

UNTERSUCHUNGEN ZUR TOPOLOGIE DER GESCHLOSSENEN ZWEISEITIGEN FLÄCHEN.

VON

JAKOB NIELSEN

in KOPENHAGEN.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	191
1. <i>Abschnitt: Die universelle Überlagerungsfläche als Koordinatenfläche.</i>	
1. Kanonische Schnittsysteme	193
2. Lineare Substitutionen und nichteuclidische Metrik	195
3. Die Fundamentalgruppe	201
4. Kurventypen und Elementklassen	206
5. Die Menge der Grundpunkte	208
6. Entwicklung der Punkte des Einheitskreises nach der Fundamentalgruppe	211
7. Spezielle Ausführungen über Randpunktentwicklungen	217
a) Die Entwicklung der Teilungspunkte R_i	217
b) Jeder Randpunkt ist durch seine Entwicklung eindeutig bestimmt	219
c) Periodische Entwicklungen bestimmen Grundpunkte von F und umgekehrt	220
d) Die Grundperiode gehört zu dem primären Element	222
e) Alle zu den Teilungspunkten R_1, \dots, R_{4p} äquivalenten Punkte treten bei der Intervallteilung auf	223
f) Zusammenfassende Veranschaulichung der Randpunktentwicklung an einem Vierecksnetze ν	223
g) Kombinatorische Lösung des Homotopieproblems	224
h) Zusammenhang zwischen den Entwicklungen zusammengehöriger Grundpunkte	228
i) Zwei Randpunkte sind dann und nur dann äquivalent, wenn ihre Entwicklungen gleich endigen	229
j) Fundamentalfolgen	230

	Seite
<i>2. Abschnitt: Automorphismen der Fundamentalgruppe und zugehörige Transformationen des Einheitskreises in sich.</i>	
8. Definition der Automorphismen. Ein hinreichendes Kriterium für ihre Festlegung	232
9. Erhaltung der zyklischen Anordnung der Grundpunkte bei Automorphismen	236
10. Die durch einen Automorphismus bestimmte topologische Randabbildung	240
11. Einige Sätze über Automorphismen von F	240
12. Innere Automorphismen	243
13. Die Funktionalgleichung der Randabbildungen	245
14. Struktur der fixpunktfreien Intervalle	246
15. Beispiele	247
16. Korrespondenz der Fundamentalfolgen bei Automorphismen	253
17. Fixelementgruppen verwandter Automorphismen	255
18. Einteilung aller Automorphismen in Isogredienzklassen	258
19. Automorphismen endlicher Ordnung	261
20. Abbildung der auf E gelegenen vollständigen Systeme äquivalenter Punkte bei Automorphismen	263
<i>3. Abschnitt: Stetige Abbildungen.</i>	
21. Topologische Abbildungen der Fläche φ auf sich. T -Funktionen	264
22. Funktionalgleichung der T -Funktionen. Induzierte Automorphismen. Abbildungsklassen	265
23. Jeder Automorphismus wird von T -Funktionen induziert	266
24. T -Funktionen mit vorgeschriebener Funktionalgleichung und vorgeschriebenen Werten in endlich vielen Punkten von \mathcal{D}	275
25. T -Funktionen, die den Nullpunkt fest lassen	278
26. Eine Normalform für die Darstellung der Automorphismen von F	279
27. S -Funktionen. Stetiger Zusammenhang zweier zu derselben Automorphismenfamilie gehörigen stetigen Abbildungen der Fläche	281
28. Stetiger Anschluss der Randabbildung	282
29. Reguläre und singuläre Punkte bezüglich einer Untergruppe von F	284
30. Abbildungen der zu Untergruppen von F gehörigen Überlagerungsflächen von φ	286
<i>4. Abschnitt: Das Fixpunktproblem.</i>	
31. Klasseneinteilung der Fixpunkte einer stetigen Abbildung	288
32. Endlichkeit der Klassenzahl	290
33. Eineindeutige Repräsentation aller Fixpunkte von $\sigma\varphi$	291
34. Endliche Ausbreitung der einzelnen Fixpunktclassen	292
35. Richtungsfunktion ξ . Index	294
36. Invarianz des Index bei topologischer Transformation	296

	Seite
37. Index einer Fixpunkt-Klasse. Indexsumme \bar{E} . Allgemeines Fixpunktproblem	297
38. Zur Klasse der Identität gehörige stetige Abbildungen des Torus . .	299
39. Die Richtungsgruppe (F)	302
40. Zuwachs der Richtungsfunktion auf äquivalenten Wegstücken und auf E	306
41. Klassenindex Null bei zyklischer Fixelementgruppe	308
42. Die Birkhoffsche Formel	310
43. Die Alexandersche Formel	314
44. Vollständige Lösung des Fixpunktproblems für alle die Indikatrix erhaltenden Abbildungsklassen, in deren Automorphismenfamilien Automorphismen endlicher Ordnung vorkommen	322
45. Über die Auflösung der Automorphiegleichung	325
46. Automorphismen erster Art mit Invertelementen	330
47. Indexbestimmung bei nicht-zyklischer Fixelementgruppe	335
48. Beispiele	338
49. Beispiel einer Fixpunkt-Klasse mit negativem Index bei einem Automorphismus ohne Fixelemente	347
50. Randabbildungen verwandter Automorphismen	351
51. Beispiel einer Abbildungsklasse mit gleichzeitigem Auftreten von Fixpunkt-Klassen mit positivem und solchen mit negativem Index . . .	354

Einleitung.

Das grundlegende Problem der Topologie, die Aufstellung notwendiger und hinreichender Bedingungen für die Homöomorphie zweier Mannigfaltigkeiten, ist bekanntlich für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten, und im wesentlichen nur für diese, vollständig gelöst, und diese haben sich daher frühzeitig für tieferdringende Problemstellungen dargeboten. Die vorliegende Abhandlung beschränkt sich der Einfachheit halber auf das Studium der *geschlossenen zweiseitigen Flächen* beliebigen Geschlechtes, es ist aber unschwer erkennbar, wie man die verwendeten Methoden auch auf andere Fälle zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten wird ausdehnen können. Den Gegenstand der Untersuchung bilden hauptsächlich die *stetigen Abbildungen* der Fläche auf sich selbst und das sich dabei ergebende *Fixpunktproblem*, für welches eine rationelle Formulierung durch den Begriff der *Fixpunkt-Klasse* und des *Index* jeder Klasse erreicht wird. Auf hierhergehörige Resultate von G. D. BIRKHOFF und J. W. ALEXANDER wird ausführlich eingegangen. Die explizite, kombinatorische Lösung des Fixpunktproblems in der Allgemeinheit, in der es sich auffassen lässt, ist bisher nicht erreicht. Immerhin

lassen sich mehrere ziemlich weitreichende Spezialfälle erledigen mittels einer Methode, die auch darüber hinaus jedes speziell gestellte Problem anzugreifen gestattet, wie an einigen typischen Beispielen gezeigt werden soll. Dadurch mag es berechtigt erscheinen, diese Untersuchungen schon jetzt in einer ersten ausführlicheren Mitteilung zu veröffentlichen. In zwei Vorträgen in Hamburg 1924¹ und in Kopenhagen 1925² hatte ich Gelegenheit, die ersten Ergebnisse darzustellen.

Die Hilfsmittel der Untersuchung sind die grundlegenden Begriffe der Fundamentalgruppe und der universellen Überlagerungsfläche. Durch diese werden alle Betrachtungen punktmengentheoretischer Art in die Ebene verlegt. Dadurch bekommt der kombinatorische Teil der Untersuchung eine klare gruppentheoretische Form. Zugleich tritt in die Erscheinung, dass die Schwierigkeiten, die sich der allgemeinen Lösung der hier betrachteten topologischen Probleme entgegenstellen, dieselben sind, die sich bei den einfachsten Fragen aus der Theorie der unendlichen diskontinuierlichen Gruppen einstellen. Ob die Lösung der topologischen Fragen von einer Weiterentwicklung der allgemeinen Gruppentheorie zu erwarten ist, oder ob eine direkte geometrische Lösung dieser Fragen der Gruppentheorie neue Methoden anzuweisen im Stande ist, möge dahingestellt bleiben³; in der vorliegenden Arbeit überwiegt die letztere Tendenz.

H. POINCARÉ⁴ hat für die Flächentopologie ein entscheidendes Hilfsmittel dadurch geschaffen, dass er die universelle Überlagerungsfläche nichteuklidisch metrisch-regulär darstellte und den Begriff der Fundamentalgruppe schuf. Diese Hilfsmittel wurden von M. DEHN⁵ bei der Lösung wichtiger Probleme systematisch verwendet, durch Einführung des »Gruppenbildes« weiter ausgebaut und mit der allgemeinen Gruppentheorie in den engsten Zusammenhang gesetzt. Die Arbeiten dieser beiden Autoren bilden den Ausgangspunkt des Verfassers, jedoch wird im ersten Abschnitt dieser Arbeit das für unsere Zwecke Nötige so ausführlich dargestellt, dass eine Verweisung des Lesers auf frühere Darstellungen im wesentlichen vermieden werden kann.⁶ Es erweist sich nun als zweckmässig, die

¹ »Über topologische Abbildungen geschlossener Flächen«. Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität Bd. III, 1924.

² »Zur Topologie der geschlossenen Flächen«, Vortrag auf dem 6. skandinavischen Mathematikerkongress in Kopenhagen 1925, veröffentlicht im Kongressbericht, Jul. Gjellerups Forlag, Köbenhavn 1926.

³ Vergl. eine Bemerkung von M. Dehn, Mathem. Annalen Bd. 71, S. 119.

⁴ Siehe besonders: Cinquieme Complément à l'Analysis Situs, Rend. Pal. XVIII, 1904.

⁵ Mathematische Annalen Bd. 69, 71 und 72.

⁶ Zur Vervollständigung unserer Darstellung der Grundlagen der Untersuchung seien an dieser Stelle genannt:

universelle Überlagerungsfläche durch Hinzufügung ihrer »unendlichfernen« Punkte abzuschliessen; um diese letzteren bequem zugänglich zu machen, wird eine konforme Abbildung der hyperbolischen Ebene auf das Innere eines Kreises benutzt. Die Kennzeichnung der einzelnen Randpunkte führt dann von selbst dazu, neben den Elementen der Fundamentalgruppe im eigentlichen Sinn, gegeben durch endliche Folgen der benutzten Erzeugenden, auch *unendliche Folgen von Erzeugenden* als uneigentliche Gruppenelemente zu betrachten. Ferner führen die nachstehenden Untersuchungen in manchen Fällen dazu, wieder zu *schwächeren* Überlagerungsflächen herabzusteigen, deren Auswahl von der jeweils betrachteten Flächenabbildung abhängt. Die Durchführung der Untersuchung bringt, wie schon oben angedeutet, die Aufstellung gewisser einfach auszusprechender gruppentheoretischer Probleme mit sich, deren Inangriffnahme in vielen Einzelfällen mittels geometrischer Überlegungen gelingt. Die Methode scheint mir eines weiteren Ausbaues fähig und kann dadurch vielleicht einmal der allgemeinen Gruppentheorie Dienste leisten.

I. ABSCHNITT.

Die universelle Überlagerungsfläche als Koordinatenfläche.

1. Kanonische Schnittsysteme.

Wir beginnen mit einer anschaulichen Betrachtung, die die im § 3 eingeführte genaue Definition des Objektes unserer Untersuchungen vorbereiten soll. Es sei eine geschlossene Fläche vom Geschlecht p vorgelegt. Die Figur 1 veranschaulicht den Fall $p = 3$. Von einem Punkt Q der Fläche aus werden die p Paare von gerichteten kanonischen Kurven $A_1, B_1; A_2, B_2; \dots; A_p, B_p$ gezeichnet. Schneidet man die Fläche längs dieser Kurven auf, so lässt sich die aufgeschnittene Fläche in die Ebene ausbreiten und erweist sich als mit einem $4p$ -Eck homöomorph. Figur 2 veranschaulicht ein solches, indem die Oberseite des Polygons der Aussenseite der Fläche der Figur 1 entspricht. Durchläuft man auf der Aussenseite der Fläche die Berandung der aufgeschnittenen Fläche so,

M. DEHN: Über diskontinuierliche Gruppen, Mathem. Ann. Bd. 71, 1911, insbesondere S. 119—122,

sowie die Einleitung und die ersten drei Paragraphen der Dissertation eines Schülers von Dehn:

H. GLESEKING: Analytische Untersuchungen über topologische Gruppen, Münster 1912.

25 — 26404. *Acta mathematica*. 50. Imprimé le 14 septembre 1927.

dass man stets die berandeten Flächenteile zur Linken hat, und bezeichnet man die Durchlaufung z. B. der Kurve A_1 gegen die Pfeilspitze mit A_1^{-1} , so zeigt Figur 2, dass man dabei die kanonischen Kurven in der Anordnung

$$B_1^{-1} A_1^{-1} B_1 A_1 B_2^{-1} A_2^{-1} B_2 A_2 \dots B_p^{-1} A_p^{-1} B_p A_p$$

passiert. Nun wähle man im Inneren des $4p$ -Ecks einen Punkt q und verbinde ihn mit zwei Randpunkten des $4p$ -Ecks, die demselben (von Q verschiedenen) Punkt

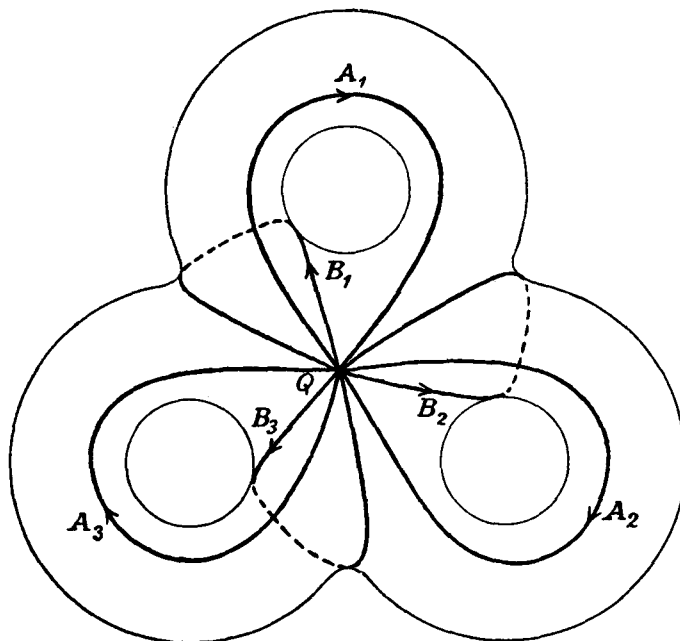


Fig. 1.

der Kurve B_1 entsprechen. Dadurch entsteht auf der Fläche eine geschlossene, B_1 einmal schneidende Kurve, die mit a_1 bezeichnet und so orientiert werden soll, dass sie B_1 von rechts nach links durchsetzt. Analog wird eine Kurve b_1 konstruiert, die A_1 einmal von links nach rechts durchsetzt und mit a_1 nur den Punkt q gemeinsam hat. Die zwei Kurven sind in Figur 2 gezeichnet. Man konstruiere mit Benutzung desselben Punktes q weitere Kurven $a_2, b_2, \dots, a_p, b_p$ durch entsprechende zyklische Wiederholung. Denkt man sich diese Kurven in der Figur 1 eingezeichnet, indem man den Punkt q auf der Rückseite der Fläche gelegen annimmt, und klappt man dann zur besseren Sichtbarmachung die Fläche der Figur 1 um, sodass sie die Rückseite dem Beschauer zukehrt, so stellt sich das

System der a_i, b_i wie in der Figur 3 gezeichnet dar. Dies System ist ein neues kanonisches Schnittsystem; verwandelt man wieder die Fläche durch Aufschneiden längs desselben in ein $4p$ -Eck, so lautet die Berandung desselben

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1},$$

wenn man sie so durchläuft, dass man das Polygoninnere zur *Rechten* hat. In diesem Polygon stellen sich die Kurven A_i, B_i durch von einem inneren Punkt Q ausstrahlende Kurvenstücke dar (analog wie in der Fig. 2 die a_i, b_i); die An-

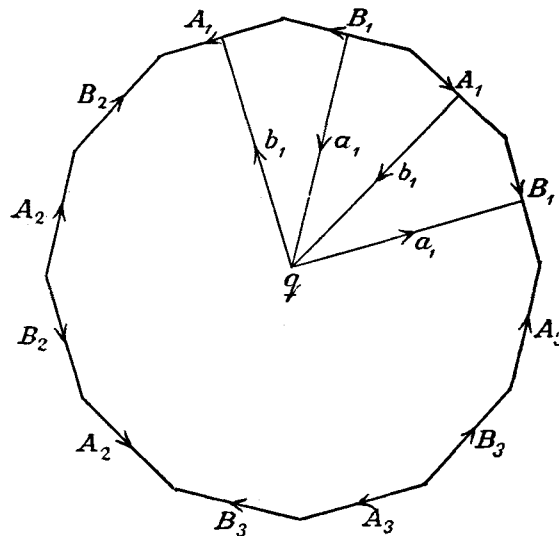


Fig. 2.

ordnung der gerichteten Kurvenstücke um Q ist dabei die in Fig. 1 durch die Umgebung von Q bestimmte.

Wir nennen die Systeme A_i, B_i und a_i, b_i »zwei zu einander reziproke kanonische Schnittsysteme«.

2. Lineare Substitutionen und nichteuklidische Metrik.

x sei eine komplexe Variable. Der Einheitskreis $|x|=1$ der x -Ebene wird mit E , das Innere von E mit Φ und das Äussere von E mit Ψ bezeichnet. Um den Zusammenhangsverhältnissen der durch einen Punkt $x=\infty$ abgeschlossenen x -Ebene Rechnung zu tragen, werden wir gelegentlich von $\Phi + E + \Psi$ als von der x -Kugel K sprechen.

Wir werden es mit Transformationen von K in sich zu tun haben, bei denen Φ , E und Ψ einzeln in sich übergehen. Speziell betrachten wir zunächst lineare Substitutionen von x , die solche Transformationen bewirken. Jede solche Substitution kann in der Form

$$(1) \quad S(x) = \frac{\alpha x + \bar{\beta}}{\beta x + \bar{\alpha}}, \quad \alpha \bar{\alpha} - \beta \bar{\beta} > 0,$$

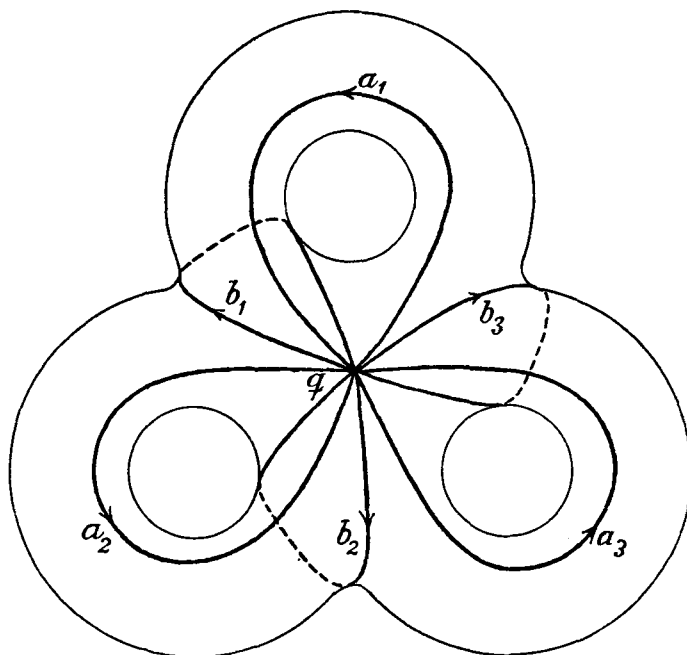


Fig. 3.

geschrieben werden, wo α und β willkürliche nur bis auf einen gemeinsamen reellen Faktor bestimmte komplexe Zahlen sind und $\bar{\alpha}$ die zu α konjugiert-komplexe Zahl bedeutet; und jede Substitution dieser Form hat die verlangte Eigenschaft. Die obige Substitution sei durch das Symbol $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ bezeichnet. Die inverse Substitution ist $S^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ -\beta \end{pmatrix}$.

Die invarianten Punkte oder, wie wir sagen wollen, die »Grundpunkte« von S , d. h. die beiden Lösungen der Gleichung $S(x) = x$, sind

$$\xi_{1,2} = \frac{1}{2\beta} (\alpha - \bar{\alpha} \pm \sqrt{\Delta}), \quad \Delta = (\alpha - \bar{\alpha})^2 + 4\beta \bar{\beta}.$$

Das Büschel der Kreise durch ξ_1 und ξ_2 geht bei der kreisverwandten Transformation S in sich über; das gleiche gilt daher auch von der Schar der dazu orthogonalen Kreise. Ist nun $\Delta > 0$, so liegen beide Grundpunkte auf E , und wegen der Erhaltung der Winkel wird jeder Kreis des durch die Grundpunkte bestimmten Büschels durch S in sich transformiert. Die dazu orthogonalen Kreise werden unter einander vertauscht, indem ihre Punkte sich längs der Kreise des Büschels vom »negativen« Grundpunkt fort und auf den »positiven« Grundpunkt zu bewegen. Ist $\Delta < 0$, so liegen die Grundpunkte invers bezüglich E , und E gehört in diesem Fall der Orthogonalschar an. Ist endlich $\Delta = 0$, so fallen die Grundpunkte auf E zusammen. Man bezeichnet bekanntlich diese drei Fälle als hyperbolische, elliptische und parabolische Substitution.

Im Falle der hyperbolischen Substitution bezeichnen wir den zu E senkrechten Kreis durch die Grundpunkte als die »Achse« von S .

Die Substitutionen der Form (1) bilden eine Gruppe, die mit Γ bezeichnet sei.

Es seien S und T zwei Substitutionen aus Γ . Dann gehen die Grundpunkte von TST^{-1} aus denen von S durch T hervor. Substitutionen, die durch Transformation innerhalb Γ ineinander übergehen, sind also von derselben Art.

Wir fassen nun in bekannter Weise das Innere \mathcal{D} von E als konformes Abbild der »hyperbolischen Ebene«, d. h. der Ebene von N. LOBATSCHESKIJ, auf: zwei Figuren in \mathcal{D} heissen kongruent, wenn die eine durch eine Operation aus Γ aus der anderen hervorgeht. Gelegentlich betrachten wir auch Ψ als konformes Abbild derselben Ebene (mit Umlegung der Winkel), indem wir zwei bezüglich E spiegelbildlich gelegene Punkte als Bilder desselben Punktes der Ebene auffassen.

