ALLGEMEINE UNTERSUCHUNGEN ÜBER RECTIFICATION DER CURVEN

VON

LUDWIG SCHEEFFER

in MÜNCHEN.

Die folgenden Untersuchungen wurden veranlasst durch das Studium einer merkwürdigen Funktion. Dieselbe ist überall stetig, ihr Differentialquotient (und auch das Quadrat desselben) besitzt aber in jedem noch so kleinen Intervall dieselbe von o verschiedene Schwankung, sodass dem bestimmten Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

unter Zugrundelegung der RIEMANN'schen Definition eine Bedeutung nicht zukommt. Dennoch geht aus geometrischen Betrachtungen auf das Unzweideutigste hervor, dass die durch jene Funktion definirte Curve zwischen je zweien ihrer Punkte eine ganz bestimmte endliche Länge hat. Daraus folgt, dass der Begriff der Länge einer Curve nicht von dem Umstande abhängig sein kann, ob jenes bestimmte Integral Sinn hat, oder nicht. Die von Herrn DU BOIS-REYMOND (1) gegebene Definition der Länge einer Curve ist also jedenfalls zu eng.

(1) Mathematische Annalen, B. 15, pag. 287.

Hiermit drängt sich die Nothwendigkeit einer allgemeineren Definition des Begriffes »Länge» und gleichzeitig die Frage nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen auf, denen eine Funktion $f(x)$ genügen muss, damit die durch die Gleichung $y = f(x)$ definirte Curve zwischen zweien ihrer Punkte eine bestimmte endliche Länge habe.

Die Beantwortung dieser Frage für den Fall, dass die Funktion $f(x)$ von x_0 bis x_1 eindeutig gegeben ist, bildet den Inhalt dieser Abhandlung. Es werden dabei weder über die Stetigkeit, noch über die Differentiirbarkeit von $f(x)$ irgend welche Voraussetzungen gemacht.

Die Resultate, welche in den Theoremen I—VII zusammengefasst und an Beispielen erläutert sind, zeigen, dass die Existenz der Länge einer Curve in keiner Weise von dem Umstande abhängig ist, ob die Curve im Allgemeinen eine Richtung besitzt, oder nicht. Wir werden zur besseren Beleuchtung dieses Gegenstandes in einer späteren Arbeit Curven definiren, welche eine bestimmte Länge zwischen je zweien ihrer Punkte besitzen, obgleich die Gesammtheit der Stellen, wo keine Tangente existirt, in jedem Intervall von der Mächtigkeit des Linearcontinuums ist.

1.

Wir geben in dieser Nummer die Definition einiger Begriffe:
»Länge», »derivirte Funktionen», »Richtungsschwankung».

Es sei $y = f(x)$ eine in dem ganzen Intervall $x_0 x_1$ eindeutig gegebene Funktion. Wir nehmen eine endliche Anzahl von Werthen x an, deren kleinster x_0, deren grösster x_1 ist und bezeichnen dieselben, nach der Grösse geordnet, mit x_{10}, x_{11}, x_{12}, ..., die entsprechenden Werthe von y mit y_{10}, y_{11}, y_{12}, ... Es sei ferner

$$L_1 = \sum_{r=0,1,\dots} \sqrt{(x_{1,r+1} - x_{1,r})^2 + (y_{1,r+1} - y_{1,r})^2},$$

wo auf der rechten Seite über alle $x_{1,r}$ von x_0 bis x_1 zu summiren ist. Nun schieben wir zwischen je zwei der Punkte $x_{1,r}$ neue, wiederum in endlicher Anzahl, ein und bezeichnen die Gesammtheit der schon vorhandenen und der neu hinzutretenden Werthe x in der Reihenfolge ihrer Grösse mit x_{20}, x_{21}, x_{22}, ..., die entsprechenden Werthe von y mit y_{20}, y_{21}, y_{22}, ... Es sei dann wiederum

$$L_2 = \sum_{r=0,1,\ldots} \sqrt{(x_{2,r+1} - x_{2,r})^2 + (y_{2,r+1} - y_{2,r})^2},$$

wo die Summe auf der rechten Seite sich über alle $x_{2,r}$ von x_0 bis x_1 erstreckt. Durch Einschiebung neuer Punkte und Zusammenfassung derselben mit den früheren entsteht eine dritte Reihe x_{30}, x_{31}, x_{32}, ... und eine entsprechende Grösse L_3. Hiernach ist klar, was unter der Reihe x_{n0}, x_{n1}, x_{n2}, ..., y_{n0}, y_{n1}, y_{n2}, ... und der Grösse L_n zu verstehen ist.

Das Gesetz, nach welchem die Theilung der Abscissenaxe fortschreitet, nehmen wir ganz beliebig an und unterwerfen es nur der einen Bedingung, dass alle Differenzen $x_{n,r+1} - x_{n,r}$ mit wachsendem n unendlich klein werden. Genauer: *Nach Annahme einer beliebigen positiven Grösse δ soll n immer so zu bestimmen sein, dass die Differenzen $x_{n,r+1} - x_{n,r}$ sämmtlich kleiner als δ sind.*

Offenbar ist allgemein $L_{n+1} \geqq L_n$. Es nähern sich daher nach einem bekannten Satze die Grössen L_n mit wachsendem n entweder einem bestimmten endlichen Grenzwerthe, oder sie werden unendlich gross. Tritt der erste Fall ein, so bleibt die Möglichkeit offen, dass bei einer anderen Wahl der Theilpunkte die Grössen L_n sich entweder einem anderen endlichen Grenzwerthe nähern oder unendlich gross werden. Wir geben nun folgende

Definition. Die durch die Gleichung $y = f(x)$ definirte Curve hat zwischen den Punkten x_0, y_0 und x_1, y_1 die Länge L, wenn die Grössen L_n sich bei jeder Wahl der Theilpunkte demselben endlichen Grenzwerthe L nähern. Anderenfalls kommt der Curve eine Länge nicht zu. [1]

---

[1] Diese Definition der Länge ist im Wesentlichen gleichbedeutend mit der von DUHAMEL angegebenen. (Vergl. STOLZ: *Über die Bedeutung* BOLZANO's *in der Geschichte der Infinitesimalrechnung.* Mathematische Annalen B. 18 pag. 270). Sie lässt sich vollständig auf dieselbe reduciren, wenn man der Auffassung der Curve als eines Continuums dadurch Ausdruck giebt, dass man die Funktion $f(x)$ an den Sprungstellen alle zwischen $f(x - 0)$ und $f(x + 0)$ gelegenen Werthe annehmen lässt. Wir haben es vorgezogen, die

Die zweite Definition, von welcher im Verlauf dieser Untersuchungen vielfach Anwendung gemacht wird, ist diejenige der »*derivirten Funktionen*«. Wir werden, abweichend von dem bisherigen Gebrauch, bei einer ganz willkürlichen, stetigen oder unstetigen Funktion $f(x)$ an jeder Stelle von derivirten Funktionen sprechen und darunter die Unbestimmtheitsgrenzen des vorderen und hinteren Differentialquotienten verstehn.

Wenn nämlich die positive Grösse h beliebig angenommen wird, hat die Gesammtheit der Grössen

$$\frac{f(x+h')-f(x)}{h'},$$

wenn h' alle zwischen o und h gelegenen Werthe erhält, eine bestimmte obere und eine bestimmte untere Grenze. Natürlich ist der Fall, dass eine dieser Grenzen, oder beide, unendlich gross sind, nicht auszuschliessen. Bezeichnen wir für den Augenblick die obere Grenze mit D_h, die untere mit D'_h, so ist für $h_1 < h$ stets $D_{h_1} \leqq D_h$ und $D'_{h_1} \geqq D'_h$. Es nähert sich daher die Grösse D_h mit abnehmendem h entweder einer bestimmten endlichen Grenze, oder sie ist beständig $+\infty$, oder sie nimmt unbegrenzt ab bis $-\infty$. Ebenso nähert sich D'_h entweder einem bestimmten endlichen Grenzwerth, oder ist beständig $-\infty$, oder nimmt unbegrenzt zu bis $+\infty$. In jedem Falle sind die Grenzwerthe

$$\lim_{h=0} D_h \quad \text{und} \quad \lim_{h=0} D'_h$$

völlig bestimmt. Wir bezeichnen dieselben mit $D^+f(x)$ und $D_+f(x)$ und nennen sie die »*vordere obere*« und die »*vordere untere Derivirte*« von $f(x)$.

Es ist hiernach ohne Weiteres klar, was unter der »*hinteren oberen Derivirten*« $D^-f(x)$ und der »*hinteren unteren Derivirten*« $D_-f(x)$ zu verstehen ist.

Der vorwärts genommene Differentialquotient $f'_+(x)$ hat an denjenigen Stellen x einen bestimmten Werth, wo $D^+ = D_+$ ist, der rückwärts ge-

---

Funktion $f(x)$ überall eindeutig bestimmt vorauszusetzen und erst vermittelst unserer eigenthümlichen Definition der »Länge« die Anschauung von der Continuität der Curve an den Sprungstellen der Funktion $f(x)$ zum Ausdruck zu bringen.

nommene $f'_{-}(x)$ an denjenigen Stellen, wo $D^{-} = D_{-}$ ist; und zwar wird im ersten Falle $f'_{+}(x) = D^{+} = D_{+}$, im letzten Falle $f'_{-}(x) = D^{-} = D_{-}$.(¹)

Der dritte Begriff, den wir definiren müssen, da er in den folgenden Untersuchungen gebraucht wird, ist derjenige der »*Richtungsschwankung*«. Wir unterscheiden die »*Richtungsschwankung einer Curve an einer Stelle* x, y« von der »*Richtungsschwankung in der Umgebung einer Stelle* x, y«.

