ZUR THEORIE DER

STETIGEN FUNKTIONEN EINER REELLEN VERÄNDERLICHEN

VON

LUDWIG SCHEEFFER

in MÜNCHEN.

§ 1.

Ein Hauptsatz der Integralrechnung lautet:

Wenn die vorderen (hinteren) Differentialquotienten zweier stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ in einem Intervall $x_0 x_1$ überall endlich, bestimmt und einander gleich sind, so besteht für alle Werte von x, die dem Intervall angehören, die Gleichung

$$F(x) = f(x) + \mathit{const.}$$

Dieser Satz, welcher für differentiirbare Funktionen gilt, ist ein specieller Fall des folgenden allgemeinen Satzes, welcher sich auf stetige Funktionen überhaupt bezieht.

Wir bezeichnen, wie dies schon in § 1 der *Untersuchungen über Rectification der Curven* (1) geschehen ist, die Unbestimmtheitsgrenzen des vorderen und hinteren Differentialquotienten einer Funktion als *vordere obere, vordere untere, hintere obere, hintere untere Ableitung* (Derivirte) und wenden die vier Symbole D^+, D_+, D^-, D_- für diese Begriffe an. Dann gilt der

Satz I. Es seien $F(x)$ und $f(x)$ zwei für alle Punkte des Intervalles $x_0\, x_1$ definirte stetige Funktionen. Wenn dann die vordere obere Ableitung

(1) Acta Mathematica, T. 5, p. 52.

von $F(x)$ (oder die vordere untere oder die hintere obere oder die hintere untere) überall endlich und gleich der entsprechenden Ableitung von $f(x)$ ist, so ist für alle Werte x, die dem Intervall angehören,

$$F(x) = f(x) + \textit{const.}$$

Beweis.

Es sei im ganzen Intervall $x_0 x_1$

$$D^+ F(x) = D^+ f(x).$$

Wir bilden die Funktion

$$\varphi(x) = cx + F(x) - f(x),$$

in welcher c eine willkürliche positive Constante ist. Dann wird notwendig

$$D^+ \varphi(x) \geqq c.$$

Nehmen wir nämlich eine zweite positive Constante δ an, so existiren zu jedem Werte von x beliebig kleine positive Werte h, für welche

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} > D^+ F(x) - \delta$$

ist. Ausserdem wird für *alle* positiven Werte h, die unterhalb einer gewissen Grenze liegen,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} < D^+ f(x) + \delta.$$

Es giebt also beliebig kleine Werte h, welche der Bedingung

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > -2\delta$$

oder, was dasselbe ist, der Bedingung

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} > c - 2\delta$$

genügen. Demnach ist $D^+\varphi(x) \geqq c - 2\delta$, und, da δ beliebig war, $D^+\varphi(x) \geqq c$.

Wir behaupten weiter, dass die Funktion $\varphi(x) - \varphi(x_0)$ im Intervall $x_0 x_1 (x_0 < x_1)$ niemals negativ wird. Wäre sie nämlich an der Stelle x' negativ, so würden die Werte x zwischen x_0 und x', für welche sie positiv oder gleich o ist, eine obere Grenze x'' haben. Da die Funktion stetig ist, würde $\varphi(x'') - \varphi(x_0) = 0$ sein, und es müsste für jeden Wert $h < x' - x''$ die Relation $\varphi(x'' + h) - \varphi(x'') < 0$ bestehn, welche mit der vorher gefundenen Relation $D^+\varphi(x) \geqq c$ unvereinbar wäre.

Daraus folgt weiter, dass auch

$$[F(x) - f(x)] - [F(x_0) - f(x_0)]$$

an keiner Stelle negativ werden kann. Anderenfalls würde, wenn man der Constanten c einen genügend kleinen Wert gäbe, auch $\varphi(x) - \varphi(x_0)$ negativ werden, was unmöglich ist.