Der Vollständigkeit halber sei noch an das übliche nichteuklidische Abstandsmass erinnert: x_1 und x_2 seien zwei Punkte in \mathcal{D} , S eine Operation aus Γ , die

x_1 in den Nullpunkt bringt, also $S = \begin{pmatrix} \alpha & \\ -\alpha & x_1 \end{pmatrix}$ und somit

$$S(x_2) = \frac{\alpha(x_2 - x_1)}{\alpha(1 - x_1 x_2)}.$$

Dann wird die Entfernung $d(x_1, x_2)$ als Logarithmus des nun auf dem Durchmesser zu bildenden Doppelverhältnisses definiert:

$$d(x_1, x_2) = \log \frac{1 + |S(x_2)|}{1 - |S(x_2)|},$$

also

$$\operatorname{Sin}^2 \frac{d}{2} = \left(\frac{e^{\frac{d}{2}} - e^{-\frac{d}{2}}}{2} \right)^2 = \frac{|S(x_2)|^2}{1 - |S(x_2)|^2} = \frac{(x_2 - x_1)(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)}{(1 - x_1 \bar{x}_1)(1 - x_2 \bar{x}_2)} = \delta(x_1, x_2).$$

$d(x_1, x_2)$ genügt dann den üblichen Axiomen des Entfernungsmasses. Für manche Zwecke kann man sich auch der einfacheren Funktion $\delta(x_1, x_2)$ bedienen.

Die geodätischen Linien dieser Metrik sind die zu E senkrechten Kreise (die Durchmesser von E mitgerechnet); diese entsprechen also den Geraden der Ebene. Eine hyperbolische Substitution entspricht einer Verschiebung der Ebene längs der durch die Achse der Substitution dargestellten Geraden. Die nichteuklidische Entfernung $d(x, S(x))$ von Punkt zu Bildpunkt ist für alle Punkte der Achse die gleiche; sie heisse die zu der Substitution gehörige »Verschiebungslänge«. Für alle Punkte ausserhalb der Achse ist die Entfernung zum Bildpunkt grösser, und zwar um so mehr, je weiter die Punkte von der Achse entfernt sind. Die durch die Grundpunkte gehenden Kreise sind Abstandslinien zur Achse. S und TST^{-1} haben gleiche Verschiebungslänge, da Punkt und Bildpunkt auf der Achse von S durch die Kongruenztransformation T in Punkt und Bildpunkt auf der Achse von TST^{-1} übergeführt werden. Soll die hyperbolische Substitution S mit der nicht identischen Substitution T vertauschbar sein:

$$ST = TS,$$

so müssen S und TST^{-1} dieselbe Substitution sein. T muss also die Grundpunkte von S fest lassen; T ist somit ebenfalls eine hyperbolische Substitution und hat dieselbe Achse wie S . Diese Bedingung ist auch hinreichend:

Eine hyperbolische Substitution ist mit allen zu derselben Achse gehörigen Substitutionen, und nur mit diesen, vertauschbar.

Nun seien S und T zwei hyperbolische Substitutionen, die einen Grundpunkt, etwa den für beide positiven Grundpunkt A gemeinsam haben, während ihre negativen Grundpunkte verschieden sind. Dann hat auch TST^{-1} den positiven Grundpunkt A und einen negativen Grundpunkt, der von den negativen Grundpunkten von S und T verschieden ist. Die Achsen von S und TST^{-1} sind also nichteuklidische Parallele mit A als gemeinsamem unendlich fernen Punkt; sie nähern sich einander also asymptotisch. Die Substitution $S \cdot T^{-1} T^{-1}$, der »Kommutator« von S und T , hat dann auch A als Grundpunkt, kann also nur hyperbolisch oder parabolisch sein. Berücksichtigt man nun, dass S und TST^{-1} gleiche Verschiebungslänge haben, und ist x ein Punkt auf der Achse von TST^{-1} , so

sieht man, dass $d(x, S \cdot T S^{-1} T^{-1}(x))$ beliebig klein wird, wenn nur x der Achse von S genügend nahe liegt, d. h. auf der Achse von $T S T^{-1}$ genügend weit in Richtung von A verschoben wird. Da nun bei einer hyperbolischen Substitution die Entfernung von Punkt zu Bildpunkt die Verschiebungslänge als untere Grenze hat, so folgt, dass $S T S^{-1} T^{-1}$ nicht hyperbolisch sein kann:

Haben zwei hyperbolische Substitutionen einen und nur einen Grundpunkt gemeinsam, so ist ihr Kommutator eine parabolische Substitution mit dem gemeinsamen Grundpunkt als Grundpunkt.

Der Leser kann natürlich diese Sätze auch leicht durch direkte Ausrechnung bestätigen.

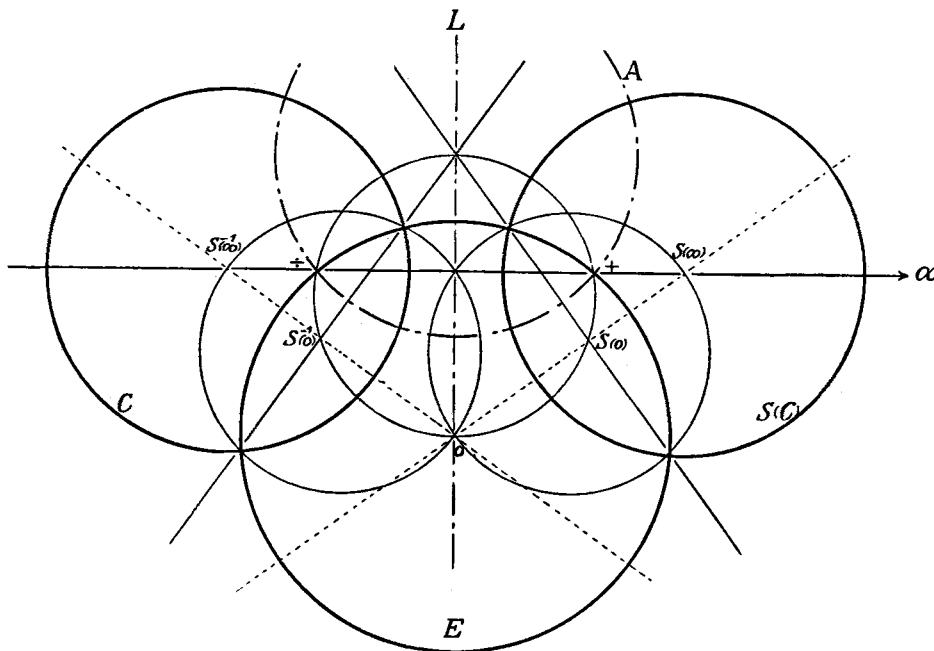


Fig. 4.

Im Folgenden werden fast ausschliesslich hyperbolische Substitutionen vorkommen. Man vergegenwärtige sich daher die einfachsten Eigenschaften einer solchen an der Fig. 4: Eine Bewegung S (ohne Umlegung) der hyperbolischen Ebene in sich ist festgelegt, wenn man die Bilder $S(x_1)$ und $S(x_2)$ zweier Punkte x_1 und x_2 von O angibt; dabei muss

$$d(S(x_1), S(x_2)) = d(x_1, x_2)$$

sein. Z. B. kann man S durch Angabe des Punktes $S(O)$ und des Punktes $S^{-1}(O)$,

der bei S in o übergeführt wird, festlegen. $S(o)$ und $S^{-1}(o)$ müssen gleichen nichteuklidischen, und daher in diesem Fall auch gleichen euklidischen Abstand von o haben. (Die euklidische Drehung um den Nullpunkt gehört ja zur Gruppe Γ). Die Bedingung dafür, dass S hyperbolisch wird, ist, dass der durch $S^{-1}(o)$, o und $S(o)$ gehende Kreis E schneidet. Die in der Figur mit \div bzw. $+$ bezeichneten Schnittpunkte sind der negative bzw. positive Grundpunkt von S . Spiegelbildliche Lage zweier Punkte bezgl. E bleibt bei S erhalten. Die Figur 4 geht durch Spiegelung an E sowie durch Spiegelung an der mit L bezeichneten Geraden in sich über. Das Spiegelbild bezgl. E des Kreises durch $S^{-1}(o)$, o und $S(o)$ ist die Gerade durch $S^{-1}(\infty)$, ∞ und $S(\infty)$, und diese schneidet also die Grundpunkte auf E aus. Der Kreis C mit dem Zentrum $S^{-1}(\infty)$ senkrecht zu E geht, da ∞ das Spiegelbild seines Zentrums bezgl. C ist, in den zu E senkrechten Kreis $S(C)$ mit dem Zentrum $S(\infty)$ über. Das Bild eines Punktes von C bei S ist dabei sein Spiegelbild bezgl. L . C ist also der geometrische Ort derjenigen Punkte, in denen das euklidische Linienelement bei S kongruent transformiert wird. Für Punkte innerhalb C wird das euklidische Linienelement bei S gedehnt, für Punkte ausserhalb C verkürzt. Speziell bemerken wir, dass ein innerhalb C gelegener Teilbogen von E bei S auf einen grösseren Teilbogen von E abgebildet wird. C ist das nichteuklidische Mittellot der von $S^{-1}(o)$ und o begrenzten Strecke. — Die Achse von S soll durch die Grundpunkte gehen und zu E senkrecht sein. Das Zentrum des Achsenkreises A wird also durch die Symmetrielinie L auf dem Kreise durch $S^{-1}(o)$, o und $S(o)$ ausgeschnitten. Da seine Verbindungslinie mit $S^{-1}(o)$ auf $(S^{-1}(o), o)$ senkrecht steht, ist A auch senkrecht zu C und $S(C)$. Der zwischen C und $S(C)$ gelegene Bogen von A repräsentiert die Verschiebungslänge.

Offenbar kann man die Operation S dadurch ausführen, dass man erst eine Spiegelung an L und danach eine Spiegelung an $S(C)$ ausführt. Das Resultat dieser beiden Operationen ist nämlich eine Operation aus Γ , und z. B. alle Punkte von C sind richtig transformiert.

Der zwischen C und $S(C)$ gelegene Teil der x -Kugel K bildet einen Fundamentalbereich für die durch die Potenzen von S gebildete unendliche zyklische Untergruppe von Γ , die mit $\{S\}$ bezeichnet werde. Vereinigt man jeden Punkt von C mit dem ihm bei S entsprechenden Punkt von $S(C)$, so schliesst sich der Fundamentalbereich zu einem *Torus* zusammen. Lässt man einen Punkt, der aus einem Punkt des Fundamentalbereichs durch eine Operation aus $\{S\}$ hervorgeht, demselben Toruspunkt entsprechen, so ist die in den Grundpunkten punktierte x -Kugel eine Überlagerungsfläche des Torus. Umgekehrt werden wir sagen, der

Torus entstehe durch »Reduktion von K mittels der Gruppe $\{S\}$ «. Wir bezeichnen den Torus kurz durch $K \bmod \{S\}$.

3. Die Fundamentalgruppe.

In diesem Paragraphen soll eine spezielle Untergruppe F von Γ erklärt werden, die aus unendlich vielen hyperbolischen Substitutionen besteht.

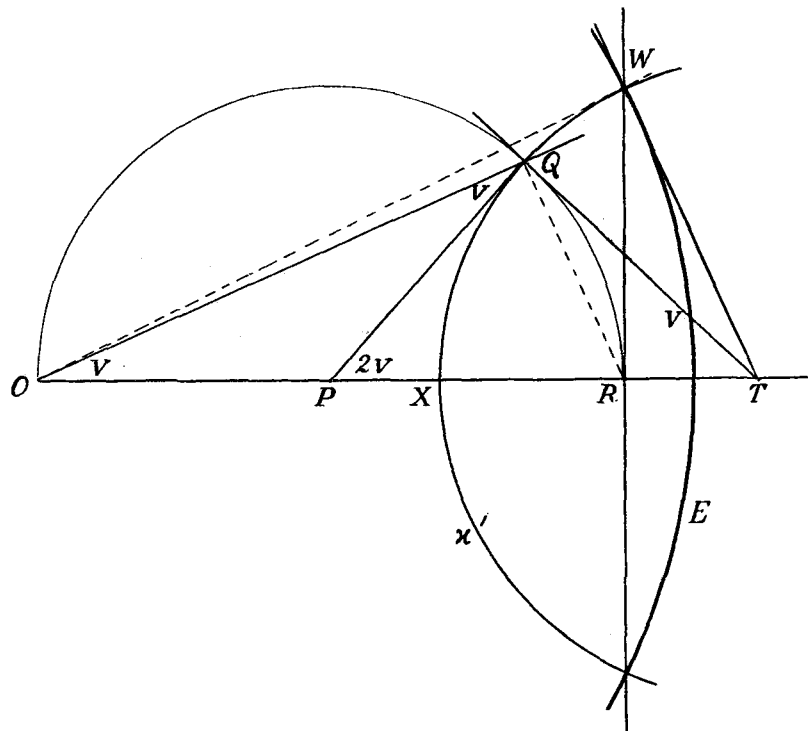


Fig. 5.

v sei ein Winkel $< \frac{\pi}{4}$ mit dem Scheitel O (Fig. 5). Um einen Punkt P des einen Schenkels schlägt man den Kreis OQR . Die Tangente in Q schneidet OP in T . Um T schlägt man mit TQ als Radius den Kreis x' . Die Senkrechte auf OR in R trifft x' in W . Der Massstab sei so gewählt, dass $OW = 1$ ist. (Dann ist, wie man leicht berechnet, $OP = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 v}$.) Endlich zeichnet man den durch W gehenden Einheitskreis E mit dem Zentrum O . Dieser schneidet TQ in V . x' schneidet OR in X :

Da

$$(TW)^2 = (TQ)^2 = TR \cdot TO$$

ist, schneiden sich α' und E orthogonal. Also ist in der nichteuklidischen Metrik α' eine Gerade und OXQ ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit dem Basiswinkel v .

Nun spiegeln wir — unter Fortlassung einiger für das Folgende überflüssiger Linien — die Fig. 5 an OQ . Das Spiegelbild von OT wird dabei parallel mit PQ , also Lot auf TQ . An diesem Lot spiegeln wir dann noch einmal die Gesamtfigur und gelangen dadurch zur Fig. 6. Vergleichen wir Fig. 6 mit Fig. 4, so

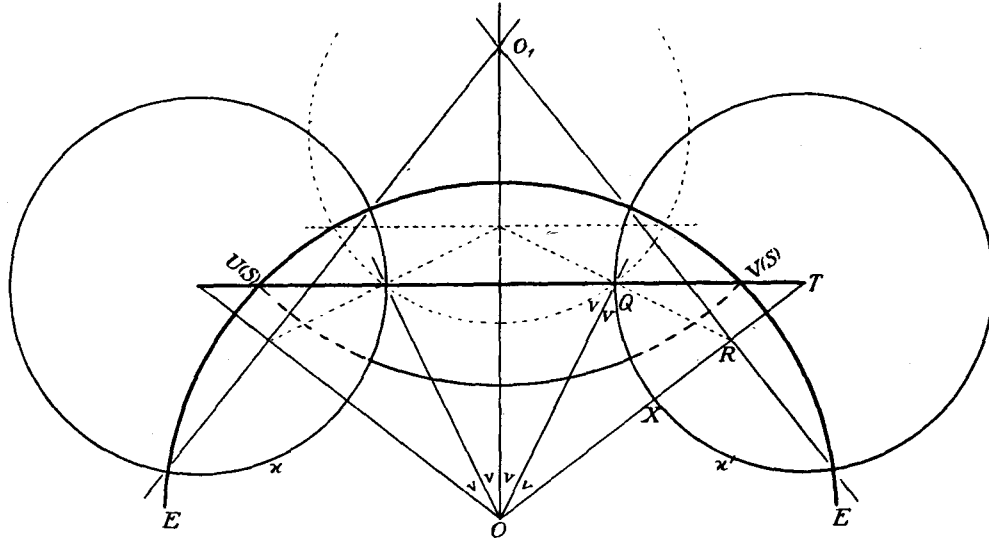


Fig. 6.

sehen wir, dass wir eine hyperbolische Substitution S definieren können, die den Kreis α von Fig. 6 in α' überführt: $\alpha' = S(\alpha)$. α spielt für S die Rolle von C in Fig. 4. Der positive Grundpunkt von S ist $V(S)$, (in Fig. 5 mit V bezeichnet), der negative $U(S)$. Die sie verbindende Achse hat ihr Zentrum in O_1 , die Verschiebungslänge ist ausgezogen. Es ist $R = S(o)$, $T = S(\infty)$, und α' ist das nichteuklidische Mittellot auf OR .

Nun verfügen wir so über v , dass es bei Fortsetzung dieses Spiegelungsverfahrens im Vollwinkel aufgeht und uns dabei eine gerade Anzahl von Kreispaa- ren liefert. Es sei also p eine ganze Zahl grösser als 1 und $v = \frac{\pi}{4p}$ gewählt. Dann haben wir $2p$ Kreispaa- re der Art von α und α' und damit $2p$ Substitutionen der

Art von S , deren Grundpunkte sich paarweise trennen. Fig. 7 zeigt die entstehende Zeichnung im Falle $p = 2$. Der ausserhalb der $4p$ Kreise liegende Teil von \mathcal{O} ist ein nichteuklidisch reguläres $4p$ -Eck mit dem Polygonwinkel $\frac{\pi}{2p}$, das

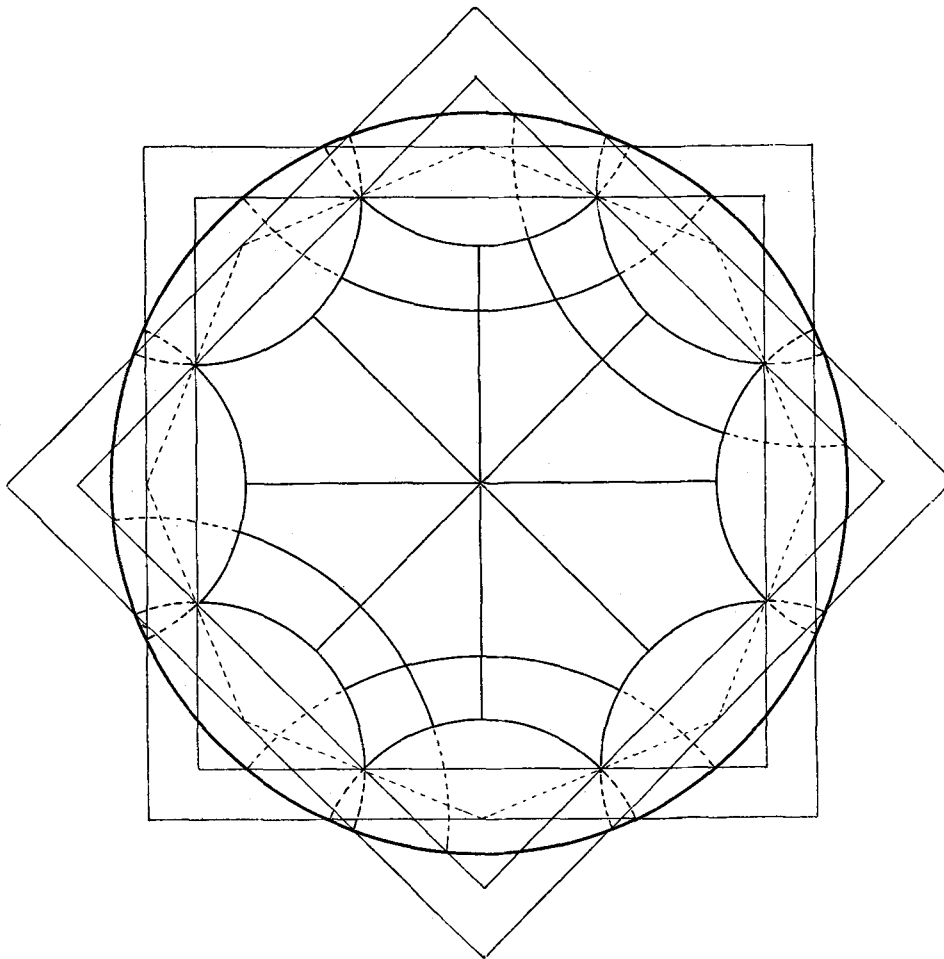


Fig. 7.

mit B bezeichnet sei. Die in der Fig. 7 beibehaltenen Hilfslinien veranschaulichen noch einmal im Zusammenhang die oben auseinandergesetzte gegenseitige Lage der Bilder von o und ∞ bei den $2p$ Substitutionen, der Grundpunkte, der Zentren der Achsenkreise, der Polygonecken und der Schnittpunkte der Polygonseiten mit E .

Es bietet nun keinerlei Schwierigkeit, die Koeffizienten α und β der Form (1) für unsere $2p$ Substitutionen aufzustellen; sie ergeben sich aus der Tatsache, dass

der euklidische Abstand des Punktes $x = 0$ von seinen Bildpunkten bei allen Substitutionen und ihren Reziproken gleich $\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4p}}$ ist. In der l. c.¹ zitierten Arbeit ist der arithmetische Ausdruck angegeben. Hier können wir auf die Benutzung des expliziten Ausdruckes für die Koeffizienten der Substitutionen verzichten und mit geometrischen Überlegungen auskommen.

Nun bezeichnen wir die Seiten des Polygons B mit $A_1, B_1, \dots, A_p, B_p$, wie im § 1 durch Fig. 2 für $p = 3$ illustriert wurde. B sei dabei so in \mathcal{O} angebracht, dass die Achse der positiv-reellen Zahlen Mittellot von B_1 ist und der auf B_1 und A_p gelegene Eckpunkt am nächsten unterhalb der positiv-reellen Achse liegt. Wir nummerieren die Seiten von B linksläufig, mit B_1 anfangend. Die $2p$ Substitutionen seien dann mit

$$a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$$

bezeichnet, und zwar so, dass a_1 die dritte Seite in die erste, b_1 die zweite in die vierte, a_2 die siebente in die fünfte, b_2 die sechste in die achte usw. überführt. Die von diesen $2p$ Substitutionen erzeugte unendliche Gruppe heisse F :

$$F = \{a_1, b_1, \dots, a_p, b_p\}.$$

Es sei beiläufig bemerkt, dass man, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, den Bildpunkt, in den ein beliebiger Punkt der x -Ebene bei einem beliebigen Element von F übergeht, für alle diejenigen p durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal ermitteln kann, für die die reguläre p -Teilung des Kreises mit Zirkel und Lineal ausführbar ist.