Wir sagen, die *Richtung der Curve* $y = f(x)$ *schwanke an der Stelle* x, y *zwischen den Winkeln* α *und* α' $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} \leqq \alpha' \leqq \frac{\pi}{2}\right)$, wenn die grössere der beiden Grössen D^{+} und D^{-} gleich $\operatorname{tg}\alpha$, die kleinere der Grössen D_{+} und D_{-} gleich $\operatorname{tg}\alpha'$ ist. Die Differenz $\alpha - \alpha'$ nennen wir die *Richtungsschwankung der Curve an der Stelle* x, y.

In dem Intervalle $x - h$ bis $x + h$, aus welchem nur die Stelle x selbst ausgeschlossen sein soll, hat von den eben definirten Winkeln α und α' der erste eine obere Grenze α_h, der zweite eine untere Grenze α'_h. Wenn h abnimmt, nimmt α_h nicht zu, α'_h nicht ab, es haben daher beide Grössen Grenzwerthe für $h = 0$. Wir setzen

$$\beta = \lim_{h=0} \alpha_h \quad \text{und} \quad \beta' = \lim_{h=0} \alpha'_h$$

und sagen, *die Richtung der Curve schwanke* in der Umgebung der Stelle x, y zwischen β und β'. Die Differenz $\beta - \beta'$ heisse *Richtungsschwankung der Curve in der Umgebung der Stelle* x, y.(²)

Schliesslich nennen wir *Gesammtschwankung der Richtung im Inneren eines Intervalles* die Grösse $\gamma - \gamma'$, wenn γ die obere Grenze von α, γ' die untere Grenze von α' im Inneren des Intervalles ist.

(¹) Herr du Bois-Reymond nennt die Grössen D^{+}, D_{+}, D^{-}, D_{-} passend »Unbestimmtheitsgrenzen» des vorwärts und rückwärts genommenen Differentialquotienten. Wir haben die neue Bezeichnung »derivirte Funktionen» der grösseren Kürze wegen eingeführt. Die Symbole D^{+}, D_{+}, D^{-}, D_{-} schliessen sich unmittelbar an diese Bezeichnung an und sind daher von uns den Symbolen des Herrn Dini Λ, λ, Λ', λ' (*Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* pag. 190) vorgezogen.

(²) Die Richtungsschwankung an der Stelle x, y ist keineswegs immer gleich der Richtungsschwankung in der Umgebung dieser Stelle. Es lassen sich leicht Beispiele angeben, wo die erste gleich 0, die zweite gleich π ist (z. B. $y = x^{\frac{4}{3}} \sin\frac{1}{x}$ für $x = 0$).

2.

Theorem I. Ist die in dem Intervall $x_0 x_1$ überall eindeutig gegebene Funktion $f(x)$ stetig und bleiben alle Grössen L_n bei irgend einer Wahl der Theilpunkte unterhalb einer endlichen Grösse G, so bleiben sie auch bei jeder anderen Wahl der Theilpunkte unterhalb dieser Grösse, und L_n hat für $n = \infty$ den von der Wahl der Theilpunkte unabhängigen Grenzwerth L. Die durch die Gleichung $y = f(x)$ definirte Curve hat also in diesem Falle zwischen den Punkten x_0, y_0 und x_1, y_1 die bestimmte Länge L. (1)

Theorem II. Ist die in dem Intervall $x_0 x_1$ überall eindeutig gegebene Funktion $f(x)$ unstetig, so ist für die Existenz einer Länge, d. h. eines von der Wahl der Theilpunkte unabhängigen endlichen Grenzwerthes $\lim_{n=\infty} L_n = L$ nothwendig, 1) dass für jeden dem Intervall angehörigen Werth x die Grössen $f(x+\varepsilon)$ und $f(x-\varepsilon)$ mit verschwindendem ε sich bestimmten endlichen Grenzwerthen $f(x+0)$ und $f(x-0)$ nähern; 2) dass für jeden Werth von x der Werth der Funktion $f(x)$ zwischen $f(x+0)$ und $f(x-0)$ liegt oder mit einer dieser Grössen zusammenfällt; 3) dass die Werthe x, für welche $f(x+0)$ nicht gleich $f(x-0)$ ist, eine endliche oder abzählbar unendliche Menge bilden; (2) *4) dass die Summe der absoluten Beträge der Differenzen $f(x+0) - f(x-0)$ endlich ist. Sind umgekehrt diese vier Bedingungen erfüllt, so hat die durch die Gleichung $y = f(x)$ definirte Curve eine Länge L, wenn die Grössen L_n bei irgend einer Wahl der Theilpunkte unterhalb einer endlichen Grösse G bleiben.*

---

(1) Der von DUHAMEL gegebene Beweis dieses Theorems umfasst nur diejenigen Curven, welche an jeder Stelle sowohl nach vorwärts als nach rückwärts eine bestimmte Richtung haben. Desgl. der Beweis von Herrn STOLZ (l. c. pag. 271).

(2) Unter einer »abzählbar unendlichen» Menge verstehn wir eine solche, deren Elemente sich den Elementen der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, ... eindeutig zuordnen lassen. Wir bemerken dies ausdrücklich, weil Herr G. CANTOR jenem Begriffe, den er ursprünglich in der angegebenen Weise definirte, später eine erweiterte Bedeutung gegeben hat (Mathematische Annalen, B. 21, pag. 550, Note).

Es sei noch erwähnt, dass die im Theorem II enthaltene Bedingung 3), genau genommen, überflüssig ist, da sie — was wir erst während des Druckes erkannt haben — durch die Bedingung 1) bereits mitgegeben ist. Die von Herrn DU BOIS-REYMOND (l. c.) aufgestellte Forderung, dass die Unstetigkeiten nicht »pantachisch» sein sollen, erweist sich bei unserer Definition der Länge als unwesentlich (Vergl. das Beispiel auf S. 61 dieser Abhandlung).

Beweis von Theorem I.

Es entspreche irgend einer Wahl der Theilpunkte die Reihe $L_1, L_2, \ldots$ Nach Voraussetzung sind alle in dieser Reihe vorkommenden Grössen kleiner als G. Da ausserdem allgemein $L_{n+1} \geqq L_n$ ist, müssen die Grössen L_n, wie schon in § 1 bemerkt wurde, eine obere Grenze haben, der sie sich beliebig nähern, die sie indess nicht überschreiten. Diese Grenze sei L.

Wir nehmen nun irgend welche anderen Theilpunkte an und bezeichnen die denselben entsprechenden Grössen mit gestrichenen Buchstaben: $x'_{n0}, x'_{n1}, \ldots, y'_{n0}, y'_{n1}, \ldots, L'_n$. Es lässt sich zeigen, dass keine der Grössen L'_n grösser als L sein kann.

Sind $x'_{n0}, x'_{n1}, \ldots, x'_{n,p+1}$ die der Grösse L'_n entsprechenden Theilpunkte (also $x'_{n0} = x_0$, $x'_{n,p+1} = x_1$), so ist nach der Definition

$$L'_n = \sum_{r=0}^{p} \sqrt{(x'_{n,r+1} - x'_{n,r})^2 + (y'_{n,r+1} - y'_{n,r})^2}.$$

Nehmen wir jetzt eine positive Grösse δ beliebig an, so können wir zu jeder Grösse $x'_{nr} (r = 1, 2, \ldots, p)$ vermittelst einer Ungleichung

$$x'_{nr} - \varepsilon_r < x < x'_{nr} + \eta_r$$

ein Intervall i_{nr} bestimmen, welches erstens eine von 0 verschiedene Länge besitzt, die kleiner als $\frac{\delta}{p}$ ist, welches zweitens keinen der Punkte $x'_{n0}, x'_{n1}, \ldots$ ausser x'_{nr} enthält, und innerhalb dessen drittens die Schwankung von $f(x)$ kleiner als $\frac{\delta}{p}$ ist. Ist dies geschehen, so können wir ferner die Zahl m so gross annehmen, dass in jedem der p Intervalle $i_{n1}, i_{n2}, \ldots, i_{np}$ mindestens zwei Punkte der Reihe $x_{m1}, x_{m2}, \ldots$ liegen. Dann wird folgende Relation bestehen:

$$L_m + 2\sqrt{2}\delta > L'_n.$$

Sind nämlich $x_{m,\alpha}$ und $x_{m,\alpha+1}$ zwei auf einander folgende Punkte der Reihe $x_{m1}, x_{m2}, \ldots$, welche beide im Intervall i_{nr} liegen, und ersetzen wir in dem Summenausdruck für L_m das Glied, welches die Entfernung des Punktes x_{ma}, y_{ma} vom Punkte $x_{m,a+1}, y_{m,a+1}$ ausdrückt, durch die Summe der Entfernungen dieser beiden Punkte vom Punkte x'_{nr}, y'_{nr}; und führen wir dasselbe für alle p Intervalle i_{nr} aus, so erfährt die Summe L_m einen Zuwachs, der kleiner als $2\sqrt{2}\delta$ ist. Die neue Summe ist aber mindestens gleich L'_n, da an der Stelle der geraden Linien, aus deren Längen L'_n zusammengesetzt ist, hier gebrochene Linien stehen. Demnach gilt in der That die Relation

$$L_m + 2\sqrt{2}\delta > L'_n.$$

Da L nicht kleiner als L_m ist, muss um so mehr

$$L + 2\sqrt{2}\delta > L'_n$$

werden. Die Grösse δ war aber beliebig angenommen. Also ist auch

$$L \geqq L'_n.$$

Hieraus folgt in Verbindung mit der Relation $L'_{n+1} \geqq L'_n$, dass die Grössen L'_n mit wachsendem n sich einem bestimmten Grenzwerth L' nähern. Wegen der eben gefundenen Relation kann L' nicht grösser als L sein. Da wir aber jetzt offenbar in den vorhergehenden Betrachtungen die gestrichenen und die ungestrichenen Buchstaben mit einander vertauschen dürfen, folgt, dass auch L nicht grösser als L' ist. Also ist $L = L'$.

Hiermit ist das Theorem I bewiesen.

Beweis von Theorem II.

