# SUR LA FORMULE

$$hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2} \cdot \Delta u'_x + \frac{B_1 \cdot h^2}{1 \cdot 2} \cdot \Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \Delta u^{\mathrm{IV}}_x + \text{ etc.}$$

PAR

C. J. MALMSTEN

À UPSAL(¹).

On sait que STIRLING, dans son ouvrage *Methodus Differentialis sive Tractatus de summatione serierum* résolut, il y a plus d'un siècle, une multitude de problèmes importants pour la théorie des séries infinies en général, et particulièrement pour les expressions de très grands nombres,

---

(¹) Je crois devoir publier dans les Acta Mathematica le mémoire suivant de M. C. J. MALMSTEN, ancien professeur à l'académie d'Upsal.

Le mémoire en question a déjà été inséré dans CRELLES Journal für die reine und angewandte Mathematik, T. XXXV (1847), p. 55—82, mais avec de telles erreurs typographiques et d'autres plus graves encore au point de vue du texte comme à celui des formules, qu'il en est devenu presque illisible.

Ce mémoire doit être avec raison considéré comme une oeuvre capitale pour le sujet important qu'il traite, et voici entre autres le jugement de M. LIOUVILLE dans son Journal de Mathématiques, T. XVII, p. 448 et dans Comptes-Rendus, T. XXXV, p. 317. Ayant appelé l'attention sur la formule célèbre de STIRLING qui, tendant d'abord très rapidement vers la valeur demandée, devient ensuite divergente, M. LIOUVILLE dit d'un théorème remarquable, dont LEGENDRE avait acquis pour ainsi dire le sentiment par ses calculs numériques: »*Il est établi d'une manière très simple et très élégante dans un mémoire de M. Malmstén, que je me plais à citer comme remarquable à plus d'un titre*». Plus loin, en parlant de ses leçons au Collège de France, M. LIOUVILLE ajoute: »*J'ai présenté à mes auditeurs l'analyse de M. Malmstén .... dont je crois avoir simplifié quelques détails*».

J'ai cru par suite devoir réimprimer ici un remaniement dudit travail corrigé par qui se présentent si fréquemment dans le calcul des probabilités et dont il serait presque impossible de trouver directement les valeurs numériques. Parmi toutes ces formules il y en a une qui a toujours attiré l'attention particulière des géomètres et qui est spécialement connue sous le nom de *formule de* STIRLING, à savoir celle qui sert à calculer par approximation le logarithme du produit d'un grand nombre de facteurs croissants en progression arithmétique. Cette série offre une singularité bien remarquable. Elle procède selon les puissances négatives d'un nombre très grand et, étant décroissante très rapidement, elle finit nécessairement par devenir divergente, quelque grand que soit le dit nombre.

Quant à la convergence ou la divergence des suites infinies, on sait que les analystes d'autrefois y attachaient beaucoup moins d'importance que ceux d'aujourd'hui; ils se servaient même très souvent dans leurs calculs de séries évidemment divergentes. Aujourd'hui bien s'en faut qu'on approuve l'usage de séries non convergentes; au contraire on veut qu'elles soient complètement bannies de l'analyse. Mais cette rigueur, juste et raisonnable en elle-même, a été mise à une bien dure épreuve par la série de STIRLING. D'une part divergente, comme elle l'est, elle *devait* en effet être rejetée: d'autre part, étant presqu'indispensable, elle *ne peut point* l'être. Cela étant, à moins de faire, à cause de la nécessité, une exception extraordinaire et non légitime pour cette série (ce que quelques-uns ont effectivement fait) il ne restait d'autre moyen que d'essayer de la rendre finie, c'est à dire, de chercher son terme complémentaire, ce à quoi on a aussi réussi. Nous rappellerons seulement ce que LIOUVILLE et CAUCHY ont fait à ce sujet.

La formule de STIRLING n'est cependant qu'un cas très particulier d'une formule qu'EULER a proposée le premier, mais qui est ordinairement attribuée à MACLAURIN [1] et connue sous son nom, savoir la formule

---

l'auteur lui-même, avec d'autant plus de raison que je crois savoir qu'il s'occupe d'un nouvel article traitant ce sujet, et où il cherche à donner aux formules une telle généralisation qu'elles puissent être appliquées aussi aux fonctions d'une variable complexe.

*Le rédacteur.*

[1] Le changement dans le texte est motivé par un intéressant petit mémoire de M. G. ENESTRÖM communiqué à l'Académie royale des Sciences de Stockholm le 15 Décembre 1879 (voir Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1879, N:o 10, p. 3—17: *Om upptäckten af den* EULER'*ska summationsformeln*).

$$(1) \qquad h\Sigma u = \int u dx - \frac{h}{2} \cdot u + \frac{B_1 h^2}{1 \cdot 2} \cdot u' - \frac{B_2 h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot u'' + \text{ etc.,}$$

où $B_1$, $B_2$, etc. désignent les nombres de BERNOULLI et $u'$, $u''$, etc. la première, la seconde, etc. dérivée de $u$. Les nombres $B_1$, $B_2$, etc. sont, comme on le sait, tels que, dès le quatrième, ils vont toujours en croissant et finissent par devenir infiniment grands. Ainsi la convergence de la série (1) n'a pas généralement lieu; au contraire nous l'avons vu être divergente dans le cas particulier de la formule de STIRLING.

Cela posé, la série (1) présentant souvent la même singularité que celle de STIRLING, à savoir d'être d'abord rapidement décroissante et de finir par devenir divergente; les géomètres ont regardé comme très importante la légitimation générale de son emploi dans le calcul d'approximation. En effet ils ont tâché de fixer les limites du reste de la série, quand on arrête le calcul à un terme déterminé, c'est à dire, de fixer les limites du terme complémentaire. Le premier essai à cet égard que nous avons eu l'occasion de connaître est dû à ERCHINGER, et se trouve exposé par EYTELWEIN (1) et par v. ETTINGSHAUSEN (2). Mais son analyse n'est point satisfaisante, puisque l'équation différentielle (à l'aide de laquelle il trouve la valeur du reste) n'a lieu que dans le cas où la série infinie, d'où elle est dérivée, est convergente; ce qui en effet n'a pas généralement lieu.

Un autre calcul très ingénieux du terme complémentaire, dans le développement de $h\Sigma u$ entre des limites données, est dû à POISSON, qui l'a exposé dans un excellent mémoire: *Sur le calcul numérique des intégrales définies* (3). Il est fondé sur l'expression connue

$$f(x) = \frac{1}{2a} \cdot \int_{-a}^{+a} f(z) dz + \frac{1}{a} \int_{-a}^{+a} \left[ \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=\infty} \cos\left(\frac{i\pi(x-z)}{a}\right) \right] f(z) dz$$

(qui, comme on le sait, a lieu pour toutes les valeurs de $x$ comprises

---

(1) *Grundlehren der höheren Analysis.* Berlin 1824, T. 2, § 696.

(2) *Vorlesungen über die höhere Mathematik.* Wien 1827, T. 1, p. 429.

(3) Mémoires de l'Académie des Sciences. Paris 1826, T. VI, p. 571—602.

entre les limites des intégrales) et donne pour résultat la formule suivante:

$$h\sum_0^c f(x) = \int_0^c f(x)dx - \frac{1}{2}h\{f(c) - f(0)\} + A_1 h^2\{f'(c) - f'(0)\} - \dots$$

$$+ (-1)^{m-1} A_m h^{2m}\{f^{(2m-1)}(c) - f^{(2m-1)}(0)\} + R_m,$$

où

(2) $$\frac{1}{2}(2\pi)^{2m} A_m = 1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \text{ etc.}$$

$$R_m = (-1)^m . 2\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2m} . \int_0^c \left[\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i^{2m}} . \cos\frac{2i\pi x}{h}\right] f^{(2m)}(x)dx.$$

En mettant ici $x - x_0$ à la place de $x$ et puis $f(x)$ à la place de $f(x - x_0)$ on obtiendra facilement, si l'on fait $c + x_0 = x_1$,

(3) $$h\sum_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \frac{1}{2}h\{f(x_1) - f(x_0)\} + A_1 h^2\{f'(x_1) - f'(x_0)\} - \dots$$

$$+ (-1)^{m-1} A_m h^{2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\} + R'_m,$$

où

$$R'_m = (-1)^m . 2 . \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2m} . \int_{x_0}^{x_1} \left[\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i^{2m}} . \cos\frac{2i\pi(x - x_0)}{h}\right] f^{(2m)}(x) . dx.$$

Si l'on désigne par $M_{2m}$ la plus grande valeur numérique de $f^{(2m)}(x)$ entre $x = x_0$ et $x = x_1$ on aura[1]

(4) $$|R'_m| = \theta h^{2m} A_m . M_{2m} |(x_1 - x_0)| \qquad (0 < \theta < 1)$$

[1] Nous désignons, d'après M. Weierstrass, la valeur numérique d'une quantité réelle $Q$ par $|Q|$.

et, dans le cas où $f^{(2m)}(x)$ conserve le même signe dans toute cette étendue,

$$R'_m = (-1)^m \cdot 2 \cdot \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2m} \cdot \{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\} \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=\infty} \frac{\cos p_i}{i^{2m}}$$

$$= (-1)^{m-1} \cdot 2 \cdot \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2m} \cdot \{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\} \cdot \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=\infty} \frac{2\sin^2 \frac{1}{2} p_i - 1}{i^{2m}},$$

en posant

$$p_i = \frac{2i\pi\theta_1(x_1 - x_0)}{h}, \qquad (0 < \theta_1 < 1)$$

c'est à dire, à l'aide de (2),

$$(5) \quad R'_m = (-1)^{m-1} \cdot h^{2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\}(2\theta_2 - 1)A_m, \qquad (0 < \theta_2 < 1).$$

Nous aurons donc, *$f^{(2m)}(x)$ conservant le même signe depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_1$*,

$$h\sum_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \frac{1}{2} h \cdot \{f(x_1) - f(x_0)\} + A_1 \cdot h^2\{f'(x_1) - f'(x_0)\} - \ldots$$

$$(6) \qquad + (-1)^{m-2} A_{m-1} \cdot h^{2m-2}\{f^{(2m-3)}(x_1) - f^{(2m-3)}(x_0)\}$$

$$+ (-1)^{m-1}\theta_2 \cdot 2A_m h^{2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\}, \qquad (0 < \theta_2 < 1).$$

On doit aussi à l'illustre auteur des *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum* un excellent mémoire sur ce sujet savoir: *De usu legitimo formulæ summatoriæ Maclaurinianæ* [1], où il démontre que, les deux expressions

$$(7) \qquad \sum_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x + z) \quad \text{et} \quad \sum_{x_0}^{x_1} f^{(2m+2)}(x + z)$$

---

[1] Journal für die reine und angewandte Mathematik v. Crelle, T. XII, p. 263—272.

ne changeant pas de signe, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$, et de plus étant toutes les deux du même signe, on aura

$$(8) \qquad h\sum_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \frac{h}{2}\{f(x_1) - f(x_0)\} + \frac{B_1 h^2}{1.2}\{f'(x_1) - f'(x_0)\}$$

$$- \frac{B_2 . h^4}{1.2.3.4}\{f'''(x_1) - f'''(x_0)\} + \dots + (-1)^m . \frac{B_{m-1} . h^{2m-2}}{1.2\dots(2m-2)}\{f^{(2m-3)}(x_1) - f^{(2m-3)}(x_0)\}$$

$$+ (-1)^{m+1} . \theta . \frac{B_m . h^{2m}}{1.2\dots 2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\},$$

où $0 < \theta < 1$.