Zwei Punktmengen der x -Ebene, von denen die eine durch eine Operation aus F aus der andern hervorgeht, sollen »äquivalent in Bezug auf F « oder häufig nur »äquivalent« genannt werden.

Durch die $4p$ Operationen $a_i^{\pm 1}, b_i^{\pm 1}$ geht B in äquivalente Bereiche über, die mit B eine Polygonseite gemeinsam haben. Ist B' ein mit B äquivalenter Bereich, etwa $B' = f(B)$, f ein beliebiges Element aus F , so geht B' bei $f a_i^{\pm 1} f^{-1}, f b_i^{\pm 1} f^{-1}$ in äquivalente Bereiche über, die mit B' je eine Polygonseite gemeinsam haben. Die Bildbereiche von B bei allen Elementen von F ordnen sich infolge der Grösse des Polygonwinkels zu je $4p$ um einen gemeinsamen Polygoneckpunkt an und überdecken \mathcal{O} lückenlos mit einem nichteuklidisch regulären Polygonnetz, das N heissen möge. Die Maschen von N häufen sich gegen E . — Betrachten wir z. B. den Punkt — er heisse H — auf dem Rande von B , in dem B_1 und

A_p zusammenstossen. Die an B_1 stossende Netzmasche ist $a_1(B)$ zufolge der Definition von a_1 . Die zweite an H stossende Seite dieser Masche entspricht in B der vierten Seite A_1 . An A_1 stösst $b_1(B)$. Die im Zyklus um H weiter anstossende Masche ist daher $a_1 b_1(B)$. Nun mündet eine freie, B_1 entsprechende Netzseite in H ein, die nächstanschliessende Masche ist daher $a_1 b_1 a_1^{-1}(B)$. Setzen wir so den Zyklus fort und bedenken, dass die $(4p - 1)^{\text{te}}$ Masche $b_p(B)$ ist, so kommen wir zu der Relation

$$(2) \quad a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} = 1$$

zwischen den Erzeugenden von F . Die linke Seite von (2) sei hinfort mit R bezeichnet. Da jede Relation zwischen den Erzeugenden von F offenbar in bekannter Weise auf sukzessive Umkreisungen von Netzknoten zurückgeführt werden kann, ist $R = 1$ die einzige unabhängige Relation in F . F wird als abstrakte Gruppe durch $R = 1$ definiert.

Überträgt man die Bezeichnung A_i, B_i der Seiten von B auf alle Seiten von N , so wird die Anordnung der bezeichneten Netzseiten um jeden Netzknoten durch die Anordnung der gleichbezeichneten Kurvenenden um den Punkt Q der Fig. 1 angegeben.

In der Fig 7 sind $4p$ vom Nullpunkt ausgehende und in den Polygonseitenmitten endende Strecken gezeichnet. Diese übertrage man äquivalent auf alle Maschen von N . In den nebeneinanderliegenden Polygonen B und $a_1(B)$ schliessen sich dann zwei dieser Linienstücke zu einer o mit $a_1(o)$ verbindenden Strecke aneinander. Diese werde mit einer von o nach $a_1(o)$ zeigenden Orientierung und mit der Bezeichnung a_1 versehen. Ebenso wird die von $a_1^{-1}(o)$ nach o führende Strecke a_1 genannt. Analog b_1, a_2, \dots, b_p . Diese Bezeichnung wird äquivalent auf die Verbindungsstrecke irgend zweier benachbarter mit o äquivalenter Punkte übertragen. So entsteht aus diesen Strecken ein Netz n , das, von der Bezeichnung abgesehen, mit N nichteuklidisch kongruent ist. n hat folgende Bedeutung: $f(o)$ sei ein mit $x = o$ äquivalenter Punkt. Man kann — auf unendlich viele Weisen — den Nullpunkt mit $f(o)$ durch einen aus Seiten von n bestehenden Weg verbinden und für jeden dieser Wege eine Folge von Erzeugenden von F in der Reihenfolge aufschreiben, wie man die mit ihnen gleichbezeichneten Seiten von n passiert. Jeder dieser Erzeugendenausdrücke stellt dann das Element f dar. Ist w ein Netzseitenweg, der $f(o)$ mit $f_1(o)$ verbindet, so ist

$$f_1 f^{-1} = f w f^{-1}$$

das Element von F , das $f(o)$ in $f_1(o)$ überführt. — Die Durchlaufung des Weges R vom Nullpunkt aus führt zum Nullpunkt zurück wegen $R = 1$. R ist dabei mit *rechtsläufigem* Umlauf die Berandung einer Masche von n , und der oben betrachtete Punkt H ist der Mittelpunkt dieser Masche. — Die Anordnung der von einem Netzknoten von n ausstrahlenden Netzseiten wird durch die Umgebung des Punktes q der Fig. 3 angegeben.

n ist das *Dehnsche Gruppenbild* von F .⁷

Vergleicht man nun diese Verhältnisse mit den einleitenden Betrachtungen des § 1, so ist sofort klar, dass man aus dem Bereich B durch Zusammenbiegen und Vereinigung äquivalenter Randpunkte eine geschlossene Fläche vom Geschlecht p herstellen kann und dass dabei die Kurvenstücke A_i, B_i, a_i, b_i der »reziproken Netze« N und n reziproke kanonische Schnittsysteme auf der Fläche ergeben. — Wir wollen, um den Vorteil der metrischen Hilfsmittel noch unmittelbarer an die Fläche zu knüpfen, die »Fläche« etwas abstrakter so definieren:

Betrachtet man jedes vollständige System von in Bezug auf F äquivalenten Punkten von \mathcal{O} als *einen Punkt*, so entsteht durch diese »Reduktion von \mathcal{O} mittels F « eine mit hyperbolischer Metrik ausgestattete, geschlossene, orientierbare, zweidimensionale Mannigfaltigkeit vom Geschlecht p , die »Fläche $\varphi = \mathcal{O} \bmod F$ «. F ist die »Fundamentalgruppe« und \mathcal{O} die »universelle Überlagerungsfläche« von φ .

4. Kurventypen und Elementklassen.

Hieran fügen wir noch eine kurze Erörterung des Zusammenhangs zwischen den Kurven auf φ und auf \mathcal{O} , dessen vollständige Aufklärung man bekanntlich H. POINCARÉ (l. c.⁴) verdankt: Ein stetiges Kurvenstück in \mathcal{O} wird durch eine stetige Funktion k eines Parameters dargestellt:

$$x = k(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad |k(t)| < 1.$$

Dadurch ist zugleich ein stetiges Kurvenstück auf φ definiert. Dasselbe Kurvenstück auf φ wird aber durch jede mit der ersteren äquivalente Bildmenge:

$$x = f[k(t)],$$

f ein beliebiges Element aus F , in \mathcal{O} dargestellt. Sind Anfangs- und Endpunkt des Kurvenstückes in \mathcal{O} mittels eines Elements h von F äquivalent:

$$k(1) = h[k(0)],$$

⁷ Man ergänze das obige Resumé durch DEHNS grundlegende Darstellungen l. c.⁵

so ist die betrachtete Kurve auf φ geschlossen. In der zweiten oben benutzten Darstellung ist dann $f h f^{-1}$ dasjenige Element aus F , das den Anfangspunkt des Kurvenstücks in Φ in den Endpunkt verlegt. *Jeder geschlossenen Kurve auf φ ist auf diese Weise ein vollständiges System von in einander transformierbaren Elementen aus F , »eine Elementklasse«, zugeordnet. Zwei geschlossene Kurven auf φ , die zur selben Elementklasse gehören, sind »homotop«, d. h. auf φ in einander deformierbar, und umgekehrt. In der Tat können wir Darstellungen der beiden Kurven in Φ*

$$\left. \begin{array}{l} x = k(t) \\ x = k_1(t) \end{array} \right\} 0 \leq t \leq 1$$

so wählen, dass beide Male dasselbe Element h von F den Anfangspunkt in den Endpunkt verlegt:

$$k(1) = h[k(0)], \quad k_1(1) = h[k_1(0)].$$

Verbindet man dann zwei zum selben t -Wert gehörige Punkte $k(t)$ und $k_1(t)$ durch eine nichteuklidisch geradlinige Strecke und bezeichnet denjenigen Punkt, der diese im nichteuklidischen Abstandsverhältnis $\tau: 1-\tau$ teilt, mit $k_\tau(t)$, so ist für jedes feste τ , ($0 \leq \tau \leq 1$), $x = k_\tau(t)$ für $0 \leq t \leq 1$ eine geschlossene Kurve auf φ , denn es bleibt stets

$$k_\tau(1) = h[k_\tau(0)].$$

Wir haben also auf φ eine von einem Parameter τ abhängige Schar geschlossener Kurven, so dass der »Parameterabstand« zweier Kurven der Schar stetig von τ abhängt, und für $\tau = 0$ bzw. $\tau = 1$ haben wir die ursprünglichen Kurven, womit die Homotopie derselben nachgewiesen ist. — Die Elementklassen von F sind also den vollständigen Systemen von untereinander homotopen geschlossenen Kurven auf φ , oder wie wir kurz sagen wollen: den »Kurventypen« auf φ umkehrbar eindeutig zugeordnet. Der besonderen Elementklasse, die nur aus der Identität besteht, sind die »der Null homotopen«, d. h. auf φ zusammenziehbaren Kurven zugeordnet. — Im nächsten Paragraphen wird gezeigt werden, dass F nur hyperbolische Substitutionen enthält. Zwei zu derselben, von der Identität verschiedenen Elementklasse gehörige Elemente von F haben äquivalente Verschiebungstücke auf ihren Achsen. Diesen entspricht eine geschlossene geodätische Linie auf φ , und wir können also jeden Kurventypus (mit Ausnahme der zusammenziehbaren Kurven) eindeutig durch die zum Typus gehörige geschlossene geodätische Linie auf φ repräsentieren.

5. Die Menge der Grundpunkte.

Im zunächst Folgenden sind alle Bezeichnungen im Sinne der nichteuklidischen Metrik zu verstehen. — Für einen Punkt P von \mathcal{O} bezeichne $\delta(P)$ die Entfernung von P zum nächstgelegenen mit P äquivalenten Punkt. δ hat für zwei äquivalente Punkte den gleichen Wert. Wenn wir daher die untere Grenze von $\delta(P)$ bilden wollen, indem P in \mathcal{O} variiert, so genügt es, P in B variieren zu lassen, das ja einen Fundamentalbereich von F darstellt. Wäre nun diese untere Grenze Null, so müsste es einen Punkt von B geben, und zwar notwendigerweise einen Randpunkt, der bei einer von der Identität verschiedenen Operation aus F an seinem Platz bliebe. Wenn man aber die endlich vielen Elemente aus F prüft, bei denen der Bildbereich von B mit B einen Randpunkt gemein hat, so sieht man, dass ein solches Festbleiben eines Randpunktes nicht eintritt. Für innere Punkte einer Randseite ist das sofort aus der Erklärung der Erzeugenden abzulesen, und für die Eckpunkte von B folgt es daraus, dass ein Kreis um einen Eckpunkt mit einem Radius kleiner als die halbe Polygonseite keine zwei äquivalenten Punkte im Inneren hat; ein solcher Kreis ist nämlich aus den $4p$ Zipfeln zusammengesetzt, die die nächsten Umgebungen der Ecken von B bilden. — Die untere Grenze von δ in \mathcal{O} ist also positiv. Also kann F keine elliptischen Substitutionen enthalten, bei denen ja ein invarianter Punkt in \mathcal{O} liegt. F kann aber auch keine parabolische Substitution enthalten. Denn im Sinne der gewöhnlichen Metrik geht bei einer solchen jeder E im Grundpunkt berührende Kreis in sich über, und die Schar der dazu orthogonalen durch den Grundpunkt gehenden Kreise wird unter sich vertauscht. Im Sinne der hyperbolischen Metrik geht also jede Gerade mit dem Grundpunkt als unendlich fernem Punkt in eine dazu parallele Gerade über, und die Verbindungslinie von Punkt und Bildpunkt bildet dabei gleiche Winkel mit den beiden Geraden. Dann sinkt aber die Entfernung von Punkt und Bildpunkt unter jeden Betrag herab, wenn man nur weit genug in Richtung des unendlichfernen Grundpunktes auf einer solchen Geraden hinausgeht.

Alle Elemente von F sind also hyperbolische Substitutionen, und die untere Grenze von $\delta(P)$ ist die kürzeste Verschiebungslänge, die bei den Elementen von F auftritt. Es sei noch bemerkt, dass die Anzahl der Elementklassen, deren Verschiebungslänge eine gegebene Länge L nicht übersteigt, endlich ist. Wir können nämlich für jede Elementklasse ein repräsentierendes Element (im Allgemeinen auf verschiedene, jedoch nur endlich viele Weisen) so auswählen, dass

die Achse desselben durch den zentralen Fundamentalbereich B hindurchschneidet. Wir können dann in B den Anfang eines Verschiebungsstückes auf der Achse wählen. Der Endpunkt desselben liegt dann in einer Entfernung $\leq L$ vom Anfangspunkt, also in einer Entfernung $\leq L + \varrho$ vom Nullpunkt, wenn ϱ den Abstand der Ecken von B vom Nullpunkt angibt. Der Bildbereich von B bei dem betreffenden F -Element muss also an einem Kreis mit dem Radius $L + \varrho$ um den Nullpunkt Teil haben, und das ist nur für endlich viele Elemente der Fall. Wir haben also:

In jeder unendlichen Folge von F -Elementen, in welcher keine zwei Elemente in einander transformierbar sind, geht die Verschiebungslänge gegen ∞ .

Zu jedem Element von F gehört also ein Paar getrennter Grundpunkte auf E . Aus § 2 folgt, dass vertauschbare F -Elemente zum selben Grundpunktpaar gehören und umgekehrt. Zwei nicht vertauschbare Elemente können auch nicht etwa einen Grundpunkt gemeinsam haben, denn nach § 2 müsste ihr Kommutator dann eine parabolische Substitution sein, und solche gibt es nicht in F . Die (abzählbare) Menge G der Grundpunkte ist also eindeutig in Paare zusammengehöriger aufgeteilt. U und V seien ein solches Paar. Diejenigen Elemente von F , die zu diesem Paar gehören, also dieselbe Achse haben, bilden eine Abelsche Untergruppe von F . f_1 und f_2 seien zwei solche Elemente, l_1 und l_2 ihre Verschiebungslängen. Dann hat entweder $f_1 f_2$ oder $f_1 f_2^{-1}$ die Verschiebungslänge $|l_1 - l_2|$. Und da die Menge der zu der Achse gehörigen Verschiebungslängen nach unten begrenzt ist, muss es eine kleinste, l , geben, die in allen anderen aufgeht. f sei das zu l gehörige Element, wenn wir etwa V als den positiven Grundpunkt wählen. Wir nennen f das zu der Achse, oder genauer zu dem geordneten Grundpunktpaar UV gehörige »primäre« Element. f^{-1} gehört dann zu VU . Die betrachtete Untergruppe besteht dann aus allen positiven und negativen Potenzen von f . F hat also keine anderen Abelschen Untergruppen als unendliche zyklische. Ein Verschiebungsstück der Länge l auf der Achse stellt dann auf φ offenbar die der Achse entsprechende geschlossene geodätische Linie genau einmal durchlaufen dar. l ist aber nicht notwendig der kleinste Abstand zweier äquivalenten Punkte auf der Achse; denn die geschlossene geodätische Linie auf φ kann Doppelpunkte haben. Einem solchen Doppelpunkt entspricht auf \mathcal{O} ein Schnitt der Achse von f mit der Achse eines aus f durch Transformation hervorgehenden Elements.

Nun seien P_1 und P_2 zwei Eckpunkte des Netzes n , also zwei mit dem

Nullpunkt äquivalente Punkte, und L die sie verbindende nichteuklidische Gerade. Eine Drehung um P_2 durch den Winkel π bringt sowohl n als L mit sich zur Deckung. (Von der Bezeichnung, die n trägt, ist dabei zunächst abgesehen). P_1 gehe bei dieser Drehung in P_3 über. Eine Netzseiten tragende Gerade durch P_1 geht in eine Netzseiten tragende Gerade durch P_3 über, und diese beiden Geraden bilden mit L gleich grosse gleichliegende Winkel. Eine Verschiebung S längs L , die P_1 in P_3 überführt, bringt daher sowohl n als L mit sich zur Deckung, und das gleiche gilt für die Potenzen von S , die P_1 in weitere Netz-eckpunkte überführen. Da nun von einem Netz-eckpunkt nur $4p$ Netzseiten ausgehen, so muss eine bestimmt gewählte Netzseite durch P_1 , wenn nicht bei S selbst, so doch bei einer Potenz S^m in eine gleichbezeichnete Netzseite übergehen. Diese Potenz S^m führt dann das Netz n einschliesslich Bezeichnung in sich über, gehört also zu F . (Für gerades p hat man bereits $m = 1$, vgl. l. c.¹ S. 248). Das F -Element S^m hat L zur Achse, wir haben also:

Jede Gerade, die zwei Netz-eckpunkte verbindet, ist Achse in F .

Dabei ändert sich offenbar an dem Vorhergehenden nichts, wenn man die Netz-eckpunkte in N statt in n wählt, oder wenn man einen Eckpunkt von n mit einem solchen von N verbindet. — Es ist aber nicht jede Achse in F von dieser Art, z. B. enthalten die Achsen der Erzeugenden weder Eckpunkte von n noch von N .

Insbesondere sind die die Netzeinteilungen bildenden Geraden Achsen aus F .

Nun sei i ein Intervall auf E und k ein zu E orthogonaler Kreis durch die Endpunkte von i . Ferner sei P ein mit dem Nullpunkt äquivalenter Punkt im Inneren von k ; es gibt solche, da die Dimensionen der Netz-maschen gegen E unbegrenzt abnehmen. Der durch P gehende Durchmesser ist dann Achse in F und hat den einen Grundpunkt in i . Ist ferner i_1 ein zu i fremdes Intervall auf E und P_1 ein mit dem Nullpunkt äquivalenter Punkt im Inneren eines Orthogonalkreises k_1 über i_1 , so ist der zu E orthogonale und durch P und P_1 gehende Kreis Achse in F und hat seine Grundpunkte in i und i_1 . Zusammenfassend haben wir also:

Die Richtungen der durch einen Netz-eckpunkt gehenden F -Achsen liegen überall dicht um den Punkt. — Die Menge der Grundpunkte ist überall dicht auf E und zwar so, dass zwei beliebig vorgegebene Intervalle auf E ein Paar zusammengehöriger Grundpunkte enthalten.

6. **Entwicklung der Punkte des Einheitskreises nach der Fundamentalgruppe.**

Die Punkte des Einheitskreises E stellen die unendlich fernen Punkte der hyperbolischen Ebene dar. Ein Punkt R von E bestimmt in jedem Punkte P von \mathcal{O} eine Richtung, die Richtung der von P ausgehenden nichteuklidischen Halbgeraden, die R als unendlich fernen Punkt hat. Ist insbesondere P ein Eckpunkt des Netzes n , so ist zugleich eine der $4p$ von P ausgehenden Netzseiten ausgezeichnet, nämlich diejenige, die mit dem Halbstrahl PR den kleinsten Winkel bildet; nur in dem speziellen Falle, wo PR in die Richtung der Hauptdiagonale einer an P stossenden Netzmasche fällt, hat man die Wahl zwischen zwei gleichberechtigten Netzseiten. Sehen wir zunächst von diesem Ausnahmefall ab, so können wir von P aus auf der ausgezeichneten Netzseite zum nächsten Netzeckpunkt fortschreiten, von diesem aus wieder auf der für diesen Punkt ausgezeichneten Netzseite weitergehen u. s. f. Man erhält so einen (vom Ausnahmefall abgesehen eindeutig bestimmten) Netzseitenweg, der so genau wie möglich auf den gegebenen unendlich fernen Punkt R zustrebt, und diesem Netzseitenweg entspricht nach der Bezeichnung der Netzseiten eine unendliche Folge von Erzeugenden von F . Diese hängt ausser von R nur noch von dem Ausgangspunkte P ab. Wir wählen denjenigen Netzpunkt als Ausgangspunkt, der in unserem Abbild \mathcal{O} der hyperbolischen Ebene in den Nullpunkt O fällt, und sprechen das soeben dargestellte folgendermassen aus:

Die Radien des Einheitskreises, die durch die Ecken des Fundamentalbereichs B gehen, treffen E in $4p$ Punkten, die in linksläufiger Reihenfolge, mit dem zunächst unterhalb der positiv-reellen Achse liegenden anfangend, mit

$$R_1, R_2, \dots, R_{4p}$$

bezeichnet seien. Die durch sie auf E bestimmten Intervalle

$$R_1 R_2, R_2 R_3, \dots, R_{4p-1} R_{4p}, R_{4p} R_1$$

seien mit

$$[a_1], [b_1^{-1}], [a_1^{-1}], [b_1], [a_2], [b_2^{-1}], [a_2^{-1}], [b_2], \dots, \\ [a_p], [b_p^{-1}], [a_p^{-1}], [b_p]$$

bezeichnet. Der Radius, der den Punkt $a_1(o)$ enthält, trifft also E in der Mitte des Intervalles $[a_1]$ und analog. Nun sei Q ein beliebiger Punkt von E . Er liege

z. B. in $[a_1]$. Dann ist die von o nach $a_1(o)$ führende Netzseite die für o ausgezeichnete. Wir bezeichnen dann a_1 als die »erste Konvergente« von Q und schreiben

$$k_1(Q) = a_1.$$

Um nun die für den Netzeckpunkt $a_1(o)$ ausgezeichnete Netzseite zu finden, verlegen wir diesen Punkt in den Nullpunkt, und suchen also die erste Konvergente von $a_1^{-1}(Q)$.