Dass die Bedingungen 1) bis 4) für die Existenz einer Länge nach unserer Definition nothwendig sind, ist unschwer zu erkennen.

Angenommen, es sei $\lim\limits_{\varepsilon=0} f(x+\varepsilon)$ für irgend einen Werth von x unbestimmt. Dann lässt sich eine von 0 verschiedene Grösse c angeben von der Art, dass nach Annahme einer beliebig kleinen Zahl ε stets eine noch kleinere Zahl ε_1 zu finden ist, für welche der absolute Betrag der Differenz $f(x+\varepsilon) - f(x+\varepsilon_1)$ grösser als c wird. Gehen wir nun von einer Zahl ε aus, bestimmen zu derselben ε_1, zu ε_1 auf dieselbe

Weise ε_2 u. s. w., so wird die Grösse L_n, wenn wir $\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ als Theilpunkte annehmen, grösser als cn. Es existirt also kein endlicher Grenzwerth $\lim\limits_{n=\infty} L_n$. Hieraus folgt die Nothwendigkeit der Bedingung 1).

Hat $f(x)$ an irgend einer Stelle einen Werth, der um die von 0 verschiedene Grösse c grösser als die grössere der beiden Grössen $f(x+0)$ und $f(x-0)$ (oder kleiner als die kleinere derselben) ist, so würde, falls $\lim\limits_{n=\infty} L_n = L$ wäre, wenn unter den Theilpunkten der Punkt x nicht vorkommt, durch Einschaltung dieses Punktes $\lim\limits_{n=\infty} L_n = L + 2c$ werden. Der Grenzwerth wäre also von der Wahl der Theilpunkte abhängig. Hieraus folgt die Nothwendigkeit der Bedingung 2).

Wenn wir eine beliebige Zahl c annehmen, so dürfen diejenigen Unstetigkeitsstellen, an welchen der absolute Betrag der Differenz $f(x+0) - f(x-0)$ grösser als c ist, nicht in unendlicher Menge vorhanden sein, da sonst durch Annahme von Theilpunkten $x + \varepsilon$ und $x - \varepsilon$ die Grösse L_n beliebig gross gemacht werden könnte. Die Unstetigkeitsstellen sind also, wenn eine Länge existirt, nach der absoluten Grösse $|s|$ jener Differenz abzählbar. Falls sie in unendlicher Anzahl vorhanden sind, ist die Summe $\sum\limits_{r=1}^{\infty} |s_r|$ endlich, da die Summe $\sum\limits_{r=1}^{n} |s_r|$ offenbar für beliebiges n kleiner als L ist. Hiermit ist die Nothwendigkeit der Bedingungen 3) und 4) nachgewiesen.

Sind aber diese 4 Bedingungen erfüllt, und bleiben bei irgend einer Wahl der Theilpunkte die Grössen $L_1, L_2, \ldots$ sämmtlich unterhalb einer endlichen Zahl G, so bleiben sie auch bei jeder beliebigen anderen Wahl der Theilpunkte unterhalb dieser Zahl und haben einen von der Wahl der Theilpunkte unabhängigen Grenzwerth L.

Nehmen wir nämlich zunächst an, dass an allen Unstetigkeitsstellen die Funktion $f(x)$ entweder gleich $f(x+0)$ oder gleich $f(x-0)$ sei, so lässt sich der für das Theorem I erbrachte Beweis mit einer unbedeutenden Modifikation auf unseren Fall anwenden. Diese Modifikation besteht darin, dass eine der dort mit ε_r und η_r bezeichneten Grössen gleich Null gesetzt wird, so oft x'_{nr} ein Unstetigkeitspunkt ist; und zwar die Grösse ε_r, wenn $f(x'_{nr}) = f(x'_{nr} + 0)$, die Grösse η_r, wenn $f(x'_{nr}) = f(x'_{nr} - 0)$ ist.

Hat aber $f(x)$ an den Unstetigkeitsstellen irgend einen zwischen $f(x+0)$ und $f(x-0)$ gelegenen Werth, so führen wir eine zweite Funktion $f^1(x)$ ein. Dieselbe soll im Allgemeinen gleich $f(x)$ sein und nur an den Unstetigkeitsstellen andere Werthe haben, welche ebenfalls zwischen $f(x+0)$ und $f(x-0)$ liegen oder auch mit einer dieser Grössen zusammenfallen. Bilden wir dann bei Zugrundelegung *derselben* Theilpunkte der Abscissenaxe die beiden Reihen $L_1, L_2, \ldots$ und $L_1^1, L_2^1, \ldots,$ so ist $\lim\limits_{n=\infty}(L_n^1 - L_n) = 0$.

Es sei nämlich δ eine beliebig kleine Zahl. Die Unstetigkeitspunkte seien nach der absoluten Grösse der Sprünge s, d. h. der Differenzen $f(x+0) - f(x-0)$, geordnet. Dann kann p so bestimmt werden, dass $\sum\limits_{r=p+1}^{\infty} |s_r| < \delta$ wird. Wir bezeichnen die den Sprüngen $s_1, s_2, \ldots, s_p$ entsprechenden Werthe von x mit $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Nun sind offenbar in den Summenausdrücken für L_n und L_n^1 nur diejenigen Glieder von einander verschieden, welche die Entfernung E eines Unstetigkeitspunktes von einem anderen Punkte der Curve (der auch Unstetigkeitspunkt sein kann) ausdrücken. Die Differenz zweier entsprechenden Glieder von L_n und L_n^1 ist aber höchstens gleich $|s| + |s'|$, wenn s und s' die den Endpunkten von E entsprechenden Sprünge sind. Demnach ist die Differenz von L_n und L_n^1 nicht grösser als 2δ plus der Summe der absoluten Beträge derjenigen Differenzen

$$\begin{aligned}&\left[\sqrt{(x_{n,r} - x_{n,r-1})^2 + (y_{n,r} - y_{n,r-1})^2} + \sqrt{(x_{n,r+1} - x_{n,r})^2 + (y_{n,r+1} - y_{n,r})^2}\right]\\ -&\left[\sqrt{(x_{n,r} - x_{n,r-1})^2 + (y_{n,r}^1 - y_{n,r-1}^1)^2} + \sqrt{(x_{n,r+1} - x_{n,r})^2 + (y_{n,r+1}^1 - y_{n,r}^1)^2}\right],\end{aligned}$$

in welchen $x_{n,r}$ einen der Werthe $x_1, x_2, \ldots, x_p$ hat. Es ist aber leicht sichtbar, dass n_1 so bestimmt werden kann, dass für $n \geqq n_1$ diese letztere Summe, welche höchstens aus p Gliedern besteht, kleiner als δ wird. Man braucht nur n_1 so gross anzunehmen, dass für $n \geqq n_1$ jedes Glied kleiner als $\frac{\delta}{p}$ wird, was immer möglich ist. Demnach wird für $n \geqq n_1$

$$|L_n^1 - L_n| < 3\delta.$$

δ war aber willkürlich. Folglich ist

$$\lim_{n=\infty}(L_n^1 - L_n) = 0.$$

Bleibt nun, was in Theorem II vorausgesetzt wird, bei irgend einer Wahl der Theilpunkte L_n unterhalb der endlichen Zahl G, so ist $\lim\limits_{n=\infty} L_n$ bestimmt und gleich L. Also wird, da $\lim(L_n^1 - L_n) = 0$ ist, auch $\lim L_n^1 = L$. Geben wir $f^1(x)$ an den Unstetigkeitsstellen den Werth $f(x+0)$, so wird, wie vorher gezeigt, bei jeder anderen Wahl der Theilpunkte ebenfalls $\lim(L_n^1) = L$. Folglich wegen der Relation

$$\lim[(L_n^1) - (L_n)] = 0$$

wiederum auch $\lim(L_n) = L$. D. h. der Werth von $\lim L_n$ ist von der Wahl der Theilpunkte unabhängig.

Hiermit ist das Theorem II in allen Stücken bewiesen.

3.

Die Untersuchungen über die Existenz der Länge unstetiger Funktionen lassen sich auf Untersuchungen über stetige Funktionen zurückführen. Hierzu dient das folgende

Theorem III. Wenn die im Intervall $x_0 x_1$ überall eindeutig gegebene unstetige Funktion $f(x)$ den im Theorem II gestellten Bedingungen 1) bis 4) genügt, so definiren wir eine Funktion $\varphi(x) = \sum\limits_{x_0}^{x} s$, wo die Summe sich über alle diejenigen Sprünge $s = f(x'+0) - f(x'-0)$ erstreckt, für welche $x_0 \leqq x' < x$ ist, wozu für den Fall, dass x selbst eine Unstetigkeitsstelle ist, noch die Differenz $f(x) - f(x-0)$ hinzutritt. Dann hat die durch die Gleichung $y = f(x)$ definirte Curve zwischen den Punkten x_0, y_0 und x_1, y_1 eine Länge L oder nicht, je nachdem die stetige Curve $y = \bar{y} = f(x) - \varphi(x)$ eine Länge $\bar{L}$ hat oder nicht; und zwar ist im ersten Falle

$$L = \bar{L} + \sum_{x_0}^{x_1} |s|.$$

Beweis von Theorem III.

