NOUVELLES RECHERCHES
SUR LES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE

PAR

C. LE PAIGE

À LIÈGE.

Plusieurs Géomètres se sont occupés déjà de la configuration $[15_6, 20_3]$ à laquelle donnent lieu deux tétraèdres homologiques, et ont montré le rôle important qu'elle joue dans l'étude des surfaces du troisième ordre, soit par rapport aux vingt-sept droites de la surface,(1) soit pour l'interprétation géométrique de certains invariants de la forme cubique quaternaire.(2)

Nous nous proposons d'en faire voir une application différente et de rattacher l'existence de cette figure à des considérations que nous avons développées ailleurs.

Nous avons fait voir, dans divers travaux antérieurs,(3) l'utilité de l'homographie H_2^3 dans la théorie des surfaces cubiques; pour aborder les questions actuelles, l'emploi des homographies biquadratiques ne nous paraît pas dénué d'intérêt.

Considérons une surface quelconque S_3 et, dans une section faite par un plan arbitraire ω, inscrivons un quadrilatère complet, ce qui est toujours possible à moins de positions spéciales du plan ω.

---

(1) CREMONA, Memorie della R. Accad. dei Lincei, 1877. Math. Annal., T. XIII, p. 301. CAPORALI, Accad. dei Lincei, 1878. VERONESE, Annali di Matematica, 1882, p. 173. Math. Annal., T. XIX, p. 194.

(2) R. DE PAOLIS, Accad. dei Lincei, T. X, p. 123.

(3) Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 3e Série, T. V, p. 85. C. R., T. XCVII. Acta Mathematica, T. 3, p. 181.

Soient x, y, z, u, les côtés de ce quadrilatère. Il est visible que si nous joignons tous les points de S_3 aux côtés du quadrilatère, nous obtenons quatre faisceaux de plans en H_2^4.

Pour le démontrer, observons que si l'on considère x, y, z, u, comme les traces, sur le plan dont l'équation est

$$\omega \equiv \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0,$$

du tétraèdre dont les faces sont représentées par

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0,$$

l'équation d'une surface cubique, circonscrite à ce quadrilatère, pourra s'écrire:

$$\begin{aligned} S_3 \equiv A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 \\ + \frac{1}{2}(A-B)\alpha\beta(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}(A-C)\alpha\gamma(\alpha-\gamma) + \frac{1}{2}(A-D)\alpha\delta(\alpha-\delta) \\ + \frac{1}{2}(B-C)\beta\gamma(\beta-\gamma) + \frac{1}{2}(B-D)\beta\delta(\beta-\delta) + \frac{1}{2}(C-D)\gamma\delta(\gamma-\delta) \\ + A_1\alpha\beta(\alpha+\beta) + A_2\alpha\gamma(\alpha+\gamma) + A_3\alpha\delta(\alpha+\delta) + A_4\beta\gamma(\beta+\gamma) \\ + A_5\beta\delta(\beta+\delta) + A_6\gamma\delta(\gamma+\delta) + P_1\alpha\beta\gamma + P_2\alpha\beta\delta + P_3\alpha\gamma\delta + P_4\beta\gamma\delta = 0. \end{aligned}$$

Or, considérons quatre faisceaux de plans

$$\alpha - \lambda\omega = 0, \quad \beta - \mu\omega = 0, \quad \gamma - \nu\omega = 0, \quad \delta - \rho\omega = 0,$$

liés par la relation d'homographie H_3^4 la plus générale:

$$\begin{aligned} F \equiv A_0\lambda\mu\nu\rho + a_0\lambda\mu\nu + a_1\lambda\mu\rho + a_2\lambda\nu\rho + a_3\mu\nu\rho + b_0\lambda\mu + b_1\lambda\nu + b_2\lambda\rho \\ + b_3\mu\nu + b_4\mu\rho + b_5\nu\rho + c_0\lambda + c_1\mu + c_2\nu + c_3\rho + \theta = 0. \end{aligned}$$

Les intersections des plans correspondants décriront une surface S_4, contenant les quatre droites x, y, z, u.

Cette surface se composera d'une S_3', circonscrite au quadrilatère, et du plan ω, si $A_0 = 0$.