Es möge etwa $a_1^{-1}(Q)$ in $[b_2]$ gelegen sein. Dann nennen wir $a_1 b_2$ die »zweite Konvergente« von Q und schreiben

$$k_2(Q) = a_1 b_2.$$

Wir haben hierdurch die Lage von Q auf E genauer umschrieben, denn dass $a_1^{-1}(Q)$ in $[b_2]$ liegt, bedeutet ja, dass Q in $a_1([b_2])$, dem Bilde von $[b_2]$ bei der Operation a_1 , gelegen ist; das ist ein Teilintervall von $[a_1]$; es werde mit $[a_1 b_2]$ bezeichnet. Nun sucht man weiter $b_2^{-1} a_1^{-1}(Q)$ auf. Dieser Punkt möge in $[a_3^{-1}]$ fallen. Dann haben wir

$$k_3(Q) = a_1 b_2 a_3^{-1}.$$

Q liegt dann in

$$a_1(b_2([a_3^{-1}])) = a_1([b_2 a_3^{-1}]) = [a_1 b_2 a_3^{-1}],$$

welches ein Teilintervall von $[a_1 b_2]$ ist. Durch unbegrenzte Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man zu einer Folge von Konvergenten von Q :

$$k_1(Q), k_2(Q), k_3(Q), \dots \text{ in inf.},$$

die die Abschnitte einer unendlichen Erzeugendenfolge

$$k(Q) = a_1 b_2 a_3^{-1} \dots \text{ in inf.}$$

darstellen. Ihnen entspricht auf E eine Folge von ineinandergeschachtelten Intervallen

$$[a_1], [a_1 b_2], [a_1 b_2 a_3^{-1}], \dots \text{ in inf.},$$

die alle den Punkt Q im Inneren enthalten. Wir nennen $k(Q)$ die »Entwicklung des Randpunktes Q nach der Gruppe F «. Es wird sich zeigen, dass diese Entwicklung den Randpunkt vollständig bestimmt, und dass sich die Rolle, die der

Randpunkt in Bezug auf die Fundamentalgruppe spielt, in seiner Entwicklung widerspiegelt.

Um diejenigen Erzeugendenfolgen, die als Entwicklungen von Randpunkten auftreten können, näher kennen zu lernen, müssen wir die oben angedeutete, sich unbegrenzt verfeinernde Intervalleinteilung von E eingehender betrachten. Man kann die dazu nötigen Betrachtungen leicht auf Grund der Definition der erzeugenden Substitutionen etwa an Hand der Figur 7 durchführen; statt dessen verwenden wir jedoch im Folgenden elementargeometrische Schlüsse in der hyper-

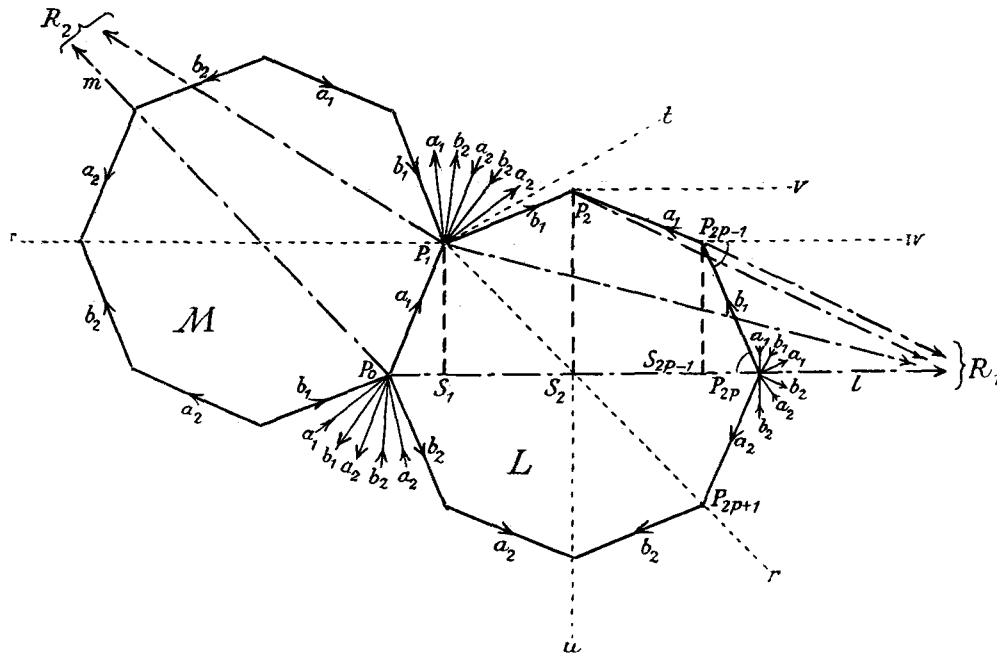


Fig. 8.

bolischen Ebene. Wir betrachten einen Netzknoten P_0 und zwei an P_0 stossende benachbarte Netzmaschen L und M , die etwa die von P_0 ausgehende Netzseite a_1^{+1} gemeinsam haben. Die zwei von P_0 ausgehenden Halbstrahlen l und m , auf denen die von P_0 ausgehenden Hauptdiagonalen dieser beiden Netzmaschen liegen, bestimmen ein Segment des unendlichfernen Gebildes E , das dem Intervall »erster Ordnung« $[a_1]$ entspricht, wenn P_0 dem Nullpunkt entspricht. Nun gehen wir längs a_1^{+1} von P_0 zum benachbarten Netzknoten P_1 . Die $4p$ von P_1 ausgehenden Halbstrahlen, auf denen die von P_1 ausgehenden Hauptdiagonalen der um P_1 angeordneten Netzmaschen liegen, bestimmen auf E $4p$ Segmente, welche, sofern sie dem Segment $[a_1]$ angehören, durch Unterteilung desselben

die Intervalle »zweiter Ordnung« (im obigen Beispiel $[a_1 b_2]$) bestimmen. Das Segment $[a_1]$ wird von P_1 aus durch Parallele zu l und m bestimmt. Diese Parallelen zeigen von P_1 aus ins Innere der betrachteten beiden Netzmaschen, denn (siehe die für $p=2$ skizzierte Figur 8) die von P_1 nach P_2 führende nächste Seite b_1^{+1} der Masche L hat mit l ein (ins Innere von L fallendes) gemeinsames Lot; das sieht man daraus, dass die Normalen $P_1 S_1$ und $P_2 S_2$ von P_1 und P_2 auf l mit b_1 spitze Winkel $S_1 P_1 P_2$ und $S_2 P_2 P_1$ bilden, nämlich Teile des spitzen Polygonwinkels. Betrachtet man nun die durch Halbstrahlen von P_1 aus bestimmten, zu den einzelnen Erzeugenden gehörigen Segmente auf E , die die Unterteilung des zu P_0 gehörigen Intervalles erster Ordnung $[a_1]$ bewirken, so findet man:

1) Das zu $a_1^{-1} = P_1 P_0$ gehörige Segment von E wird durch die Halbstrahlen r und s ausgeschnitten, fällt also ganz ausserhalb $[a_1]$. *In der Entwicklung eines Randpunktes folgen also niemals zwei zu einander reziproke Erzeugende unmittelbar nach einander.*

2) Das zu $b_1^{+1} = P_1 P_2$ gehörige Segment auf E wird durch die Halbstrahlen r und t ausgeschnitten. *Ein Teil* desselben, nämlich das durch l und t ausgeschnittene Segment, fällt also innerhalb $[a_1]$. Entsprechendes gilt am anderen Ende von $[a_1]$ für die von P_1 ausgehende Seite b_1^{-1} .

3) Für die übrigen $4p-3$ von P_1 ausgehenden Seiten fällt das zugehörige Segment ganz innerhalb $[a_1]$.

Wir müssen also unsere frühere Definition folgendermassen vervollständigen: Ist h_i das Zeichen für eine beliebige Erzeugende, so ist das Intervall zweiter Ordnung $[h_1 h_2]$ definiert als der *Durchschnitt* von $[h_1]$ und $h_1([h_2])$. Dann ist $[h_1 h_1^{-1}]$ leer; $[h_1 h_2]$ ist ein echter Teil von $h_1([h_2])$, wenn h_2 eine der beiden Erzeugenden ist, die unmittelbar auf h_1 folgen, wenn man die Netzmasche in dem einen oder anderen Sinne umkreist; für die übrigen $4p-3$ Werte von h_2 ist $[h_1 h_2]$ mit $h_1([h_2])$ identisch.

Wir bestimmen nun die Intervalle dritter Ordnung $[h_1 h_2 h_3]$ näher, also die Gesamtheit der E -Punkte, deren dritte Konvergente $k_3 = h_1 h_2 h_3$ lautet. Das ist offenbar der Durchschnitt von $[h_1]$ und $h_1([h_2 h_3])$, und $[h_2 h_3]$ ist ja nun vollständig definiert.

1) Wenn nun $[h_1 h_2] = h_1([h_2])$, also h_2 einer der $4p-3$ nichtspeziellen Werte in Bezug auf h_1 ist (obiger Fall 3), so fällt ja $h_1([h_2])$ und daher auch $h_1([h_2 h_3])$ ganz in $[h_1]$, und also ist $[h_1 h_2 h_3] = h_1([h_2 h_3])$.

2) Wenn $h_2 = h_1^{-1}$, so liegt $h_1([h_1^{-1} h_3])$ ausserhalb $[h_1]$, also $[h_1 h_1^{-1} h_3]$ ist leer (obiger Fall 1).

3) Wir haben also nur noch den obigen Fall 2 zu betrachten, wo h_2 auf der Netzmasche in einem oder dem anderen Sinne auf h_1 folgt, und halten uns der Kürze halber wieder an das spezielle Beispiel der Figur 8. Das Intervall erster Ordnung $[a_1^{-1}]$ in Bezug auf den Punkt P_2 wird durch die Halbstrahlen u und v bestimmt (v soll symmetrisch zu u sein in Bezug auf die von P_2 ausgehende Netzseite a_1^{-1}). u schneidet l im Mittelpunkt der Masche L . v schneidet nicht l . Denn die Parallele zu l durch P_2 fällt aus demselben Grunde wie früher ins Innere der Masche L . Von den $4p - 1$ möglichen Intervallen zweiter Ordnung $[b_1 h_3]$ in Bezug auf P_1 fallen also $4p - 2$ ganz innerhalb des zu P_0 gehörigen Intervalls erster Ordnung $[a_1]$; und für alle diese ist also $[a_1 b_1 h_3] = a_1([b_1 h_3])$. Wir haben also nur noch $[a_1 b_1 a_1^{-1}]$ zu betrachten. Das Intervall zweiter Ordnung $[b_1 a_1^{-1}]$ in Bezug auf P_1 ist, wie wir wissen, nur ein Teil von $b_1[a_1^{-1}]$, indem nämlich das durch u und v bestimmte Segment auf das von r und v bestimmte »beschnitten« wird. Bei der Bildung des Durchschnitts von $a_1([b_1 a_1^{-1}])$ und $[a_1]$ wird das Segment aber noch weiter beschnitten, indem nur das von l und v bestimmte Segment von E als Intervall dritter Ordnung $[a_1 b_1 a_1^{-1}]$ in Bezug auf P_0 übrigbleibt.

Indem wir nun für immer den auszuschliessenden Fall fortlassen, dass zwei zu einander reziproke Erzeugende unmittelbar auf einander folgen, haben wir das Ergebnis:

$[h_1 h_2 h_3]$ ist im Allgemeinen mit $h_1([h_2 h_3])$ identisch und nur in dem speziellen Fall ein Teilintervall von $h_1([h_2 h_3])$, wenn $h_1 h_2 h_3$ in dieser Reihenfolge auf der Berandung der Netzmasche auf einander folgen.

Es ist nun klar, dass diese Schlussweise sich unverändert fortsetzen lässt, solange wir uns im Sinne der Fig. 8 auf der oberhalb l gelegenen Hälfte der Masche L befinden. Wir haben also für $r \leq 2p$:

Das Intervall r -ter Ordnung $[h_1 h_2 \dots h_r]$ ist definiert als der Durchschnitt von $[h_1]$ und $h_1([h_2 h_3 \dots h_r])$; es ist im Allgemeinen mit $h_1([h_2 h_3 \dots h_r])$ identisch (indem dies Intervall ganz innerhalb $[h_1]$ fällt) und nur in dem speziellen Fall ein echter Teil von $h_1([h_2 h_3 \dots h_r])$, wenn $h_1 h_2 \dots h_r$ in dieser Reihenfolge auf der Berandung der Netzmasche auf einander folgen.

Wir haben zu dem obigen Beweis nur noch für den Fall $r = 2p$ die Bemerkung hinzuzufügen, dass die Parallele zu l durch P_{2p-1} zwar nicht mehr ins Innere von L fällt, wohl aber, was wir allein brauchen, in das Segment erster Ordnung in Bezug auf P_{2p-1} , das zu der Netzseite $P_{2p-1} P_{2p}$ gehört. Dies letztere

Segment wird durch die durch P_{2p-1} gehende Hauptdiagonale von L und den dazu in Bezug auf $P_{2p-1} P_{2p}$ symmetrisch gelegenen Halbstrahl w begrenzt, und der Winkel von w und $P_{2p-1} P_{2p}$ ist gleich dem Winkel $P_{2p-1} P_{2p} P_0$, sodass w und l sich nicht schneiden.

Wir können dieses etwa auch so ausdrücken, dass ein Intervall r -ter Ordnung $[h_1 h_2 \dots h_r]$, wo $h_1 h_2 \dots h_r$ auf der Berandung der Netzmasche auf einander folgen, für $r \leq 2p$ zwar existiert, aber sozusagen »kleiner« ist, als ein »normales« Intervall r -ter Ordnung, und zwar um so mehr, je grösser r ist. Wir werden nun noch zeigen, dass es solche Intervalle für $r > 2p$ nicht mehr gibt.

Das zeigt die Figur 8 unmittelbar, indem das Intervall erster Ordnung in Bezug auf P_{2p} , das zu $P_{2p} P_{2p+1}$ gehört, offenbar ganz ausserhalb des durch l und m ausgeschnittenen zu P_0 gehörigen Intervalles erster Ordnung $[a_1^{+1}]$ fällt. Fig. 8 zeigt aber noch mehr: l ist nämlich eine der Teilungslinien durch P_{2p} , die die zu diesem Punkt gehörigen $4p$ Intervalle erster Ordnung auf E bestimmen. Von diesen $4p$ Intervallen fallen nur $2p-1$ (ganz oder teilweise) innerhalb des durch w und l bestimmten Intervalles $2p$ -ter Ordnung in Bezug auf P_0 , und zwar gehören diese zu den $2p-1$ Netzseiten, die bei rechtsläufigem Umlauf um P_{2p} zunächst auf die Seite $P_{2p} P_{2p-1}$ folgen. (In dem Beispiel der Fig. 8 sind das die mit a_1^{-1} , b_1^{-1} und a_1^{+1} bezeichneten Netzseiten.) Die nächstfolgende Netzseite durch P_{2p} , die erste unterhalb l , (in der Figur b_2^{+1}) gehört zu einem Intervall, dessen eine Begrenzungslinie l ist; dies Intervall hat also mit dem betrachteten zu P_0 gehörigen Intervall $2p$ -ter Ordnung gerade noch den unendlich fernen Punkt R_1 von l gemeinsam. Sehen wir also vorläufig von dem ganz speziellen Fall der Entwicklung der Teilungspunkte R_i und der damit äquivalenten Punkte ab , so sind die als Entwicklungen auftretenden Erzeugendenfolgen durch die folgenden drei Eigenschaften festgelegt:

1) Es folgen nie zwei zu einander reziproke Erzeugende unmittelbar auf einander.

2) Es kommen nie Teilfolgen von mehr als $2p$ auf der Berandung einer Netzmasche aufeinanderfolgenden Erzeugenden vor.

Erzeugendenausdrücke, die diese beiden Bedingungen erfüllen, sind von M. DEHN als *reduzierte Ausdrücke* bezeichnet worden. (Math. Ann. 72 (1912), S. 414; zyklische Vertauschung der Glieder des Ausdruckes kommt hier nicht in Frage.) Randpunktentwicklungen sind also »geradeste« Wege im Netz n und lassen sich nicht durch Anwendung der definierenden Relation von F verkürzen; sie schliessen sich der geraden Linie, die den Ausgangspunkt mit dem entwickelten unendlich

fernen Punkt verbinden, so eng wie möglich an, worauf wir unten noch genauer eingehen werden. Sie haben aber noch über das Dehnsche Reduktionsverfahren hinaus die folgende dritte Eigenschaft:

3) Auf eine Teilfolge von $2p$ Erzeugenden, die die Berandung einer Halbmasche bilden, folgt stets eine derjenigen $2p-1$ Erzeugenden, die vom Endpunkt der Halbmasche aus nach derjenigen Seite der Maschenhauptdiagonale zeigt, auf der die betreffende Halbmasche liegt.

Aus den vorstehenden Betrachtungen geht zugleich hervor, dass jede unter Berücksichtigung dieser drei Forderungen im übrigen aber beliebig gebildete unendliche Folge von Erzeugenden eine Folge von ineinandergeschachtelten Intervallen auf E bestimmt. Jede solche Folge von Intervallen hat einen — und wie wir sehen werden nur einen — Punkt als Durchschnitt, und für diesen Punkt stellt die Erzeugendenfolge die Entwicklung dar.

7. Spezielle Ausführungen über Randpunktentwicklungen.

a) *Die Entwicklung der Teilungspunkte R_i .* Wir betrachten die Entwicklung des Teilungspunktes R_1 . Er bildet die Grenze zwischen den Intervallen erster Ordnung $[a_1]$ und $[b_p]$. Wir haben also die Wahl zwischen a_1 und b_p als erster Konvergente von R_1 , und es würde keinen Vorteil bringen, durch eine willkürliche Festsetzung hier eine bestimmte Wahl vorzuschreiben. Wenn man aber eine bestimmte Wahl, z. B. $k_1(R_1) = a_1$ getroffen hat, so sind die folgenden $2p-1$ Konvergenten bestimmt (man vergleiche wieder die Figur 8):

$$k_{2p}(R_1) = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_{\frac{p}{2}} b_{\frac{p}{2}} a_{\frac{p}{2}}^{-1} b_{\frac{p}{2}}^{-1}$$

im Falle eines geraden p , und

$$k_{2p}(R_1) = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_{\frac{p-1}{2}} b_{\frac{p-1}{2}} a_{\frac{p-1}{2}}^{-1} b_{\frac{p-1}{2}}^{-1} a_{\frac{p+1}{2}} b_{\frac{p+1}{2}}$$

im Falle eines ungeraden p . Dann ist man im Punkte P_{2p} der Figur 8 angelangt und hat nun wieder die Wahl zwischen a_1 und b_p . Hier kann man nun geltend machen, dass der Entwicklung $k(R_1)$ eine unendliche Folge von ineinander geschachtelten Intervallen entsprechen soll, und man hat dann die bei der ersten Wahl getroffene Entscheidung zu wiederholen; andernfalls entspricht der $(2p+1)$ -ten Konvergente kein Intervall auf E . Somit bekommen wir für R_1 eine Entwicklung, die entweder aus der periodischen Wiederholung des obigen Ausdrucks

$k_{2p}(R_1)$ oder aus der periodischen Wiederholung des damit infolge der Relation $R = \bar{i}$ gleichwertigen Ausdrucks besteht, und diese beiden Ausdrücke von $k(R_1)$ betrachten wir als gleichwertig. Das Element $k_{2p}(R_1)$ hat die Maschenhauptdiagonale l der Figur 8 als Achse und $P_0 P_{2p}$ als Verschiebungslänge. R_1 ist somit der positive Grundpunkt dieses Elements.

Ganz ähnlich geht es bei der Entwicklung der übrigen R_i . Auch diese sind Grundpunkte von Achsen, die ganz aus Maschenhauptdiagonalen bestehen, nur bilden für $p > 2$ im Allgemeinen erst mehrere solche zusammen ein Verschiebungsstück, sodass die periodische Wiederkehr erst nach Durchlaufung mehrerer Halbmaschen beginnt. Diese Perioden ergeben sich leicht aus der Anordnung der Netzseiten auf einer Masche und um einen Netzeckpunkt, und zwar jedesmal wieder in zwei gleichberechtigten Ausdrücken. Wir können auf ihre explizite Aufstellung verzichten und geben nur als Beispiel die Entwicklung von R_2 im Falle $p = 3$:

$$\begin{aligned} k_{18}(R_2) &= b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} a_3 \cdot b_2^{-1} a_3 b_3 a_3^{-1} b_3^{-1} a_1 \cdot b_3^{-1} a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 \\ &= a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} b_3 a_3 b_3^{-1} \cdot a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} b_1 a_1 b_1^{-1} \cdot a_3 b_3^{-1} a_3^{-1} b_2 a_2 b_2^{-1}, \end{aligned}$$

und $k(R_2)$ ist die periodische Wiederholung des einen oder des anderen dieser beiden Ausdrücke für $k_{18}(R_2)$. R_2 ist der positive Grundpunkt von $k_{18}(R_2)$, der Durchmesser durch R_2 ist die Achse dieses Elements, und ein Verschiebungsstück besteht aus drei aneinandergereihten Maschenhauptdiagonalen.

Aus dieser zyklischen Zusammengehörigkeit der Maschenhauptdiagonalen bestimmt man dann auch leicht, in welche Systeme von untereinander äquivalenten die Teilungspunkte R_1, \dots, R_{4p} zerfallen. Für $p = 2$ sind keine zwei der 8 Punkte äquivalent; für $p = 3$ ist $R_2 \sim R_6 \sim R_{10}$ und damit auch $R_8 \sim R_{12} \sim R_4$, und weitere Äquivalenzen bestehen nicht, es gibt also auch für $p = 3$ 8 nicht äquivalente R_i .