Vertauscht man in den vorhergehenden Entwickelungen $F(x)$ mit $f(x)$, so ergiebt sich schliesslich, dass auch die Funktion

$$[f(x) - F(x)] - [f(x_0) - F(x_0)]$$

niemals negativ, oder, was dasselbe ist, dass die Funktion

$$[F(x) - f(x)] - [F(x_0) - f(x_0)]$$

niemals positiv wird. Da wir eben sahen, dass diese Funktion niemals negativ wird, folgt, dass sie beständig gleich o ist. D. h. es besteht die Gleichung

$$F(x) - f(x) = F(x_0) - f(x_0).$$

w. z. b. w.

§ 2.

Der Satz I lässt verschiedene Erweiterungen zu. Um dieselben zu formuliren, nehmen wir eine Bezeichnung von Herrn G. Cantor an: Eine im Intervall $x_0 x_1$ beliebig definirte Punktmenge P besitzt *den Inhalt* $\mathfrak{J}$, wenn nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ die Menge

P immer in eine endliche Schaar von Intervallen eingeschlossen werden kann, deren Summe kleiner als $\mathfrak{J} + \delta$ ist, während es unmöglich ist, die Punktmenge in eine endliche Schaar von Intervallen einzuschliessen, deren Summe kleiner als $\mathfrak{J}$ ist.

Der Begriff einer Menge von Werten x mit dem Inhalt Null ist hiernach identisch mit dem von Herrn Harnack angewandten Begriffe der *discreten* Wertmenge.

Satz II. Wenn man von zwei im Intervall $x_0 x_1$ überall eindeutigen und stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ weiss, dass die Gesammtheit der Werte von $F(x) - f(x)$, welche denjenigen Stellen entsprechen, an denen die vorderen oberen Ableitungen $D^+ F(x)$ und $D^+ f(x)$ (oder die vorderen unteren etc.) entweder nicht beide endlich oder nicht einander gleich sind, höchstens eine Menge mit dem Inhalt Null bildet, so ist im ganzen Intervalle

$$F(x) = f(x) + \textit{const.}$$

Beweis.

Wir bezeichnen diejenigen Stellen x, an welchen die Grössen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ entweder nicht beide endlich oder nicht einander gleich sind, kurz als singuläre Stellen, die entsprechenden Werte der Funktion $y = F(x) - f(x)$ als singuläre Werte von y.

Liegt weder im Inneren noch auf der Grenze eines Intervalles xx' ein singulärer Wert von x, so ist die Funktion y in diesem Intervalle nach Satz I constant. Wir behaupten, dass y an keiner Stelle x einen von $y_0 = F(x_0) - f(x_0)$ verschiedenen Wert haben kann.

Hätte nämlich für $x = x'$ die Funktion y den Wert $y' = y_0 + c$, wo $c \gtrless 0$ ist, so könnte man unter den zwischen y_0 und y' gelegenen Grössen diejenigen, welche singulären Werten von y gleich sind, nach Voraussetzung in Intervalle schliessen, deren Summe kleiner als c wäre. Es liesse sich also zwischen y_0 und y' jedenfalls ein Intervall von angebbarer Länge bestimmen, welches keine einzige Grösse enthält, die einem singulären Werte von y gleich wäre. Die Grenzen eines solchen Intervalles seien $y = a_0$ und $y = a'$, wo $a_0 \gtrless a'$, und zwar sei a_0 die näher an y_0, a' die näher an y' gelegene dieser beiden Grössen. — Die stetige Funktion y wird zwischen x_0 und x' alle im Intervall $y_0 y'$ gelegenen

Werte annehmen, es müssen also zwischen x_0 und x' Werte von x vorkommen, für welche $y = a_0$ wird. Ist ξ_0 die obere Grenze dieser Werte, so wird $y = a_0$ für $x = \xi_0$. Im Intervalle $\xi_0 x'$ wird y alle zwischen a_0 und y' gelegenen Werte annehmen. Wir bezeichnen die untere Grenze der in diesem Intervall befindlichen Werte x, für welche $y = a'$ wird, mit ξ'. Dann nimmt y für $x = \xi'$ den Wert a' an. Im Intervall $\xi_0 \xi'$ liegt y offenbar immer zwischen den Grenzen a_0 und a'. Dieses Intervall enthält also keinen singulären Wert von x. Daher müsste, wie zuvor bewiesen ist, y innerhalb desselben constant und folglich $a' = a_0$ sein. Dies ist aber nicht der Fall.

