SUR LES PENTAÈDRES COMPLETS

INSCRITS À UNE SURFACE CUBIQUE

Extrait d'une lettre à M. C. Le Paige

PAR

H.-G. ZEUTHEN
à COPENHAGUE.

Voici comment je détermine le nombre des pentaèdres complets, inscrits à une surface cubique, et dont une des faces et le quadrilatère complet inscrit qu'il doit contenir, sont déjà connus.

Soient A, A_1; B, B_1; C, C_1 les couples de sommets opposes du quadrilatère, A, B, C étant sur une droite tandis que A_1, B_1, C_1 forment un triangle.

Je fais passer par ABC un plan quelconque. Dans ce plan il y aura 3 quadrilatères complets inscrits à la surface et ayant A, B et C pour sommets.(¹) Soient A_2, B_2, C_2 les sommets opposés dans un de ces quadrilatères. Je cherche alors le lieu du point d'intersection P des plans $B_1C_1AB_2C_2$, $C_1A_1BC_2A_2$, $A_1B_1CA_2B_2$.

On obtient l'ordre de ce lieu, qui sera une courbe, en déterminant le nombre de ses intersections avec le plan $A_1B_1C_1$.

Si l'on fait coïncider le plan $A_2B_2C_2$ avec $A_1B_1C_1$, un des trois triangles $A_2B_2C_2$ coïncide avec $A_1B_1C_1$, et le point P qui y correspond, et qui sera déterminé par l'intersection des plans tangents aux surfaces coniques, lieux des droites AB_2C_2, BC_2A_2, CA_2B_2, ne se trouvera pas dans

(¹) Il est très-facile de donner de ce théorème plan connu une démonstration analogue à la démonstration stéréométrique actuelle.

le plan $A_1B_1C_1$; mais les points P qui correspondent aux deux autres triangles $A_2B_2C_2$ s'y trouveront évidemment. On trouve ainsi 2 intersections.

Remarquons, pour chercher s'il en existe d'autres, que, dans le cas qui nous occupe, du moins un des trois plans qui déterminent P doit coïncider avec $A_1B_1C_1$. Supposons donc que le plan $B_1C_1AB_2C_2$ coïncide avec $A_1B_1C_1$ et que le plan $A_2B_2C_2$ en diffère. Alors la droite AB_2C_2 coïncidera avec ABC, le point B_2 avec C et le point C_2 avec B. La droite CB_2 devient ainsi tangente à la surface donnée en C, et BC_2 en B. Le dernier sommet A_2 de ce quadrilatère complet inscrit doit donc être un des trois points où la droite d'intersection des plans tangents en B et en C rencontre la surface.

On trouve ainsi que le point A_1 est un point triple de notre lieu. Ses tangentes en A_1 seront, d'après la construction des points P, celles qui le joignent aux trois points A_2 que nous venons de trouver. Les trois branches en A_1 ne seront donc en général tangentes ni au plan $A_1B_1C_1$, ni à la surface donnée.

Les points B_1 et C_1 étant dans la même condition que A_1, le lieu sera de l'ordre

$$2 + 3 \cdot 3 = 11.$$

On aurait aussi pu déterminer l'ordre du même lieu en comptant ses intersections avec un plan quelconque par la droite ABC.

Les points d'intersection du lieu trouvé avec la surface donnée seront:

1°. Les trois qui coïncident avec chacun des points A_1, B_1 et C_1.

2°. Les 12 points de contact de la surface avec des plans passant par ABC. On voit sans difficulté que les intersections ayant lieu en ces points sont en général simples.

3°. Les dixièmes sommets des pentaèdres cherchés. (Les neuf autres seront A, B, C; A_1, B_1, C_1 et les points A_2, B_2, C_2 correspondant aux points du lieu.)

Le nombre cherché sera donc égal à

$$3 \cdot 11 - 3 \cdot 3 - 12 = 12.$$

Copenhague le 20 Avril 1884.