Nun sei R^* ein Punkt von E , der mit keinem der Punkte R_i zusammenfällt, der aber im Laufe des Entwicklungsprozesses einmal in einen dieser Punkte verlegt wird. Dann ist $k_1(R^*)$ eindeutig bestimmt; ist

$$(k_1(R^*))^{-1}(R^*) \neq R_i,$$

dann ist auch $k_2(R^*)$ eindeutig bestimmt, usw. So sei etwa noch $k_{r-1}(R^*)$ eindeutig bestimmt, aber dann

$$(k_{r-1}(R^*))^{-1}(R^*) = R_j.$$

Das bedeutet also, dass R^* ein *innerer* Punkt von Intervallen erster, zweiter, . . . , $(r-1)$ -ter Ordnung ist. Bei der Bestimmung der r -ten Konvergente von R^* haben wir daher dieselbe Wahl zu treffen, wie bei der Bestimmung der ersten Konvergente von R_j , und beide Entscheidungen sind möglich, ohne die Forderung der Intervalleinschachtelung zu verletzen. Wir bekommen also auch für $k(R^*)$ zwei Ausdrücke, nämlich

$$k(R^*) = k_{r-1}(R^*) \cdot k(R_j),$$

wo wir für $k(R_j)$ die früheren zwei Ausdrücke haben. — R^* ist also ein Teilungspunkt zwischen zwei Intervallen s -ter Ordnung für alle $s \geq r$.

b) *Jeder Randpunkt ist durch seine Entwicklung eindeutig bestimmt.* Dieser Satz ist mit der Behauptung identisch, dass eine unendliche Folge von ineinandergeschachtelten Intervallen erster, zweiter, . . . Ordnung als Durchschnitt einen Punkt und nicht ein Segment hat. Eine solche Folge sei durch die Entwicklung

$$k = e_1 e_2 e_3 \dots \text{ in inf.}$$

gegeben; das Intervall r -ter Ordnung ist also durch die r -te Konvergente

$$k_r = e_1 e_2 \dots e_r$$

bestimmt. (Es ist immer das abgeschlossene Intervall gemeint.) Angenommen nun, diese Intervallfolge hätte als Durchschnitt das (abgeschlossene) Segment $X_0 Y_0$. Alle Punkte dieses Segmentes haben dann die Entwicklung k , und kein anderer Punkt von E hat diese Entwicklung. Alle Punkte des Segmentes $e_1^{-1}(X_0 Y_0)$ haben dann die Entwicklung $e_2 e_3 \dots$. Es sei $X_1 Y_1$ das Segment, das alle Punkte mit dieser Entwicklung enthält; wir brauchen die Frage, ob $X_1 Y_1$ mit $e_1^{-1}(X_0 Y_0)$ identisch oder grösser ist, nicht zu entscheiden, jedenfalls ist $X_1 Y_1$ grösser als $X_0 Y_0$. Die Intervalle erster Ordnung liegen nämlich innerhalb der entsprechenden, die Seiten des Fundamentalbereichs B bildenden Kreise, und diese spielen für die Erzeugenden die Rolle des Kreises C der Fig. 4 für die dortige Substitution S ; vgl. die Definition der Erzeugenden in § 3. Jedes Teilintervall von $[e_1]$ wird also durch die Operation e_1^{-1} vergrössert. Ebenso bilden wir nun das Segment $e_2^{-1}(X_1 Y_1)$ und das dieses enthaltende Segment $X_2 Y_2$, das aus allen Punkten mit der Entwicklung $e_3 e_4 \dots$ besteht, u. s. w. Die Intervalle dieser Folge $X_0 Y_0, X_1 Y_1, X_2 Y_2, \dots$ können nicht zu einander fremd sein, da sie wachsende Länge haben. Wenn aber zwei Intervalle dieser Folge einen Punkt gemeinsam

haben, so müssen alle Punkte beider Intervalle dieselbe Entwicklung, nämlich die Entwicklung des gemeinsamen Punktes haben, und das widerspricht der Tatsache, dass das kleinere von beiden bereits alle Punkte mit dieser Entwicklung enthalten sollte.

c) *Periodische Entwicklungen bestimmen Grundpunkte von F und umgekehrt.* Wenn ein Randpunkt P die Entwicklung

$$e_1 e_2 \dots e_r e_{r+1} \dots$$

hat, so hat, wie die Definition der Entwicklung besagt, $(e_1 e_2 \dots e_r)^{-1}(P)$ die Entwicklung $e_{r+1} e_{r+2} \dots$. Wenn nun P eine Entwicklung hat, die aus der periodischen Wiederholung der Teilfolge $e_1 e_2 \dots e_r$ besteht, so hat $(e_1 e_2 \dots e_r)^{-1}(P)$ dieselbe Entwicklung, also ist zufolge b)

$$(e_1 e_2 \dots e_r)^{-1}(P) = P$$

und somit P ein Grundpunkt des Elements

$$f = e_1 e_2 \dots e_r.$$

Und zwar muss P der positive Grundpunkt von f , $P = V(f)$, sein, wie aus der Auffassung der Entwicklung als eines auf den betreffenden unendlich fernen Punkt zustrebenden möglichst geraden Netzseitenweges folgt. — Ein anderer Punkt P^* möge nun die Entwicklung

$$k(P^*) = h_1 h_2 \dots h_m \cdot e_1 e_2 \dots e_r \cdot e_1 e_2 \dots e_r \dots$$

mit der früheren Periode f haben. Es sei $h_1 h_2 \dots h_m = h$ gesetzt. Dann ist

$$k(h^{-1}(P^*)) = k(P) = k(V(f)),$$

also

$$h^{-1}(P^*) = V(f),$$

also

$$P^* = h(V(f)) = V(hf h^{-1}) = V(h_1 \dots h_m \cdot e_1 \dots e_r \cdot h_m^{-1} \dots h_1^{-1}).$$

Nun soll gezeigt werden, dass auch umgekehrt jeder Grundpunkt von F eine (rein oder gemischt) periodische Entwicklung hat.

Es sei $l = U(f) V(f)$ die Achse eines Elements f (Fig. 9). In einem Punkte A von l errichte man ein Lot AB von solcher Länge, dass der Parallelenwinkel $ABV(f)$ die Grösse $\frac{\pi}{4p}$ bekommt. Man trage auf der Verlängerung von AB die

Strecke BC gleich der halben Netzmaschenseite $\frac{s}{2}$ ab und errichte in C das Lot GCH auf AC . Dann ist GCB ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck mit der Kathete $\frac{s}{2}$ und dem Basiswinkel $\frac{\pi}{4p}$, ebenso wie das aus Mascheneckpunkt, Maschenseitenmitte und Maschenmittelpunkt gebildete Dreieck. Man kann sich also ein der Netzmasche kongruentes Polygon so gelegt denken, dass B Mittelpunkt und GH Seite ist. L sei die durch G und H gelegte Abstandslinie zu l ; sie schneide die Verlängerung von AC in D ; ihr Abstand von l ist grösser als die Netzmaschenseite s , denn $BC = \frac{s}{2}$, und AB ist wegen der geforderten Parallelenwinkleigenschaft grösser als $\frac{s}{2}$. Das Spiegelbild von L in l heisse L' .

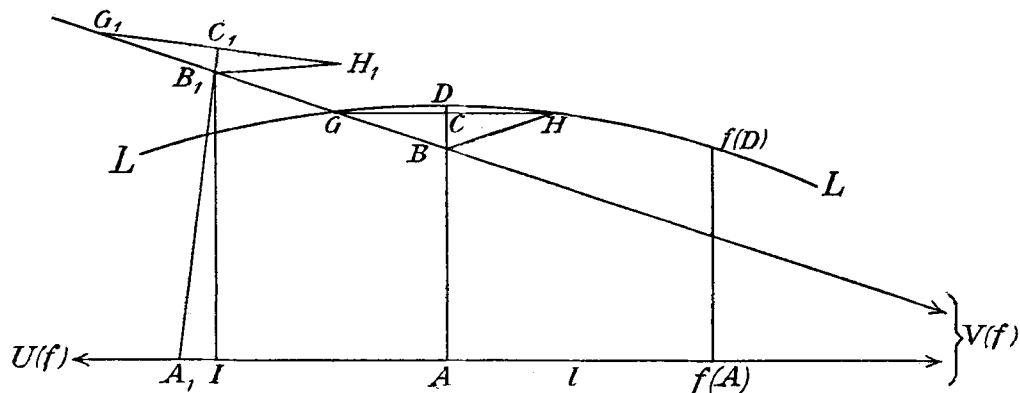


Fig. 9.

Nun verschiebe man das Dreieck GBH so, dass die Seite BG in ihrer Geraden $V(f)BG$ gleitet und das Dreieck in eine Stellung $G_1B_1H_1$ gelangt, in der G_1 auf der von l abgewandten, konvexen Seite von L , auf der »Aussenseite« von L , zu liegen kommt. H beschreibt bei dieser Verschiebung eine Abstandslinie zu $BV(f)$, H_1 fällt also auch auf die Aussenseite von L . Das Lot B_1I von B_1 auf l ist dann grösser als BA , der Parallelenwinkel $IB_1V(f)$ also kleiner als $ABV(f)$, d. h. kleiner als $GBC = G_1B_1C_1$. Das Mittellot C_1B_1 des Dreiecks $G_1B_1H_1$ schneidet also verlängert die Gerade l , wenn überhaupt, in einem Punkte A_1 zwischen I und $U(f)$; mit anderen Worten, das gemeinsame Lot von G_1H_1 und l liegt näher an H_1 als an G_1 , und daher hat H_1 einen kleineren Abstand von l als G_1 . (Das Umgekehrte ist der Fall, wenn man das Dreieck in der umgekehrten Richtung verschiebt, so dass also G_1 und daher auch H_1 innerhalb L fällt).

Nun denke man sich, dass G_1 ein Netzeckpunkt sei und dass es sich um die Entwicklung des unendlich fernen Punktes $V(f)$ handle. Die für G_1 ausgezeichnete Netzseite fällt dann in den Winkelraum, der von G_1H_1 und der dazu bezgl. $G_1V(f)$ symmetrischen Linie gebildet wird (übrigens ausschliesslich der Grenzen, denn da $V(f)$ nicht zwei Achsen angehören kann, ist $G_1V(f)$ nicht Achse, also speziell nicht Maschenhauptdiagonale) und hat die Länge von G_1H_1 , ihr Endpunkt liegt also l näher als ihr Anfangspunkt. Nun möge der dem Nullpunkt entsprechende Netzeckpunkt O , von dem der der Entwicklung entsprechende Netzseitenweg $k(V(f))$ ausgeht, ausserhalb der durch L und L' begrenzten streifenförmigen Umgebung von l liegen. Der Weg k muss sich dann, solange er ausserhalb dieses Streifens verläuft, mit jeder neuen Seite l nähern. Es gibt aber nur endlich viele Werte des Abstandes von Netzeckpunkten zu l unterhalb einer gegebenen Schranke, da sich diese Abstände ja bei der Verschiebung f periodisch wiederholen. Also muss k nach endlich vielen Schritten innerhalb des Streifens LL' kommen, wenn k nicht schon von vorneherein innerhalb dieses Streifens begann, und kann dann diesen Streifen nicht mehr verlassen. Nun begrenzen die Lote AD und $f(A)f(D)$ mit l und L einen Bereich, der zusammen mit seinem Spiegelbild in l einen Fundamentalbereich für die Gruppe der Potenzen von f auf dem Streifen darstellt. Dieser enthält nur endlich viele Netzeckpunkte. Und in dem Augenblick, wo k zum ersten Male in einem Netzeckpunkt eintrifft, der aus einem früher passierten durch eine Potenz von f hervorgeht, setzt die periodische Wiederholung der betreffenden früheren Teilfolge aus der Entwicklung ein. — Damit ist die Behauptung bewiesen.

d) *Die Grundperiode gehört zu dem primären Element.* Wir verlegen den Nullpunkt O in einen Netzeckpunkt des periodischen Teils des Netzweges $k(V(f))$, sodass wir es mit einer rein periodischen Entwicklung $k(V(f))$ zu tun haben. Nun sei h das zu der Achse von f gehörige primäre Element mit $V = V(f)$ als positivem Grundpunkt. Wir bilden das Bild $k^{(1)} = h(k(V))$ des Weges $k(V)$ bei h . Dieser Netzweg stellt dieselbe Entwicklung dar, er geht nur von einem anderen Punkte, nämlich $h(O)$ aus. $k^{(1)}$ kann nicht zu k ganz fremd sein, da k ja bei einer Potenz von h mit einem Teilweg von k zur Deckung kommt. Aus der Eindeutigkeit der Entwicklung folgt aber, dass k und $k^{(1)}$ nicht Punkte gemeinsam haben können, ohne dass $k^{(1)}$ ganz auf k liegt. $h(O)$ liegt also auf k , und k besteht aus der periodischen Wiederholung des h darstellenden Wegstückes $Oh(O)$ von k . Dies Wegstück kann nicht selbst wieder aus periodischen Wiederholungen

eines noch kürzeren Wegstücks bestehen, da h nicht Potenz eines anderen Elementes ist. Die zu der Achse gehörige Grundperiode entspricht also dem primären Element.

e) *Alle zu den Teilungspunkten R_1, \dots, R_{4p} äquivalenten Punkte treten bei der Intervallteilung auf.* Jeder mit einem der Punkte R_i äquivalente Punkt S von E ist Endpunkt einer aus Maschenhauptdiagonalen bestehenden Achse l . Errichtet man in einem auf l gelegenen Netzeckpunkt das Lot auf l , so besteht auch dieses aus einer Maschenhauptdiagonale, trifft also das Netz erst wieder in der Entfernung 2ϱ von l , wenn wir die Entfernung vom Maschenmittelpunkt zum Mascheneckpunkt ϱ nennen. 2ϱ ist aber grösser als der Abstand von l und L in Fig. 9. Denn dieser Abstand ist kleiner als $GB + BA$; nun ist $GB = \varrho$ und $BA < \varrho$. Fig. 8 zeigt nämlich, dass die von einem Punkt (dort P_2) in der Entfernung ϱ von der Maschenhauptdiagonale zu dieser gezogene Parallele einen Parallelenwinkel $< \frac{\pi}{4p}$ bildet. Ein Netzseitenweg, der mit beliebigem Anfangspunkt die Entwicklung $k(S)$ darstellt, muss also, nachdem er innerhalb des zu l gehörigen Streifens LL' gelangt ist, notwendig einmal einen Netzeckpunkt auf l passieren. Der bei der Entwicklung von S fortgesetzt verlegte Randpunkt fällt also einmal in eine der Lagen R_i ; S spielt also die Rolle des Punktes R^* in a).

f) *Zusammenfassende Veranschaulichung der Randpunktentwicklung an einem Vierecksnetze ν .* Da der Begriff der Randpunktentwicklung in der vorliegenden Arbeit eine wichtige Rolle spielt, möge das bisher ausgeführte noch mit etwas anderen Worten ausgedrückt werden, um die Einfachheit des Verfahrens der Anschauung nahe zu bringen. Man denke sich die $2p$ Durchmesser durch die Punkte R_1, \dots, R_{4p} und alle dazu äquivalenten Geraden gezeichnet. Dadurch ist der Vollwinkel um jeden mit dem Nullpunkt äquivalenten Punkt in $4p$ gleiche Sektoren geteilt. Durch die Gesamtheit dieser nichteuklidischen Geraden ist Φ mit einem neuen Netz, dem Netze ν , überzogen, dessen Maschen reguläre Vierecke mit der Seite ϱ und dem Winkel $\frac{\pi}{2p}$ sind, die also zu je $4p$ um eine gemeinsame Ecke angeordnet sind. In jeder Vierecksmasche ist die eine Diagonale Seite des Netzes n , die andere Seite des Netzes N . Die Entwicklung eines Randpunktes geht nun so vor sich, dass man, mit dem Nullpunkt anfangend,

jedesmal in dem betreffenden Netzeckpunkt den Sektor bestimmt, der den Randpunkt enthält, und in diesem zum diagonal gegenüberliegenden Netzeckpunkt fortschreitet.

Die Menge der unendlich fernen Punkte der das Netz ν bildenden Geraden ist mit der Menge der Intervallteilungspunkte auf E identisch. Diese Menge bildet eine echte Teilmenge der Menge der Grundpunkte von F , und schon diese Teilmenge, die die Grundpunkte für die Elemente einer *endlichen* Anzahl von Elementklassen aus F enthält, liegt überall dicht auf E . In der Hauptsache ist der Sachverhalt nun so, dass $4p - 1$ der um einen mit dem Nullpunkt äquivalenten Punkt liegenden Sektoren auf E Intervalle m -ter Ordnung bestimmen, wenn der Punkt mit dem Nullpunkt durch einen aus $m - 1$, aber nicht weniger, Seiten des Netzes n bestehenden Streckenzug verbunden werden kann; hierzu kommen allerdings noch nach dem Früheren einige Sonderbestimmungen für Erzeugendenfolgen in der Reihenfolge der Relation. Dass diese Intervalle beliebig klein werden, wenn nur der betreffende mit dem Nullpunkt äquivalente Punkt genügend nahe an E liegt, also m genügend gross ist, ist ein anschaulicher Beweis für die Richtigkeit des Eindeutigkeitssatzes b).

g) *Kombinatorische Lösung des Homotopieproblems.* Wir beweisen zunächst den folgenden *Hilfssatz*:

Die von den $4p$ an einen Netzeckpunkt stossenden Maschen gebildete Figur hat auf dem unter c) definierten Streifen LL' nicht Platz.

Offenbar brauchen wir diesen Satz nur in dem Fall zu beweisen, dass die Mittellinie l des Streifens durch den betrachteten Netzeckpunkt P geht. Unter e) haben wir schon bewiesen, dass der Abstand von l und L kleiner als die Länge 2ϱ der Maschenhauptdiagonale ist. Wir werden nun beweisen, dass der Endpunkt einer von einem Punkt von l unter dem Winkel $\frac{\pi}{4p}$ gegen die Normale abgetragenen Strecke von der Länge 2ϱ auch noch ausserhalb L fällt. Damit wird der Hilfssatz bewiesen sein, denn eine der von P ausgehenden Maschenhauptdiagonalen bildet mit der Normalen von l einen Winkel $\leq \frac{\pi}{4p}$. Zum folgenden Nachweis siehe Fig. 10.

PP_3 ist die Maschenhauptdiagonale, die mit dem Lote PP_1 auf l den Winkel $\frac{\pi}{4p}$ bildet. $PM = MP_3 = \varrho$. PP_1 und PP_2 sind die sie einschliessenden

Netzseiten, O_1 und O_2 deren Mitten, MO_1U_1 und MO_2U_2 also die Mittellote auf diesen Seiten. $PMO_1 = PMO_2 = \frac{\pi}{4p}$. U_2SU_1 ist eine zu PM senkrechte und zu MO_1U_1 und MO_2U_2 parallele Gerade. MS ist also gleich der Strecke BA der Fig. 9, und wir fanden unter e), dass diese kleiner als ϱ ist. S fällt also zwischen M und P . Nun zeigt eine Betrachtung der Netzmasche, dass der zur halben Netzseite gehörige Parallelenwinkel grösser als $\frac{\pi}{4p}$ und kleiner als $\frac{\pi}{2p}$ ist.

PO_2 ist die halbe Netzseite, und $PO_2U_2 = \frac{\pi}{2}$. O_2P bildet mit l den Winkel $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2p} \geq \frac{\pi}{2p}$, da $p \geq 2$. Also schneiden sich O_2U_2 und l nicht, und daher schneiden sich auch U_1SU_2 und l nicht. Der Abstand MA des Punktes M von l ist daher grösser als MS . Nun werde die in Fig. 9 mit ABG bezeichnete gebrochene Linie mit gleicher Bezeichnung auf Fig. 10 übertragen. B fällt dann zwischen A und M wegen $AB = MS < MA$. Es ist $BG = MP_3 = \varrho$. Die Linie L ist definiert als die durch G gehende Abstandslinie zu l . P_3 muss nun, wie behauptet, auf die Aussenseite von L fallen, denn MP_3 geht von einem höheren Punkte des Lotes MA aus als BG , und bildet mit diesem Lote einen kleineren Winkel; es ist nämlich $AMP < O_2MP = MBG = \frac{\pi}{4p}$. — Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

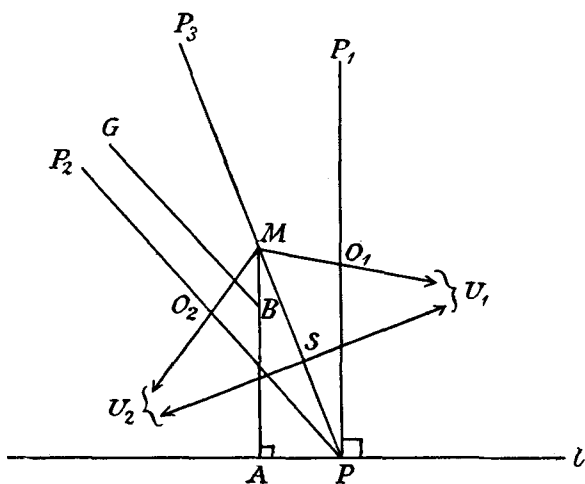


Fig. 10.

Nun sei l die Achse eines Elementes f und $k = k(V(f))$ ein Netzseitenweg, der die Entwicklung von $V(f)$ darstellt. Der Anfangspunkt sei so gewählt, — indem wir nötigenfalls ein Anfangsstück des Netzseitenweges fortlassen — dass k eine rein periodische Entwicklung darstellt. $f^n(k)$, $n < 0$, ist ein Netzseitenweg, von dem k ein Teil ist; dadurch ist sozusagen k nach rückwärts verlängert. Lässt man n gegen $-\infty$ gehen, so bekommt man einen nach beiden Seiten unendlichen, die Achse l innerhalb des Streifens LL' begleitenden, singularitäten-

freien Netzseitenweg, der mit K_0 bezeichnet sei. *Es wird gefragt, ob K_0 durch l eindeutig bestimmt ist, ob also die Periode der Entwicklung durch Angabe der Elementklasse bis auf zyklische Vertauschung eindeutig bestimmt ist.* Wir kennen einen Spezialfall, in dem diese Frage zu verneinen ist, nämlich den Fall der aus Maschenhauptdiagonalen bestehenden Achsen. Von diesem sehen wir daher jetzt ab. Angenommen nun, eine andere Wahl des Anfangspunktes führte uns zu einem mit K_0 analog gebildeten nach beiden Seiten unendlichen Netzseitenweg K_1 , der nicht mit K_0 identisch ist. K_0 und K_1 können wegen der Eindeutigkeit der Entwicklung keinen Punkt gemeinsam haben. Sie begrenzen einen nach beiden Seiten unendlichen, bei f periodisch sich wiederholenden Teilstreifen, der ganz im Inneren des Streifens LL' liegt. Dieser Teilstreifen kann daher nach dem Hilfssatz keinen Netzpunkt im Inneren enthalten. K_0 ist also mit K_1 nur durch einzelne Netzseiten verbunden. Betrachten wir eine Netzmasche, zu der zwei dieser Netzseiten gehören, so muss diese wegen der beiden ersten Eigenschaften der Entwicklungsausdrücke (§ 6) *entweder* auf K_0 und K_1 je ein aus $2p-1$ Seiten bestehendes Randstück, *oder* auf dem einen Weg ein aus $2p$ Seiten bestehendes, auf dem anderen ein aus $2p-2$ Seiten bestehendes Randstück haben. Der letztere Fall wird aber durch die *dritte* Eigenschaft der Entwicklungsausdrücke unmöglich gemacht, wie man an dem Übergang zur nächsten der kettenförmig aneinandergereihten Maschen zwischen K_0 und K_1 sofort erkennt. Jedes Glied dieser unendlichen Maschenkette hat also $2p-1$ Seiten auf K_0 und $2p-1$ auf K_1 , dann geht die Achse l aber durch alle Maschenzentren und steht auf zwei gegenüberliegenden Netzseiten jeder Masche, nämlich allen K_0 mit K_1 verbindenden Netzseiten, senkrecht. Es gibt nur endlich viele nicht äquivalente Achsen dieser Art, die man durch Betrachtung der Mittellote der Netzmaschen leicht bilden und durch die Erzeugenden darstellen kann. Sie sind ebenso wie die aus Hauptmaschendiagonalen bestehenden Achsen Symmetrielinien der drei Netze. — Wir haben also zusammenfassend folgenden Satz:

Bei der Entwicklung der positiven Grundpunkte aller Elemente einer Elementklasse bekommt man dieselbe (nur bis auf zyklische Vertauschung bestimmte) Periode. Nur für endlich viele (nämlich weniger als $8p$) Elementklassen ergeben sich zwei Ausdrücke für die Periode; diese sind entweder vermöge der Relation identisch (Fall der aus Maschenhauptdiagonalen bestehenden Achsen) oder durch Transformation mit einer Erzeugenden in einander überführbar (Fall der aus Maschenmittelloten bestehenden Achsen).