Si l'on compare le résultat auquel est arrivé Jacobi avec celui de Poisson, on voit sans difficulté que leurs recherches se complètent l'une l'autre d'une certaine façon. La déduction de Poisson exige que la dérivée $f^{(2m)}(x)$ conserve le même signe depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_1$; mais, pour la dérivée paire suivante $f^{(2m+2)}(x)$, elle ne demande aucune détermination particulière. La déduction de Jacobi suppose — non pas que $f^{(2m)}(x)$ conserve le même signe entre $x = x_0$ et $x = x_1$ — mais seulement que

$$(8_a) \qquad \sum_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x + z)$$

conserve le même signe entre $z = 0$ et $z = h$; mais elle demande en même temps, qu'entre les mêmes valeurs de $z$,

$$\sum_{x_0}^{x_1} f^{(2m+2)}(x)$$

ait le même signe que $(8_a)$.

Après cette exposition succincte des recherches antérieures sur ce sujet, il nous sera permis de dire un mot sur le présent mémoire. Nous le diviserons en trois sections. Dans la *première* nous nous occuperons de la recherche de quelques relations entre les nombres de Bernoulli, dont nous aurons besoin dans la suite: dans la *seconde* nous développerons les théorèmes et les formules générales qui touchent de plus près à la formule remarquable, se trouvant en tête de ce mémoire: enfin dans la *troisième* nous ferons quelques applications importantes du dernier de ces théorèmes.

Nous n'ignorons pas que la formule d'EULER est ordinairement présentée sous la forme (1); mais nonobstant nous avons préféré pour nos recherches la forme

$$(9) \qquad hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}.\,\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1\,.\,2}.\,\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}.\,\Delta u^{\mathrm{IV}}_x + \text{ etc.}$$

Au premier coup-d'oeil on trouvera cela peut-être de très peu d'importance; mais la forme n'est pas tout à fait sans conséquence dans les applications. En effet la formule (1) étant prise dans sa plus grande généralité, on ne peut parler d'un terme complémentaire, $h\Sigma u$ étant absolument indéterminée. Il faut donc ou fixer le terme $\Sigma u$, en le considérant comme une sommation entre de certaines limites (ce qui est le cas ordinaire), ou le prendre pour une fonction déterminée de $x$, d'où l'on puisse ensuite déduire $u$ et ses dérivées. Mais le procédé ordinaire a souvent des inconvénients par rapport à la continuité; ainsi p. ex. le développement de $\log \Gamma(x + 1)$ qu'on trouve de cette manière n'est rigoureusement démontré que pour les valeurs *entières* de $x$. Nous avons donc préféré considérer $\Sigma u$ comme une fonction déterminée de $x$; et pour faire voir cela plus clairement, nous avons donné à la série dont il s'agit la forme (9).

Quant à la méthode d'opérer, nous prenons le même point de départ que JACOBI, savoir la formule connue

$$u_{x+h} = u_x + h\,.\,u'_x + \frac{h^2}{1\,.\,2}\,.\,u''_x + \ldots + \frac{h^r}{1\,.\,2\,\ldots\,r}.\,u^{(r)}_x + \int_0^h \frac{(h-z)^r}{1\,.\,2\,\ldots\,r}.\,u^{(r+1)}_{x+z}\,dz;$$

mais le reste de nos déductions sera tout à fait différent des siennes. En effet les recherches de cet illustre analyste font fort bien connaître que la fonction que nous avons désignée par $\varphi(z)$ (voir la formule (25)) conserve toujours le même signe entre $z = 0$ et $z = h$; mais elles ne font pas voir la propriété la plus remarquable de cette fonction, savoir *qu'elle* *a entre ces limites son seul maximum ou minimum en* $z = \frac{h}{2}$, *et qu'elle est parfaitement symétrique de l'un et de l'autre côté de ce point.* Cette propriété est un point essentiel pour nos déductions; c'est par elle que nous sommes parvenus à trouver les limites du terme complémentaire pour le cas même qui a échappé aux recherches de JACOBI, c'est à dire pour le cas où les expressions (7) n'ont pas le même signe.

## *Relations entre les nombres de Bernoulli.*

§ 1.

Si dans la formule connue

$$(10) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{\omega x} - e^{-\omega x}}{e^{2\pi x} - 1} \, . \, dx = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{2} \operatorname{cotang} \frac{1}{2}\omega$$

on met à la place du membre à droite sa valeur

$$(11) \quad \frac{1}{\omega} - \frac{1}{2} \operatorname{cotang} \frac{1}{2}\omega = B_1 . \frac{\omega}{1 . 2} + B_2 . \frac{\omega^3}{1 . 2 . 3 . 4} + \ldots + B_m . \frac{\omega^{2m-1}}{1 . 2 \ldots 2m} + \text{ etc.}$$

(où $B_1, B_2, \ldots, B_m$ etc. sont les nombres de BERNOULLI), on aura, en posant $\omega = 0$, après avoir différentié $2m - 1$ fois par rapport à cette variable,

$$(12) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{2m-1} . dx}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{B_m}{4m}.$$

Or la formule (10), multipliée par $\cos \omega$, donne

$$(13) \qquad 2 . \int_0^\infty \frac{e^{\omega x} - e^{-\omega x}}{e^{2\pi x} - 1} . \cos \omega \, . \, dx = \varphi_1(\omega),$$

en supposant pour abréger

$$\varphi_1(\omega) = 2 . \cos \omega \left\{ \frac{1}{\omega} - \frac{1}{2} . \operatorname{cotang} \frac{1}{2} \omega \right\} = \frac{2 \cos \omega}{\omega} - \operatorname{cotang} \frac{1}{2} \omega + \sin \omega ,$$

c'est à dire, en vertu de (11),

$$(14) \qquad \varphi_1(\omega) = B_1 \omega + \frac{\omega^3}{1 . 2 . 3} \left( \frac{B_2}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega^5}{1 . 2 \ldots 5} \left( \frac{B_3}{3} + \frac{2}{3} \right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\omega^{2m-1}}{1 . 2 \ldots (2m - 1)} \left( \frac{B_m}{m} + (-1)^{m-1} . \frac{m-1}{m} \right) + \text{etc.}$$

Différentions maintenant $2m - 1$ fois la formule (13). Pour cela nous nous servirons de la formule connue

$$(15) \qquad \frac{d^\mu (e^{ny} . \cos my)}{dy^\mu} = \frac{1}{2} \{ e^{y(n + m\sqrt{-1})} (n + m\sqrt{-1})^\mu + e^{y(n - m\sqrt{-1})} (n - m\sqrt{-1})^\mu \},$$

qui, toutes réductions faites, donnera pour $\omega = 0$

$$(16) \qquad \frac{d^{(2m-1)}_{(\omega=0)} \{ (e^{\omega x} - e^{-\omega x}) \cos \omega \}}{(d\omega)^{2m-1}} = (-1)^{m-1} . \frac{(1 + x\sqrt{-1})^{2m-1} - (1 - x\sqrt{-1})^{2m-1}}{\sqrt{-1}} .$$

Donc on tire de (13)

$$(17) \qquad \int_0^\infty \frac{(1 + x\sqrt{-1})^{2m-1} - (1 - x\sqrt{-1})^{2m-1}}{\sqrt{-1}} . \frac{2\,dx}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{m-1}{m} + (-1)^{m-1} . \frac{B_m}{m} ,$$

parce qu'en vertu de (14) on a

$$\frac{d^{(2m-1)}_{(\omega=0)} \varphi_1(\omega)}{(d\omega)^{2m-1}} = \frac{B_m}{m} + (-1)^{m-1} . \frac{m-1}{m} .$$

En développant les puissances sous le signe $\int$ dans (17), et en désignant par $(2m - 1)_1$, $(2m - 1)_3$, etc. le premier, le troisième etc. coëfficient du binome pour l'exposant $2m - 1$, nous aurons

$$\int_0^\infty \frac{4\,dx}{e^{2\pi x} - 1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (2m-1)_1 . x - (2m-1)_3 . x^3 + \ldots \\ + (-1)^{m-2} . (2m-1)_{2m-3} . x^{2m-3} + (-1)^{m-1} . x^{2m-1} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{m-1}{m} + (-1)^{m-1} . \frac{B_m}{m},$$

et de là, à l'aide de (12), on tire la relation suivante entre les nombres de Bernoulli:

$$(18) \qquad (2m-1)_1 . B_1 - \frac{1}{2} . (2m-1)_3 . B_2 + \frac{1}{3} . (2m-1)_5 . B_3 - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^m . \frac{1}{m-1} . (2m-1)_{2m-3} . B_{m-1} = \frac{m-1}{m} .$$

## § 2.

Mettons dans (10) et (12) $\frac{1}{2} x$ à la place de $x$ et dans (10) $2\omega$ à la place de $\omega$; nous aurons

$$(19) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{2m-1} . \,dx}{e^{\pi x} - 1} = \frac{2^{2m-1} . B_m}{2m},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{\omega x} - e^{-\omega x}}{e^{\pi x} - 1} . \,dx = \frac{1}{\omega} - \operatorname{cotang} \omega .$$

La dernière formule, multipliée par $\cos\omega$, donnera

$$\int_0^\infty \frac{(e^{\omega x} - e^{-\omega x})\cos\omega}{e^{\pi x} - 1} . dx = \sin\omega + \frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{1}{\sin\omega},$$

d'où, en posant $\omega = 0$, après avoir différentié $2m - 1$ fois par rapport à cette variable, on obtiendra en vertu de (16)

$$(-1)^{m-1} . \int_0^\infty \frac{(1 + x\sqrt{-1})^{2m-1} - (1 - x\sqrt{-1})^{2m-1}}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{dx}{e^{\pi x} - 1}$$

$$= \frac{d^{(2m-1)}_{(\omega=0)}\left\{\sin\omega + \frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{1}{\sin\omega}\right\}}{(d\omega)^{2m-1}}.$$