Die Annahme $y' = y_0 + c$ $(c \gtrless 0)$ führt also zu einem Widerspruche. Es wird daher $y' = y_0$, d. h. allgemein

$$F(x) - f(x) = F(x_0) - f(x_0)$$

sein. w. z. b. w.

§ 3.

Der Satz II enthält implicite den folgenden

Satz II$_a$. Wenn man von zwei im Intervall $x_0 x_1$ überall eindeutigen und stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ weiss, dass die Gesammtheit der Stellen x, an denen die vorderen oberen Ableitungen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ (oder die vorderen unteren etc.) entweder nicht beide endlich oder nicht einander gleich sind, höchstens eine Menge P bildet, deren Ableitung (¹) *P' endlich oder abzählbar unendlich* (¹) *ist, so ist im ganzen Intervall*

$$F(x) = f(x) + \textit{const.}$$

Um zu zeigen, dass dieser Satz in dem Satze II enthalten ist, brauchen wir zwei Hülfssätze.

Hülfssatz I. Es sei y eine im Intervall $x_0 x_1$ überall eindeutig definirte, stetige Funktion von x. Wenn dann P irgend eine Menge von Werten x ist, deren Ableitung P' endlich oder abzählbar unendlich ist, so bilden die zugehörigen Werte von y ebenfalls eine Menge Q, deren Ableitung Q' endlich oder abzählbar unendlich ist.

(¹) Nach der Definition von Herrn G. Cantor.

Beweis.

Es sei b irgend ein Wert von y, welcher zur Menge Q' gehört. Dann giebt es in jeder Nähe der Grösse b unendlich viele Werte, die zur Menge Q gehören. Da jedem dieser Werte mindestens ein zur Menge P gehöriger Wert von x entspricht, und da alle zu verschiedenen Werten von y gehörigen Werte x von einander verschieden sind, giebt es mindestens eine Stelle $x = a$ mit der Eigenschaft, dass in jeder Nähe derselben unendlich viele Stellen liegen, die zu P gehören und denen Werte von y entsprechen, die sich beliebig wenig von b unterscheiden. An der Stelle $x = a$, welche zur Menge P gehört, nimmt die Funktion y, da sie stetig ist, notwendig den Wert b an.

Hiermit ist bewiesen, dass jedem Werte $y = b$, der zu Q' gehört, mindestens ein Wert $x = a$ entspricht, der zu P' gehört. Die Werte von y, welche allen in P' vorkommenden Werten von x entsprechen, enthalten also sämmtliche Werte der Menge Q'. Die Menge Q' ist daher endlich oder abzählbar unendlich, da P' nach Voraussetzung endlich oder abzählbar unendlich ist.

Hülfsatz II. Jede in einem endlichen Intervall enthaltene Wertmenge, deren Ableitung endlich oder abzählbar unendlich ist, hat den Inhalt Null.

Der Beweis dieses Satzes ist von Herrn G. Cantor gegeben worden (Mathematische Annalen B. 21, p. 54).

Beweis des Satzes II$_a$.

Die Gesammtheit derjenigen Stellen x, an denen die Ableitungen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ entweder nicht beide endlich oder nicht einander gleich sind, bildet nach Voraussetzung eine Menge, deren Ableitung endlich oder abzählbar unendlich ist. Dasselbe gilt nach Hülfssatz I von den entsprechenden Werten der Funktion $y = F(x) - f(x)$. Die Gesammtheit der Werte y, welche den Stellen von der angegebenen Art entsprechen, hat also nach Hülfssatz II den Inhalt Null. Folglich sind die Voraussetzungen des Satzes II erfüllt und der Satz II$_a$ ist auf jenen Satz zurückgeführt.

§ 4.

Der Satz I lässt noch eine andere Erweiterung zu, in welcher einige von den Herren DU BOIS-REYMOND (1) und HARNACK (2) gegebene Erweiterungen des Fundamentalsatzes der Integralrechnung enthalten sind.

Wir sagen, eine Funktion *sei in der Umgebung einer Stelle x grösser als jede endliche Zahl*, wenn nach Annahme einer beliebig grossen Zahl G in jeder Nähe der Stelle x andere Stellen existiren, an denen die Funktion grösser als G ist.

