum [A_0 + A_1 + \ldots + A_\nu] x^n.$$

Soit encore:

$$f(x) = A_1 \sqrt[4]{x} + A_2 \sqrt[4]{x^9} + \ldots + A_n \sqrt[4]{x^{(2n-1)^2}} + \ldots$$

nous trouverons semblablement:

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum [A_1 + A_2 + \ldots + A_\nu] x^{n+\frac{1}{4}}$$

en prenant dans ce cas: $\nu = E\left(\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right)$.

En particulier on remarquera les relations suivantes:

$$\frac{x + x^4 + x^9 + \ldots}{1-x} = \sum_1^\infty E(\sqrt{n}) x^n,$$

$$\frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x^9} + \sqrt[4]{x^{25}} + \ldots}{1-x} = \sum_0^\infty E\left(\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right) x^{n+\frac{1}{4}},$$

puis, comme on le verra aisément, en désignant par k un entier quelconque:

$$\frac{(x + x^4 + x^9 + \ldots) x^k}{1-x} = \sum E(\sqrt{n-k}) x^n$$

$$n = k+1, \quad k+2, \quad k+3, \ldots$$

$$\frac{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x^9} + \sqrt[4]{x^{25}} + \ldots) x^k}{1-x} = \sum E\left(\frac{\sqrt{4n+1-4k}+1}{2}\right) x^{n+\frac{1}{4}}$$

$$n = k, \quad k+1, \quad k+2, \ldots.$$

De ces formules résultent les suivantes.

Soit:

$$F(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_k x^k + \ldots$$

nous aurons:

$$\frac{(x + x^4 + x^9 + \ldots)F(x)}{1 - x} = \sum A_k E(\sqrt{n - k})x^n,$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1,$$

et semblablement:

$$\frac{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x^9} + \sqrt[4]{x^{25}} + \ldots)F(x)}{1 - x} = \sum A_k E\left(\frac{\sqrt{4n + 1 - 4k} + 1}{2}\right) x^{n + \frac{1}{4}},$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Supposons dans la première de ces deux relations:

$$F(x) = x + x^4 + x^9 + \ldots$$

elle donne immédiatement l'égalité:

$$\frac{(x + x^4 + x^9 + \ldots)^2}{1 - x} = \sum E(\sqrt{n - c^2})x^n,$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$c = 1, 2, \ldots, E(\sqrt{n}).$$

On en conclut le développement de la quantité: $\frac{(1 + 2x + 2x^4 + \ldots)^2}{1 - x}$ sous la forme suivante:

$$\sum [1 + 4E(\sqrt{n - c^2})]x^n,$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$c = 0, 1, 2, \ldots, E(\sqrt{n}).$$

et par suite le théorème de Gauss:

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(C) = 4\sum E(\sqrt{C - c^2}).$$

Prenons de même, dans la seconde formule;

$$F(x) = \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x^9} + \sqrt[4]{x^{25}} + \ldots}{\sqrt[4]{c}},$$

nous trouverons la relation:

$$\frac{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x^9} + \sqrt[4]{x^{25}} + \ldots)^2}{1 - x} = \sum E\left(\frac{\sqrt{4n + 2 - (2c - 1)^2} + 1}{2}\right) x^{n+\frac{1}{2}},$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$c = 1, 2, \ldots, E\left(\frac{\sqrt{4n+2} + 1}{2}\right).$$

Le résultat suivant qui s'en tire:

$$f(2) + f(10) + \ldots + f(8C + 2) = 4\sum E\left(\frac{\sqrt{4n + 2 - a^2} + 1}{2}\right),$$

où la somme doit s'étendre dans le second membre aux valeurs $a = 1, 3, 5, \ldots$ en s'arrêtant à la racine du plus grand carré impair contenu dans $4n + 2$, a été donné par Liouville, dans une courte note qui porte pour titre: *Égalités entre des sommes qui dépendent de la fonction numérique* $E(x)$ (Journal de mathématiques, 2^me^ Série, T. V, 1860).

VIII.

J'arrive maintenant au point que j'avais principalement en vue, en déduisant des beaux théorèmes de M. Kronecker, démontrés au commencement de ces recherches, les expressions des trois sommes:

$$A = F(2) + F(6) + \ldots + F(4n + 2),$$

$$B = F(1) + F(5) + \ldots + F(4n + 1),$$

$$C = F(3) + F(11) + \ldots + F(8n + 3).$$

Voici, parmi plusieurs autres, deux formes sous lesquelles on peut les obtenir.