Mais comme

$$\sin\omega + \frac{\cos\omega}{\omega} = \frac{1}{\omega} + \frac{\omega}{1.2} - 3 \cdot \frac{\omega^3}{1 \dots 4} + 5 \cdot \frac{\omega^5}{1 \dots 6} - \dots + (-1)^{m-1} . (2m-1) . \frac{\omega^{2m-1}}{1 \dots 2m} + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{\sin\omega} = \frac{1}{\omega} + \frac{2(2-1) . B_1 . \omega}{1.2} + \frac{2(2^3-1) . B_2 . \omega^3}{1.2 \dots 4} + \dots + \frac{2(2^{2m-1}-1)B_m . \omega^{2m-1}}{1.2 \dots 2m} + \text{ etc.},$$

on aura

$$\frac{d^{(2m-1)}_{(\omega=0)}\left\{\sin\omega + \frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{1}{\sin\omega}\right\}}{(d\omega)^{2m-1}} = -\frac{1}{2m}\left\{2(2^{2m-1} - 1)B_m + (-1)^m . (2m-1)\right\},$$

d'où enfin on obtiendra

$$\int_0^\infty \frac{(1 + x\sqrt{-1})^{2m-1} - (1 - x\sqrt{-1})^{2m-1}}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{dx}{e^{\pi x} - 1}$$

$$= \frac{2m-1}{2m} + (-1)^m . \frac{2(2^{2m-1} - 1) . B_m}{2m}.$$

En développant $(1 + x\sqrt{-1})^{2m-1}$ et $(1 - x\sqrt{-1})^{2m-1}$ et en faisant les intégrations à l'aide de (19), on aura

$$(20)\quad \frac{(2m-1)_1 \cdot 2^2 \cdot B_1}{2} - \frac{(2m-1)_3 \cdot 2^4 \cdot B_2}{4} + \ldots + (-1)^{m-2} \cdot \frac{(2m-1)_{2m-3} \cdot 2^{2m-2} \cdot B_{m-1}}{2m-2}$$

$$+ (-1)^{m-1} \cdot \frac{2^{2m} \cdot B_m}{2m} = \frac{2m-1}{2m} + (-1)^m \cdot \frac{2(2^{2m-1}-1) \cdot B_m}{2m},$$

d'où l'on tirera facilement

$$\frac{1}{2m} - 1 + \frac{(2m-1)_1 \cdot 2^2 \cdot B_1}{2} - \frac{(2m-1)_3 \cdot 2^4 \cdot B_2}{4} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^m \cdot \frac{(2m-1)_{2m-3} \cdot 2^{2m-2} \cdot B_{m-1}}{2m-2} = (-1)^m \cdot \frac{2(2^{2m}-1) \cdot B_m}{2m},$$

et enfin, en multipliant chaque terme par $\frac{1}{\Gamma(2m)} \cdot \frac{1}{2^{2m}}$,

$$(21)\quad \frac{1}{1 \ldots 2m} \cdot \frac{1}{2^{2m}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 \ldots (2m-1)} \cdot \frac{1}{2^{2m-1}} + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 \ldots (2m-2)} \cdot \frac{1}{2^{2m-2}}$$

$$- \frac{B_2}{1 \ldots 4} \cdot \frac{1}{1 \ldots (2m-4)} \cdot \frac{1}{2^{2m-4}} + \ldots + (-1)^m \frac{B_{m-1}}{1 \ldots (2m-2)} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2^2}$$

$$= (-1)^m \cdot \frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} \cdot \frac{B_m}{1 \ldots 2m}.$$

## *Théorèmes et formules générales.*

### § 3.

Les deux relations entre les nombres de BERNOULLI dont nous aurons besoin dans la suite, ayant été trouvées dans (18) et (21), nous passons maintenant à ce qu'il y a de plus essentiel dans ce mémoire. Soit $u_x$

une fonction de $x$ qui, avec ses $2m+1$ premières dérivées, est continue depuis $x$ jusqu'à $x+h$; faisons pour abréger

$$(22)\qquad F(x,\,h) = hu'_x - \Delta u_x - H_1.h.\Delta u'_x - H_2.h^2.\Delta u''_x - \dots$$
$$\dots - H_{2m-2}.h^{2m-2}.\Delta u_x^{(2m-2)} - H_{2m-1}h^{2m-1}\Delta u_x^{(2m-1)},$$

où $u'_x$, $u''_x$ etc. sont les dérivées successives de $u_x$. En vertu d'un théorème connu nous aurons

$$\Delta u_x = hu'_x + \frac{h^2}{1.2}.u''_x + \frac{h^3}{1.2.3}.u'''_x + \dots + \frac{h^{2m}}{1\dots 2m}.u_x^{(2m)} + \int_0^h \frac{(h-z)^{2m}}{1\dots 2m}.u_{x+z}^{(2m+1)}.dz,$$

$$\Delta u'_x = h.u''_x + \frac{h^2}{1.2}.u'''_x + \dots + \frac{h^{2m-1}}{1\dots(2m-1)}.u_x^{(2m)} + \int_0^h \frac{(h-z)^{2m-1}}{1\dots(2m-1)}.u_{x+z}^{(2m+1)}.dz,$$

$$\Delta u''_x = h.u'''_x + \dots + \frac{h^{2m-2}}{1\dots(2m-2)}.u_x^{(2m)} + \int_0^h \frac{(h-z)^{2m-2}}{1\dots(2m-2)}.u_{x+z}^{(2m+1)}.dz,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta u_x^{(2m-1)} = h.u_x^{(2m)} + \int_0^h \frac{(h-z)}{1}.u_{x+z}^{(2m+1)}.dz.$$

Ces valeurs, substituées dans (22), donnent

$$(23)\quad F(x,\,h) = -\int_0^h u_{x+z}^{(2m+1)}.dz\left\{\frac{(h-z)^{2m}}{1\dots 2m} + \frac{H_1.h(h-z)^{2m-1}}{1.2\dots(2m-1)} + \frac{H_2.h^2(h-z)^{2m-2}}{1\dots(2m-2)} + \dots\right.$$
$$\left.\dots + \frac{H_{2m-2}.h^{2m-2}(h-z)^2}{1.2} + \frac{H_{2m-1}.h^{2m-1}.(h-z)}{1}\right\}$$

où les coëfficients $H_1$, $H_2$, ..., $H_{2m-1}$ sont déterminés par

$$(24)\quad \begin{cases} H_1 \quad + \dfrac{1}{1.2} = 0, \\[2mm] H_2 \quad + \dfrac{H_1}{1.2} + \dfrac{1}{1.2.3} = 0, \\[2mm] H_3 \quad + \dfrac{H_2}{1.2} + \dfrac{H_1}{1.2.3} + \dfrac{1}{1.2.3.4} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ H_{2m-2} + \dfrac{H_{2m-3}}{1.2} + \dfrac{H_{2m-4}}{1.2.3} + \ldots + \dfrac{H_2}{1.2\ldots(2m-3)} + \dfrac{H_1}{1.2\ldots(2m-2)} \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{1.2\ldots(2m-1)} = 0, \\[2mm] H_{2m-1} + \dfrac{H_{2m-2}}{1.2} + \dfrac{H_{2m-3}}{1.2.3} + \ldots + \dfrac{H_3}{1.2\ldots(2m-3)} + \dfrac{H_2}{1.2\ldots(2m-2)} \\ \qquad\qquad + \dfrac{H_1}{1.2\ldots(2m-1)} + \dfrac{1}{1.2\ldots 2m} = 0. \end{cases}$$

## § 4.

Considérons en premier lieu le polynome entre les crochets dans (23) et posons

$$(25)\quad \varphi(h-z) = \frac{(h-z)^{2m}}{1.2\ldots 2m} + \frac{H_1 . h(h-z)^{2m-1}}{1.2\ldots(2m-1)} + \frac{H_2 . h^2(h-z)^{2m-2}}{1.2\ldots(2m-2)}$$
$$+ \frac{H_4 . h^4 . (h-z)^{2m-4}}{1.2\ldots(2m-4)} + \ldots + \frac{H_{2m-2} . h^{2m-2} . (h-z)^2}{1.2},$$

$$(26)\quad \psi(h-z) = \frac{H_3 . h^3 . (h-z)^{2m-3}}{1.2\ldots(2m-3)} + \frac{H_5 . h^5 . (h-z)^{2m-5}}{1.2\ldots(2m-5)} + \ldots + \frac{H_{2m-1} . h^{2m-1} . (h-z)}{1},$$

qui, au lieu de (23), donne cette expression plus abrégée

$$(27) \qquad F(x,\ h) = -\int_0^h [\varphi(h-z) + \psi(h-z)] . u_{x+z}^{(2m+1)} . dz.$$

En développant $\varphi(h-z) + \psi(h-z)$ selon les puissances de $z$, nous aurons

$$\varphi(h-z) + \psi(h-z) =$$

$$h^{2m}\left\{\frac{1}{1.2...2m} + \frac{H_1}{1.2...(2m-1)} + \frac{H_2}{1.2...(2m-2)} + ... + \frac{H_{2m-3}}{1.2.3} + \frac{H_{2m-2}}{1.2} + \frac{H_{2m-1}}{1}\right\}$$

$$-\frac{h^{2m-1}.z}{1}\left\{\frac{1}{1.2...(2m-1)} + \frac{H_1}{1.2...(2m-2)} + \frac{H_2}{1.2...(2m-3)} + ... + \frac{H_{2m-3}}{1.2} + \frac{H_{2m-2}}{1} + H_{2m-1}\right\}$$

$$+\frac{h^{2m-2}.z^2}{1.2}\left\{\frac{1}{1.2...(2m-2)} + \frac{H_1}{1.2...(2m-3)} + \frac{H_2}{1.2...(2m-4)} + ... + \frac{H_{2m-4}}{1.2} + \frac{H_{2m-3}}{1} + H_{2m-2}\right\}$$

$$-\frac{h^{2m-3}.z^3}{1.2.3}\left\{\frac{1}{1.2...(2m-3)} + \frac{H_1}{1.2...(2m-4)} + \frac{H_2}{1.2...(2m-5)} + ... + \frac{H_{2m-5}}{1.2} + \frac{H_{2m-4}}{1} + H_{2m-3}\right\}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$-\frac{h^3.z^{2m-3}}{1.2...(2m-3)}\left\{\frac{1}{1.2.3} + \frac{H_1}{1.2} + \frac{H_2}{1} + H_3\right\}$$

$$+\frac{h^2.z^{2m-2}}{1.2...(2m-2)}\left\{\frac{1}{1.2} + \frac{H_1}{1} + H_2\right\}$$

$$-\frac{h.z^{2m-1}}{1.2...(2m-1)}\left\{1 + H_1\right\}$$

$$+\frac{z^{2m}}{1.2...2m},$$

c'est à dire, en faisant attention aux expressions (24),

$$\varphi(h-z)+\psi(h-z)=\frac{z^{2m}}{1.2\ldots 2m}+\frac{H_1.h.z^{2m-1}}{1.2\ldots(2m-1)}+\frac{H_2.h^2.z^{2m-2}}{1.2\ldots(2m-2)}+\ldots+\frac{H_{2m-2}.h^{2m-2}.z^2}{1.2}$$

$$-\left\{\frac{H_3.h^3.z^{2m-3}}{1.2\ldots(2m-3)}+\frac{H_5.h^5.z^{2m-5}}{1.2\ldots(2m-5)}+\ldots+\frac{H_{2m-1}.h^{2m-1}.z}{1}\right\}$$

ou enfin

$$\varphi(h-z)+\psi(h-z)=\varphi(z)-\psi(z). \tag{28}$$

En supposant ici $z=\frac{1}{2}h$, on aura

$$\psi\left(\frac{1}{2}h\right)=0,$$

ce qui ne peut avoir lieu pour toutes les valeurs entières de $m$, à moins que les coëfficients des termes différents dans $\psi(h-z)$ (¹) ne soient séparément égaux à zéro, c'est à dire que

$$H_3=H_5=H_7=\ldots=H_{2m-1}=0. \tag{28a}$$

Nous aurons donc au lieu de (27) et (28)

$$F(x,h)=-\int_0^h\varphi(h-z).u_{x+z}^{(2m+1)}.dz, \tag{29}$$

$$\varphi(h-z)=\varphi(z). \tag{30}$$

## § 5.

Quant aux coëfficients $H_1$, $H_2$, $H_4$ etc., on obtient immédiatement

$$H_1=-\frac{1}{2};$$

(¹) Voir la formule (26).