Dann besteht der

Satz III. Wenn man von zwei im Intervall $x_0 x_1$ überall eindeutigen und stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ weiss,

1) *dass die Gesammtheit der Stellen x, an welchen die vorderen oberen Ableitungen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ (oder die vorderen unteren etc.) beide endlich, aber um mehr als ε von einander verschieden sind, für jeden positiven Wert von ε höchstens eine Menge mit dem Inhalt Null bildet;*

2) *dass die Gesammtheit der Werte von $F(x) - f(x)$, welche den Stellen x entsprechen, an denen oder in deren Umgebung mindestens eine der Grössen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ absolut grösser als jede endliche Zahl ist, ebenfalls eine Menge mit dem Inhalt Null bildet;*

so ist im ganzen Intervalle

$$F(x) = f(x) + \text{const.}$$ (3)

Zum Beweise brauchen wir einen Hülfssatz, den wir, obwohl er bekannt ist, (4) der Vollständigkeit wegen, kurz beweisen.

---

(1) Mathematische Annalen, B. 16, p. 115—128.

(2) Mathematische Annalen, B. 19, p. 235—279.

(3) Einige von Herrn HARNACK angegebene Sätze (Mathematische Annalen, B. 19, p. 239—245), in welche unser Satz III für den Fall übergeht, dass $F(x)$ und $f(x)$ Funktionen mit integrirbaren Differentialquotienten sind, in welchen indess die Bedingung 2) nicht berücksichtigt ist, sind ungenau. Cf. *Untersuchungen über Rectification der Curven,* Beispiel 1 zu Theorem IV, Beispiel 2 in der Bemerkung zu Theorem VI.

(4) Cf. DINI, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali,* p. 193—194.

Hülfssatz III. Wenn y eine von x_0 bis x_1 stetige Funktion von x ist, und wenn die vordere obere Ableitung (oder die vordere untere etc.) überall zwischen den Grenzen G und G' $(G > G')$ liegt, so liegt auch der Quotient $\frac{y'-y}{x'-x}$ für beliebige Werte von x und x' zwischen denselben Grenzen.

Beweis.

Es sei $x' > x$. Wäre $\frac{y'-y}{x'-x} > G$, so könnte man eine positive Grösse c so klein annehmen, dass, wenn $z = y - (G + c)x$ gesetzt wird, die Differenz $z' - z$ positiv, etwa gleich δ, würde. Dann müsste für x eine obere Grenze $x''(< x')$ existiren, wo die Relation $z' - z'' = \delta$ zum letzten Mal erfüllt wäre. An dieser Stelle wäre $D^+ z'' \geqq 0$, also $D^+ y'' \geqq G + c$, was gegen die Voraussetzung ist.

Wäre aber $\frac{y'-y}{x'-x} < G'$, so könnte man die positive Constante c so klein annehmen, dass, wenn $z = y - (G' - c)x$ gesetzt wird, die Differenz $z' - z$ negativ, etwa gleich $-\delta$, würde. Dann müsste für x eine obere Grenze $x''(< x')$ existiren, wo die Relation $z' - z'' = -\delta$ zum letzten Mal erfüllt wäre. An dieser Stelle würde $D^+ z'' \leqq 0$, oder $D^+ y'' \leqq G' - c$, was wiederum gegen die Voraussetzung ist.

Beweis des Satzes III.

A) Wir nehmen zunächst an, dass es keine einzige Stelle im Intervall $x_0 x_1$ oder auf der Grenze desselben giebt, an welcher oder in deren Umgebung eine der Ableitungen $D^+ F(x)$ und $D^+ f(x)$ absolut grösser als jede endliche Zahl wäre. Dann existirt eine endliche Grösse G, welche die obere Grenze der absoluten Werte von $D^+[F(x) - f(x)]$ im Intervall $x_0 x_1$ ist.

Setzen wir, wie in § 1,

$$\varphi(x) = cx + F(x) - f(x)$$

wo $c > 0$ ist, so haben auch die absoluten Werte von $D^+ \varphi(x)$ im Intervall $x_0 x_1$ eine endliche obere Grenze, welche höchstens Gleich $G + c$ ist.