Dem ersten Ausnahmefall entspricht, wie wir wissen, eine Unbestimmtheit in der Entwicklung selbst, indem wir einmal eine freie Wahl zwischen zwei Konvergenten haben. Im zweiten Ausnahmefall ist die Entwicklung eindeutig bestimmt, man bekommt aber die eine oder die andere Periode, je nachdem ob man sich der Achse des Elements von der einen oder der anderen Seite nähert, d. h. je nachdem ob man bei Durchlaufung der Achse in Richtung auf den positiven Grundpunkt den Nullpunkt zur Rechten oder zur Linken hat.

Hiermit ist zugleich für die kombinatorische Lösung des Transformationsproblems, die man M. DEHN⁸ verdankt, eine neue Ableitung gegeben. Zwei geschlossene Kurven auf der Fläche sind dann und nur dann homotop, wenn irgend zwei ihnen entsprechende Elemente von F in einander transformierbar sind (§ 3). Man schreibe zwei diesen Elementen entsprechende Erzeugendenausdrücke zyklisch und führe sie durch identische Umformungen und Anwendungen der Relation in neue Formen über, in denen sie die für Entwicklungen charakteristischen drei Eigenschaften haben. Das ist zufolge dem Vorhergehenden stets möglich, und das Ergebnis ist im Allgemeinen eindeutig bestimmt und zwar für die beiden Elemente dann und nur dann dasselbe, wenn sie in einander transformierbar sind. Für die endlich vielen Ausnahmefälle kann man sich die beiden möglichen Formen etwa in einer Tabelle aufschreiben, so dass man sofort erkennen kann, ob die gegebenen Elemente auf Perioden aus dieser Tabelle führen, und damit auch in diesem Fall sofort die Entscheidung treffen kann.

Wie man sieht, unterscheidet sich diese Methode nur dadurch von der DEHNschen Lösung, dass sie durch die Forderung der obigen dritten Eigenschaft die Reduktion der Erzeugendenausdrücke noch weiter treibt. Demgemäss wird die Zahl der Ausnahmefälle, die zwar bei DEHN auch schon sehr speziell sind, aber doch noch unendlich viele Elementklassen umfassen, auf endlich viele Klassen eingeschränkt. Die beiden von DEHN genannten Beispiele für die Ausnahmefälle, l. c.⁸ S. 414 bezw. S. 420, entsprechen Elementachsen aus Maschenhauptdiagonalen bezw. Maschenmittelloten, bleiben also auch hier als Ausnahmefälle bestehen. Es sei daher noch für $p = 2$ folgendes Beispiel für das Unterscheidende gegeben:

$$\alpha = a_1^{-1} b_1^{-1} b_2^{-1} a_1 b_1 a_1^{-1}$$

und

$$\beta = a_1^{-1} b_2 a_2 b_2^{-2} a_2^{-1}$$

⁸ M. DEHN, Transformation der Kurven auf zweiseitigen Flächen. Math. Ann. 72 (1912) S. 413--421.

sind reduzierte Ausdrücke im Sinne DEHNs; wenn sie also in einander transformierbar sein sollen, so muss nach der Lösung DEHNs α durch Transformation mittels einer Erzeugenden aus einer zyklischen Vertauschung von β hervorgehen. Es ist $\alpha = b_1^{-1} \beta b_1$, wie man durch zweimalige Anwendung der Relation bestätigt. Der Ausdruck α hat aber nicht die obige dritte Eigenschaft, da auf $b_2^{-1} a_1 b_1 a_1^{-1}$ nicht a_1^{-1} folgen darf. α ist daher in

$$\alpha' = a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} b_1$$

umzuformen; dieser Ausdruck hat alle drei Eigenschaften, stellt also die zu der Achse von α gehörige Periode dar. Aus dem analogen Grunde ist β in

$$\beta' = b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2^{-1} a_2^{-1}$$

umzuformen. Und nun sind α' und β' zyklisch gelesen identisch. Die beiden Elemente gehören eben nicht einer Ausnahmeelementklasse im hier benutzten Sinne an; die entsprechende Achse ist keine Symmetrielinie der Netzeinteilungen.

h) *Zusammenhang zwischen den Entwicklungen zusammengehöriger Grundpunkte.* f sei ein Element aus F , dessen positiver Grundpunkt $V(f)$ etwa eine rein periodische Entwicklung habe, die aus der periodischen Wiederholung des Ausdruckes $f = e_1 e_2 \dots e_r$ besteht. Wie lautet dann die Entwicklung von $U(f)$, dem positiven Grundpunkt von f^{-1} ? Die periodische Wiederholung von $e_r^{-1} \dots e_1^{-1}$ hat die beiden ersten Eigenschaften der Entwicklungsausdrücke, aber nicht notwendig die dritte. Aber man kann dann diesen Ausdruck, wie wir wissen, mittels der Relation so umformen, dass er die dritte Eigenschaft erhält. *Beispiel:* Es sei für $p = 2$:

$$k(V(f)) = b_1 a_1^{-1} b_1^{-2} b_2 a_1 \cdot b_1 a_1^{-1} b_1^{-2} b_2 a_1 \dots$$

Bildet man dann den Ausdruck:

$$a_1^{-1} b_2^{-1} b_1^2 a_1 b_1^{-1} \cdot a_1^{-1} b_2^{-1} b_1^2 a_1 b_1^{-1} \dots,$$

so hat er nicht die dritte Eigenschaft, da auf $b_1 a_1 b_1^{-1} a_1^{-1}$ nicht b_2^{-1} folgen darf. Man formt ihn daher um in

$$a_1^{-1} \cdot b_2^{-1} b_1 a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdot b_2^{-1} b_1 a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots,$$

und in dieser Form stellt er die Entwicklung von $U(f)$ dar. Man sieht, dass diese selbst dann nicht rein periodisch zu sein braucht, wenn diejenige von $V(f)$ es ist. —

Bildet man aus den Perioden von $k(V(f))$ und $k(U(f))$ analog wie unter g) zwei nach beiden Seiten unendliche, die Achse von f begleitende periodische Netzseitenwege K_0 und K_1 , so liegen diese beide ganz auf dem zur Achse gehörigen Streifen LL' ; sie haben also nach dem Hilfssatz unter g) keinen Netzeckpunkt zwischen sich, sondern höchstens einzelne Netzmaschen oder Ketten aus solchen; sie können Netzeckpunkte oder Streckenzüge gemeinsam haben, ohne ganz zusammenzufallen, — siehe obiges Beispiel. — Wenn in $k(V(f))$ keine Teilausdrücke von $2p$ im Sinne der Relation aufeinanderfolgenden Erzeugenden vorkommen, so fallen K_0 und K_1 zusammen, und das kann auch der Fall sein, wenn solche »Halbmaschen« vorkommen, wie etwa für $p=2$ bei $f=a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-2}$.

i) *Zwei Randpunkte sind* — von den schon genannten Ausnahmefällen abgesehen — *dann und nur dann äquivalent, wenn ihre Entwicklungen gleich endigen*, d. h. bis auf nicht notwendig gleich grosse Anfangsabschnitte übereinstimmen. Dieser Satz ist unter g) für alle diejenigen Randpunkte bewiesen, die Grundpunkte von F sind, indem für diejenigen Ausnahme-Grundpunkte, die Endpunkte von aus Maschenhauptdiagonalen oder Maschenmittelloten bestehenden Achsen sind, die früher gekennzeichnete Doppeldeutigkeit der Periode zu berücksichtigen ist. Wir haben den Satz daher jetzt nur für solche Randpunkte zu beweisen, die nicht Grundpunkte sind, deren Entwicklung also nicht periodisch ist, und zu sehen, dass dabei keine neuen Ausnahmefälle auftreten.

Es seien also P und Q zwei Punkte von E , die nicht Grundpunkte sind, und f ein Element aus F , für welches $Q=f(P)$. Es kann höchstens ein solches Element geben, denn wenn auch $Q=f_1(P)$ gegeben ist, so folgt $f^{-1}f_1(P)=f^{-1}(Q)=P$, also $f^{-1}f_1=1$, $f=f_1$, da P nicht Grundpunkt ist. (Für zwei äquivalente Grundpunkte ist dagegen das die Äquivalenz vermittelnde Element aus F nicht vollständig bestimmt; es gibt unendlich viele solche.) Wenn man nun die Entwicklungen von Q und P vergleichen soll, so kann man Q nach P verlegen, indem man gleichzeitig den Nullpunkt O nach $O_1=f^{-1}(O)$ verlegt. Die Netzseitenwege k und $k^{(1)}$, die die Entwicklungen $k(P)$ und $k(Q)$ darstellen, streben dann von zwei verschiedenen Netzpunkten O und O_1 aus demselben unendlich fernen Punkte P zu. Man verbinde O und O_1 mit P durch zwei Halbstrahlen h und h_1 . Die in P endigende Gerade, bezüglich deren die h und h_1 tragenden Geraden symmetrisch liegen, heiße s . L sei eine Abstandslinie zu h auf der von h_1 abgekehrten Seite und L_1 eine Abstandslinie zu h_1 auf der von h abgekehrten Seite, und die Abstände hL und h_1L_1 seien gleich dem Abstand lL in Fig. 9. t sei ein Lot auf s in einem Punkte A , das L und L_1 in B und B_1 schneidet. Das von t , L und

L_1 begrenztes Gebiet mit Ecken in B , B_1 und P heisse w . Die von O bzw. O_1 ausgehenden Netzwege k bzw. $k^{(1)}$ verlaufen ganz innerhalb des Abstandes lL der Fig. 9 von h bzw. h_1 . Beide verlaufen also von einem gewissen Punkte an ganz in w . Wenn k und $k^{(1)}$ einen Punkt gemeinsam haben, so fallen sie von diesem an ganz zusammen, da P nicht Endpunkt einer aus Maschenhauptdiagonalen bestehenden Achse ist. Wir haben also nur zu beweisen, dass k und $k^{(1)}$ nicht zu einander ganz fremd sein können. In diesem Fall enthalten sie zwischen sich ein Teilgebiet von w . Da nun h , s und h_1 asymptotisch gegen einander verlaufen, so konvergiert die Länge BB_1 gegen das Doppelte des Abstandes lL der Fig. 9, wenn man A auf s in Richtung von P verschiebt. Man kann daher A so wählen, dass die im Hilfssatz unter g) betrachtete Figur im Gebiete w nicht Platz hat. k und $k^{(1)}$ enthalten dann auf w keinen Netzeckpunkt zwischen sich. Genau wie unter g) folgt dann, dass das obengenannte Teilgebiet, das k und $k^{(1)}$ auf w begrenzen müssten, aus einer Maschenkette besteht, die eine aus Maschenmittelloten gebildete Symmetrielinie hat. Das ist unmöglich, da P nicht Endpunkt einer solchen Linie ist.

j) *Fundamentalfolgen*. Definition: Eine unendliche Folge

$$f_1, f_2, \dots$$

von Elementen von F heisse eine *Fundamentalfolge*, wenn die Punktfolge

$$f_1(o), f_2(o), \dots$$

gegen einen Punkt von E konvergiert. Ist P der Grenzpunkt der letzteren Folge, so wird gesagt, dass die Fundamentalfolge »zu P gehört«. Ist dann x ein beliebiger Punkt von \mathcal{D} (oder von \mathcal{P}), so konvergiert auch die Punktfolge

$$f_1(x), f_2(x), \dots$$

gegen P . Schneidet nämlich ein Kreis α um P mit dem Radius ε den Einheitskreis in Q und R , so zeichne man einen Kreis λ durch Q und R , der α von P trennt und dessen Punkte von α einen grösseren nichteuklidischen Abstand haben, als α vom Nullpunkt; das ist möglich, weil α und λ Abstandslinien zur selben nichteuklidischen Geraden sind. Wenn dann N so gross gewählt ist, dass $f_n(o)$ für alle $n > N$ dem von λ und dem Bogen QPR von E begrenzten Zweieck angehört, so hat $f_n(x)$ für alle $n > N$ von P einen euklidischen Abstand $< \varepsilon$. — Auf einem Kreis durch den Nullpunkt O und die Grundpunkte von f_n liegen die Punkte $U(f_n)$, O , $f_n(o)$, $V(f_n)$ in dieser Reihenfolge. Also hat $V(f_n)$ von $f_n(o)$ einen

euklidischen Abstand $< \sqrt{1 - |f_n(o)|^2}$, also von P einen Abstand $< \sqrt{1 - |f_n(o)|^2} + r_n$, wo r_n den Abstand zwischen $f_n(o)$ und P bedeutet. Die Folge der Randpunkte

$$V(f_1), V(f_2), \dots$$

konvergiert also gegen P .

Nun gilt die folgende Umkehrung: Jede Folge

$$f_1, f_2, \dots$$

von Elementen von F , in der kein Element unendlich oft vorkommt und für welche die Randpunktfolge

$$V(f_1), V(f_2), \dots$$

gegen einen Punkt P von E konvergiert, ist eine zu P gehörige Fundamentalfolge.

Beweis: Die Folge $|f_1(o)|, |f_2(o)|, \dots$ konvergiert gegen 1, da in der gegebenen Folge kein Element unendlich oft vorkommt und ein Kreis um o mit einem Radius < 1 nur endlich viele mit o äquivalente Punkte enthält. ε sei beliebig vorgegeben. Mit $PA = PB = \varepsilon$ wird um P ein Kreis AB geschlagen (Fig. 11). A_1B_1 sei ein Teilsegment von AB mit dem Mittelpunkt P . Halbkreise über OA_1 und OB_1 schneiden den Kreis AB in C und D . Nun werde N so gross gewählt, dass für alle $n > N$ sowohl $V(f_n)$ dem Segment A_1B_1 angehört, als auch $|f_n(o)| > OC$ ist. Dann gehört der Punkt $f_n(o)$ für alle $n > N$ dem Kreisbogenviereck PA_1CDB_1P an, hat also von P einen Abstand $< \varepsilon$, w. z. b. w.

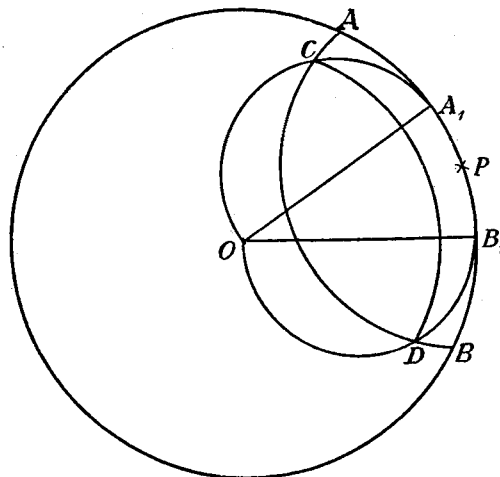


Fig. 11.

Eine spezielle unter den zu einem Randpunkt P gehörigen Fundamentalfolgen wird durch seine Konvergenten $k_1(P), k_2(P), \dots$ gebildet. Diese Elemente sind nämlich alle verschieden, und die Punkte $k_1(o), k_2(o), \dots$ gehören alle einem Streifen an, der durch zwei Abstandslinien zum Radius OP im Abstände lL der Fig. 9 begrenzt wird. Die Folge $k_1(o), k_2(o), \dots$ konvergiert also gegen P .

Die Folge $V(k_n)$ der positiven Grundpunkte der Konvergenten konvergiert also auch gegen P . Wenn also die Entwicklung von $V(k_n)$ mit der Entwicklung von P alle Konvergenten bis zur Ordnung $m(n)$ gemeinsam hat, so wächst $m(n)$ mit n über alle Grenzen.

II. ABSCHNITT.

Automorphismen der Fundamentalgruppe und zugehörige Transformationen des Einheitskreises in sich.**8. Definition der Automorphismen. Ein hinreichendes Kriterium für ihre Festlegung.**

Unter einem Automorphismus der Gruppe F versteht man eine isomorphe Abbildung von F in sich, d. h. eine Korrespondenz zwischen den Elementen von F , die folgende drei Eigenschaften hat:

- a) Jedem Elemente f von F entspricht ein und nur ein Element f' von F .
- b) Jedes Element f' von F entspricht einem und nur einem Elemente f von F .
- c) Die Gleichung $f_1' \cdot f_2' = f_3'$ besteht dann und nur dann, wenn die Gleichung $f_1 \cdot f_2 = f_3$ besteht.

Hieraus folgt, dass wenn man f_1 und f_2 und daher auch f_3 gleich der Identität setzt, die Elemente f_1' , f_2' und f_3' einander gleich und daher ebenfalls gleich der Identität werden; die Identität entspricht also sich selber; daraus folgt weiter, dass dem Element f^{-1} das Element f'^{-1} entspricht. Einem primären Element entspricht ein primäres Element. Zwei ineinander transformierbaren Elementen entsprechen zwei in einander transformierbare Elemente, sodass auch die Gesamtheit der Klassen in einander transformierbarer Elemente bei einem Automorphismus eine Abbildung in sich erfährt.

Wir bezeichnen einen solchen Automorphismus von F mit dem Buchstaben I oder mit $f \rightarrow f'$ und das dem Element f bei I entsprechende Element f' oft auch mit f_I . Die Korrespondenz $f' \rightarrow f$ ist auch ein Automorphismus und wird mit I^{-1} bezeichnet. Sind die Automorphismen $I_1(f \rightarrow f')$ und $I_2(f' \rightarrow f'')$ gegeben, so ist auch $f \rightarrow f''$ ein Automorphismus, der mit $I_1 I_2$ bezeichnet wird. Mit dieser Kompositionsregel bilden die Automorphismen von F eine Gruppe, die mit \mathfrak{S} bezeichnet sei.

Ein Automorphismus $I(f \rightarrow f')$ wird durch Angabe der Elemente

$$a_1', b_1', \dots, a_p', b_p'$$

vollständig bestimmt. Wir denken uns diese als Ausdrücke in den Erzeugenden a_i, b_i gegeben. I^{-1} sei in analoger Weise durch a_i'', b_i'' gegeben. Substituiert man in a_i'' für a_1, \dots, b_p die Ausdrücke a_1', \dots, b_p' , so erhält man a_i , nachdem man nötigenfalls unter Anwendung der Grundrelation

$$R(a_1, \dots, b_p) = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} = 1$$

den Erzeugendenausdruck vereinfacht hat. Die ursprünglichen Erzeugenden lassen sich also durch die gestrichenen ausdrücken. Wegen $R(a_1, \dots, b_p) = 1$ ist $R(a_1', \dots, b_p') = 1$; substituiert man hier für die a_i', b_i' ihre Ausdrücke durch die a_i, b_i , so kann die letztere Gleichung durch evtl. wiederholte Anwendung der ersteren gefolgert werden.

Umgekehrt entsteht die Aufgabe, zu entscheiden, ob $2p$ vorgelegte Elemente a_1', \dots, b_p' durch ihre Zuordnung zu den Erzeugenden a_1, \dots, b_p einen Automorphismus von F herstellen oder nicht. Wir stellen vorerst nur ein *hinreichendes* Kriterium dafür auf, dass das der Fall ist. Dies Kriterium wird bei allen später herangezogenen Beispielen verwendbar sein.

Im Folgenden halte man die beiden Bezeichnungen »Erzeugendenausdruck« und »Element der Gruppe« auseinander. Zwei Erzeugendenausdrücke $s(a_1, \dots, b_p)$ und $t(a_1, \dots, b_p)$ stellen dann und nur dann dasselbe Element dar, wenn der Erzeugendenausdruck st^{-1} das Einheits-element darstellt; das ist dann und nur dann der Fall, wenn er sich identisch in a_1, \dots, b_p als ein Produkt von Transformaten von $R(a_1, \dots, b_p)$ und R^{-1} darstellen lässt:

$$st^{-1} \equiv \prod_{i=1}^m h_i(a_1, \dots, b_p) R^{\epsilon_i}(a_1, \dots, b_p) h_i^{-1}(a_1, \dots, b_p),$$

wo die h_i irgend welche Erzeugendenausdrücke sind.

Das in Frage stehende Kriterium ist nun das folgende: Es seien s_1, \dots, s_{2p} $2p$ Erzeugendenausdrücke, durch die die $2p$ Elemente a_1', \dots, b_p' festgelegt werden:

$$\begin{aligned} a_1' &= s_1(a_1, \dots, b_p) \\ &\dots \dots \dots \\ b_p' &= s_{2p}(a_1, \dots, b_p), \end{aligned}$$

und es seien folgende zwei Bedingungen erfüllt:

α) Es ist identisch in den Erzeugenden

$$R(s_1, \dots, s_{2p}) \equiv h(a_1, \dots, b_p) R^{\pm 1}(a_1, \dots, b_p) h^{-1}. \tag{1}$$

β) Es gibt $2p$ Erzeugendenausdrücke $t_1(a_1, \dots, b_p), \dots, t_{2p}(a_1, \dots, b_p)$ so, dass identisch in den Erzeugenden gilt:

$$\begin{aligned} t_1(s_1, \dots, s_{2p}) &\equiv a_1 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$t_{2p}(s_1, \dots, s_{2p}) \equiv b_p.$$

Dann erzeugt die Korrespondenz

$$a_1 \rightarrow a_1', \dots, b_p \rightarrow b_p'$$

einen Automorphismus von F .