par conséquent, à l'aide de ($28_a$), la dernière des relations (24) peut être présentée sous la forme

$$(31)\qquad \frac{m-1}{1.2\ldots 2m}=\frac{H_2}{1.2\ldots(2m-2)}+\frac{H_4}{1.2\ldots(2m-4)}+\ldots+\frac{H_{2m-4}}{1.2.3.4}+\frac{H_{2m-2}}{1.2},$$

d'où, en multipliant par $2.\Gamma(2m)$ et en supposant généralement

$$(32)\qquad H_{2r}=(-1)^{r+1}.\frac{K_r}{1.2\ldots 2r},$$

on obtiendra la formule

$$\frac{m-1}{m}=(2m-1)_1.K_1-\frac{1}{2}(2m-1)_3.K_2+\frac{1}{3}(2m-1)_5.K_3-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{m-1}.\frac{1}{m-2}.(2m-1)_{2m-5}.K_{m-2}+(-1)^m.\frac{1}{m-1}.(2m-1)_{2m-3}.K_{m-1},$$

en vertu de laquelle (comparée à (18)) il faut nécessairement que

$$K_r=B_r,$$

et ensuite

$$(33)\qquad H_{2r}=(-1)^{r+1}.\frac{B_r}{1.2\ldots 2r},$$

en désignant par $B_r$ le $r$-ième nombre de BERNOULLI.

## § 6.

Ayant trouvé les valeurs de tous les coëfficients $H$, il nous reste à donner une relation entre eux, dont nous aurons besoin tout à l'heure et qui se trouvera facilement à l'aide de (30). En effet, cette formule donne immédiatement

$$(33_a) \qquad \int_0^h \varphi(z)dz = 2 . \int_0^{\frac{1}{2}h} \varphi(z)dz,$$

d'où, en faisant les integrations, on aura, après avoir divisé par $h^{2m+1}$,

$$\frac{1}{1.2...(2m+1)} + \frac{H_1}{1.2...2m} + \frac{H_2}{1.2...(2m-1)} + ... + \frac{H_{2m-2}}{1.2.3}$$

$$= \frac{1}{1.2...(2m+1)} \cdot \frac{1}{2^{2m}} + \frac{H_1}{1.2...2m} \cdot \frac{1}{2^{2m-1}} + \frac{H_2}{1.2...(2m-1)} \cdot \frac{1}{2^{2m-2}} + ... + \frac{H_{2m-2}}{1.2.3} \cdot \frac{1}{2^2},$$

et ensuite, en vertu des relations (24), en tenant compte de $(28_a)$,

$$(34) \quad -H_{2m} = \frac{1}{1.2...(2m+1)} \cdot \frac{1}{2^{2m}} + \frac{H_1}{1.2...2m} \cdot \frac{1}{2^{2m-1}} + \frac{H_2}{1.2...(2m-1)} \cdot \frac{1}{2^{2m-2}}$$

$$+ \frac{H_4}{1.2...(2m-3)} \cdot \frac{1}{2^{2m-4}} + ... + \frac{H_{2m-2}}{1.2.3} \cdot \frac{1}{2^2}.$$

## § 7.

Nous nous occuperons maintenant de quelques propriétés remarquables de la fonction $\varphi(z)$, et nous démontrerons en premier lieu

*qu'elle ne change pas de signe entre $z = 0$ et $z = h$, et qu'elle est positive dans cette étendue, si m est pair, et négative, si m est impair.*

Pour cela nous observerons, qu'en vertu de la valeur $H_1 = -\frac{1}{2}$, l'expression

$$z + H_1 h$$

est *négative* entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}.h$; en multipliant par $h^{-4}.dh$ et en intégrant entre $h = h$ et $h = \infty$, nous aurons

$$\int_h^\infty (z.h^{-4} + H_1.h^{-3})dh = \frac{z.h^{-3}}{3} + \frac{H_1.h^{-2}}{2}.$$

Cette expression étant *négative* entre les mêmes limites de $z$, il faut nécessairement que

$$\frac{z}{3} + \frac{H_1.h}{2}$$

et par conséquent

$$\int_z^{\frac{1}{2}h} \left(\frac{z}{3} + \frac{H_1.h}{2}\right)dz = -\left\{\frac{z^2}{1.2.3} + \frac{H_1.h.z}{1.2} + H_2.h^2\right\}$$

le soit aussi; d'où, en multipliant par $-z$, nous aurons l'expression

$$(35) \qquad \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{H_1.h.z^2}{1.2} + H_2.h^2.z,$$

qui est *positive* entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}.h$. Multiplions (35) par $h^{-6}.dh$ et intégrons entre $h = h$ et $h = \infty$, nous aurons

$$\frac{h^{-5}.z^3}{1.2.3.5} + \frac{H_1.h^{-4}.z^2}{1.2.4} + \frac{H_2.h^{-3}.z}{3}.$$

Cette expression, et par conséquent aussi celle de

$$\frac{z^3}{1.2.3.5} + \frac{H_1.h.z^2}{1.2.4} + \frac{H_2.h^2.z}{3},$$

doit être *positive* entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}.h$, et de même (1)

$$\int_z^{\frac{1}{2}h} \left(\frac{z^3}{1.2.3.5} + \frac{H_1.h.z^2}{1.2.4} + \frac{H_2.h^2.z}{3}\right)dz,$$

$$= -\left\{\frac{z^4}{1.2.3.4.5} + \frac{H_1.h.z^3}{1.2.3.4} + \frac{H_2.h^2.z^2}{1.2.3} + H_4.h^4\right\}$$

d'où, en multipliant par $-z$, il s'ensuit que l'expression

$$(36) \qquad \frac{z^5}{1.2.3.4.5} + \frac{H_1.h.z^4}{1.2.3.4} + \frac{H_2.h^2.z^3}{1.2.3} + H_4.h^4$$

doit être *négative* depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \frac{1}{2}h$. Il suffira donc, pour faire voir ce qui a lieu en général, de démontrer que, si l'expression

$$(37) \quad \frac{z^{2m-3}}{1.2\ldots(2m-3)} + \frac{H_1.h.z^{2m-4}}{1.2\ldots(2m-4)} + \frac{H_2.h^2.z^{2m-5}}{1.2\ldots(2m-5)} + \frac{H_4.h^4.z^{2m-7}}{1.2\ldots(2m-7)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{H_{2m-6}.h^{2m-6}.z^3}{1.2.3} + H_{2m-4}.h^{2m-4}.z$$

est toujours *positive* ou toujours *négative* entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}.h$, celle de

$$(38) \quad \frac{z^{2m-1}}{1.2\ldots(2m-1)} + \frac{H_1.h.z^{2m-2}}{1.2\ldots(2m-2)} + \frac{H_2.h^2.z^{2m-3}}{1.2\ldots(2m-3)} + \frac{H_4.h^4.z^{2m-5}}{1.2\ldots(2m-5)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{H_{2m-4}.h^{2m-4}.z^3}{1.2.3} + H_{2m-2}.h^{2m-2}.z$$

sera toujours *négative* ou toujours *positive* entre les mêmes limites de $z$.

---

(1) Voir la formule (34).

En effet, multiplions (37) par $h^{-2m}.\,dh$ et intégrons entre $h = h$ et $h = \infty$; il faut que l'intégrale

$$\frac{z^{2m-3}}{1.2\ldots(2m-3)}\cdot\frac{h^{-2m+1}}{2m-1} + \frac{H_1 . z^{2m-4}}{1.2\ldots(2m-4)}\cdot\frac{h^{-2m+2}}{2m-2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{H_{2m-6}.z^3}{1.2.3}\cdot\frac{h^{-5}}{5} + \frac{H_{2m-4}.z}{1}\cdot\frac{h^{-3}}{3},$$

et par conséquent l'expression

$$\frac{z^{2m-3}}{1.2\ldots(2m-3)}\cdot\frac{1}{2m-1} + \frac{H_1 z^{2m-4}}{1.2\ldots(2m-4)}\cdot\frac{h}{2m-2} + \frac{H_2 z^{2m-5}}{1.2\ldots(2m-5)}\cdot\frac{h^2}{2m-3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{H_{2m-6}.z^3}{1.2.3}\cdot\frac{h^{2m-6}}{5} + \frac{H_{2m-4}.z}{1}\cdot\frac{h^{2m-4}}{3},$$

soit *positive* ou *négative* entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}h$. Multipliant la dernière expression par $dz$ et intégrant entre $z = z$ et $z = \frac{1}{2}h$, l'intégrale

$$-\left\{\frac{z^{2m-2}}{1.2\ldots(2m-1)} + \frac{H_1 h z^{2m-3}}{1.2\ldots(2m-2)} + \frac{H_2 h^2 z^{2m-4}}{1.2\ldots(2m-3)} + \frac{H_4 h^4 z^{2m-6}}{1.2\ldots(2m-5)} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{H_{2m-4}h^{2m-4}.z^2}{1.2.3} + H_{2m-2}.h^{2m-2}\right\}$$

doit de même être toujours *positive* ou toujours *négative* entre les mêmes limites de $z$; d'où, en multipliant par $-z$, il suit que l'expression (38), qui n'est autre chose que la dérivée $\varphi'(z)$, est toujours *négative* ou toujours *positive* entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}h$.