Si nous identifions l'équation de S_3 avec celle de S_3', nous trouvons que la forme quadrilinéaire F peut s'écrire

$$F \equiv f + \theta . \varphi,$$

où

$$\varphi \equiv \lambda + \mu + \nu + \rho - 1.$$

Mais il est évident que les plans homologues ne donneront un point de S_3 que s'ils concourent, c'est-à-dire si l'on a $\varphi = 0$.

Nous aurons donc simultanément, pour les plans qui donnent des points de S_3, les deux relations

$$f = 0, \quad \varphi = 0.$$

Par suite, ces plans appartiennent, comme nous l'avons dit, à quatre faisceaux en H_2^4.

A chaque valeur de θ, correspond une forme quadrilinéaire F. Or, nous avons montré[1] que l'on peut toujours, par un choix convenable des variables, ramener cette forme à l'expression canonique:

$$\begin{aligned} F \equiv a_{1111}x_1y_1z_1u_1 &+ a_{1122}x_1y_1z_2u_2 + a_{1212}x_1y_2z_1u_2 + a_{1221}x_1y_2z_2u_1 \\ &+ a_{2222}x_2y_2z_2u_2 + a_{2211}x_2y_2z_1u_1 + a_{2121}x_2y_1z_2u_1 + a_{2112}x_2y_1z_1u_2. \end{aligned}$$

Appelons $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$, les plans des quatre faisceaux qui correspondent aux éléments fondamentaux, nous aurons l'équation:

$$\begin{aligned} \omega S_3 \equiv a_{1111}\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1 &+ a_{1122}\alpha_1\beta_1\gamma_2\delta_2 + a_{1212}\alpha_1\beta_2\gamma_1\delta_2 + a_{1221}\alpha_1\beta_2\gamma_2\delta_1 \\ &+ a_{2222}\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2 + a_{2211}\alpha_2\beta_2\gamma_1\delta_1 + a_{2121}\alpha_2\beta_1\gamma_2\delta_1 + a_{2112}\alpha_2\beta_1\gamma_1\delta_2 = 0. \end{aligned}$$

Les quatre covariants biquadratiques de F sont de la forme:

$$L_t^4 = l_t^4 + \theta l_t'^4 + \theta^2 l_t''^4 + \theta^3 l_t'''^4,$$

les covariants biquadratiques de φ étant identiquement nuls.

Ces quatre covariants auront un même discriminant que nous désignerons par Δ.

Pour déterminer son degré en θ, nous observerons que la forme développée de L_t^4 est

$$\begin{aligned} L_t^4 \equiv (A_0 + \theta B_0)t_1^4 &+ 4(A_1 + \theta B_1)t_1^3t_2 + 6(A_2 + \theta B_2 + \theta^2 C_2)t_1^2t_2^2 \\ &+ 4(A_3 + \theta B_3 + \theta^2 C_3)t_1t_2^3 + (A_4 + \theta B_4 + \theta^2 C_4 + \theta^3 D_4)t_2^4. \end{aligned}$$

(1) *Sur la forme quadrilinéaire:* Atti della R. Accademia di Torino, T. XVII, p. 299, Février 1882.

Il en résulte que nous pourrons écrire

$$\Delta = A_\theta^{12}.$$

Si nous nous reportons aux résultats contenus dans notre travail relatif aux formes quadrilinéaires, nous verrons aisément que la condition $\Delta = 0$, entraîne nécessairement l'évanouissement d'un des coefficients de la forme canonique F et que quatre éléments fondamentaux sont précisement représentés par les racines carrés des facteurs carrés qui entrent dans les covariants biquadratiques.

L'évanouissement de l'un quelconque des paramètres de F, revenant à un changement de notation, nous pouvons supposer que la condition

$$\Delta = A_\theta^{12} = 0,$$

entraîne celle-ci: $a_{2222} = 0$.