Es lässt sich nun zunächst, ebenso wie in § 1, zeigen, dass

$$D^+\varphi(x) \geqq c - \varepsilon$$

ist an allen Stellen x mit Ausnahme derjenigen, an denen $D^+F(x)$ von $D^+f(x)$ um mehr als ε verschieden ist, d. h. mit Ausnahme einer Menge von Werten x, deren Inhalt nach Voraussetzung Null ist. Wir bezeichnen diese Menge mit P_ε. Wählen wir ε kleiner als c, so kann ferner, wie in § 1, gezeigt werden, dass $\varphi(x') - \varphi(x)$ niemals negativ wird, wenn $x' > x$ ist und die Strecke xx' keinen Punkt der Menge P_ε enthält.

Wir behaupten, dass $\varphi(x') - \varphi(x)$ auch dann nicht negativ wird, wenn die Argumente x und x' beliebige dem Intervall $x_0 x_1$ angehörige Werte annehmen, falls nur $x' > x$ ist.

Wäre nämlich $\varphi(x') - \varphi(x) = -\eta$, so würden wir die im Intervall xx' gelegenen Werte der Menge P_ε in eine endliche Schaar von Intervallen i einschliessen, deren Summe kleiner als $\frac{\delta\eta}{g}$ ist, wo δ kleiner als 1, g die obere Grenze der absoluten Werte von $D^+\varphi(x)$ im Intervall xx' oder, falls diese Grenze Null ist, eine beliebige positive Zahl ist. Bezeichnen wir den Anfangs- und Endpunkt eines der Intervalle i', welche von der Strecke xx' nach Ausschluss der Intervalle i übrig bleiben, mit ξ_0' und ξ_1', so ist, wie vorher gefunden,

$$\varphi(\xi_1') - \varphi(\xi_0') \geqq 0.$$

Bezeichnen wir ferner den Anfangs- und Endpunkt eines der Intervalle i mit ξ_0 und ξ_1, so ist nach Hülfssatz III

$$\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_0) \geqq -g(\xi_1 - \xi_0).$$

Also wird, wenn wir über alle Intervalle i' und i summiren und die Relation $\Sigma i < \frac{\delta\eta}{g}$ berücksichtigen,

$$\varphi(x') - \varphi(x) > -\delta\eta.$$

Die Annahme $\varphi(x') - \varphi(x) = -\eta$ führt demnach zu einem Widerspruche.

Es kann also für $x' > x$ die Differenz $\varphi(x') - \varphi(x)$ und, da die Constante c willkürlich ist, auch die Differenz

$$[F(x') - f(x')] - [F(x) - f(x)]$$

nicht negativ werden. Durch Vertauschung der Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ ergiebt sich schliesslich, dass jene Differenz auch nicht positiv sein kann. Es besteht daher notwendig die Gleichung

$$F(x') - f(x') = F(x) - f(x) = F(x_0) - f(x_0)$$

w. z. b. w.

B) Wir lassen jetzt die Beschränkung fallen, dass das Intervall $x_0 x_1$ keine Stelle enthalten soll, an welcher oder in deren Umgebung mindestens eine der Grössen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ absolut grösser als jede endliche Zahl ist. Dagegen soll die im Satze III ausgesprochene Bedingung 2) erfüllt sein.

Wir bezeichnen dann diejenigen Stellen x, an denen oder in deren Umgebung mindestens eine der Grössen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ absolut grösser als jede angebbare Zahl wird, kurz als singuläre Stellen, die zugehörigen Werte der Funktion $y = F(x) - f(x)$ als singuläre Werte von y.

Liegt weder im Inneren noch auf der Grenze eines Intervalles xx' ein singulärer Wert von x, so ist nach **A**) die Funktion y in diesem Intervall constant. Wir behaupten, dass y an keiner Stelle einen von $y_0 = F(x_0) - f(x_0)$ verschiedenen Wert haben kann.