Ausser der Funktion $\varphi(x) = \sum\limits_{x_0}^{x} s$ definiren wir eine zweite Funktion $\psi(x) = \sum\limits_{x_0}^{x} |s|$, welche sich von $\varphi(x)$ nur dadurch unterscheidet, dass die absoluten Werthe der Sprünge s an Stelle ihrer algebraischen Werthe stehen. Ferner bezeichnen wir, wenn in der Summe

$$\varphi(x_1) = \sum_{r=1,2\ldots} s_r$$

die Sprünge s nach ihrer absoluten Grösse geordnet sind, mit $\varphi_p(x_1)$ die Summe $\sum\limits_{r=p+1,p+2\ldots} s_r$, mit $\varphi_p(x)$ denjenigen Bestandtheil von $\varphi(x)$, welcher nur aus Gliedern der Reihe $\varphi_p(x_1)$ zusammengesetzt ist. Die entsprechende Bedeutung von $\psi_p(x)$ ist klar. Es sei schliesslich

$$y_p = f(x) - [\varphi(x) - \varphi_p(x)].$$

Nehmen wir jetzt drei Punkte A, B, C, resp. mit den Coordinaten x, $\overline{y}$; x', $\overline{y} + y_p' - y_p$; x', $\overline{y}'$ an, so wird

$$AB - BC \leqq AC \leqq AB + BC.$$

Ist $x' > x$, so wird BC jedenfalls nicht grösser als $\psi_p(x') - \psi_p(x)$, und wir können die vorstehende Relation in die Form setzen:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x'-x)^2 + (y_p'-y_p)^2} - [\psi_p(x') - \psi_p(x)]&\\ \leqq \sqrt{(x'-x)^2 + (\overline{y}'-\overline{y})^2} \leqq&\\ \sqrt{(x'-x)^2 + (y_p'-y_p)^2} + [\psi_p(x') - \psi_p(x)]&.\end{aligned}$$

Geben wir x den Werth $x_{n,r}$, x' den Werth $x_{n,r+1}$ und summiren nach r, so ergiebt sich hieraus, wenn L_n^p und L_n die den Curven $y = y_p$ und $y = \overline{y}$ entsprechenden Grössen L_n sind, die Relation

$$L_n^p - \psi_p(x_1) \leqq \overline{L}_n \leqq L_n^p + \psi_p(x_1).$$

Dieselbe gilt bei ganz beliebiger Wahl der Theilpunkte für jeden Werth von n und jeden Werth von p.

Wird zunächst $p = o$ gesetzt, so geht y_p über in $f(x)$, L_n^p in L_n, $\psi_p(x_1)$ in $\psi(x_1)$, und man erkennt, dass die Curve $y = f(x)$ eine bestimmte Länge L hat oder nicht, je nachdem die Curve $y = \bar{y}$ eine bestimmte Länge $\bar{L}$ hat oder nicht. Besitzt nämlich die letztere Curve die Länge $\bar{L}$, so ist wegen der vorstehenden Relation keine der Grössen L_n grösser als $\bar{L} + \psi(x_1)$, die Grössen L_n haben also nach Theorem II einen bestimmten, von der Wahl der Theilpunkte unabhängigen Grenzwerth L. Hat umgekehrt die Curve $y = f(x)$ die Länge L, so ist keine der Grössen $\bar{L}_n$ grösser als $L + \psi(x_1)$ und es folgt wiederum, dass die Curve $y = \bar{y}$ eine bestimmte Länge $\bar{L}$ hat.

Die vorstehende Relation zeigt aber auch, dass der Werth von L, falls ein solcher existirt, sich um keine angebbare Grösse von $\bar{L} + \psi(x_1)$ unterscheiden kann. Denn wenn wir δ beliebig klein annehmen, kann p_1 immer so gewählt werden, dass für $p > p_1$, $\psi_p(x_1) < \delta$ wird. Es werden demnach die Grössen L^p und $\bar{L}$ wegen der vorstehenden Relation eine Differenz haben, die absolut kleiner als δ ist. Andererseits ist

$$L = L^p + \sum_{\nu=1}^{p} |s_p| = L^{(p)} + \psi(x_1) - \psi_p(x_1),$$

was unmittelbar ersichtlich ist, wenn man die Curve $y = f(x)$ an denjenigen p Stellen, welche den Sprüngen $s_1, s_2, \ldots, s_p$ entsprechen, zerschneidet und die Stücke einzeln mit den entsprechenden Stücken der Curve $y = y_p$ vergleicht. Da hiernach jede der beiden Grössen $\bar{L} + \psi(x_1)$ und L sich um weniger als δ von der Grösse $L^p + \psi(x_1)$ unterscheidet, können dieselben von einander höchstens um 2δ verschieden sein. D. h. sie sind einander gleich, da δ beliebig klein angenommen war. Es besteht also die Gleichung

$$L = \bar{L} + \psi(x_1) = \bar{L} + \sum_{x_0}^{x_1} |s|.$$

Hiermit ist das Theorem III vollständig bewiesen.

Beispiel zu Theorem III.

Es sei $w_1, w_2, \ldots$ eine abzählbar unendliche Menge beliebiger Grössen, $s_1, s_2, \ldots$ eine abzählbare Menge positiver Grössen, deren Summe endlich und gleich S sei. Dann wird eine Curve definirt durch die Gleichung $y = \sum_{-\infty}^{x} s_r$, in welcher die Summe über alle diejenigen Indices r zu erstrecken ist, für welche $w_r < x$ ist.

Diese Curve hat nach Theorem III zwischen je zwei Punkten x_0, y_0 und x_1, y_1 die Länge $x_1 - x_0 + y_1 - y_0$. Besonders merkwürdig erscheint diese Eigenschaft in dem Falle, wo die Punktmenge $w_1, w_2, \ldots$ überall-dicht ist.(1) Dann nämlich unterscheidet die Curve sich von den gewöhnlichen treppenförmigen Curven, welchen die genannte Eigenschaft zukommt, dadurch, dass sie keine einzige horizontale Linie von angebbarer Länge enthält. Wir kommen auf diese Curven in der nächsten Nummer noch zurück.

4.

Theorem IV. Es seien G und G' zwei Zahlen, von denen wenigstens eine endlich ist, $G \geqq G'$. Wenn dann die beiden vorderen (hinteren) Derivirten der stetigen Funktion $f(x)$ für alle inneren Punkte des Intervalles $x_0 x_1$ zwischen G und G' einschliesslich liegen, so hat die Curve $y = f(x)$ von x_0 bis x_1 eine bestimmte endliche Länge L. Ist $\overline{G}$ eine beliebige positive Grösse, welche nur in dem Falle, dass G und G' verschiedene Vorzeichen haben, nicht kleiner als der kleinere absolute Werth von G und G' sein darf, so ist

$$L \leqq 2\sqrt{1 + \overline{G}^2}(x_1 - x_0) + \sqrt{\frac{1}{\overline{G}^2} + 1} \cdot |y_1 - y_0|.$$

Ist $\overline{G}$ grösser als die beiden absoluten Werthe von G und G', so ist ausserdem

$$L < \sqrt{1 + \overline{G}^2}(x_1 - x_0).$$

Haben G und G' gleiches Vorzeichen, und ist $\overline{G}$ kleiner als die beiden absoluten Werthe von G und G', so ist endlich

$$L < \sqrt{\frac{1}{\overline{G}^2} + 1} \cdot |y_1 - y_0|.$$

---

(1) Herr G. Cantor hat z. B. gezeigt (Borchardts Journal, B. 77 p. 258), dass die Menge aller rationalen Zahlen und sogar aller algebraischen Zahlen, welche offenbar überall dicht ist, in eine einfache Reihe $w_1, w_2, \ldots$ gebracht werden kann.

Theorem V. Es sei g eine positive endliche Zahl, G und G' zwei Zahlen, von denen wenigstens eine endlich ist. Wenn dann die willkürliche Funktion $f(x)$ für alle Punkte des Intervalles $x_0 x_1$ absolut kleiner als g ist, während die vier Derivirten an allen inneren Punkten des Intervalles $x_0 x_1$ zwischen G und G' einschliesslich liegen, so hat die Curve $y = f(x)$ von x_0 bis x_1 eine bestimmte endliche Länge L. Ist $f(x)$ an den Stellen x_0 und x_1 stetig, so liegt L unterhalb der im Theorem IV angegebenen Grenzen.

Das Theorem V kann mit Anwendung des in § 1 definirten Ausdruckes »Richtungsschwankung» auch folgendermassen formulirt werden:

Theorem V a. Wenn die willkürliche Funktion $f(x)$ für alle Werthe x von x_0 bis x_1 (einschliesslich) absolut kleiner als eine endliche Zahl g ist, und wenn die Gesammtschwankung c der Richtung der Curve $y = f(x)$ im Inneren des Intervalles $x_0 x_1$ kleiner als π ist, so hat die Curve von x_0 bis x_1 eine bestimmte endliche Länge L. Ist $f(x)$ an den Stellen x_0 und x_1 stetig, so wird für $c' \geqq c$

$$L \leqq 2(x_1 - x_0) \sec\frac{c'}{2} + |y_1 - y_0| \operatorname{cosec}\frac{c'}{2}.$$

Beweis eines Hülfssatzes.

Wenn die beiden vorderen (hinteren) Derivirten der stetigen Funktion $f(x)$ an keiner inneren Stelle des Intervalles $x_0 x_1$ grösser als die endliche Zahl G sind, so ist bekanntlich auch der Quotient

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$

niemals grösser als G, welche im Inneren oder auf der Grenze des Intervalles $x_0 x_1$ gelegenen Werthe man auch für x und x' annehmen mag.

Lassen wir die Voraussetzung der Stetigkeit von $f(x)$ fallen, nehmen dagegen an, dass sowohl die vorderen, als die hinteren Derivirten im Inneren des Intervalles an keiner Stelle grösser als G seien, so besteht ebenfalls die Relation $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \leqq G$; nur dass die Werthe x_0 und x_1 für x und x' ausgeschlossen bleiben. Der Beweis, welcher für das Theorem V wichtig ist, gestaltet sich folgendermassen.