Alors l'équation écrite plus haut devient:

$$\omega S_3 \equiv a_{1111}\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1 + a_{1122}\alpha_1\beta_1\gamma_2\delta_2 + a_{1212}\alpha_1\beta_2\gamma_1\delta_2 + a_{1221}\alpha_1\beta_2\gamma_2\delta_1$$
$$+ a_{2211}\alpha_2\beta_2\gamma_1\delta_1 + a_{2121}\alpha_2\beta_1\gamma_2\delta_1 + a_{2112}\alpha_2\beta_1\gamma_1\delta_2 = 0.$$

Mais on voit aisément que le tétraèdre $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ a ses quatre sommets sur S_3 et forme, par suite, avec ω, un pentaèdre complet inscrit à la surface. (¹)

Nous pouvons observer que le plan ω étant donné, nous ne pourrons plus déterminer arbitrairement qu'un des côtés du quadrilatère $xyzu$. x étant choisi, par exemple, il n'existera, en général, que trois systèmes y, z, u.

Lorsque le quadrilatère est déterminé, nous voyons que nous pouvons, en général, choisir θ de douze façons différentes, de telle manière que les covariants biquadratiques de F aient un facteur carré; les plans correspondant à ces facteurs donnent alors un pentaèdre inscrit à S_3. (²)

(¹) Au sujet des pentaèdres inscrits à une S_3, voir le beau travail de M. Friedr. Schur: *Erzeugung durch collineare Grundgebilde* (Mathematische Annalen, T. 17, p. 26).

(²) Une inadvertence nous avait d'abord porté à attribuer à Δ le degré dix-huit; mais notre savant Collégue M. H.-G. Zeuthen ayant déterminé par la méthode énumérative le nombre des pentaèdres inscrits (V. plus loin), nous avons reconnu que la forme particulière de L_t^4 conduit au degré douze pour le discriminant Δ.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème:

On peut inscrire, à une surface S_3, trois systèmes de douze pentaèdres dont on choisit arbitrairement une face et une arète dans cette face.

Ces pentaèdres forment évidemment une quintuple infinité.

Lorsque les covariants biquadratiques fondamentaux de F sont des carrés, nous aurons à la fois, par exemple

$$a_{1111} = 0, \quad a_{2222} = 0.$$

Donc l'équation de S_3 peut s'écrire:

$$\begin{aligned} \omega S_3 \equiv a_{1122}\alpha_1\beta_1\gamma_2\delta_2 + a_{1212}\alpha_1\beta_2\gamma_1\delta_2 + a_{1221}\alpha_1\beta_2\gamma_2\delta_1 \\ + a_{2211}\alpha_2\beta_2\gamma_1\delta_1 + a_{2121}\alpha_2\beta_1\gamma_2\delta_1 + a_{2112}\alpha_2\beta_1\gamma_1\delta_2 = 0. \end{aligned}$$

Alors les deux tétraèdres $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$ sont tous les deux inscrits à S_3: nous les appellerons *associés.*

Pour obtenir cette forme réduite, le choix de l'indéterminée θ ne suffit plus, puisqu'il faut remplir deux conditions.

Pour arriver à la déterminer, nous ferons usage de la remarque suivante.

Comme les groupes de quatre points marqués par tous les plans de l'éspace sur quatre droites arbitraires, représentent précisement une forme quadrilinéaire à covariants quartiques carrés, (¹) nous sommes conduit à nous poser cette question:

Etudier la surface engendrée par les intersections des plans concourants que l'on obtient en joignant quatre droites situées dans un plan ω, respectivement aux points marqués sur quatre droites arbitraires par tous les plans de l'espace.

Il est visible que le plan ω fait partie du lieu, qui est complété par une surface S_3, circonscrite au quadrilatère tracé dans ω.

(¹) La démonstration de la proposition inverse étant un peu longue, nous ne la donnerons pas actuellement.

Nous mentionnerons ici une application intéressante que M. Neuberg a faite de ce cas particulier d'une H_3^4 à l'étude de *tétraèdres de* Möbius (Mem. de la Société Royale des Sciences de Liège, 2ᵉ Série, T. XI).

Soient x, y, z, u les côtés du quadrilatère donné; A, A'; B, B', C, C' les sommets opposés de telle sorte que ABC sont situés sur x; et enfin x_1, y_1, z_1, u_1 les quatre droites arbitraires de l'espace, ne se rencontrant pas deux à deux et n'appartenant pas à un même système de génératrices d'une surface du second ordre.