Par ce qui précède[1] il est donc démontré que $\varphi'(z)$, fonction

---

[1] Dans les formules (35) et (36) nous avons trouvé la fonction $\varphi'(z)$ *positive* pour $m = 2$ et *négative* pour $m = 3$.

entière du $(2m - 1)^{\text{ème}}$ degré, est *positive* dans l'étendue indiquée, si $m$ est pair, et *négative*, si $m$ est impair. De là il suit immédiatement que l'expression

$$\int_0^z \varphi'(z)dz = \varphi(z)$$

*ne change pas de signe entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}h$, étant positive dans cette étendue, si $m$ est pair, et négative, si $m$ est impair.*

Il suffira donc de se rappeler la relation trouvée ci-dessus

$$\varphi(z) = \varphi(h - z) \tag{39}$$

pour avoir démontré ce dont il s'agissait, à savoir que

*la fonction $\varphi(z)$, ne changeant pas de signe entre $z = 0$ et $z = h$, est positive dans cette étendue, si $m$ est pair, et négative, si $m$ est impair.*

## § 8.

En différentiant (39) par rapport à $z$, on aura

$$\varphi'(z) = -\varphi'(h - z),$$

ce qui exige nécessairement

$$\varphi'(z) = 0 \text{ pour } z = \frac{1}{2}h.$$

Donc, la fonction $\varphi'(z)$ qui, en vertu de ce qui précède, conserve toujours le même signe entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}h$, s'évanouit pour $z = \frac{1}{2}h$; elle passe dans ce point du *positif* au *négatif* ($m$ étant pair) ou du *négatif* au *positif* ($m$ étant impair), et conserve ensuite le même signe depuis $z = \frac{1}{2}h$ jusqu'à

$z = h$. Il s'ensuit que la fonction primitive $\varphi(z)$ va toujours en augmentant (si $m$ est pair) ou en diminuant ($m$ étant impair) depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \frac{1}{2}h$, et qu'après cela elle décroît ou augmente continuellement jusqu'à $z = h$; c'est à dire que

*$\varphi(z)$ a, entre $z = 0$ et $z = h$, un seul maximum pour $z = \frac{1}{2}h$, si $m$ est pair, et un seul minimum pour la même valeur $z = \frac{1}{2}h$, si $m$ est impair.*

## § 9.

Nous reprenons maintenant la formule (22), qui peut être présentée sous la forme

$$(40) \qquad hu'_x = \Delta u_x - \frac{1}{2}h\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1 \cdot 2} \cdot \Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \Delta u^{IV}_x + \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^m \cdot B_{m-1} h^{2m-2}}{1 \cdot 2 \dots (2m-2)} + R,$$

où

$$(41) \qquad R = -\int_0^h u^{(2m+1)}_{x+z} \cdot \varphi(z)\, dz,$$

et par conséquent, $\varphi(z)$ conservant le même signe entre les limites de l'intégrale,

$$R = -u^{(2m+1)}_{x+\theta z} \cdot \int_0^h \varphi(z)\, dz,$$

c'est à dire, en vertu des formules (25), ($33_a$), (34) et (33),

$$(42) \qquad R = H_{2m} \cdot h^{2m+1} \cdot u^{(2m+1)}_{x+\theta h} = (-1)^{m+1} \cdot \frac{B_m h^{2m+1}}{1 \cdot 2 \dots 2m} \cdot u^{(2m+1)}_{x+\theta h}.$$

Cette valeur de $R$, substituée dans (40), nous donnera ce

Théorème I. *Soit $u_x$ une fonction quelconque de $x$ qui, de même que ses $2m+1$ premières dérivées, est continue entre $x$ et $x+h$; la valeur de $R$ dans la formule (40) sera égale à*

$$(-1)^{m+1}\frac{B_m \cdot h^{2m+1}}{1\,.\,2\,\ldots\,2m}$$

*multiplié par une valeur intermédiaire de la $(2m+1)^{\text{ième}}$ dérivée; c'est à dire, on aura*

$$(43)\qquad hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1\,.\,2}\,.\,\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,.\,\Delta u^{\mathrm{IV}}_x + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^m\,.\,B_{m-1}h^{2m-2}}{1\,.\,2\ldots(2m-2)}\,.\,\Delta u_x^{(2m-2)} + \frac{(-1)^{m+1}\,.\,B_m h^{2m+1}}{1\,.\,2\ldots 2m}\,.\,u^{(2m+1)}_{x+\theta h},$$

$$0 < \theta < 1.$$

Ce théorème est absolument général, ne supposant que la continuité de la fonction $u_x$ et celle de ses $2m+1$ premières dérivées.

En faisant dans la formule (40) $x = x_1$ et ensuite $x = x_0$, on aura par soustraction

$$(44)\quad h(u'_{x_1} - u'_{x_0}) = \Delta u_{x_1} - \Delta u_{x_0} - \frac{h}{2}\{\Delta u'_{x_1} - \Delta u'_{x_0}\} + \frac{B_1 h^2}{1\,.\,2}\{\Delta u''_{x_1} - \Delta u''_{x_0}\} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^m\,.\,B_{m-1}h^{2m-2}}{1\,.\,2\ldots(2m-2)}\{\Delta u_{x_1}^{(2m-2)} - \Delta u_{x_0}^{(2m-2)}\} - \int_0^h \varphi(z)\,dz\,.\{u^{(2m+1)}_{x_1+z} - u^{(2m+1)}_{x_0+z}\}.$$

De là, $\varphi(z)$ conservant le même signe entre les limites de l'intégrale, on obtiendra, comme ci-dessus,

$$(45)\quad h(u'_{x_1} - u'_{x_0}) = \Delta u_{x_1} - \Delta u_{x_0} - \frac{h}{2}\{\Delta u'_{x_1} - \Delta u'_{x_0}\} + \frac{B_1 h^2}{1\,.\,2}\{\Delta u''_{x_1} - \Delta u''_{x_0}\} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^m\,.\,B_{m-1}h^{(2m-2)}}{1\,.\,2\ldots(2m-2)}\{\Delta u_{x_1}^{(2m-2)} - \Delta u_{x_0}^{(2m-2)}\} + \frac{(-1)^{m+1}\,.\,B_m h^{2m+1}}{1\,.\,2\ldots 2m}\{u^{(2m+1)}_{x_1+\theta h} - u^{(2m+1)}_{x_0+\theta h}\}.$$

Supposons ici [1]

$$(46) \qquad u'_{x_1+z} - u'_{x_0+z} = \sum_{x_0}^{x_1} f(x+z),$$

d'où [2]

$$\Delta u_{x_1} - \Delta u_{x_0} = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx,$$

---

[1] De même que cela a lieu en général pour les intégrales définies nous employons partout dans ce mémoire le signe

$$\sum_{x_0}^{x_1} f(x) = \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} \Sigma f(x).$$

[2] En supposant $\dfrac{dF(x+z)}{dz} = \dfrac{dF(x+z)}{dx} = f(x+z)$ on aura en général

$$\int_z^{z+h} f(x+z)\,dz = \int_x^{x+h} f(x+z)\,dx = \Delta F(x+z),$$

et

$$(a). \qquad \int_{x_0}^{x_1} f(x+z)\,dx = F(x_1+z) - F(x_0+z) = \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} F(x+z).$$

Or, en mettant

$$u'_{x_1+z} - u'_{x_0+z} = \sum_{x_0}^{x_1} f(x+z) = \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} \Sigma f(x+z),$$

on aura, l'intégration faite entre $z$ et $z+h$,

$$\Delta u_{x_1+z} - \Delta u_{x_0+z} = \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} \Sigma \int_z^{z+h} f(x+z)\,dz = \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} \Sigma \Delta F(x+z)$$

$$= \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} F(x+z)\,dz,$$

c'est à dire, à l'aide de (a)

$$(b) \qquad \Delta u_{x_1+z} - \Delta u_{x_0+z} = \int_{x_0}^{x_1} f(x+z)\,dx.$$

et en général

$$\Delta u_{x_1}^{(r)} - \Delta u_{x_0}^{(r)} = f^{(r-1)}(x_1) - f^{(r-1)}(x_0),$$

nous aurons la formule

$$(47)\quad h\sum_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \frac{h}{2}\{f(x_1)-f(x_0)\} + \frac{B_1 h^2}{1\,.\,2}\{f'(x_1)-f'(x_0)\} - \cdots$$

$$\cdots + \frac{(-1)^m . B_{m-1} h^{2m-2}}{1\,.\,2\ldots(2m-2)}\{f^{(2m-3)}(x_1)-f^{(2m-3)}(x_0)\} + \frac{(-1)^{m+1} . B_m h^{2m+1}}{1\,.\,2\ldots 2m} . \sum_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x+\theta h),$$

qui n'exige pas nécessairement que $x_1 - x_0$ soit un multiple exact de $h$.

Dans le cas $x_1 - x_0 = nh$, en désignant par $M_{2m}$ la plus grande *valeur numérique* de $f^{(2m)}(x)$ depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_1$, nous aurons, abstraction faite du signe,

$$\left|\sum_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x + \theta h)\right| < \left|\frac{x_1 - x_0}{h}\right| . M_{2m},$$

et partant

$$(48)\ h\sum_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \frac{h}{2}\{f(x_1)-f(x_0)\} + \frac{B_1 h^2}{1\,.\,2}\{f'(x_1)-f'(x_0)\} - \cdots$$

$$\cdots + \frac{(-1)^m . B_{m-1} h^{2m-2}}{1\,.\,2\ldots(2m-2)}\{f^{(2m-3)}(x_1)-f^{(2m-3)}(x_0)\} \pm \theta . \frac{B_m h^{2m}}{1\,.\,2\ldots 2m} . (x_1 - x_0) M_{2m}.$$

En comparant cette formule (48) aux formules (3) et (4) on voit que, pour obtenir, par développement en série, une valeur approximative de

---

En différentiant $r$ fois par rapport à $z$, étant en général

$$\frac{d^k f(x+z)}{dz^k} = \frac{d^k f(x+z)}{dx^k},$$

on aura enfin

$$(c)\qquad \Delta u_{x_1+z}^{(r)} - \Delta u_{x_0+z}^{(r)} = f^{(r-1)}(x_1 + z) - f^{(r-1)}(x_0 + z).$$

$\sum\limits_{x_0}^{x_1} f(x)$ dont la différence de la vraie valeur de $\sum\limits_{x_0}^{x_1} f(x)$ est numériquement $< s$, il suffira en effet de calculer *un* terme de moins de la série en question que n'en exigent les formules de POISSON.