Es sei $\varphi(x) = (G + \delta)x - f(x)$, wo δ eine beliebige positive Constante ist. Dann sind die 4 Derivirten von $\varphi(x)$ an jeder inneren Stelle des Intervalles $x_0 x_1$ positiv. Wäre nun für irgend zwei Werthe x und x', deren grösserer x' sei, die Differenz $\varphi(x') - \varphi(x)$ negativ, so würden die zwischen x und x' gelegenen Werthe x, für welche $\varphi(x') - \varphi(x) \leqq 0$ ist, eine obere Grenze x'' haben. Es wäre dann entweder $\varphi(x') - \varphi(x'') < 0$ oder $\varphi(x') - \varphi(x'') \geqq 0$. Im ersten Falle wäre $x'' < x'$ und es würden gegen die Annahme die vorderen Derivirten von $\varphi(x)$ an der Stelle x'' nicht positiv sein, da $\varphi(x'' + h) - \varphi(x'')$ für alle positiven Werthe $h < x' - x''$ negativ würde. Im letzten Falle müssten beliebig kleine negative Werthe h existiren, wofür $\varphi(x') - \varphi(x'' + h)$ und um so mehr $\varphi(x'') - \varphi(x'' + h)$ nicht positiv würde, was mit der Voraussetzung positiver hinterer Derivirten an der Stelle x'' unverträglich wäre. Es ist also $\frac{\varphi(x') - \varphi(x)}{x' - x} \geqq 0$, und folglich, da δ beliebig war,

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \leqq G.$$

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich leicht folgender

Hülfssatz. Bedeuten G und G' zwei Zahlen, von denen wenigstens eine endlich ist, so liegt der Quotient $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$ zwischen G und G', wenn für den Fall, dass $f(x)$ stetig ist, die beiden vorderen (hinteren), für den allgemeinen Fall alle vier Derivirten an allen inneren Punkten des Intervalles $x_0 x_1$ zwischen G und G' liegen. x und x' können beliebige innere Werthe des Intervalles $x_0 x_1$, und für den Fall, dass $f(x)$ stetig ist, auch die Grenzwerthe x_0 und x_1 annehmen.

Beweis von Theorem IV.

Aus den im Theorem gemachten Voraussetzungen ergiebt sich mit Benutzung des eben bewiesenen Hülfssatzes die Relation

$$G' \leqq \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \leqq G \quad \text{für} \quad x_0 \leqq x \leqq x_1.$$

Wir bilden nach den in § 1 gegebenen Vorschriften die Grösse

$$L_n = \sum_{r=0,1,\dots} \sqrt{(x_{n,r+1} - x_{n,r})^2 + (y_{n,r+1} - y_{n,r})^2}.$$

Ist dann $\overline{G}$ eine positive endliche Zahl, welche der im Theorem IV angegebenen Bedingung genügt, so trennen wir die Glieder der Summe L_n in zwei Gruppen. Zur ersten Gruppe rechnen wir diejenigen, für welche der absolute Werth des Quotienten

$$\frac{y_{n,r+1} - y_{n,r}}{x_{n,r+1} - x_{n,r}}$$

höchstens gleich $\overline{G}$ ist, zur zweiten Gruppe die übrigen. Wir nennen die Summe aller Glieder der ersten Gruppe L'_n, die Summe der übrigen Glieder L''_n.

Offenbar ist

$$L'_n \leqq (x_1 - x_0)\sqrt{1 + \overline{G}^2},$$

und

$$-\overline{G}(x_1 - x_0) \leqq \Sigma'(y_{n,r+1} - y_{n,r}) \leqq \overline{G}(x_1 - x_0),$$

wenn die Summe Σ' über die zur ersten Gruppe gehörigen Glieder erstreckt wird.

Die Glieder der Summe

$$\Sigma''(y_{n,r+1} - y_{n,r}),$$

welche sich auf die zweite Gruppe bezieht, haben sämmtlich dasselbe Vorzeichen, die Summe selbst ist gleich $y_1 - y_0 - \Sigma'$, ihr absoluter Werth also jedenfalls nicht grösser als $|y_1 - y_0| + \overline{G}(x_1 - x_0)$. Demnach wird

$$L''_n \leqq [|y_1 - y_0| + \overline{G}(x_1 - x_0)]\sqrt{\frac{1}{\overline{G}^2} + 1}.$$

Es ist schliesslich

$$L_n = L'_n + L''_n \leqq \sqrt{1 + \overline{G}^2}\left(2(x_1 - x_0) + \frac{|y_1 - y_0|}{\overline{G}}\right).$$

Diese Relation lehrt, dass die Grössen L_n niemals eine gewisse endliche Grenze überschreiten. Nach Theorem I existirt also eine Länge L, welche nicht grösser als die in der vorstehenden Relation angegebene obere Grenze für L_n ist.

Sind beide Zahlen G und G' endlich, und wird für G eine Zahl angenommen, die nicht kleiner als der grössere absolute Werth jener Zahlen G und G' ist, so enthält die Gruppe L_n'' kein einziges Glied, es wird daher $L_n = L_n'$, und wir erhalten die Relation

$$L \leqq (x_1 - x_0)\sqrt{1 + \overline{G}^2}.$$

Haben G und G' gleiches Vorzeichen, und ist $\overline{G}$ absolut kleiner als beide, so enthält die Gruppe L_n' kein Glied, und es wird

$$L < (y_1 - y_0)\sqrt{\frac{1}{\overline{G}^2} + 1}\,.$$

Beweis von Theorem V.

Aus den im Theorem V gemachten Voraussetzungen ergiebt sich die Relation

$$G' \leqq \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \leqq G \quad \text{für} \quad x_0 < x < x_1\,.$$

Nehmen wir nun zunächst an, dass $f(x)$ an den Stellen x_0 und x_1 stetig sei, so gilt diese Relation auch noch, wenn x und x' die Werthe x_0 und x_1 annehmen. Dann lässt sich der eben für das Theorem IV gegebene Beweis in unveränderter Form anwenden.

Ist aber $f(x)$ an den Stellen x_0 und x_1 unstetig, so ist aus den im Theorem gemachten Voraussetzungen leicht ersichtlich, dass $f(x_0 + 0)$ und $f(x_1 - 0)$ bestimmte Werthe haben. Wir bilden dann die Funktion $f^1(x)$, welche sich nur dadurch von $f(x)$ unterscheidet, dass sie an den Stellen x_0 und x_1 resp. die Werthe $f(x_0 + 0)$ und $f(x_1 - 0)$ annimmt. Die Curve $y = f^1(x)$ hat eine Länge, folglich auch die Curve $y = f(x)$.

Beispiele zu Theorem IV.

1. Es sei $w_1, w_2, \ldots$ die Menge aller rationalen Zahlen.(1) Der Reihe $w_1, w_2, \ldots$ ordnen wir eine Reihe positiver Grössen $c_1, c_2, \ldots$ so zu, dass die Summe

(1) Cf. die Note auf Seite 62.

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} c_r (x - w_r)^{\frac{1}{3}}$$

für alle Werthe x von x_0 bis x_1 gleichmässig convergirt. (¹) Man erreicht dies z. B., indem man $c_r = \frac{1}{(p_r + q_r)^3}$ setzt, wenn $\pm \frac{p_r}{q_r}$ die irreductible Form von w_r ist. Die Funktion $f(x)$ ist dann stetig und nimmt mit x beständig zu, die vorderen Derivirten liegen also immer zwischen 0 und $+\infty$. Die Voraussetzungen von Theorem IV sind hiermit erfüllt, und es folgt, dass die Curve zwischen je zwei Punkten x_0, y_0 und x_1, y_1 eine bestimmte Länge hat. Das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + f'(x)^2},$$

durch welches die Länge ausgedrückt zu werden pflegt, ist in diesem Falle vollständig sinnlos; denn ohne über die Derivirten von $f(x)$ specielle Untersuchungen anzustellen, erkennen wir unmittelbar, dass an allen Stellen $x = w_r$ ein Differentialquotient existirt und den Werth $+\infty$ hat.

2. Als Beispiel zu Theorem III hatten wir eine unstetige Funktion $f(x) = \sum_{-\infty}^{x} s_r$ definirt. Da diese Funktion mit x beständig wächst, vorausgesetzt, dass die Punktmenge $w_1, w_2, \ldots$ überall dicht ist, entspricht jedem Werthe von y höchstens ein Werth von x. Lassen wir die Funktion an den Unstetigkeitsstellen in der Weise unbestimmt, dass sie daselbst jeden Werth von $f(x - 0)$ bis $f(x + 0)$ annehmen darf, so entspricht jedem Werthe von y (innerhalb gewisser Grenzen) wirklich ein Werth von x. Die Umkehrung der Funktion $f(x)$ ist also eine überall bestimmte eindeutige und, wie leicht erkennbar, stetige Funktion. Bezeichnen wir dieselbe mit φ, so wird durch die Gleichung $y = \varphi(x)$ eine stetige Curve definirt. Dieselbe genügt den Voraussetzungen des Theorems IV, woraus die Existenz einer Länge von Neuem hervorgeht.

Die Funktion $\varphi(x)$ hat sehr merkwürdige Eigenschaften. Erstens giebt es in jedem noch so kleinen Intervall $x_0 x_1$ nicht nur einzelne Stellen,

---

(¹) Diese Summe ist von Herrn WEIERSTRASS angegeben worden. Cf. CANTOR. *Condensation der Singularitäten,* Mathematische Annalen B. 19, pag. 591.

sondern ganze Strecken, in denen der Differentialquotient beständig Null ist. Zählt man diese Strecken nach ihrer Grösse ab und addirt sie, so zeigt es sich, dass die Summe um keine angebbare Grösse von der Länge $x_1 - x_0$ des ganzen Intervalles verschieden sein kann. (¹) Dennoch würde man offenbar sehr irren, falls man glaubte, die Länge der Curve sei gleich dem bestimmten Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + \varphi'(x)^2},$$

wenn darin $\varphi'(x) = 0$ gesetzt wird. Die Länge ist vielmehr, wie wir in § 3 sahen, gleich $x_1 - x_0 + y_1 - y_0$ und kann durch jenes bestimmte Integral überhaupt nicht ausgedrückt werden.

Beispiel zu Theorem V.