Considérons d'abord le premier théorème:

$$\vartheta_2^2 \vartheta_3 = 4 \sum_0 F(4n + 2) q^{n+\frac{1}{2}};$$

je remarque, pour former le quotient $\frac{\vartheta_2^2\vartheta_3}{1-q}$, que l'on a:

$$\vartheta_2^2 = \sum_0 f(8c+2)q^{2c+\frac{1}{2}},$$
$$\vartheta_3 = 1 + 2q + 2q^4 + \dots.$$

Nous avons ainsi une première partie, dont le développement suivant les puissances de q est donné immédiatement par la formule:

$$\frac{\vartheta_2^2}{1-q} = \sum f(8c+2)q^{n+\frac{1}{2}}.$$
$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$$
$$c = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

En appliquant ensuite l'égalité obtenue dans le paragraphe précédent:

$$\frac{(x + x^4 + x^9 + \dots)F(x)}{1-x} = \sum A_k E(\sqrt{n-k})x^n,$$

on trouve:

$$\frac{(q + q^4 + q^9 + \dots)\vartheta_2^2}{1-q} = \sum f(8c+2)E(\sqrt{n-2c})q^{n+\frac{1}{2}},$$
$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$$
$$c = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ E\left(\frac{n-1}{2}\right).$$

La somme cherchée A, étant le coefficient de $q^{n+\frac{1}{2}}$, dans le développement que nous venons de former de $\frac{\vartheta_2^2\vartheta_3}{1-q}$, nous sommes amenés à la formule:

$$4A = \sum f(8c+2) + 2\sum f(8c+2)E(\sqrt{n-2c}),$$

où il faut prendre dans le premier terme: $c = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n$, et dans le second, $c = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ E\left(\frac{n-1}{2}\right)$.

D'une manière toute semblable, nous parvenons aux développements qui suivent:

$$\frac{\vartheta_2\vartheta_3^2}{1-q} = 2\sum f(c)E\left(\frac{\sqrt{4n+1-4c}+1}{2}\right)q^{n+\frac{1}{4}},$$

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$
$$c = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

$$\frac{\vartheta_3^3}{1-q} = 2\sum f(8c+2)E\left(\frac{\sqrt{4n+1-8c}+1}{2}\right)q^{n+\frac{3}{4}},$$

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$
$$c = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ E\left(\frac{n}{2}\right).$$

Cela étant, le coefficient de $q^{n+\frac{1}{4}}$ dans le premier, et le coefficient de $q^{2n+\frac{3}{4}}$ dans le second, donnent les expressions des sommes B et C; on trouve ainsi:

$$2B = \sum f(c)E\left(\frac{\sqrt{4n+1-4c}+1}{2}\right),$$

$$4C = \sum f(8c+2)E\left(\frac{\sqrt{8n+1-8c}+1}{2}\right)$$

en prenant $c = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Nous obtiendrons les mêmes quantités sous une autre forme, dans laquelle figure uniquement la fonction $E(x)$, au moyen de la série de Jacobi dont nous avons déjà parlé:

$$\vartheta_2^2 = 4\sqrt{q}\,\frac{1+q^2}{1-q^2} - 4\sqrt{q^9}\,\frac{1+q^6}{1-q^6} + 4\sqrt{q^{25}}\,\frac{1+q^{10}}{1-q^{10}} - \ldots$$

et de celle qu'on en tire en changeant q en $\sqrt{q}$:

$$\vartheta_2\vartheta_3 = 2\sqrt[4]{q}\,\frac{1+q}{1-q} - 4\sqrt[4]{q^9}\,\frac{1+q^3}{1-q^3} + 4\sqrt[4]{q^{25}}\,\frac{1+q^5}{1-q^5} - \ldots$$

Multiplions à cet effet, membre à membre, les deux égalités:

$$\vartheta_2\vartheta_3 = 2\sum(-1)^{\frac{a-1}{2}}\sqrt[4]{q^{a^2}}\frac{1+q^a}{1-q^a},$$

$$\vartheta_2 = 2\sum\sqrt[4]{q^{a'^2}},$$

il vient ainsi:

$$\vartheta_2^2\vartheta_3 = 4\sum(-1)^{\frac{a-1}{2}}\sqrt[4]{q^{a^2+a'^2}}\frac{1+q^a}{1-q^a},$$

$$a = 1,\ 3,\ 5,\ \dots$$

$$a' = 1,\ 3,\ 5,\ \dots$$

et en remarquant que $\frac{a^2-1}{4}$ et $\frac{a'^2-1}{4}$ sont des entiers:

$$\vartheta_2^2\vartheta_3 = 4q^{\frac{1}{2}}\sum(-1)^{\frac{a-1}{2}}q^{\frac{a^2+a'^2-2}{4}}\frac{1+q^a}{1-q^a}.$$

Nous avons donc:

$$\frac{\vartheta_2^2\vartheta_3}{1-q} = 4q^{\frac{1}{2}}\sum(-1)^{\frac{a-1}{2}}q^{\frac{a^2+a'^2-2}{4}}\frac{1+q^a}{(1-q)(1-q^a)},$$

de sorte que les formules de développement précédemment employées nous donnent:

$$\frac{\vartheta_2^2\vartheta_3}{1-q} = 4q^{\frac{1}{2}}\sum(-1)^{\frac{a-1}{2}}\left[E\left(\frac{4n+2+4a-a^2-a'^2}{4a}\right)+E\left(\frac{4n+2-a^2-a'^2}{4a}\right)\right]q^n.$$