## § 10.

En supposant maintenant dans (40) et (41) que $u_{x+z}^{(2m+1)}$ ne change pas de signe entre $z = 0$ et $z = h$, nous aurons

$$R = -\varphi(\theta h).\Delta u_x^{(2m)}.$$

Comme $\varphi(z)$ conserve le même signe depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$, de sorte que sa plus grande valeur numérique soit $\varphi\left(\frac{1}{2}h\right)$, et sa moindre valeur zéro, nous aurons

$$R = -\theta.\varphi\left(\frac{1}{2}h\right).\Delta u_x^{(2m)}. \qquad (0 < \theta < 1)$$

Quant à $\varphi\left(\frac{1}{2}h\right)$, on en obtiendra facilement la valeur à l'aide de (25) et (21), à savoir

$$\varphi\left(\frac{1}{2}h\right) = (-1)^m.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m}, \tag{49}$$

d'où enfin

$$R = (-1)^{m+1}.\theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m}.\Delta u_x^{(2m)}. \tag{50}$$

Nous aurons donc le théorème suivant:

Théorème II. *Soit $u_x$ une fonction quelconque de $x$, continue de même que ses $2m+1$ premières dérivées depuis $x$ jusqu'à $x+h$; soit* *de plus la* $(2m+1)^{\text{ième}}$ *dérivée toujours du même signe entre ces limites; la valeur de R dans la formule* (40) *sera*

$$R = (-1)^{m+1}.\theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m}.\Delta u_x^{(2m)};$$

*et partant nous aurons*

$$(51)\qquad hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}.\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1.2}.\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1.2.3.4}.\Delta u_x^{\mathrm{IV}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^m.B_{m-1}h^{2m-2}}{1.2\ldots(2m-2)}.\Delta u_x^{(2m-2)} + (-1)^{m+1}.\theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m}.\Delta u_x^{(2m)},$$

$$0 < \theta < 1.$$

De même, en supposant dans (44) que

$$u_{x_1+z}^{(2m+1)} - u_{x_0+z}^{(2m+1)}$$

conserve toujours le même signe depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$, on en tire facilement l'expression

$$(52)\quad h(u'_{x_1} - u'_{x_0}) = \Delta u_{x_1} - \Delta u_{x_0} - \frac{h}{2}\{\Delta u'_{x_1} - \Delta u'_{x_0}\} + \frac{B_1 h^2}{1.2}\{\Delta u''_{x_1} - \Delta u''_{x_0}\} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^m.B_{m-1}h^{2m-2}}{1.2\ldots(2m-2)}\{\Delta u_{x_1}^{(2m-2)} - \Delta u_{x_0}^{(2m-2)}\}$$

$$+ (-1)^{m+1}.\theta\ \frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m}\{\Delta u_{x_1}^{(2m)} - \Delta u_{x_0}^{(2m)}\}, \qquad (0 < \theta < 1)$$

d'où, en faisant

$$u'_{x_1+z} - u'_{x_0+z} = \sum_{x_0}^{x_1} f(x+z),$$

on obtiendra

$$(53)\qquad h\sum_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \frac{h}{2}\{f(x_1)-f(x_0)\} + \frac{B_1 h^2}{1.2}\{f'(x_1)-f'(x_0)\}$$

$$-\frac{B_2 h^4}{1.2.3.4}\cdot\{f'''(x_1)-f'''(x_0)\}+\dots+\frac{(-1)^m . B_{m-1} . h^{2m-2}}{1.2\dots(2m-2)}\{f^{(2m-3)}(x_1)-f^{(2m-3)}(x_0)\}$$

$$+(-1)^{m+1}.\theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m h^{2m}}{1.2\dots 2m}\{f^{(2m-1)}(x_1)-f^{(2m-1)}(x_0)\}. \qquad (0<\theta<1)$$

Cette formule suppose que

$$\sum_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x+z)$$

conserve son signe depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$. En la comparant à la formule (6), on trouvera facilement

1° que dans notre formule le terme complémentaire est compris entre des limites plus reserrées;

2° qu'il n'y est pas nécessaire que $x_1 - x_0$ soit un multiple exact de $h$. Il faut seulement observer que dans ce cas le membre à droite de (53) ne donne qu'une valeur particulière de $\sum_{x_0}^{x_1} f(x)$; d'où, pour en avoir la valeur générale, il faut la compléter par

$$(54)\qquad \vartheta(x_1) - \vartheta(x_0),$$

$\vartheta(x)$ étant une fonction périodique quelconque, telle que

$$\vartheta(x+h) - \vartheta(x) = 0.$$

La formule (6) au contraire exige nécessairement que $x_1 - x_0$ soit un multiple exact de $h$.

3° La déduction de la formule (6) suppose que $f^{(2m)}(x)$ conserve le même signe depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_1$; pour notre formule (53) il suffit que

$$\sum_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x+z) \tag{55}$$

ne change pas de signe depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$. En effet, dans le cas où $x_1 - x_0$ est un multiple exact de $h$, il est évident que cela a toujours lieu, si $f^{(2m)}(x)$ conserve le même signe depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_1$; mais cela peut aussi avoir lieu sans cela.

## § 11.

En ajoutant à (51) l'expression

$$0 = (-1)^{m+1}\left\{\frac{B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m}.\Delta u_x^{(2m)} - \frac{B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m}.\Delta u_x^{(2m)}\right\},$$

on aura

$$hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}.\Delta u'_x - \frac{B_1 h^2}{1.2}.\Delta u''_x + \frac{B_2 h^4}{1.2.3.4}.\Delta u_x^{\mathrm{IV}} - \ldots \tag{56}$$

$$\ldots + (-1)^{m+1}.\frac{B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m}.\Delta u_x^{(2m)} + (-1)^{m+1}\left\{\theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} - 1\right\}\frac{B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m}.\Delta u_x^{(2m)};$$

et de même on tirera de (53)

$$h\sum_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \frac{h}{2}\{f(x_1) - f(x_0)\} + \frac{B_1 h^2}{1.2}\{f'(x_1) - f'(x_0)\} \tag{57}$$

$$- \frac{B_2 h^4}{1.2.3.4}\{f'''(x_1) - f'''(x_0)\} + \ldots + \frac{(-1)^{m+1}.B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\}$$

$$+ (-1)^{m+1}\left\{\theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} - 1\right\}.\frac{B_m h^{2m}}{1.2\ldots 2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\}.$$

Cette formule fait voir que, si dans le calcul de

$$h\sum_{x_0}^{x_1} f(x)$$

*on s'arrête à un certain terme du développement, la valeur numérique du terme complémentaire ne surpasse jamais celle du dernier terme.*

§ 12.

En mettant dans (43) $m+1$ à la place de $m$, et en comparant le résultat à (51), on aura

$$(58)\qquad \frac{B_{m+1}\cdot h^{2m+3}}{1.2\ldots(2m+2)}\cdot u_{x+\theta h}^{(2m+3)} = -\left\{\theta\cdot\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}-1\right\}\cdot\frac{B_m\cdot h^{2m}}{1.2\ldots 2m}\cdot\int_0^h u_{x+z}^{(2m+1)}dz.$$

Donc, si les dérivées

$$u_{x+z}^{(2m+1)} \text{ et } u_{x+z}^{(2m+3)}$$

ne changent pas de signe depuis $z=0$ jusqu'à $z=h$, et qu'elles aient le même signe, il faut que

$$\theta\cdot\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}-1$$

soit négatif, c'est à dire que[1]

$$\theta\cdot\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}=\theta<1,$$

ce qui substitué dans (51) donnera immédiatement le théorème suivant:

---

[1] Il faut observer que nous désignons toujours par $\theta$ une quantité positive dont on ne connaît que $0<\theta<1$.

Théorème III. *Soit $u_{x+z}$ une fonction quelconque de $x$ qui, de même que ses $2m+3$ premières dérivées, est continue depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$; supposons de plus que la $(2m+1)^{\text{ième}}$ et la $(2m+3)^{\text{ième}}$ dérivées*

$$u_{x+z}^{(2m+1)} \text{ et } u_{x+z}^{(2m+3)},$$

*ne changeant pas de signe entre ces limites, soient toutes deux du même signe; dans ce cas nous aurons*

$$(59) \qquad hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}.\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1.2}.\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1.2.3.4}.\Delta u_x^{\mathrm{IV}} + \dots$$

$$\dots + (-1)^m.\frac{B_{m-1} h^{2m-2}}{1.2\dots(2m-2)}.\Delta u_x^{(2m-2)} + (-1)^{m+1}.\theta.\frac{B_m h^{2m}}{1.2\dots 2m}.\Delta u_x^{(2m)},$$

$$0 < \theta < 1.$$

De même, en mettant dans (47) $m+1$ à la place de $m$ et en comparant le résultat à (57), nous aurons, à cause de

$$f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0) = \int_0^h \sum_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x+z)dz,$$

cette formule

$$(60) \qquad h\sum_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \frac{h}{2}\{f(x_1) - f(x_0)\} + \frac{B_1 h^2}{1.2}\{f'(x_1) - f'(x_0)\}$$

$$-\frac{B_2 h^4}{1.2.3.4}\{f'''(x_1) - f'''(x_0)\} + \dots + (-1)^m.\frac{B_{m-1} h^{2m-2}}{1.2\dots(2m-2)}\{f^{(2m-3)}(x_1) - f^{(2m-3)}(x_0)\}$$

$$+(-1)^{m+1}.\theta.\frac{B_m h^{2m}}{1.2\dots 2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\} \qquad (0 < \theta < 1)$$

*pour le cas où*

$$(61) \qquad \sum_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x+z) \text{ et } \sum_{x_0}^{x_1} f^{(2m+2)}(x+z),$$

*ne changeant pas de signe depuis* $z = 0$ *jusqu'à* $z = h$, *ont toutes deux le même signe.* La formule (60) est précisément celle qui a été proposée par JACOBI (voir la formule (8)).

## *Applications.* (1)

### § 13.

Nous ferons maintenant quelques applications du dernier des théorèmes proposés.

**Première application. Développement de** $\log \Gamma(x)$.

En multipliant par $dx$ la formule connue

$$\frac{d \log \Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty dz \left( \frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1 - e^{-z}} \right),$$

et en intégrant par rapport à $x$, à partir de $x = 1$, on obtiendra

$$\log \Gamma(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-z} dz}{z} \cdot \left[ x - 1 - \frac{1 - e^{-(x-1)z}}{1 - e^{-z}} \right].$$

Supposons dans (59) $h = 1$ et

$$(62) \qquad u'_x = \int_0^\infty \frac{e^{-z} dz}{z} \cdot \left[ x - 1 - \frac{1 - e^{-(x-1)z}}{1 - e^{-z}} \right] = \log \Gamma(x),$$

(1) Il ne faut pas oublier que ces applications ont été faites en 1846, il y a 38 ans.

d'où

$$(63) \qquad u''_x = \int_0^\infty dz\left[\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1-e^{-z}}\right],$$

et en général, $r$ étant $> 2$,

$$u_x^{(r)} = (-1)^{r-1}.\int_0^\infty \frac{z^{r-2}.e^{-xz}}{1-e^{-z}}dz;$$

cette supposition satisfera évidemment aux conditions du théorème III.