Es werde mit (x) die Differenz $x - n$ bezeichnet, wo n die x nächstgelegene (grössere oder kleinere) ganze Zahl ist; für $x = n + \frac{1}{2}$ sei $(x) = 0$. Wir bilden die Funktion (²)

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(rx)}{r^3}.$$

Die Curve $y = f(x)$ hat dann zwischen je zwei Punkten x_0 und x_1 eine Länge; denn es ist offenbar für $x' > x$

$$(rx') - (rx) \leqq r(x' - x),$$

also

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \leqq \frac{\pi^2}{6}.$$

(¹) Diese Funktion zeigt, dass ein Lehrsatz des Herrn HARNACK (Mathematische Annalen B. 19, pag. 235—279, Lehrsatz 3) nicht unbedingt richtig ist.

(²) Vergl. RIEMANN: *Über die Darstellbarkeit einer F. d. e. trigon. Reihe.* Ges. Werke, pag. 228.

Die 4 derivirten Funktionen sind also an keiner Stelle grösser als $\frac{\pi^2}{6}$, und die Bedingungen von Theorem V sind erfüllt, wenn $G = \frac{\pi^2}{6}$, $G' = -\infty$ angenommen wird.

Diese Funktion ist dadurch interessant, dass sie in jedem Intervall unendlich oft zu- und abnimmt. Da sie überdies in jedem Intervall unendlich oft unstetig ist, würde die Existenz einer Länge vermittelst der bisher bekannten Methoden garnicht nachzuweisen gewesen sein.

Das Theorem III bietet genügende Hülfsmittel, um die Länge dieser Curve zwischen zwei beliebigen Punkten x_0 und x_1 wirklich zu berechnen. Es ist nämlich bei Anwendung der dort gebrauchten Bezeichnungen

$$L = \frac{\pi^2}{6}(x_1 - x_0)$$

$$L = L + \psi(x_1) - \psi(x_0)$$

$$\psi(x_1) - \psi(x_0) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda(r)}{r^3}.$$

$\lambda(r)$ bedeutet hier die Anzahl der ungeraden Zahlen, die zwischen $2rx_0$ und $2rx_1$ liegen, vermehrt um $\frac{1}{2}$, falls eine der Grössen $2rx_0$ und $2rx_1$ selbst eine ungerade Zahl ist, um 1, falls jene Grössen beide ungerade Zahlen sind.

Es wird also schliesslich

$$L = \frac{\pi^2}{6}(x_1 - x_0) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda(r)}{r^3}.$$

5.

Theorem VI. Wenn die Funktion $f(x)$ zwischen x_0 und x_1 entweder stetig ist oder den Bedingungen 1) bis 4) von Theorem II genügt; wenn ferner eine endliche oder unendliche Schaar von Intervallen $i_r = x_r'' - x_r'$ $(r = 1, 2, \ldots)$ bestimmt wird, die sämmtlich ausser einander liegen und das Intervall $x_0 x_1$ so erfüllen, dass alle im Inneren keines einzigen Intervalles i_r gelegenen Punkte P der Strecke $x_0 x_1$ eine endliche oder abzählbar unendliche Menge bilden; so sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Curve $y = f(x)$ von x_0 bis x_1 eine Länge besitzt, folgende: Die Curve muss in jedem Intervalle i_r eine Länge l_r besitzen, und die Summe $\sum_r l_r$ muss endlich sein.

In dem Falle, dass $f(x)$ stetig ist, wird die Länge L der ganzen Curve gleich $\sum_r l_r$.

Dass die angegebenen Bedingungen nothwendig sind, ist ohne Weiteres klar. Dass sie hinreichend sind, beweisen wir im Folgenden nur unter Voraussetzung der Stetigkeit von $f(x)$, da der allgemeine Fall durch Anwendung des Theorems III sofort auf jenen Fall zurückgeführt werden kann.

Wir brauchen folgenden

Hülfssatz. Werden mit y_r und y_r' die zu x_r und x_r' gehörigen Werthe von y bezeichnet, so gilt unter den im Theorem gemachten Annahmen über die Intervalle i_r für den Fall, dass $f(x)$ stetig und $\sum l_r$ endlich ist, die Gleichung

$$y = \sum_{x_0}^{x} (y_r'' - y_r') + y - y_\lambda',$$

in welcher r auf der rechten Seite alle diejenigen Werthe annimmt, für welche x_r'' und x_r' kleiner als x ist, während im Falle, dass x innerhalb oder auf der Grenze eines Intervalles i_λ liegt, noch das Glied $y - y_\lambda'$ hinzutritt.

Zunächst ist klar, dass die Summe auf der rechten Seite der Gleichung einen bestimmten endlichen Werth hat; denn offenbar ist der absolute Betrag von $y_r'' - y_r'$ kleiner als l_r, und Σl_r ist nach Voraussetzung endlich Wir bilden die Funktion

$$\varphi(x) = y - \left(\sum_{x_0}^{x} (y_r'' - y_r') + y - y_\lambda'\right).$$

Dieselbe ist stetig, da ihre beiden Bestandtheile stetig sind. Sie ist ferner im Inneren jedes Intervalles i_r constant. Nun sind nach Voraussetzung diejenigen Werthe x, welche in keinem Intervalle i_r liegen, nur in endlicher oder abzählbar unendlicher Menge vorhanden. Folglich kann die Funktion $\varphi(x)$ von x_0 bis x_1 überhaupt nur eine endliche oder abzählbar unendliche Anzahl von Werthen annehmen. Sie ist daher nach einem Satze von Herrn CANTOR (1) constant, und zwar gleich Null, da $\varphi(x_0) = 0$ ist. D. h.

$$y = \sum_{x_0}^{x} (y_r'' - y_r') + y - y_\lambda'.$$

w. z. b. w.

Da, wie schon bemerkt, $y_r'' - y_r'$ absolut kleiner als l_r ist, geht aus dem eben bewiesenen Hülfssatze unmittelbar die Gültigkeit der Relation

$$\text{(A)} \qquad |y' - y| < \sum_{(x,\, y)}^{(x',\, y')} l_r$$

(für 2 beliebige Punkte x, y und x', y' der Curve) hervor, wo die Summe auf der rechten Seite eine leicht erkennbare Bedeutung hat. Von dieser Relation wird in der Folge Gebrauch gemacht.

Wir schreiten zum

Beweis von Theorem VI

unter Voraussetzung der Stetigkeit von $f(x)$.

Es sei $\sum_{r=1}^{\infty} l_r$ endlich. Wir nennen δ eine beliebig kleine positive Grösse. Dann kann p_1 so bestimmt werden, dass für $p \geq p_1$ sowohl

(1) *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten* (Mathematische Annalen B. 21, pag. 57).

$\sum_{r=p+1}^{\infty} l_r$ als $\sum_{r=p+1}^{\infty} i_r$ kleiner als δ wird. Nach einem Satze von Herrn CANTOR (1) ist $\sum_{r=1}^{\infty} i_r = x_1 - x_0$. Es wird also die Summe derjenigen $p + 1$ Strecken, welche übrig bleiben, wenn die p Intervalle $i_1, i_2, \ldots, i_p$ aus der Strecke $x_0 x_1$ ausgeschieden werden, ebenfalls kleiner als δ. Wir bezeichnen diese übrig bleibenden Strecken (von denen etliche gleich Null sein können) mit $i'_0, i'_1, \ldots, i'_p$, ihre Anfangs- und Endpunkte respective mit $\xi_0, \xi'_0; \xi_1, \xi'_1; \ldots; \xi_p, \xi'_p$, die entsprechenden Werthe von y mit $\eta_0, \eta'_0; \eta_1, \eta'_1; \ldots; \eta_p, \eta'_p$.

Dann wird

$$\sum_{r=0}^{p} (\xi'_r - \xi_r) = \sum_{r=0}^{p} i'_r < \delta$$

und

$$\sum_{r=0}^{p} |\eta'_r - \eta_r| \leq \sum_{p+1}^{\infty} l_r < \delta.$$

Die letzte dieser beiden Ungleichungen ist eine unmittelbare Folge der vorhin bewiesenen Relation (A), wenn darin für y und y' die Werthe η_r und η'_r gesetzt werden und über r summirt wird. Aus den beiden vorstehenden Relationen folgt

$$\sum_{r=0}^{p} \sqrt{(\xi'_r - \xi_r)^2 + (\eta'_r - \eta_r)^2} < 2\delta.$$

Setzen wir jetzt zuerst $p = p_1$ und bilden nach den in § 1 gegebenen Vorschriften die Grösse L_1, indem wir als Theilpunkte die Punkte $\xi_0, \xi'_0; \xi_1, \xi'_1; \ldots; \xi_p, \xi'_p$ und ausserdem beliebig viele im Inneren der Intervalle $i_1, i_2, \ldots, i_{p_1}$ gelegene Punkte annehmen, so wird offenbar

$$L_1 < 2\delta + \sum_{r=1}^{p_1} l_r.$$

Setzen wir dann zweitens $p = p_2 = p_1 + 1$ und bilden die Grösse L_2, indem wir zu den schon vorhandenen Theilpunkten die beiden Punkte

(1) Mathematische Annalen B. 21, pag. 54.

ξ_{p_2}, ξ'_{p_2} und beliebig viele andere im Inneren von $i_1, i_2, \ldots, i_{p_2}$ gelegene hinzufügen, so wird

$$L_2 < 2\delta + \sum_{r=1}^{p_2} l_r.$$

Durch Wiederholung desselben Verfahrens erhalten wir schliesslich für beliebiges n

$$L_n < 2\delta + \sum_{r=1}^{p_n} l_r.$$

Hieraus ist die Existenz einer oberen Grenze für alle L_n ersichtlich, welche nicht grösser als $2\delta + \sum_{r=1}^{\infty} l_r$ sein kann. Nach Theorem I ist also auch die Existenz einer Länge L erwiesen, die höchstens gleich $2\delta + \sum_{r=1}^{\infty} l_r$ oder, da δ beliebig war, gleich $\sum_{r=1}^{\infty} l_r$ ist. Dass L nicht kleiner als $\sum_{r=1}^{\infty} l_r$ sein kann, ist aber selbstverständlich, da alle l_r Bestandtheile von L sind. Es ist daher

$$L = \sum_{r=1}^{\infty} l_r.$$

w. z. b. w.