Beweis: Wir bezeichnen die Ersetzung der Erzeugenden a_1 durch den Erzeugendenausdruck $s_1(a_1, \dots, b_p)$, u. s. f. bis b_p durch s_{2p} als die »Substitution S «, ebenso a_1 durch $t_1(a_1, \dots, b_p)$ u. s. f. bis b_p durch t_{2p} als »Substitution T «. Dann ist nach β) TS die identische Substitution. S stellt also einen Automorphismus der freien aus $2p$ Symbolen a_1, \dots, b_p erzeugten Gruppe her. Dann ist auch $ST = I$, denn es ist

$$S = S \cdot TS = ST \cdot S,$$

also ST die identische Substitution. Durch Ausübung von T auf die Identität (1) folgt deshalb:

$$R(a_1, \dots, b_p) \equiv h(t_1, \dots, t_{2p}) R^{\pm 1}(t_1, \dots, t_{2p}) h^{-1},$$

also

$$R(t_1, \dots, t_{2p}) \equiv l(a_1, \dots, b_p) R^{\pm 1}(a_1, \dots, b_p) l^{-1}, \quad (2)$$

wenn

$$h^{-1}(t_1, \dots, t_{2p}) \equiv l(a_1, \dots, b_p)$$

bezeichnet wird.

Nun ist zu zeigen, dass die Korrespondenz

$$a_1 \rightarrow a_1', \dots, b_p \rightarrow b_p' \quad (3)$$

den obigen Forderungen $a)$, $b)$ und $c)$ genügt. Sei also f ein beliebiges Element aus F und $w(a_1, \dots, b_p)$ einer der Erzeugendenausdrücke, die f darstellen:

$$f = w(a_1, \dots, b_p).$$

Wegen der Forderung $c)$ muss dem Element f dasjenige Element entsprechen, das man erhält, wenn man in w die Erzeugenden a_1, \dots, b_p durch a_1', \dots, b_p' ersetzt. Wir schreiben daher:

$$f' = S(w) = w(s_1, \dots, s_{2p}) \quad (4)$$

und haben zu zeigen, dass wir hierdurch immer zu demselben Element f' kommen, unabhängig davon, welchen der f darstellenden Erzeugendenausdrücke wir zu Grunde legen. Jeder f darstellende Erzeugendenausdruck hat aber die Form

$$w_1(a_1, \dots, b_p) = w(a_1, \dots, b_p) \cdot \prod_i r_i(a_1, \dots, b_p) R^{\eta_i} r_i^{-1},$$

wo die η_i auf die Werte $+1$ und -1 beschränkt werden können. Also ist

$$S(w_1) = w_1(s_1, \dots, s_{2p}) = S(w) \prod_i r_i(s_1, \dots, s_{2p}) R^{\eta_i}(s_1, \dots, s_{2p}) r_i^{-1},$$

also wegen (1):

$$\begin{aligned} &\equiv S(w) \prod_i r_i(s_1, \dots, s_{2p}) \cdot h(a_1, \dots, b_p) R^{\pm \eta_i}(a_1, \dots, b_p) h^{-1} \cdot r_i^{-1}, \\ &\equiv S(w) \prod_i h_i R^{\epsilon_i} h_i^{-1}; \end{aligned}$$

und dieser Erzeugendenausdruck stellt dasselbe Element f' dar wie $S(w)$. Damit ist die Forderung a) erfüllt.

Ferner sei f' ein beliebiges Element aus F und

$$f' = v(a_1, \dots, b_p)$$

eine seiner Darstellungen. Es ist zu zeigen, dass es bei der durch (4) hergestellten Korrespondenz (3) aus einem und nur einem Element hervorgeht. Wir schreiben daher

$$f = T(v) = v(t_1, \dots, t_{2p}).$$

Es ist nämlich

$$S(v(t_1, \dots, t_{2p})) = S(T(v(a_1, \dots, b_p))) = v(a_1, \dots, b_p).$$

Eine andere Darstellung

$$v_1 = v \cdot \prod_i r_i R^{\eta_i} r_i^{-1}$$

desselben Elementes f' geht durch S aus

$$T(v_1) \equiv T(v) \cdot \prod_i r_i(t_1, \dots, t_{2p}) R^{\eta_i}(t_1, \dots, t_{2p}) r_i^{-1}$$

hervor, und wegen (2) ist dies

$$\equiv T(v) \prod_i h_i R^{\epsilon_i} h_i^{-1},$$

stellt also dasselbe Element f dar wie $T(v)$. Damit ist die Forderung b) erfüllt. Dass nun auch die Forderung c) erfüllt ist, folgt aus dem Charakter von S als einer Substitution. — Die Korrespondenz (3), festgelegt durch die Substitution S , erzeugt also einen Automorphismus.

q. e. d.

Der dazu reziproke Automorphismus wird durch $S^{-1} = T$ festgelegt; den Erzeugenden entsprechen dabei die Elemente

$$a_1'' = t_1(a_1, \dots, b_p); \dots; b_p'' = t_{2p}(a_1, \dots, b_p).$$

9. Erhaltung der zyklischen Anordnung der Grundpunkte bei Automorphismen.

Es sei ein Automorphismus $I, f \rightarrow f'$, gegeben. Einem primären Element f_0 entspricht ein primäres Element f'_0 und den positiven Potenzen von f_0 die positiven Potenzen von f'_0 . Zwei Elementen, deren gerichtete Achsen zusammenfallen, entsprechen also zwei Elemente, deren gerichtete Achsen ebenfalls zusammenfallen. Wir können also sagen, dass I eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Menge G der Grundpunkte auf sich selbst hervorruft, indem wir dem negativen bzw. positiven Grundpunkt $U(f)$ bzw. $V(f)$ den Punkt $U(f')$ bzw. $V(f')$ zuordnen. — Nun gilt der folgende

Satz 1: *Die zyklische Anordnung der Menge G auf E bleibt bei dieser Abbildung $G \rightarrow G_I$ erhalten.*

Beweis: Wir greifen, um dies zu zeigen, auf das im 1. Abschnitt benutzte Netz n zurück, dessen Netzeckpunkte aus allen mit dem Nullpunkt äquivalenten Punkten von Φ gebildet werden. Der gegebene Automorphismus I vermittelt eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Menge der Netzeckpunkte auf sich selbst, indem man dem Punkte $f(o)$ den Punkt $f'(o)$ entsprechen lässt. Der Nullpunkt O entspricht dabei sich selbst. Nun verbinde man O mit $a_1'(o)$ durch ein geradliniges Segment, das mit der Bezeichnung a_1' und einer von O nach $a_1'(o)$ zeigenden Pfeilspitze versehen wird. Analog für die übrigen gestrichenen Erzeugenden und deren Reziproke. Die längste unter diesen $4p$ Strecken habe die Länge l . (Alles ist im Sinne der nichteuklidischen Metrik zu verstehen.) Die Bilder dieses von O ausstrahlenden aus $4p$ Strecken bestehenden Sternes bei allen Elementen von F bilden in ihrer Gesamtheit ein »Netz« n' , dessen Eckpunkte in die Eckpunkte von n fallen. n' ist zwar kein Netz im eigentlichen Sinn, da sich die Netzstrecken im Allgemeinen auch ausserhalb der Netzeckpunkte überschneiden werden, aber es bestehen offenbar folgende Tatsachen, die wir allein gebrauchen werden: Wenn man von O aus durch einen Netzseitenweg w auf n zu dem Netzeckpunkt P gelangt, so gelangt man zu dem P bei I entsprechenden Netzeckpunkt P' , indem man auf n' von O aus denjenigen Weg w' beschreibt, der aus den gestrichenen Netzseiten ebenso gebildet ist, wie w aus den ungestrichenen; kommt man von P aus durch den Weg w_1 auf n zu P_1 , so kommt man von P'

aus durch den Weg w_1' auf n' zu P_1' . Bedeuten die Namen der Wege zugleich Erzeugendenausdrücke, so ist

$$f = w w_1 w^{-1}$$

das Element, das P in P_1 überführt, und

$$f' = w' w_1' w'^{-1}$$

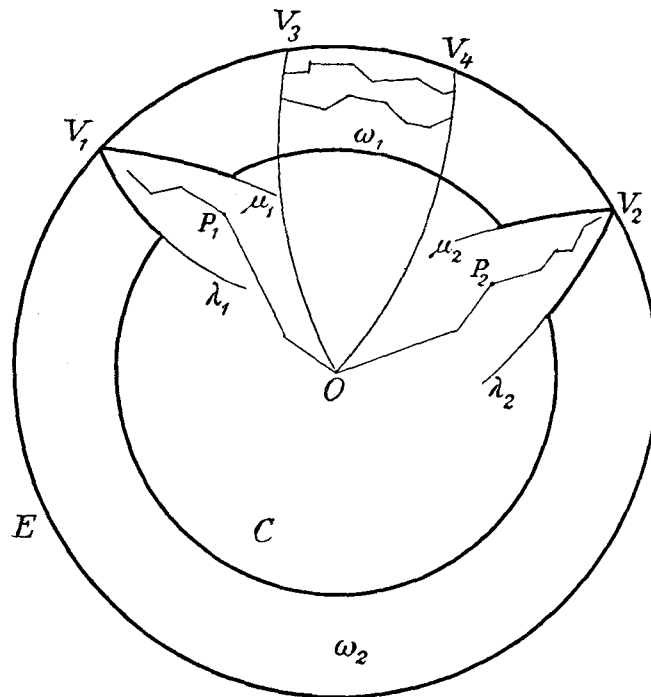


Fig. 12.

das Element, das P' in P_1' überführt. — Die Seiten der Netze n und n' sind einander umkehrbar eindeutig zugeordnet.

Nun sei M' die Menge der Netzeckpunkte, die von O einen Abstand $\leq l$ hat, M das Bild von M' bei I^{-1} und L der Radius eines Kreises um den Nullpunkt, der M im Inneren enthält. Irgend zwei Netzeckpunkte, deren Abstand $\geq L$ ist, gehen also bei I in zwei Netzeckpunkte über, deren Abstand $> l$ ist. Wenn nun zwei Netzseiten von n' einen Endpunkt oder inneren Punkt gemeinsam haben, so gibt es einen Endpunkt der einen, der von einem Endpunkt der anderen einen Abstand $< l$ hat; sie sind also bei I Bilder zweier Seiten von n , die sich näher als bis auf den Abstand L kommen.

Nun seien f_1 und f_2 zwei Elemente von E , V_1 und V_2 deren positive Grundpunkte und $k^{(1)}$ und $k^{(2)}$ die Entwicklungen von V_1 und V_2 , die wir als von O ausgehende und gegen V_1 bzw. V_2 strebende Netzseitenwege gezeichnet denken (Fig. 12). (Es wird nicht ausgeschlossen, dass $f_2 = f_1^{-1}$ ist, in welchem Falle V_1 und V_2 ein zusammengehöriges Grundpunktpaar ist.) P_1 und P_2 seien Punkte auf $k^{(1)}$ bzw. $k^{(2)}$, von denen an diese periodisch sind. λ_1 und μ_1 sind zwei solche Abstandslinien zur Achse von f_1 , dass jeder Punkt ausserhalb des Abstandsstreifens $\lambda_1 \mu_1$ von dem Teilwege $P_1 V_1$ einen Abstand $> L$ hat. Analog sind λ_2 und μ_2 erklärt. C ist ein Kreis um den Nullpunkt, dessen Radius so gross ist, dass er diese vier Abstandslinien schneidet, und dass jeder Punkt ausserhalb C von dem Teilstück $P_1 O P_2$ des aus $k^{(1)}$ und $k^{(2)}$ gebildeten Streckenzuges W einen Abstand $> L$ hat. Von den vier Abstandslinien brauchen wir nur das Stück von E bis zu den ersten Schnittpunkten mit C . Der Teil von Φ , der ausserhalb des Abstandsstreifens $\lambda_1 \mu_1$, ausserhalb $\lambda_2 \mu_2$ und ausserhalb C liegt, besteht aus zwei Gebieten ω_1 und ω_2 , von denen jedes einen der Teilbögen $V_1 V_2$ von E als Randstück hat. — Nun bilden wir auf n' den Streckenzug W' , der W entspricht. Dieser besteht aus Teilstücken OP_1' und OP_2' , wenn $P_1' = I(P_1)$ und $P_2' = I(P_2)$ ist, ferner einem bei f_1' periodischen Stück, das von P_1' aus gegen $V_1' = V(f_1')$ strebt und sich also zwischen zwei zur Achse von f_1' gehörige Abstandslinien ρ_1 und σ_1 einschliessen lässt; und endlich analog einem bei f_2' periodischen Stück, das von P_2' aus gegen $V_2' = V(f_2')$ strebt und sich zwischen zwei zur Achse von f_2' gehörige Abstandslinien ρ_2 und σ_2 einschliessen lässt. Ferner sei Γ ein Kreis, der diese vier Abstandslinien schneidet und das Teilstück $P_1' O P_2'$ von W' ganz umschliesst. Der ausserhalb der Abstandsstreifen $\rho_1 \sigma_1$ und $\rho_2 \sigma_2$ und ausserhalb Γ gelegene Teil von Φ besteht aus zwei Gebieten τ_1 und τ_2 , von denen jedes einen der Teilbögen $V_1' V_2'$ auf E als Randstück hat. *Jeder stetige Weg, der einen Punkt von τ_1 mit einem Punkt von τ_2 verbindet, trifft W' .*

Nun seien f_3 und f_4 zwei Elemente, deren positive Grundpunkte V_3 und V_4 demselben Teilbogen $V_1 V_2$ von E , etwa dem zur Begrenzung von ω_1 gehörigen, angehören. Wir bilden die Folge der Punkte $f_3^r(o)$ und $f_4^r(o)$, wo r alle positiven ganzen Zahlen durchläuft. Diese Punkte liegen auf Kreisbögen, die durch V_3 , O und $U(f_3)$ bzw. V_4 , O und $U(f_4)$ gehen. Man bestimme eine so grosse Zahl r_0 , dass alle Punkte der beiden Folgen für $r > r_0$ dem Gebiet ω_1 angehören. Dann lassen sich auf dem Netze n für alle $r > r_0$ Netzseitenwege q_r auswählen, die $f_3^r(o)$ und $f_4^r(o)$ verbinden und dabei ganz innerhalb ω_1 verlaufen. q_r hat nach Konstruktion von W einen Abstand $> L$. *Das Bild q_r' von q_r bei I trifft also*

nicht W' . q_r' verbindet auf n' die Punkte $f_3'^r(o)$ und $f_4'^r(o)$. Nun konvergiert $f_3'^r(o)$ für $r \rightarrow \infty$ gegen $V_3' = V(f_3')$ und $f_4'^r(o)$ gegen V_4' . Diese Punktfolgen gehören also von einem genügend grossen r an zu den Gebieten τ_1 oder τ_2 , und sie müssen zu demselben dieser beiden Gebiete gehören, da q_r' nicht W' trifft. Also liegen V_3' und V_4' auf demselben der durch V_1' und V_2' auf E bestimmten Bögen.

Die zyklische Anordnung von vier beliebigen Grundpunkten auf E bleibt also bei Automorphismen erhalten, w. z. b. w.

In dem Satz 1 ist ein (m. W. nirgends publizierter) Satz von M. DEHN enthalten, den mir Herr Dehn vor Jahren mündlich mitgeteilt hat:

Die Achsen zweier Elemente von F schneiden sich oder schneiden sich nicht, je nachdem ob die Achsen zweier diesen Elementen bei einem Automorphismus von F entsprechenden Elemente sich schneiden oder nicht schneiden.

Wesentliche Momente des Dehnschen Beweises finden sich in dem obigen Beweis wieder. Aus diesem Satz zog Dehn die Folgerung, dass auch der topologische Schnitzzwang von Kurventypen bei Automorphismen erhalten bleibt. In der Tat: Es sei f ein primäres Element und s ein Verschiebungsstück auf seiner Achse. P_1 und P_2 seien zwei äquivalente Punkte auf s , $P_2 = h(P_1)$. Dann schneidet die Achse von hfh^{-1} diejenige von f in P_2 , und das bleibt bei Automorphismen erhalten. *Die Anzahl der untereinander nicht äquivalenten Schnittpunkte der Achsen einer Elementklasse ist also dieselbe für zwei Klassen, die sich bei einem Automorphismus entsprechen.* Wenn es zwei solche Punkte P_1 und P_2 auf s nicht gibt, wenn also die Elementklasse einem Kurventypus ohne notwendige Doppelpunkte entspricht, so gilt dasselbe für den Kurventypus, der zu der bei einem Automorphismus entsprechenden Klasse gehört. Genau ebenso sieht man ein: *Die Anzahl der untereinander nicht äquivalenten Schnittpunkte der Achsen aus zwei Elementklassen — also die topologisch notwendigen Schnittzahlen zweier Kurventypen — bleibt bei Automorphismen erhalten.*

Drei Punkte 1, 2 und 3 auf E mögen in der Anordnung 1 2 3 einen linksläufigen Umlauf um E bestimmen. Die bei I entsprechenden Punkte können dann in der Anordnung 1' 2' 3' einen linksläufigen oder rechtsläufigen Umlauf bestimmen. Aus der Erhaltung der zyklischen Anordnung von vier beliebigen Punkten folgt leicht, dass ein beliebiges Tripel 1 2 3 diese Entscheidung zugleich für alle Tripel fällt. Je nachdem in dieser Weise die Orientierung der zyklischen Anordnung der Grundpunktmenge G auf E bei $G \rightarrow G_I$ erhalten bleibt oder um-

gekehrt wird, sprechen wir von *Automorphismen erster Art* oder *zweiter Art*. Die Untergruppe, die aus den Automorphismen erster Art gebildet wird, ist ein Normalteiler vom Index 2 der Gruppe \mathfrak{S} und werde mit \mathfrak{S}_0 bezeichnet.

10. Die durch einen Automorphismus bestimmte topologische Randabbildung.

In § 5 wurde gezeigt, dass die Grundpunktmenge G überall dicht auf E ist. Jeder Punkt P von E ist also Grenzpunkt einer monoton gegen P konvergierenden Grundpunktfolge G_1, G_2, \dots , und die Folge der bei einem Automorphismus I entsprechenden Grundpunkte G_1', G_2', \dots ist nach § 9 ebenfalls monoton; ihr Grenzpunkt heisse P' . Jede andere gegen P konvergierende Folge von Grundpunkten führt wegen § 9 zu demselben Punkt P' . Wenn P selbst ein Grundpunkt ist, so ist P' der P bei dem Automorphismus entsprechende Punkt, wie man sofort aus der Erhaltung der zyklischen Anordnung folgert. Wenn P nicht Grundpunkt ist, so ist auch P' nicht Grundpunkt, wie durch Betrachtung von I^{-1} folgt. Ordnen wir nun in allen Fällen dem beliebigen Punkte P von E den Punkt P' als Bildpunkt zu, so haben wir eine *durch I bestimmte topologische Abbildung von E auf sich selbst* vor uns. Der Umlaufssinn wird bei dieser Abbildung $E \rightarrow E_I$ erhalten oder umgekehrt, je nachdem I ein Automorphismus erster oder zweiter Art ist.

Der Sachverhalt kann kurz so gekennzeichnet werden: Die primären Elemente von F bilden eine zyklisch geordnete Menge; diese erfährt bei Automorphismen unter Wahrung der Anordnung eine umkehrbar eindeutige Abbildung in sich, die in eine topologische Abbildung einer Kreislinie auf sich eingebettet erscheint. Aus den leicht zugänglichen Eigenschaften der topologischen Transformationen eines Kreises in sich kann man daher Rückschlüsse auf die Eigenschaften der Automorphismen ziehen.

11. Einige Sätze über Automorphismen von F .

Es sei I ein Automorphismus von F . Ein Element f , das bei I sich selbst entspricht, $f_I = f$, heisse ein *Fixelement* bei I , ein Element f , das in sein Reziprokes übergeht, $f_I = f^{-1}$, ein *Invertelement* bei I . Die Fixelemente bei I bilden eine *Untergruppe* von F , die mit $H(I)$ oder kurz mit H bezeichnet sei. — Wenn I der identische Automorphismus I_0 ist, $H(I_0) = F$, so ist jeder Grundpunkt Fixpunkt der Abbildung $E \rightarrow E_{I_0}$, und diese ist daher die identische Abbildung.

Die Abbildung $E \rightarrow E_I$ werde mit $g(E)$ bezeichnet. Ihre Fixpunkte — wenn es solche gibt — bilden eine abgeschlossene Punktmenge auf E . Die Restmenge besteht aus endlich oder abzählbar vielen fixpunktfreien Intervallen.

a) I sei ein nicht identischer Automorphismus *erster Art*. Dann bleibt bei $g(E)$ der Umlaufssinn erhalten, und jedes fixpunktfreie Intervall wird daher auf sich selbst abgebildet. Alle Punkte eines solchen Intervalls werden dabei in der gleichen Richtung verschoben, und das Intervall bleibt daher auch bei g^n fixpunktfrei. Die Fixpunktmenge von g^n ist daher mit derjenigen von g identisch. Das gilt insbesondere für die zur Fixpunktmenge gehörigen Grundpunkte, also hat I^n genau dieselben Fixelemente wie I . Hierbei war aber angenommen, dass $g(E)$ überhaupt Fixpunkte hat, sodass als deren Restmenge fixpunktfreie Intervalle entstehen können. Zu den Fixpunkten von $g(E)$ brauchen nicht notwendig Grundpunkte zu gehören, wie wir später an Beispielen sehen werden. Jedenfalls folgt also, dass $H(I^n) = H(I)$ ist, sobald $H(I) \neq 1$.

Wenn umgekehrt f ein Element ist, für welches $f_I \neq f$, aber $f_{I^n} = f$ ist, so folgt, dass $g(E)$ fixpunktfrei und also $H(I) = 1$ ist. Das ist insbesondere der Fall, wenn I Invertelemente hat, da diese bei I^2 Fixelemente werden. Ferner ist es der Fall, wenn $I^n = 1$ ist: Bei allen von der Identität verschiedenen Automorphismen endlicher Ordnung ist $g(E)$ fixpunktfrei.