À cause de

$$\Delta u_x = \int_0^h u'_{x+y}dy,$$

on aura pour le cas en question

$$\Delta u_x = \int_0^h \log \Gamma(x+y)dy$$

et, en faisant $x + y = y_1$,

$$\Delta u_x = \int_0^1 \log \Gamma(y_1+1)dy_1 + \int_1^x \log \Gamma(y_1+1)dy_1 - \int_0^{x-1} \log \Gamma(y_1+1)dy_1$$

$$= \int_0^1 \log \Gamma(y_1+1)dy_1 + \int_1^x [\log \Gamma(y_1+1) - \log \Gamma(y_1)]dy_1,$$

c'est à dire

$$\Delta u_x = \int_0^1 \log \Gamma(y_1+1)dy_1 + \int_1^x \log y_1.dy;$$

d'où enfin, en vertu d'une formule donnée par Raabe, savoir

$$\int_0^1 \log \Gamma(y_1+1)dy_1 = \frac{1}{2}\log(2\pi) - 1,$$

on aura

$$\Delta u_x = \frac{1}{2}\log(2\pi) + x.\log x - x,$$

et partant

$$\Delta u'_x = \log x,$$

et en général pour $r > 1$

$$\Delta u_x^{(r)} = (-1)^r.\frac{\Gamma(r-1)}{x^{r-1}}.$$

Pour ces valeurs de $u'_x$, $\Delta u_x$, $\Delta u'_x$ etc. le théorème III donnera

$$\log\Gamma(x) = \frac{1}{2}\log(2\pi) + \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x. - x + \frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{B_3}{5.6}\cdot\frac{1}{x^5} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^m.B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}\cdot\frac{1}{x^{2m-3}} + \frac{(-1)^{m+1}.B_m}{(2m-1)2m}\cdot\frac{\theta}{x^{2m-1}},$$

$$(0 < \theta < 1)$$

ou, en y ajoutant $\log x$,

$$(64)\quad \log\Gamma(x+1) = \frac{1}{2}\log(2\pi) + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{B_1}{1:2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{B_3}{5.6}\cdot\frac{1}{x^5} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^m.B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}\cdot\frac{1}{x^{2m-3}} + \frac{(-1)^{m+1}.B_m}{(2m-1)2m}\cdot\frac{\theta}{x^{2m-1}},$$

$$0 < \theta < 1.$$

Cette formule est généralement applicable, quelle que soit la valeur positive de $x$, ce qui n'est pas le cas pour les résultats que les méthodes ordinaires donnent pour le développement de $\log\Gamma(x+1)$. Leur point de départ étant ordinairement la formule

$$\log\Gamma(x+1) = \log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots + \log x,$$

le résultat n'est rigoureusement le développement de $\log \Gamma(x+1)$ que pour des valeurs entières de $x$. Quant aux analyses qui ne sont pas sujettes à cette restriction (p. ex. celle de CAUCHY et celle de LIOUVILLE), elles sont tout à fait particulières pour le développement de $\log \Gamma(x+1)$, et n'ont pas de relation avec la formule sommatoire générale d'EULER.

En posant pour abréger

$$M(x) = \frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{B_3}{5.6}\cdot\frac{1}{x^5} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^m.B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}\cdot\frac{1}{x^{2m-3}} + \frac{(-1)^{m+1}.B_m}{(2m-1)2m}\cdot\frac{1}{x^{2m-1}},$$

on tirera de (64), pour une valeur quelconque de $x > 0$, l'expression

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}.x^x.e^{-x}.e^{M(x)};$$

ce qui donnera successivement les relations suivantes

$$\Gamma(x+1) > \sqrt{2\pi x}.x^x.e^{-x},$$

$$\Gamma(x+1) < \sqrt{2\pi x}.x^x.e^{-x}.e^{\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x}},$$

$$\Gamma(x+1) > \sqrt{2\pi x}.x^x.e^{-x}.e^{\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x}}.e^{-\frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3}},$$

$$\Gamma(x+1) < \sqrt{2\pi x}.x^x.e^{-x}.e^{\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x}}.e^{-\frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3}}.e^{\frac{B_3}{5.6}\cdot\frac{1}{x^5}},$$

. . . . . . . . . . . . . . .

Ces mêmes relations ont déjà été trouvées par RAABE pour des nombres entiers quelconques de $x$. Ce géomètre finit son mémoire (Journal de CRELLE, T. XXV, p. 159) par ces mots: »Sans doute elles subsistent encore pour des valeurs fractionnaires et même incommensurables; mais je n'ai pu réussir jusqu'à présent à démontrer cela rigoureusement.»

§ 14.

**Deuxième application.**

Supposons dans (59) $h = 1$ et

$$u'_x = \frac{\Gamma(a + x)}{\Gamma(b + x).\Gamma(a - b + x)}, \tag{65}$$

où $a > b$; nous aurons facilement, en vertu de (63),

$$u''_x = -\int_0^\infty dz\left[\frac{e^{-z}}{z} + \frac{e^{-xz}}{1 - e^{-z}}\left(e^{-az} - e^{-bz} - e^{-(a-b)z}\right)\right],$$

et généralement pour $r > 2$

$$u_x^{(r)} = (-1)^{r-1}.\int_0^\infty \frac{z^{r-2}.e^{-xz}}{1 - e^{-z}}\left(e^{-bz} + e^{-(a-b)z} - e^{-az}\right)dz.$$

Cette expression satisfera évidemment aux conditions du théorème III, d'où l'on conclut qu'en s'arrêtant dans le développement de (65) à un certain terme la valeur numérique du reste ne surpasse jamais celle du terme suivant. Ce développement s'obtiendra sans difficulté à l'aide de (64), qui donnera

$$\log\left\{\frac{\Gamma(a + x + 1)}{\Gamma(b + x + 1).\Gamma(a - b + x + 1)}\right\} = -\frac{1}{2}\log(2\pi) + \left(a + x + \frac{1}{2}\right)\log(a + x) \tag{66}$$

$$-\left(b + x + \frac{1}{2}\right)\log(b + x) - (a - b + x + 1)\log(a - b + x) + x + \frac{B_1}{1.2}.q_1(x)$$

$$-\frac{B_2}{3.4}.q_3(x) + \dots + \frac{(-1)^m.B_{m-1}}{(2m-3)(2m-1)}.q_{2m-3}(x) + \frac{(-1)^{m+1}.\theta.B_m}{(2m-1)2m}.q_{2m-1}(x),$$

où, pour abréger, on a posé

$$q_k(x) = \frac{1}{(a+x)^k} - \frac{1}{(b+x)^k} - \frac{1}{(a-b+x)^k}.$$

Supposons $x = 0$; en écrivant $q_k$ au lieu de $q_k(0)$ et en faisant

$$(67)\quad N(q) = \frac{B_1}{1.2}.q_1 - \frac{B_2}{3.4}.q_3 + \dots + \frac{(-1)^m.B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}.q_{2m-3} + \frac{(-1)^{m+1}.\theta.B_m}{(2m-1)2m}.q_{2m-1},$$

nous aurons

$$\log\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1).\Gamma(a-b+1)} = -\frac{1}{2}\log(2\pi) + \left(a+\frac{1}{2}\right)\log a - \left(b+\frac{1}{2}\right)\log b$$

$$-\left(a-b+\frac{1}{2}\right)\log(a-b) + N(q),$$

et partant

$$(68)\qquad \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1).\Gamma(a-b+1)} = \sqrt{\frac{a}{2\pi b(a-b)}}\cdot\frac{a^a.e^{N(q)}}{b^b(a-b)^{a-b}}.$$

Lorsque $a$ et $b$ sont des nombres entiers, cette formule donne la valeur du coëfficient du $(b+1)^{\text{ième}}$ terme du développement de $(m+n)^a$.

Si $a = 2r$ et $b = r$, on obtiendra la valeur du coëfficient du terme moyen du développement de $(m+n)^{2r}$. En désignant ce coëfficient par $F$, on aura

$$(69)\qquad F = \frac{2^{2r}}{\sqrt{\pi r}}.e^{-\mathfrak{p}(r)},$$

où

$$\mathfrak{p}(r) = \frac{2^2-1}{2}\cdot\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{r} - \frac{2^4-1}{2^3}\cdot\frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{r^3} + \frac{2^6-1}{2^5}\cdot\frac{B_3}{5.6}\cdot\frac{1}{r^5} - \dots$$

$$\dots + (-1)^m.\frac{2^{2m-2}-1}{2^{2m-3}}\cdot\frac{B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}\cdot\frac{1}{r^{2m-3}} + (-1)^{m+1}.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m}{(2m-1)2m}\cdot\frac{\theta}{r^{2m-1}}.$$

Désignons par $T$ le plus grand terme du développement de

$$(m + n)^{mr+nr};$$

on sait que ce terme est le $(nr + 1)^{\text{ième}}$ [1], et partant nous aurons

$$T = \mathfrak{A} m^{mr+nr}.$$

Quant au coëfficient $\mathfrak{A}$, il s'obtiendra par (68) en faisant $a = mr + nr$ et $b = nr$; d'où il résultera enfin

$$T = \sqrt{\frac{m+n}{2\pi . mnr}} . e^{Q} . (m + n)^{mr+nr}, \tag{70}$$

en posant pour abréger

$$Q = \frac{B_1}{1.2} . v_1 - \frac{B_2}{3.4} . v_3 + \dots + \frac{(-1)^m . B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)} . v_{2m-3} + \frac{(-1)^{m+1} . \theta . B_m}{(2m-1)2m} . v_{2m-1},$$

---

[1] Ceci se démontre facilement de la manière suivante. Désignons par $T_k$ le $k^{\text{ième}}$ terme dans le développement de $(m + n)^{mr+nr}$; on voit aisément que

$$T_k - T_{k+1} = \frac{(mr + nr)_{k-1}}{k} . m^{mr+nr-k} . n^{k-1} \{(k - nr)(m + n) - n\}.$$

Mais, à cause de

$$(k - nr)(m + n) - n < 0 \text{ pour } k \leqq nr$$

et

$$(k - nr)(m + n) - n > 0 \text{ pour } k > nr,$$

on trouvera immédiatement que,

pour $k \leqq nr$, chaque terme est plus *grand* que celui qui le précède immédiatement,
pour $k > nr$, chaque terme est *moindre* que celui qui le précède immédiatement;

d'où il s'ensuit que

$$T_1 < T_2 < \dots < T_{nr} < T_{nr+1}$$

et

$$T_{nr+1} > T_{nr+2} > T_{nr+3} > \dots > T_{nr+mr+1},$$

c'est à dire, que $T_{nr+1}$ *est le plus grand terme.*

où généralement

$$v_k = \frac{1}{r^k}\left\{\frac{1}{(m+n)^k} - \frac{1}{m^k} - \frac{1}{n^k}\right\}$$

La formule (70) donnera immédiatement

$$(71) \qquad \frac{T}{(m+n)^{mr+nr}} = \sqrt{\frac{m+n}{2\pi . mnr}} . e^{Q};$$

ce qui est l'expression du rapport du plus grand terme $T$ du développement de $(m+n)^{mr+nr}$ au binôme $(m+n)^{mr+nr}$ lui-même.