Sur ces quatre droites s'appuient deux transversales g_1, g_2, qui les rencontrent respectivement en des points $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$.

Il est d'abord visible que le plan $\overline{x_1g_1}$ laisse indéterminé le plan du faisceau (x) et donne trois plans $\overline{yB_1}$, $\overline{zC_1}$, $\overline{uD_1}$ se coupant en un point X_1 de la surface.

De cette façon, nous pouvons observer que les quatre plans $\overline{xA_1}$, $\overline{yB_1}$, $\overline{zC_1}$, $\overline{uD_1}$ forment un tétraèdre $X_1Y_1Z_1U_1$ inscrit à S_3; $\overline{xA_2}$, $\overline{yB_2}$, $\overline{zC_2}$, $\overline{uD_2}$ constituent, de même, un second tétraèdre inscrit $X_2Y_2Z_2U_2$.

Les deux tétraèdres $X_1Y_1Z_1U_1$, $X_2Y_2Z_2U_2$ sont homologiques et leurs sommets correspondants sont situés sur quatre droites X_1X_2, Y_1Y_2, Z_1Z_2, U_1U_2 concourant en un point Q.

Occupons-nous maintenant de déterminer certains éléments qui nous seront utiles.

Les génératrices de l'hyperboloïde $(y_1z_1u_1)$ marquent, sur ces droites, des ponctuelles projectives dont les groupes de trois points associés sont tels que le plan du faisceau (x) est évidemment indéterminé.

Les intersections des plans qui joignent y, z, u, aux points correspondants de ces trois ponctuelles sont donc sur S_3. Or il est visible que ces intersections appartiennent à une cubique gauche c_3, passant par X_1, X_2, A', B', C'.

Maintenant considérons les plans du faisceau x_1. Ils coupent x_1, z_1, u_1 en des ponctuelles projectives et laissent indéterminés les plans du faisceau (x).

Les jonctions de ces trois nouvelles ponctuelles à y, z, u, donnent une seconde cubique gauche k_3, située sur S_3, et passant également par X_1, X_2, A', B', C'.

On voit aisément que c_3 et k_3 sont sur une même surface S_2. En effet, $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, c_3 et k_3 constituent une courbe gauche du neuvième ordre, base du faisceau de surfaces du troisième ordre qui correspondent aux points de x_1.

Or, celle de ces surfaces du troisième ordre qui correspond au point où x_1 perce ω est évidemment composée du plan ω et d'une S_2.

Donc c_3 et k_3 sont deux cubiques de systèmes différents tracées sur S_3.

Nous aurons de même des cubiques gauches des deux systèmes passant respectivement par $Y_1 Y_2 BA'C$, $Z_1 Z_2 AB'C$, $U_1 U_2 BC''A$.

Nous pouvons maintenant observer que $X_1 X_2$, $Y_1 Y_2$ sont dans un plan passant par A'.

En effet les plans $\overline{yB_1}$, $\overline{zC_1}$, $\overline{uD_1}$ donnent X_1; $\overline{xA_1}$, $\overline{zC_1}$, $\overline{uD_1}$ donnent Y_1. Donc X_1, Y_1 sont situés sur l'intersection des plans $\overline{zC_1}$, $\overline{uD_1}$, droite qui passe par A'.

Il en résulte que $\overline{X_1 X_2}$, $\overline{Y_1 Y_2}$ sont deux bisécantes, ne passant pas par A', de deux cubiques gauches k_3, k_3' d'un même système, et situées dans le plan $A'X_1 X_2 Y_1 Y_2$.

Donc Q, intersection de ces deux bisécantes est située sur S_3.(1)

Les dix sommets du quadrilatère $xyzu$, les huit sommets des deux tétraèdres et le centre d'homologie Q constituent une configuration $[15_6, 20_3]$ dont tous les points sont situés sur S_3.