Hätte nämlich y für $x = x'$ den Wert $y' = y_0 + c$ wo $c \gtrless 0$ ist, so könnte man, genau wie in § 2, für x zwei Werte ξ_0 und ξ' so bestimmen, dass denselben einerseits zwei verschiedene Werte a_0 und a' von y entsprechen, während andererseits in dem Intervall $\xi_0\xi'$ keine singuläre Stelle x liegt. Dies ist aber nach **A**) unmöglich, und daher kann die Annahme $y' = y_0 + c$ nicht richtig sein. Es ist also allgemein $y = y_0$, d. h. es gilt auch für diesen Fall die Gleichung

$$F(x) - f(x) = F(x_0) - f(x_0).$$

w. z. b. w.

§ 5.

Wie der Satz II implicite den Satz II$_a$ enthielt, so enthält der Satz III den folgenden

Satz III$_a$. Wenn man von zwei im Intervall $x_0 x_1$ überall eindeutigen und stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ weiss,

1) *dass die Gesammtheit der Stellen x, wo die vorderen oberen Ableitungen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ (oder die vorderen unteren etc.) beide endlich, aber um mehr als ε von einander verschieden sind, für jeden positiven Wert von ε höchstens eine Menge mit dem Inhalt Null bildet;*

2) *dass die Gesammtheit der Stellen x, an denen oder in deren Umgebung mindestens eine der Grössen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ absolut grösser als jede angebbare Zahl ist, eine endliche oder abzählbar unendliche Menge bildet;*

so ist im ganzen Intervall

$$F(x) = f(x) + \text{const.}$$

Beweis.

Die Gesammtheit derjenigen Stellen x, an denen oder in deren Umgebung mindestens eine der Grössen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ absolut grösser als jede angebbare Zahl ist, bildet ihrer Natur nach eine abgeschlossene Menge P, d. h. eine Menge, deren Ableitung P' in P enthalten ist. Da P nach Voraussetzung endlich oder abzählbar unendlich ist, wird auch P' endlich oder abzählbar unendlich. Nach § 3 Hülfssatz I besitzt daher die Menge Q der Werte von $y = F(x) - f(x)$, welche zu den Werten P von x gehören, eine endliche oder abzählbar unendliche abgeleitete Menge Q'. Mit Rücksicht auf den Hülfssatz II ergiebt sich schliesslich, dass die Menge Q den Inhalt Null hat. Hiermit ist der Satz III$_a$ auf den Satz III zurückgeführt.

Wir schliessen, um ein naheliegendes Missverständniss zu vermeiden, mit der ausdrücklichen Bemerkung, dass der Satz II nicht als ein specieller Fall des Satzes III, und ebensowenig der Satz $\mathrm{II_a}$ als ein specieller Fall des Satzes $\mathrm{III_a}$ angesehen werden darf. Es besteht vielmehr der wesentliche Unterschied, dass in den Sätzen II und $\mathrm{II_a}$ nur diejenigen Stellen x, an denen eine der Ableitungen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ unendlich gross ist, nebst den Verdichtungspunkten dieser Stellen, als singulär betrachtet werden; während in den Sätzen III und $\mathrm{III_a}$ auch diejenigen Stellen berücksichtigt sind, in deren Umgebung eine der Grössen $D^+F(x)$ und $D^+f(x)$ grösser als jede angebbare Zahl wird, ohne den Wert ∞ wirklich anzunehmen.

Möglicher Weise können die Sätze III und $\mathrm{III_a}$ so verallgemeinert werden, dass die Sätze II und $\mathrm{II_a}$ als specielle Fälle derselben erscheinen. Es ist uns indess nicht gelungen, eine Verallgemeinerung in dieser Richtung streng durchzuführen.

Berlin, 21 December 1883.

Nachtrag zu pag. 189, *Note* 3. Wie aus einer inzwischen publicirten Note des Herrn Harnack hervorgeht (Mathematische Annalen, Bd. 23, p. 287), hat derselbe die Nothwendigkeit einer Vervollständigung seiner Sätze, sowie die Art, in welcher dieselbe geschehn muss, selbst bereits mehrere Monate vor dem Verfasser erkannt und wird darüber im zweiten Teile seiner Arbeit: *Ueber den Zusammenhang der Funktionen einer reellen Variabelen mit ihren Ableitungen* demnächst Ausführlicheres veröffentlichen.

München, 15 Mai 1884.