Bemerkung zu Theorem VI.

Es liegt hier ein Irrthum sehr nahe. Man könnte nämlich meinen, wenn mit $i_1, i_2, \ldots$ irgend eine unendliche Reihe einander ausschliessender, zwischen x_0 und x_1 gelegener Intervalle bezeichnet wird, deren Summe den Grenzwerth $x_1 - x_0$ hat, wenn ferner die stetige Curve $y = f(x)$ in jedem dieser Intervalle eine bestimmte Länge l_r besitzt, und wenn die Summe $\sum_{r=1}^{\infty} l_r$ einen endlichen Werth L hat, so habe die ganze Curve von x_0 bis x_1 die Länge L. Dies wäre ein Irrthum; denn es giebt nicht nur Curven von der angegebenen Art, deren Länge grösser als L ist, sondern auch solche, die gar keine Länge besitzen. Für jeden Fall ein Beispiel.

1. Es sei ξ_1, ξ'_1; ξ_2, ξ'_2; ... (wo allgemein $\xi'_r > \xi_r$) eine unendliche Reihe zwischen x_0 und x_1 gelegener Grössen, die beliebig gewählt und nur der Bedingung unterworfen sein sollen, dass sie alle von einander verschieden sind, dass die Intervalle $i_r = \xi'_r - \xi_r$ einander ausschliessen und dass die Summe $\sum_{r=1}^{\infty} i_r$ gleich $x_1 - x_0$ ist. (1) Es sei ferner $\varphi(x)$ eine von x_0 bis x_1 stetige, sonst aber ganz willkürliche Funktion. Wir definiren dann eine Funktion $f(x)$ folgendermassen. Für alle Werthe x, welche im Innern oder auf der Grenze eines Intervalles i_r liegen, soll $f(x) = \varphi(\xi_r)$ sein; für die übrigen Werthe soll $f(x) = \varphi(x)$ sein. Offenbar ist die Funktion $f(x)$ von x_0 bis x_1 stetig, die Länge der Curve $y = f(x)$ ist aber nicht gleich $\sum l_r$, sondern grösser. Nimmt beispielsweise die Funktion $\varphi(x)$ von x_0 bis x_1 niemals ab, so ist die Länge der Curve von x_0, y_0 bis x_1, y_1 gleich $x_1 - x_0 + y_1 - y_0$, was man unmittelbar erkennt, wenn man bei Aufstellungen der Grössen L_n nach den in § 1 gegebenen Vorschriften die Punkte ξ_r, ξ'_r als Theilpunkte annimmt und das Theorem I berücksichtigt.

2. Um sich davon zu überzeugen, dass es auch Curven der genannten Art giebt, die gar keine endliche Länge haben, kann man folgende geometrische Betrachtung anstellen. Es sei $x_1 > x_0$ und $y_1 > y_0$. Die Punkte x_0, y_0 und x_1, y_1, die wir mit A und B bezeichnen und durch eine gerade Linie mit einander verbinden, sollen Punkte der zu construirenden Curve sein, die Gerade AB nennen wir erste Näherungsform der Curve. Wir construiren zweitens die 4 Punkte

---

(1) z. B. es bestehe die Reihe ξ_r, ξ'_r aus allen rationalen Zahlen von der Form

$$\xi_r = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_{p-1}}{3^{p-1}} + \frac{1}{3^p}$$

$$\xi'_r = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_{p-1}}{3^{p-1}} + \frac{2}{3^p},$$

wo die Grössen c_1, c_2, ..., c_{p-1} jeden der beiden Werthe 0 und 2 annehmen und p alle ganzzahligen Werthe von 1 bis ∞ erhält. (Cf. CANTOR, Mathematische Annalen B. 22, pag. 590).

$$x = x_0 + \frac{1}{5}(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + \frac{2}{3}(y_1 - y_0);$$

$$x = x_0 + \frac{2}{5}(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + \frac{2}{3}(y_1 - y_0);$$

$$x = x_0 + \frac{3}{5}(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + \frac{1}{3}(y_1 - y_0);$$

$$x = x_0 + \frac{4}{5}(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + \frac{1}{3}(y_1 - y_0);$$

bezeichnen dieselben der Reihe nach mit C, D, E, F und ziehen die 5 Geraden AC, CD, DE, EF, FB. Diese 5 Geraden bilden die zweite Näherungsform der Curve, und zwar sollen die beiden horizontalen Geraden CD und EF Bestandtheile der Curve bleiben. Jede der drei anderen Geraden wird nun wiederum ersetzt durch eine aus 5 Stücken bestehende gebrochene Linie, und zwar nach demselben Gesetze, wie vorher die Linie AB; d. h. wenn wir jetzt die Coordinaten des Anfangs- und Endpunktes irgend einer jener 3 Geraden mit x_0, y_0 und x_1, y_1 bezeichnen, sollen die Coordinaten von 4 einzuschaltenden Punkten durch die vorher aufgestellten Formeln bestimmt werden. So entsteht die dritte Näherungsform, und wiederum sollen die horizontalen Linien Bestandtheile der Curve bleiben. Setzt man die Construction nach diesem Gesetze in inf. fort, so erhält man als dauernde Bestandtheile der Curve horizontale Linien, deren Gesammtlänge $\sum_{r=1}^{\infty} l_r$ gleich $x_1 - x_0$ ist, da allgemein für die n^{te} Näherungsform $\sum l_r = (x_1 - x_0)\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right)$ ist. Die Differenz der zwei benachbarten Horizontallinien in der n^{ten} Näherungsform entsprechenden Werthe von y ist $(y_1 - y_0)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, hat also den Grenzwerth Null. — Für jeden im Intervall $x_0 x_1$ gelegenen Werth x, dem auf keiner der unendlich vielen Horizontallinien ein Werth y entspricht, bilden wir eine Reihe $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ... in inf. von der Beschaffenheit, dass ihre Elemente sich dem Werthe x in inf. nähern, und dass jedem Werthe $x^{(r)}$ ein bestimmter Werth $y^{(r)}$ auf einer der Horizontallinien entspricht. Dann nähert sich

$y^{(n)}$ mit wachsendem n einem bestimmten Grenzwerth, den man etwa durch die CANTOR'sche Fundamentalreihe

$$(y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots)$$

ausdrücken kann, und wir setzen $y = \lim\limits_{n=\infty} y^{(n)}$. — Die jetzt vollständig definirte Curve ist von x_0 bis x_1 stetig. Dennoch hat dieselbe nicht etwa die Länge $\sum l_\nu = x_1 - x_0$, sondern überhaupt keine endliche Länge. Nehmen wir nämlich die Endpunkte der horizontalen Linien der n^{ten} Näherungsform zu Theilpunkten, so wird offenbar

$$(y_1 - y_0)\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} < L_n < x_1 - x_0 + (y_1 - y_0)\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}.$$

L_n wächst also mit n über alle Grenzen.

6.

Wir wollen die Tragweite des Theorems VI etwas näher ins Auge fassen.

Wir behaupten, dass dasselbe in Verbindung mit den vorhergehenden Theoremen Criterien der Existenz oder Nichtexistenz einer Länge für alle diejenigen Curven liefert, für welche sämmtliche Stellen, an denen oder in deren Umgebung die Richtungsschwankung (cf. § 1) *gleich π ist, eine endliche oder abzählbar unendliche Menge bilden.*

Beweis.

Es sei für die Curve $y = f(x)$ im Intervall $x_0 x_1$ die Gesammtheit derjenigen Punkte P, an denen oder in deren Umgebung die Richtungsschwankung gleich π ist, endlich oder abzählbar unendlich. Die Punkte P bilden ihrer Natur nach eine abgeschlossene Menge, d. h. alle Punkte der abgeleiteten (¹) Menge P' sind zugleich Punkte der Menge P. Es lässt sich dann, wie Herr Cantor gezeigt hat, (²) eine endliche oder unendliche Reihe von Intervallen $i_1, i_2, \ldots$ bestimmen, deren Endpunkte Punkte der Menge P sind, und welche die Eigenschaft haben, dass die Gesammtheit derjenigen Punkte, welche innerhalb keines der Intervalle i_r liegen, gleich der Gesammtheit aller Punkte P ist.

Dann ist es immer möglich, jedes Intervall i_r in eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von Intervallen $i_{r1}, i_{r2}, \ldots$ zu theilen, in deren jedem die Funktion den Bedingungen der Theoreme IV oder V genügt und also eine Länge $l_{r1}, l_{r2}, \ldots$ besitzt. Diese Eintheilung, welche auf verschiedene Art vorgenommen werden kann, wird so einzurichten sein, dass sich die Grösse der Längen $l_{r1}, l_{r2}, \ldots$ vermittelst der Theoreme IV und V möglichst leicht beurtheilen lässt. Hier kommt es vorläufig nur darauf an, die Möglichkeit einer solchen Eintheilung ganz allgemein nachzuweisen. Offenbar wird dieser Nachweis geliefert sein, wenn es gelingt, zu zeigen, dass nach Annahme zweier beliebigen Punkte x'_r und x''_r *im Inneren* des Intervalles i_r die Strecke $x'_r x''_r$ immer in eine *endliche* Zahl von Intervallen $i_{r\mu}$ zu theilen ist, in deren jedem die Bedingungen von Theorem IV oder V erfüllt sind.

Wir bezeichnen mit s die grössere der beiden in § 1 definirten Richtungsschwankungen $\alpha - \alpha'$ und $\beta - \beta'$. Offenbar kann s zwischen x'_r und x''_r einschliesslich an keiner Stelle den Werth π erreichen. Wir behaupten, dass auch die obere Grenze von s im Intervall $x'_r x''_r$ von π verschieden ist. Denn sonst müsste im Inneren oder auf der Grenze der Strecke $x'_r x''_r$ ein Punkt von der Art existiren, dass s in jeder Nähe desselben jeden beliebig wenig von π verschiedenen Werth annimmt. An dieser Stelle wäre also entweder $\alpha - \alpha'$ oder $\beta - \beta'$ gleich π, d. h. s gleich π, was gegen die Annahme ist.