Or le coefficient de q^n, se réduit à l'expression plus simple:

$$1+2E\left(\frac{4n+2-a^2-a'^2}{4a}\right),$$

et comme le premier des deux signes E, se rapporte à tous les systèmes de valeurs des nombres impairs et positifs, a et a', qui satisfont à la condition:

$$\frac{4n+2+4a-a^2-a'^2}{4a} \geqq 1,$$

c'est à dire:

$$4n + 2 - a^2 - a'^2 \geqq 0,$$

on voit qu'en posant sous cette condition:

$$S = \Sigma (-1)^{\frac{a-1}{2}}$$

puis semblalement:

$$S_1 = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} E\left(\frac{4n + 2 - a^2 - a'^2}{4a}\right),$$

on obtient la quantité cherchée, sous cette nouvelle forme:

$$A = S + 2S_1.$$

En second lieu, multiplions par

$$\vartheta_3 = \Sigma q^{c^2}$$

en supposant:

$$c = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \text{ etc.},$$

la même égalité:

$$\vartheta_2 \vartheta_3 = 2 \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} \sqrt[4]{q^{a^2}} \frac{1 + q^a}{1 - q^a}.$$

On trouvera de cette manière:

$$\vartheta_2 \vartheta_3^2 = 2q^{\frac{1}{4}} \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} q^{\frac{a^2+4c^2-1}{4}} \frac{1 + q^a}{1 - q^a},$$

et si l'on désigne par b le nombre pair $2c$, nous aurons

$$\frac{\vartheta_2 \vartheta_3^2}{1 - q} = 2q^{\frac{1}{4}} \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} q^{\frac{a^2+b^2-1}{4}} \frac{1 + q^a}{(1 - q)(1 - q^a)}$$

$$= 2q^{\frac{1}{4}} \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} \left[E\left(\frac{4n + 1 + 4a - a^2 - b^2}{4a}\right) + E\left(\frac{4n + 1 - a^2 - b^2}{4a}\right)\right] q^n.$$

Posons donc la condition:

$$4n + 1 - a^2 - b^2 \geqq 0,$$

en supposant que a soit impair et positif, b ayant des valeurs paires positives, nulles ou négatives, et soit alors:

$$S = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}}$$
$$S_1 = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} E\left(\frac{4n+1-a^2-b^2}{4a}\right),$$

la quantité B, sera exprimée par la formule:

$$2B = S + 2S_1.$$

En dernier lieu nous trouverons par des considérations toutes semblables:

$$C = S + 2S_1$$

en posant:

$$S = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}}$$
$$S_1 = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} E\left(\frac{8n+3-2a^2-a'^2}{8a}\right),$$

les deux sommes se rapportant à tous les systèmes de nombres impairs et positifs a et a', satisfaisant à la condition:

$$8n + 3 - 2a^2 - a'^2 \geqq 0.$$

Je ferai une application de la première des formules obtenues, qui servira en même temps de vérification, en supposant $n = 6$. On trouve alors que la condition posée, à savoir:

$$26 - a^2 - a'^2 \geqq 0$$

est remplie pour les valeurs:

$$\begin{aligned} a &= 1, & a' &= 1,\ 3,\ 5, \\ a &= 3, & a' &= 1,\ 3 \\ a &= 5, & a' &= 1. \end{aligned}$$

Le nombre a, étant trois fois égal à un, deux fois égal à 3 et une fois égal à 5, nous avons:

$$S = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} = 2.$$

On obtient ensuite:

$$S_1 = E\left(\frac{24}{4}\right) + E\left(\frac{16}{4}\right) - E\left(\frac{14}{12}\right) = 9.$$

La somme A des nombres de classes des déterminants: $D = -2, -6, -10, -14, -18, -22, -26$, est donc égale à 20; c'est en effet ce que donne la table suivante des réduites:

$$\begin{aligned}
D &= -\ 2, && (1,\ 0,\ 2)\\
&= -\ 6, && (1,\ 0,\ 6)(2,\ 0,\ 3)\\
&= -10, && (1,\ 0,\ 10)(2,\ 0,\ 5)\\
&= -14, && (1,\ 0,\ 14)(2,\ 0,\ 7)(3,\ \pm 1,\ 5)\\
&= -18, && (1,\ 0,\ 18)(3,\ 0,\ 6)(2,\ 0,\ 9)\\
&= -22, && (1,\ 0,\ 2)(2,\ 0,\ 11)\\
&= -26, && (1,\ 0,\ 26)(2,\ 0,\ 13)(3,\ \pm 1,\ 9)(5,\ \pm 2,\ 6).
\end{aligned}$$

J'indiquerai encore en terminant la formule:

$$F(3) + F(7) + \dots + F(4n+3) = 2\sum E\left(\frac{n + 1 - c^2 - 2cc'}{2c + 2c' + 1}\right);$$

la somme du second membre s'étend à tous les entiers positifs, c et c' satisfaisant à la condition:

$$(c+1)(2c + 2c' + 1) \overline{\overline{<}}\, n + 1,$$

en convenant de réduire à moitié les termes qui sont donnés quand on suppose $c' = 0$. La démonstration de ce résultat sera l'objet d'un travail qui paraîtra prochainement.