Avec la même facilité, que nous avons obtenu la formule (68), en prenant pour point de départ la formule

$$u'_x = \log\left\{\frac{\Gamma(b+x) . \Gamma(a-b+x)}{\Gamma(c+x) . \Gamma(a-c+x)}\right\},$$

nous aurions aussi trouvé

$$(72) \qquad \frac{\Gamma(b+1) . \Gamma(a-b+1)}{\Gamma(c+1) . \Gamma(a-c+1)} = \sqrt{\frac{b(a-b)}{c(a-c)}} \cdot \frac{b^b . (a-b)^{a-b}}{c^c . (a-c)^{a-c}} . e^{N(p)},$$

en posant

$$N(p) = \frac{B_1}{1 . 2} . p_1 - \frac{B_2}{3 . 4} . p_3 + \dots + \frac{(-1)^m . B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)} . p_{2m-3} + \frac{(-1)^{m+1} . \theta . B_m}{(2m-1)2m} . p_{2m-1},$$

où généralement

$$p_k = \frac{1}{b^k} + \frac{1}{(a-b)^k} - \frac{1}{c^k} - \frac{1}{(a-c)^k} .$$

Si $a$, $b$, $c$ sont des nombres entiers, la formule (72) donnera l'expression du rapport entre le $(c+1)^{\text{ième}}$ et le $(b+1)^{\text{ième}}$ terme du développement de $(m+n)^a$, savoir

$$\sqrt{\frac{b(a-b)}{c(a-c)}} \cdot \frac{b^b (a-b)^{a-b}}{c^c (a-c)^{a-c}} \cdot \frac{n^{c-b}}{m^{c-b}} . e^{N(p)}.$$

Les expressions, que nous venons de trouver, étant d'une grande importance pour le calcul des probabilités, ont été proposées par LAPLACE. Mais cet illustre analyste n'a pas remarqué que, les séries dont il s'agit étant divergentes, leur emploi n'est pas légitime, à moins que les limites des termes complémentaires ne soient déterminées. C'est ce qui peut toujours se faire à l'aide de nos formules.

## § 15.

### Troisième application.

Posons suivant LEGENDRE

$$\frac{d\log\Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty dz\left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1-e^{-z}}\right) = Z'(x);$$

en faisant dans (59) $h = 1$ et

$$(73)\qquad u'_x = Z'(n+1-x) - Z'(n+x) = -\int_0^\infty \frac{dz}{1-e^{-z}}\left(e^{-(n+1-x)z} - e^{-(n+x)z}\right),$$

nous aurons généralement

$$u_x^{(r)} = -\int_0^\infty \frac{z^{r-1}dz}{1-e^{-z}}\left(e^{-(n+1-x)z} + (-1)^r . e^{-(n+x)z}\right),$$

d'où l'on voit que les conditions du théorème III sont remplies. De plus, la formule (73) donne

$$\Delta u_x = \int_0^1 u'_{x+y}\,dy = \log\frac{n-x}{n+x},$$

et généralement

$$\Delta u_x^{(r)} = (-1)^r.\Gamma(r).b_r,$$

en faisant pour abréger

$$(74)\qquad b_r = \frac{1}{(x+n)^r} - \frac{1}{(x-n)^r}.$$

Au moyen de ces valeurs de $u'_x$, $\Delta u_x$, $\Delta u'_x$, etc. et à l'aide de la formule connue

$$(75)\qquad Z'(1+a) = \frac{1}{a} + Z'(a),$$

on tirera immédiatement de (59)

$$(76)\quad Z'(n-x) - Z'(n+x) = \log\frac{n-x}{n+x} - \frac{x}{n^2-x^2} + \frac{B_1}{2}.b_2 - \frac{B_2}{4}.b_4 + \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^m.B_{m-1}}{2m-2}.b_{2m-2} + \frac{(-1)^{m+1}.\theta.B_m}{2m}.b_{2m},$$

$$(0 < \theta < 1)$$

$b_r$ étant déterminé par (74). La formule (76) subsiste pour toutes les valeurs positives ou négatives de $x$, numériquement inférieures à $n$.

Soit $k$ un nombre entier positif ou négatif, dont la valeur numérique ne surpasse pas $n$; $x$ étant tel que

$$k > x > k - 1,$$

on aura, en vertu de (75),

$$Z'(n-x) = Z'(k-x) + \mathop{\mathrm{S}}_{i=k}^{i=n-1} \frac{1}{i-x},$$

$$Z'(n+x) = Z'(1-[k-x]) + \mathop{\mathrm{S}}_{i=k}^{i=n-1} \frac{1}{i+x} + \mathop{\mathrm{S}}_{i=-(k-1)}^{i=k-1} \frac{1}{i+x}$$

$$= \frac{1}{x} + Z'(1-[k-x]) + \mathop{\mathrm{S}}_{i=k}^{i=n-1} \frac{1}{i+x} - \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=k-1} \frac{2x}{i^2-x^2},$$

d'où, en soustrayant,

$$Z'(n-x)-Z'(n+x)=Z'(k-x)-Z'(1-[k-x])-\frac{1}{x}+\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=n-1}\frac{2x}{i^2-x^2}.$$

En substituant cette valeur dans (76), et en se rappelant que $k > x > k-1$, et de plus que

$$Z'(k-x)-Z'(1-[k-x]) = -\pi.\mathrm{cotg}\,(k-x)\pi = \pi.\mathrm{cotg}\,\pi x,$$

on aura

$$(77)\qquad \pi\,\mathrm{cotg}\,\pi x = \log\frac{n-x}{n+x}+\frac{1}{x}-\frac{x}{n^2-x^2}-\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=n-1}\frac{2x}{i^2-x^2}$$

$$+\frac{B_1}{2}.b_2-\frac{B_2}{4}.b_4+\ldots+\frac{(-1)^m.B_{m-1}}{2m-2}.b_{2m-2}+\frac{(-1)^{m+1}.\theta.B_m}{2m}.b_{2m},$$

où $b_r$ est donné par (74). Cette formule est applicable pour toutes les valeurs de $x$, positives ou négatives, non entières et non supérieures à $n$. Dans le cas où *$x$ est un nombre entier* $< n$, les deux membres de (77) deviennent infinis; mais on démontrera facilement que, $x$ convergeant vers un nombre entier $\mu < n$, le rapport des deux membres convergera vers l'unité. Donc, généralement la formule (77) subsistera pour toutes les valeurs positives et négatives de $x$, inférieures à $n$.

De cette formule générale, qui (je crois) n'a pas été proposée jusqu'ici, on tirera, en faisant $n=\infty$, la formule connue

$$\pi\,\mathrm{cotg}\,\pi x = \frac{1}{x}-\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=\infty}\frac{2x}{i^2-x^2}.$$

## § 16.

### Quatrième application.

En faisant dans (59) $h = 1$ et

$$u'_x = \log\left\{\frac{\Gamma(x-y).\Gamma(x+y)}{[\Gamma(x)]^2}\right\} = \int_0^\infty \frac{e^{-xz}dz}{1-e^{-z}}(e^{yz}+e^{-yz}-2),$$

$$(x > y)$$

les conditions du théorème III sont satisfaites. Il s'ensuit qu'en s'arrêtant à un certain terme du développement la valeur numérique du reste ne surpasse jamais celle du terme suivant. Donc, en faisant $x$ = un nombre entier $n$, on tirera de (64)

$$(78) \quad \log\left\{\frac{\Gamma(n-y).\Gamma(n+y)}{[\Gamma(n)]^2}\right\} = \left(n-\frac{1}{2}\right)\log\left(1-\frac{y^2}{n^2}\right) - y.\log\frac{n-y}{n+y} + L,$$

en posant pour abréger

$$L = \frac{B_1}{1.2}.a_1 - \frac{B_2}{3.4}.a_3 + \ldots + \frac{(-1)^m.B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}.a_{2m-3} + \frac{(-1)^{m+1}.\theta.B_m}{(2m-1)2m}.a_{2m-1},$$

où généralement

$$a_r = \frac{1}{(n+y)^r} + \frac{1}{(n-y)^r} - \frac{2}{n^r}.$$

La formule (78) subsiste pour toutes les valeurs positives ou négatives de $y$ inférieures à $n$.

Soit $k$ un nombre entier positif ou négatif, dont la valeur numérique n'est pas supérieur à $n$, et soit $y$ tel que

$$k > y > k - 1,$$

on aura, en vertu d'une propriété connue la fonction $\Gamma$,

$$\log \Gamma(n - y) = \log \Gamma(k - y) + \frac{1}{2} \cdot \mathop{\mathrm{S}}_{i=k}^{i=n-1} \log (i - y)^2,$$

$$\log \Gamma(n + y) = \log \Gamma(1 - [k - y]) + \frac{1}{2} \log y^2 + \frac{1}{2} \cdot \mathop{\mathrm{S}}_{i=k}^{i=n-1} \log (i + y)^2$$

$$+ \frac{1}{2} \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=k-1} \log (i^2 - y^2)^2,$$

et partant

$$\log\{\Gamma(n - y) . \Gamma(n + y)\} = \log\{\Gamma(k - y) . \Gamma(1 - [k - y])\}$$

$$+ \frac{1}{2} \log y^2 + \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=n-1} \log (i^2 - y^2)^2.$$

En substituant cette valeur dans (78) et en se rappelant que

$$\Gamma(k - y) . \Gamma(1 - [k - y]) = \frac{\pi}{\sin (k - y)\pi},$$

on obtiendra

$$\frac{1}{2} \log \frac{\pi^2}{\sin^2 (k - y)\pi} = 2 \log \Gamma(n) - \frac{1}{2} \log y^2 - \frac{1}{2} \cdot \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=n-1} \log (i^2 - y^2)^2$$

$$+ \left(n - \frac{1}{2}\right) \log \left(1 - \frac{y^2}{n^2}\right) - y . \log \frac{n - y}{n + y} + L,$$

d'où

$$\sin^2 \pi y =$$

$$\pi^2 y^2 (1 - y^2)^2 \left(1 - \frac{y^2}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{y^2}{9}\right)^2 \cdots \left(1 - \frac{y^2}{(n - 1)^2}\right)^2 \cdot \frac{e^{-2L}}{\left(1 - \frac{y^2}{n^2}\right)^{2n-1}} \cdot \left(\frac{n - y}{n + y}\right)^{2y},$$

et enfin

$$\sin \pi y =$$

$$\pi y(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{4}\right)\left(1-\frac{y^2}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{y^2}{(n-1)^2}\right)\cdot\frac{e^{-L}}{\left(1-\frac{y^2}{n^2}\right)^{n-\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{n-y}{n+y}\right)^y,$$

formule qui subsiste pour toutes les valeurs positives ou négatives de $y$, inférieures à $n$.

De cette formule remarquable, qui (je crois) n'a pas été encore proposée, on tirera immédiatement, en faisant $n = \infty$, la formule connue

$$\sin \pi y = \pi y(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{4}\right)\left(1-\frac{y^2}{9}\right)\left(1-\frac{y^2}{16}\right)\cdots.$$

Upsala le 20 Avril 1846.