Wir bezeichnen die obere Grenze von s im Intervall $x'_r x''_r$ mit C und nehmen zwei Zahlen G und G' an, erstere positiv und grösser als $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$, letztere gleich $-G$. Dann kann die Strecke $x'_r x''_r$ in eine *endliche* Menge von Intervallen getheilt werden, in deren jedem alle vier de-

(¹) Nach der Definition von Herrn Cantor.

(²) Mathematische Annalen B. 21, pag. 56.

rivirten Funktionen D^+, D_+, D^-, D_- entweder überall nicht grösser als G oder überall nicht kleiner als G' sind. Denn sonst müsste eine Stelle existiren von der Art, dass in jeder Nähe die Derivirten zum Theil kleiner als G', zum Theil grösser als G würden, d. h. dass $s > C$ wäre; was unmöglich ist.

Wir sehen also, dass die Strecke $x'_r x''_r$ in eine endliche Menge von Intervallen getheilt werden kann, welche den Bedingungen der Theoreme IV oder V genügen, wenn daselbst für G und G' die eben angenommenen Werthe gesetzt werden. Daraus ergiebt sich, wenn wir im Inneren von i_r links von x'_r einen neuen Punkt x'''_r, rechts von x''_r einen neuen Punkt x''''_r beliebig annehmen, die Strecken $x'''_r x'_r$ und $x''_r x''''_r$ wiederum in eine endliche Schaar von Intervallen theilen, u. s. w. fort, dass die Strecke i_r ganz und gar in eine abzählbare Menge von Intervallen i_{r1}, i_{r2}, ... getheilt werden kann, in deren jedem die Curve den Bedingungen der Theoreme IV oder V genügt und also eine bestimmte Länge l_{r1}, l_{r2}, ... besitzt. Diese Intervalle i_{r1}, i_{r2}, ... füllen die Strecke i_r in dem Grade aus, dass alle inneren Punkte der letzteren entweder im Inneren oder auf der Grenze eines Intervalles $i_{r\mu}$ liegen. Die Gesammtheit aller Intervalle $i_{r\mu}$, welche nach einem Satze von Herrn CANTOR ebenfalls abzählbar ist, füllt daher die ganze Strecke $x_0 x_1$ so, dass die Gesammtheit der nicht im Inneren eines solchen Intervalles gelegenen Punkte abzählbar ist. Die im Theorem VI an die Intervalle i gestellte Forderung wird also von den Intervallen $i_{r\mu}$ erfüllt, und ebenso die Forderung, dass die Curve in jedem Intervalle i eine bestimmte Länge hat.

Hiermit ist die zu Anfang dieser Nummer aufgestellte Behauptung, betreffend die Tragweite von Theorem VI, erwiesen.

7.

Eine besonders einfache Anwendung des Theorems VI und der in § 6 angestellten Betrachtungen enthält folgendes

Theorem VII. Wenn die Curve $y = f(x)$ entweder stetig ist oder den Bedingungen 1—4 von Theorem II genügt; wenn ferner eine solche Constante

$C < \pi$ existirt, dass die Gesammtheit der im Intervall $x_0 x_1$ gelegenen Stellen P, an denen oder in deren Umgebung die Richtungsschwankung grösser als C ist, eine abzählbare Menge bildet, so lässt sich eine abzählbare Menge von Intervallen $i_1, i_2, \ldots$ von der Art angeben, dass ausserhalb derselben nur Punkte der Menge P liegen, und dass im Inneren jedes Intervalles i_r die Gesammtschwankung der Richtung nicht grösser als C ist. Werden die Werthe von y, welche den Endpunkten des Intervalles i_r entsprechen, mit y'_r und y''_r bezeichnet, so hat die Curve von x_0, y_0 bis x_1, y_1 eine Länge oder nicht, jenachdem die Summe $\sum\limits_r |y''_r - y'_r|$ endlich ist oder nicht.

Beweis.

Der Beweis für den ersten Theil dieses Theorems, betreffend die Möglichkeit der Eintheilung in Intervalle $i_1, i_2, \ldots$, in deren jedem die Gesammtschwankung der Richtung nicht grösser als C ist, ist in den Betrachtungen von § 6 enthalten, wo die hier $i_1, i_2, \ldots$ genannten Intervalle mit $i_{r,n}$ bezeichnet wurden. Der zweite Theil, das Criterium für die Existenz der Länge, ist eine Folge des Theorems VI, wenn man die in § 4 angegebene obere Grenze für die Länge l_r berücksichtigt. Setzen wir nämlich

$$G \geqq \operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

so ist nach Theorem IV oder V

$$l_r \leqq \sqrt{1 + G^2}\left(2(x''_r - x'_r) + \frac{|y''_r - y'_r|}{G}\right),$$

oder auch direkt nach Theorem Va für $C' \geqq C$

$$l_r \leqq 2\frac{(x''_r - x'_r)}{\cos\frac{C'}{2}} + \frac{|y''_r - y'_r|}{\sin\frac{C'}{2}}.$$

Ausserdem ist offenbar

$$l_r > |y''_r - y'_r|.$$

Mit Rücksicht auf Theorem VI folgt aus der letzten Relation, dass das Theorem VII nothwendige, aus jeder der beiden vorhergehenden, dass es hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Länge L enthält.

Beispiel zu Theorem VII.

Wir wählen eine recht complicirte Curve. Es sei

$$\varphi(x) = \sum_{r=1}^{\infty} c_r (x - w_r)^{\frac{1}{3}} + C,$$

wo $w_1, w_2, \ldots$ die Reihe aller rationalen Zahlen ist, während die c_r sämmtlich positiv und so gewählt sein sollen, dass die unendliche Summe $\varphi(x)$ für alle Werthe von x innerhalb eines gewissen Intervalles convergirt. (¹) Der Constanten C geben wir einen solchen Werth, dass $\varphi(0) = 0$ wird. Es sei ferner

$$\psi(x) = x \lg \frac{1}{x} \sin\left(\lg \lg \frac{1}{x}\right).$$

Dann wird durch die Gleichung

$$y = f(x) = \varphi(x)\psi(x)$$

eine Curve definirt. Durch Anwendung des Theorems VII lässt sich mit Leichtigkeit zeigen, dass dieselbe von $x = 0$ bis $x = 1$ eine endliche Länge besitzt.

Es ist nämlich, da $\psi(x)$ in der Umgebung jedes Punktes x im Inneren der Strecke $0 \ldots 1$ nach dem TAYLOR'schen Lehrsatze entwickelt werden kann,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \psi(x) + \varphi(x+h)\psi'(x + \partial h)$$

$$= \left[\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \psi(x) + \frac{\varphi(x+h)}{x + \partial h} \psi(x + \partial h)\right]$$

$$- \varphi(x+h)\left[\cos\left(\lg\lg\frac{1}{x+\partial h}\right) + \sin\left(\lg\lg\frac{1}{x+\partial h}\right)\right].$$

(¹) Vergl. das Beispiel 1 zu Theorem IV.

Hat x einen Werth, wofür $\psi(x) \gtrless 0$ wird, so hat das erste Glied rechts für alle Werthe h unterhalb einer gewissen Grenze das Vorzeichen von $\psi(x)$; denn $\varphi(x)$ ist beständig positiv und nimmt mit x beständig zu. Das zweite Glied aber ist absolut kleiner als $\sqrt{2}\varphi(1)$. Folglich ist $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für genügend kleine Werthe von h grösser als $-\sqrt{2}\varphi(1)$, wenn $\psi(x)$ positiv ist, und kleiner als $\sqrt{2}\varphi(1)$, wenn $\psi(x)$ negativ ist.

Denken wir uns jetzt die Strecke $0 \ldots 1$ in eine abzählbar unendliche Schaar von Intervallen $i_1, i_2, \ldots$ getheilt, indem wir als Theilpunkte alle diejenigen Punkte annehmen, für welche $\psi(x) = 0$ ist, so ist im Inneren jedes Intervalles i_r die Gesammtschwankung der Richtung höchstens gleich $\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}[\sqrt{2}\varphi(1)]$; denn alle vier Derivirten sind entweder durchweg kleiner als $\sqrt{2}\varphi(1)$ oder durchweg grösser als $-\sqrt{2}\varphi(1)$. Die den Endpunkten des Intervalles i_r entsprechende Differenz $y_r'' - y_r'$ ist aber Null, folglich auch die Summe $\sum_r |y_r'' - y_r'|$. Also hat die Curve nach Theorem VII von $x = 0$ bis $x = 1$ eine Länge L, und zwar ist dieselbe nicht grösser als $2\sqrt{1 + 2\varphi(1)^2}$.

Das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{1 + f'(x)^2}$$

ist sinnlos, welche Werthe wir auch den Grössen x_0 und x_1 geben mögen; denn $f'(x)$ wird für alle rationalen Werthe von x unendlich gross.

Durch das Theorem VI werden, wie in § 6 gezeigt worden ist, alle Curven erledigt, für welche die Stellen, an denen oder in deren Umgebung die Richtungsschwankung gleich π ist, eine endliche oder abzählbar unendliche Menge bilden.

Allgemeine Criterien der Existenz einer Länge für den Fall aufzustellen, dass die Gesammtheit jener Stellen eine höhere Mächtigkeit hat, ist uns noch nicht gelungen. Man wird bei derartigen Curven auf die Theoreme I—III zurückgreifen müssen. Wir bemerken nur noch, dass es Curven dieser Art giebt, denen eine bestimmte Länge zukommt. Beispiele sollen bei nächster Gelegenheit mitgetheilt werden.

Berlin d. 8ten December 1883.