Ces remarques nous conduisent à la détermination, sur une S_3 quelconque, d'une pareille configuration et nous permettent, par suite, de ramener l'équation de cette surface à la forme réduite:

$$\omega S_3 \equiv a_{1122}\alpha_1\beta_1\gamma_2\delta_2 + a_{1212}\alpha_1\beta_2\gamma_1\delta_2 + \ldots + a_{2211}\alpha_2\beta_2\gamma_1\delta_1 = 0.$$

Sur la surface donnée, choisissons arbitrairement deux points X_1, X_2, par lesquels nous faisons passer deux cubiques gauches c_3, k_3, appartenant aux deux systèmes différents: ces deux cubiques se coupent en trois points $A'B'C''$ déterminant un plan.

Si de X_1, nous projetons c_3, nous obtenons un cône du second degré qui coupe S_3 suivant une cubique gauche k_3' du même système que k_3. De la même manière k_3 nous conduit à une courbe c_3'.

X_1A', X_1B', X_1C'', rencontrent S_3 en trois points Y_1, Z_1, U_1 situés sur k_3' et c_3'.

Maintenant $A'B'$, Y_1Z_1, situés dans le plan $X_1A'B'$ sont des bisécantes des deux cubiques gauches k_3, k_3' (et aussi de c_3, c_3'); donc d'après le théorème invoqué déjà, elles se coupent en un point C de S_3. De la même façon $B'C''$, Z_1U_1; $C''A'$, U_1X_1, donnent des points A, B de la surface. Il est évident, d'ailleurs, que ABC sont en ligne droite.

---

(1) Reye, *Geometrie der Lage,* IIte Absch. p. 197, (2de édition 1882).

En faisant usage de X_2, nous aurions de même $Y_2 Z_2 U_2$. Les deux tétraèdres $X_1 Y_1 Z_1 U_1$, $X_2 Y_2 Z_2 U_2$ sont homologiques. Soit Q le point où $X_1 X_2$ rencontre S_3.

$X_2 A'$, QY_1 sont situés dans un plan passant par X_1, car QY_1 et $X_2 A'$ s'appuient sur $QX_1 X_2$ et $X_1 Y_1 A'$.

Or les deux courbes gauches c_3, c'_3 passent respectivement par $X_1 X_2 A'B'C'$, $X_1 Q Y_1 Z_1 U_1$. $X_2 A'$ et QY_1 se coupent donc en un point de S_3. Or $X_2 A'$ rencontre S_3 en Y_2. Donc QY_1 passe par Y_2. Il en résulte que Q est le centre d'homologie des deux tétraèdres.

Nous avons donc bien, de cette manière, inscrit à S_3, une configuration $[15_6, 20_3]$.

Soient i, k, l, m, n, p six indices quelconques.

Les plans de la configuration $[15_6, 20_3]$ pourront être représentés par ω_{ik}, les points par P_{ik}, les droites par g_{ikl}.

Alors ω_{ik} contient les six points P_{lm} (l, m, différents de ik) et les quatre droites g_{ikl} (l différent de i, k);

par P_{ik} passent les six plans ω_{lm} et les quatre droites g_{lmn}; la droite g_{lmn} contient les points P_{ik}, P_{kp}, P_{pi} et par elle passent les plans ω_{lm}, ω_{mn}, ω_{nl}.

Par suite, si nous prenons un plan quelconque de la configuration, l'équation de S_3 pourra s'écrire:

$$\omega_{ik} S_3 \equiv A\omega_{kl}\,.\,\omega_{kn}\,.\,\omega_{im}\,.\,\omega_{ip} + B\omega_{kl}\,.\,\omega_{km}\,.\,\omega_{in}\,.\,\omega_{ip} + C\omega_{kl}\,.\,\omega_{kp}\,.\,\omega_{in}\,.\,\omega_{im}$$
$$+ A'\omega_{il}\,.\,\omega_{in}\,.\,\omega_{km}\,.\,\omega_{kp} + B'\omega_{il}\,.\,\omega_{im}\,.\,\omega_{kn}\,.\,\omega_{kp} + C'\omega_{il}\,.\,\omega_{ip}\,.\,\omega_{kn}\,.\,\omega_{km} = 0.$$

On peut donner quinze formes distinctes à cette équation.

Les sommets homologues de deux tétraèdres associés sont P_{im}, P_{km}; P_{in}, P_{kn}; P_{il}, P_{kl}; P_{ip}, P_{kp} et les jonctions de ces sommets passent par P_{ik}.

Liège, le 11 Avril 1884.