Wir betrachten etwas näher den Fall eines Automorphismus I erster Art, für welchen es ein Element f derart gibt, dass

$$f_I \neq f, f_{I^n} = f$$

ist. n sei der kleinste positive Exponent dieser Art. V sei der positive Grundpunkt von f und g die zu I gehörige Randabbildung. Wir bilden die aus den Punkten

$$V, g(V), g^2(V), \dots, g^{n-1}(V)$$

bestehende Punktmenge W ; diese n Punkte sind alle verschieden, da f bei keiner niedrigeren Potenz von I , als der n -ten, Fixelement ist. V_1 und V_2 seien zwei bei positivem Umlauf um E aufeinanderfolgende Punkte und

$$V_2 = g^r(V_1), \quad 1 \leq r \leq n - 1.$$

Dann bewirkt g^r eine zyklische Vertauschung von W um einen Schritt, und g ist eine Potenz, etwa die λ -te, von g^r :

$$\lambda r \equiv 1 \pmod{n}.$$

Wir können nötigenfalls I durch I^r ersetzen und nehmen daher $r = 1$ an. g vertauscht also die n Segmente, die W auf E bestimmt, zyklisch. Es kann daher keine niedrigere Potenz von g , als die n -te, Fixpunkte haben, und es ist

$$H(I^m) = H(I) = 1, \text{ für } 1 \leq m \leq n - 1.$$

Die Fixpunktmenge bei g^n in einem der n Segmente geht durch die Potenzen von g in die Fixpunktmenge bei g^n in den übrigen Segmenten über. Wir haben also

$$H(I^m) = 1, \text{ für } m \not\equiv 0 \pmod{n},$$

$$H(I^{m \cdot n}) = H(I^n) \neq 1.$$

n heiße der *charakteristische Exponent* von I . n ist unabhängig von der Auswahl des obigen Elements f . Für Automorphismen endlicher Ordnung ist der charakteristische Exponent gleich der Ordnung; im Fall $H(I^m) = H(I)$ für alle m sei die Zahl 1 als charakteristischer Exponent von I definiert:

Satz 2: *Ein Automorphismus erster Art mit einem charakteristischen Exponenten > 1 ruft eine fixpunktfreie Randabbildung hervor.*

b) I sei ein Automorphismus *zweiter Art*. Die zugehörige Randabbildung kehrt den Umlaufssinn um, hat also genau zwei Fixpunkte. I hat also *höchstens ein primäres Fixelement*. I^2 ist ein Automorphismus erster Art mit dem charakteristischen Exponenten 1, da $g^2(E)$ jedenfalls zwei Fixpunkte hat. Fixelemente von I^2 entsprechen entweder Invertelementen von I oder sie treten zu Paaren auf, deren Elemente sich bei I vertauschen. Ist I von endlicher Ordnung, dann notwendig von der Ordnung 2.

Beispiel 1:

$$p = 2; I: \begin{cases} a_1 \rightarrow b_2 \\ b_1 \rightarrow a_2 \\ a_2 \rightarrow b_1 \\ b_2 \rightarrow a_1 \end{cases}$$

$I^2 = 1$. Primäres Fixelement: $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$. Alle Elemente sind involutorisch gepaart, speziell z. B. $a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2$ mit seiner Reziproken. —

Wir beweisen noch den folgenden

Satz 3: *Jede Untergruppe endlicher Ordnung von \mathfrak{S}_0 ist zyklisch.**

* Der Satz folgt unmittelbar aus L. E. J. BROUWER, Über topologische Involutionen, § 3, Amsterd. Proceedings Vol. XXI, N:o 9 (1919).

Beweis: Sei \mathfrak{S} eine Gruppe der Ordnung n aus Automorphismen erster Art, P_1 ein beliebiger Punkt von E und P_1, P_2, \dots, P_n die Punkte, die P_1 bei den zu den verschiedenen Elementen von \mathfrak{S} gehörigen Randabbildungen entsprechen. Diese Punkte sind sicher verschieden; andernfalls müsste nämlich ein zu \mathfrak{S} gehöriger Automorphismus einen von diesen Punkten ungeändert lassen, aber alle Elemente von \mathfrak{S} sind von endlicher Ordnung, bestimmen also nach Satz 2. fixpunktfreie Randabbildungen. Jedes Element von \mathfrak{S} bewirkt eine Vertauschung dieser n Punkte unter Wahrung ihrer zyklischen Anordnung auf E und des Umlaufsinnes. Ein Element aus \mathfrak{S} , das einen der Punkte in einen seiner Nachbarn überführt, erzeugt also ganz \mathfrak{S} , w. z. b. w.

12. Innere Automorphismen.

Die Zuordnung

$$l \rightarrow f^{-1} l f, \tag{5}$$

wo f ein festes Element von F ist und l die Gruppe F durchläuft, ist bekanntlich ein Automorphismus von F , für den der Name »innerer Automorphismus« oder »kongredienter Automorphismus« üblich ist. Stellt man ihn durch die Substitution

$$\begin{aligned} a_1 &\rightarrow w^{-1}(a_1, \dots, b_p) a_1 w(a_1, \dots, b_p) \\ &\dots \dots \dots \\ b_p &\rightarrow w^{-1}(a_1, \dots, b_p) b_p w(a_1, \dots, b_p) \end{aligned}$$

dar, wo w ein das Element f darstellender Erzeugendenausdruck ist, so erfüllt diese Darstellung die Bedingungen $\alpha)$ und $\beta)$ des § 8. Man hat nämlich

$$R \rightarrow w^{-1} R w$$

und

$$w \rightarrow w^{-1} w w \equiv w,$$

also

$$w a_1 w^{-1} \rightarrow a_1$$

und analog.

Wir bezeichnen den Automorphismus (5) mit I_{0f} . Ist I der Automorphismus $l \rightarrow l'$, so ist $I \cdot I_{0f}$ der Automorphismus

$$l \rightarrow f^{-1} l' f$$

und wird mit I_f bezeichnet. — Es ist

$$I_{0f_1} \cdot I_{0f_2} = I_{0f_1 f_2}$$

und

$$(I_{0f})^{-1} = I_{0f^{-1}}.$$

Ferner ergibt sich

$$(I_f)^{-1} = I_{f^{-1}}^{-1}$$

und

$$I^{-1}: l \rightarrow l_{I^{-1}}$$

$$I^{-1} I_{0f}: l \rightarrow f^{-1} l_{I^{-1}} f$$

$$I^{-1} I_{0f} I: l \rightarrow f_{I^{-1}} l_{fI}.$$

Der Automorphismus

$$I^{-1} I_{0f} I = I_{0f_I} \tag{6}$$

ist also wieder ein innerer Automorphismus:

Die Gruppe der inneren Automorphismen ist ein Normalteiler von \mathfrak{S}_0 und \mathfrak{S} . Sie werde mit \mathfrak{F} bezeichnet. \mathfrak{F} ist mit F holodrisch isomorph.

Die Automorphismen I und I_f sollen als »*verwandt*« bezeichnet werden. Das ist eine symmetrische und transitive Eigenschaft. Die Gesamtheit der Automorphismen I_f , wo I ein fester Automorphismus ist und f die Gruppe F durchläuft, also eine »*Nebengruppe*« des Normalteilers \mathfrak{F} in \mathfrak{S} , soll als eine »*Automorphismenfamilie*« bezeichnet werden. — Für diesen Begriff habe ich in den l. c.¹ und l. c.² angegebenen Publikationen die Bezeichnung »Isomorphismenklasse« verwendet; da es indessen üblich zu werden scheint, unter einer *Klasse* von Elementen einer Gruppe eine Gesamtheit von ineinander innerhalb der Gruppe transformierbaren Elementen zu verstehen, verwende ich hier ebenfalls das Wort »Klasse« in diesem Sinn (wie auch im 1. Abschnitt) und gebrauche für die obige Gesamtheit das Wort »Familie«. — Unter einer »*Automorphismenklasse*« wird also eine Gesamtheit von innerhalb \mathfrak{S} ineinander transformierbaren Automorphismen verstanden. Die Klasse der Identität besteht nur aus dem identischen Automorphismus. Die Familie der Identität wird von der Gruppe \mathfrak{F} aller inneren Automorphismen gebildet.

13. Die Funktionalgleichung der Randabbildungen.

Bei dem Automorphismus (5) wird ein beliebiger Grundpunkt G_1 in $f^{-1}(G_1)$ übergeführt. Die zugehörige topologische Randabbildung, $g(E)$ in der Bezeichnung von § 11, ist also hier speziell $f^{-1}(E)$. Bezeichnet also H die mit \mathfrak{S} holoedrisch isomorphe Gruppe aller durch Automorphismen hervorgerufenen Randabbildungen $g(E)$ und H_0 ihren \mathfrak{S}_0 entsprechenden Normalteiler, bei deren Abbildungen der Umlaufssinn auf E erhalten bleibt, so ist F , als Abbildungsgruppe von E allein aufgefasst, ein Normalteiler von H_0 , entsprechend dem Normalteiler \mathfrak{F} von \mathfrak{S}_0 .

Man beachte, dass, wenn $g_1(E)$ durch den Automorphismus I_1 und $g_2(E)$ durch I_2 hervorgerufen wird, dann $I_1 I_2$ die Randabbildung $g_2(g_1(E))$ hervorruft. Im Folgenden werden im Allgemeinen, wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind, keine Klammern um die Funktionsargumente gesetzt.

Entspricht nun g dem Automorphismus I , so besagt die Gleichung (6) des § 12, wenn man sie als Aussage über die Randabbildungen deutet und noch f^{-1} statt f liest:

$$g f g^{-1} = f_I. \tag{7}$$

(7) besagt, angewandt auf einen beliebigen Punkt P von E :

$$g f P = f_I g P. \tag{8}$$

Man überzeugt sich auch leicht auf einem etwas mehr direkten Wege von der Richtigkeit dieser *fundamentalen Funktionalgleichung* (8), indem man P als Grenzpunkt einer Grundpunktfolge auffasst und (8) zunächst für Grundpunkte bestätigt. Ist I durch die Zuordnung

$$a_1 \rightarrow a_1', \dots, b_p \rightarrow b_p'$$

gegeben, so ist (8) mit dem System von $2p$ Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned} g a_1 P &= a_1' g P \\ &\dots \dots \dots \\ g b_p P &= b_p' g P \end{aligned} \tag{9}$$

gleichbedeutend.

14. Struktur der fixpunktfreien Intervalle.

Es sei $I \neq I_0$ ein Automorphismus erster Art, g die zugehörige Randabbildung, $H(I)$ die Gruppe der Fixelemente bei I , und es sei $H(I) \neq 1$ angenommen. h sei ein Fixelement bei I . Dann ist nach (8):

$$g h P = h g P. \quad (10)$$

g ist also mit allen Elementen von H vertauschbar. Die Operation h führt also Fixpunkte von gE in Fixpunkte und Nichtfixpunkte in Nichtfixpunkte über, sie bildet also ein fixpunktfreies Intervall wieder auf ein solches ab. Wenn bei einer Operation h_1 aus H ein Punkt eines fixpunktfreien Intervalles i_1 in einen anderen Punkt desselben Intervalles übergeht, so muss i_1 bei h_1 ganz in sich übergehen; die i_1 begrenzenden Fixpunkte müssen also die Grundpunkte von h_1 sein. Ein solches Intervall werde ein »periodisches Intervall« genannt. Ist nämlich P ein Punkt von i_1 und kennt man $g i_1$ auf dem Stück von P bis $h_1 P$, so ist g damit wegen (10) in ganz i_1 bekannt. — Ist andererseits i ein fixpunktfreies Intervall und ist der eine Intervallendpunkt ein Grundpunkt, so muss er Grundpunkt eines Fixelements h sein, und dann haben i und $h i$ Punkte gemeinsam, also $h i = i$, also ist der andere Intervallendpunkt der andere Grundpunkt von h , und i ist periodisch:

Satz 4: *Es gibt zwei Arten von fixpunktfreien Intervallen, »aperiodische« und »periodische«. Die aperiodischen Intervalle werden von Nichtgrundpunkten begrenzt und enthalten kein Paar bezüglich der Fixelementgruppe H äquivalenter Punkte. Die periodischen Intervalle werden durch ein zusammengehöriges Paar von Grundpunkten begrenzt. Ist h das zu diesem Paar gehörige primäre (Fix-)Element, so gibt es keine anderen Paare bezüglich H äquivalenter Punkte in i , als solche, die sich bei einer Potenz von h entsprechen.*

Wenn also P ein beliebiger Punkt von E ist und HP die Menge der Punkte bedeutet, die aus P durch die Operationen von H hervorgeht, so hat HP keine Häufungspunkte im Inneren der fixpunktfreien Intervalle. Jeder Grundpunkt eines Fixelements h ist aber Häufungspunkt von HP , da die Menge HP bei h in sich übergeht. Dabei kann man stets P als Nichtfixpunkt wählen, dann besteht HP aus lauter Nichtfixpunkten wegen (10). Jeder Grundpunkt eines Fixelements ist also Häufungspunkt von Nichtfixpunkten, es kann also

keine ganz aus Fixpunkten bestehenden Intervalle geben, da jedes Intervall Grundpunkte enthält (§ 5). Gibt es ausser den Grundpunkten von h noch andere Fixpunkte auf E , so sind die Grundpunkte von h auch Häufungspunkte von Fixpunkten:

Die Menge der Fixpunkte bei $g(E)$ ist abgeschlossen und nirgends dicht. In dem Fall, wo $H(I)$ eine unendliche zyklische Gruppe ist, und nur in diesem Fall, kann es isolierte Fix-Grundpunkte geben.

15. Beispiele.

Beispiel 2: Wir betrachten als Beispiel denjenigen Automorphismus von F , bei dem a_1 in $a_1 b_1$ übergeht und alle übrigen Erzeugenden ungeändert bleiben; er sei mit \mathcal{A} bezeichnet:

$$\mathcal{A}: (a_1 \rightarrow a_1 b_1).$$

Das Kriterium des § 8 zeigt, dass \mathcal{A} ein Automorphismus ist. Die zugehörige Randabbildung sei mit $\lambda(E)$ bezeichnet.

$H(\mathcal{A})$ enthält jedenfalls die von b_1, a_2, \dots, b_p erzeugte Gruppe. \mathcal{A} ist also von erster Art. Die Fixpunktmenge von $\lambda(E)$ heisse M . Bei allen Operationen aus H geht M in sich und die Intervallmenge $E \dashrightarrow M$ in sich über (§ 14). Wir wollen die Struktur von M und $E - M$ näher bestimmen.

Es ist

$$\mathcal{A}^n: (a_1 \rightarrow a_1 b_1^n)$$

für positives und negatives n , und daher

$$a_1^{-1} \mathcal{A}^n = b_1^{-n} a_1^{-1}.$$

Der positive Grundpunkt dieses Elements hat eine Entwicklung, die aus der periodischen Wiederholung von $b_1^{-n} a_1^{-1}$ besteht, denn diese erfüllt die für Entwicklungen charakteristischen Bedingungen (§ 6). Diese Entwicklung geht für $n \rightarrow \infty$ gegen die Entwicklung von $U(b_1)$ (d. h. sie hat für wachsendes n immer höhere Konvergenzen mit dieser gemeinsam), für $n \rightarrow -\infty$ gegen diejenige von $V(b_1)$. Der Bildpunkt von $U(a_1)$ bei den positiven bzw. negativen Potenzen von λ konvergiert also gegen die Endpunkte der Achse von b_1 , so dass diese ein periodisches Intervall i begrenzt, dessen Punkte bei λ von $V(b_1)$ fort und gegen $U(b_1)$ hin verschoben werden. — Ebenso hat man

$$a_1 A^n = a_1 b_1^n,$$

die Entwicklung von $V(a_1 A^n)$ konvergiert also für $n \rightarrow \infty$ gegen diejenige von $V(a_1 b_1 a_1^{-1})$, für $n \rightarrow -\infty$ gegen diejenige von $U(a_1 b_1 a_1^{-1})$. $V(a_1)$ liegt also in einem periodischen Intervall j , das von der Achse von $a_1 b_1 a_1^{-1}$ begrenzt wird.

Die Bilder von i und j bei allen Operationen aus H sind wieder fixpunktfreie periodische Intervalle, begrenzt von den Achsen derjenigen Elemente, in die b_1 bzw. $a_1 b_1 a_1^{-1}$ durch Transformation mit den Elementen aus H übergeht. *Es soll gezeigt werden, dass es keine anderen fixpunktfreien Intervalle als diese gibt.* Die Menge der Punkte, die keinem dieser (offenen) Intervalle angehören, heisse M_1 . Wir haben also zu zeigen, dass M_1 mit M identisch ist.

Es sei P ein beliebiger Punkt von M_1 und

$$k = e_1 e_2 e_3 \cdots \cdots$$

seine Entwicklung. Die e_i bezeichnen einzelne Erzeugende oder deren Reziproke. Der Punkt $(e_1 e_2 \cdots e_r)^{-1} P$ sei mit P_r bezeichnet. Nun gelten folgende Lagenbeziehungen der Intervalle i und j zur Intervalleinteilung für die Gruppenentwicklung (§ 6): $U(b_1)$ liegt in dem Intervall erster Ordnung $[b_1^{-1}]$, $V(b_1)$ in $[b_1]$, also liegt $[a_1^{-1}]$ ganz im Inneren von i . Da P ausserhalb i liegt, ist also $e_1 \neq a_1^{-1}$. Ferner liegen $V(a_1 b_1 a_1^{-1})$ und $U(a_1 b_1 a_1^{-1}) = V(a_1 b_1^{-1} a_1^{-1})$ beide im Inneren von $[a_1]$, also liegt auch j ganz in $[a_1]$. Wenn nun $e_1 \neq a_1$, so ist e_1 Fixelement, also gehört auch $P_1 = e_1^{-1} P$ zu M_1 , da M_1 bei allen Operationen aus H in sich übergeht. Nun sei e_n das erste unter den e_i , das nicht Fixelement ist, wenn ein solches überhaupt vorkommt; dann ist $e_n = a_1$ und nicht $= a_1^{-1}$. P_{n-1} liegt dann in $[a_1]$ aber ausserhalb j . Dann gehört P_n zu i oder ist Endpunkt von i , denn es ist

$$a_1^{-1} j = E - i - V(b_1) - U(b_1).$$

Also ist $e_{n+1} = b_1^{\pm 1}$, da e_{n+1} nicht zu e_n reziprok ist. Sei etwa $e_{n+1} = b_1$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder sind alle $e_{n+m} = b_1$; dann ist $P_n = V(b_1)$, $P_{n-1} = V(a_1 b_1 a_1^{-1})$, also ist auch P Fixpunkt bei λ . Oder P_n gehört zum Durchschnitt von $[b_1]$ und i . Dann fällt das Bild von P_n bei einer genügend hohen Potenz von b_1^{-1} ausserhalb $[b_1]$. Es gibt also ein solches $m \geq 1$, dass

$$e_{n+1} = e_{n+2} = \cdots = e_{n+m} = b_1,$$

$$e_{n+m+1} = a_1^{-1}.$$

Dann ist

$$P_{n+m+1} = a_1 b_1^{-m} a_1^{-1} P_{n-1},$$

und das ist wieder ein Punkt von M_1 , da $a_1 b_1^{-m} a_1^{-1}$ zu H gehört. Also gilt für die Entwicklung von P_{n+m+1} dasselbe, was wir soeben für den Anfang der Entwicklung von P erkannt haben, und wir haben: In der Entwicklung eines beliebigen Punktes P von M_1 können ausser den Erzeugenden b_1, a_2, \dots, b_p , die sämtlich Fixelemente sind, nur noch Teilfolgen $a_1 b_1^m a_1^{-1}$ mit beliebigen positiven und negativen Werten von m vorkommen. Solche Teilfolgen stellen für sich auch Fixelemente dar. Also gibt es in $k(P)$ beliebig hohe Konvergenten, die Fixelemente sind, und da (nach § 7, j) die Punkte $V(k_n)$ gegen P konvergieren, ist P Häufungspunkt von Fixpunkten, also selbst Fixpunkt, w. z. b. w.

Die Menge M der Fixpunkte (die also mit M_1 identisch ist) ist nach § 14 nirgends dicht. Alle Intervalle sind periodisch. Kein Fixpunkt ist gemeinsamer Endpunkt zweier Intervalle, da es mehr als zwei Intervalle gibt, also irgend zwei Intervalle von verschiedenen Achsen begrenzt werden. Jeder Fixpunkt ist also Häufungspunkt von Intervallendpunkten. *Die Menge der Fixpunkte ist also perfekt (und nirgends dicht).* Sie besteht aus den Grundpunkten aller derjenigen Elemente, in die b_1 und $a_1 b_1 a_1^{-1}$ durch Transformation mit Fixelementen übergehen, und allen Häufungspunkten solcher Punkte.

Nun sei h ein beliebiges Fixelement. Die Entwicklung von $V(h)$ ist durch einen Ausdruck der Form

$$k(V(h)) = \alpha \beta \beta \beta \dots$$

gegeben, wo α und β nach dem Vorhergehenden Ausdrücke aus b_1, a_2, \dots, b_p sowie Komplexen $a_1 b_1^m a_1^{-1}$ sind. Da nun wegen $R = 1$:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} = b_p a_p b_p^{-1} a_p^{-1} \dots b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} b_1$$

ist, so ist $h = \alpha \beta a^{-1}$ durch b_1, a_2, \dots, b_p ausdrückbar, und wir haben:

Die Fixelementgruppe $H(\mathcal{A})$ wird durch b_1, a_2, \dots, b_p erzeugt.

Es ist leicht, einen *Fundamentbereich* für $H(\mathcal{A})$ in Φ zu konstruieren, worauf wir später (§ 48) zurückkommen. Hier soll nur bemerkt werden, dass man einen Fundamentbereich für $H(\mathcal{A})$ auf der Menge $E-M$ offenbar erhält, indem man ein Segment von i bildet, dessen Endpunkte sich bei b_1 entsprechen, und ein Segment von j , dessen Endpunkte sich bei $a_1 b_1 a_1^{-1}$ entsprechen.

Die Gruppe $H(\mathcal{A})$ ist eine freie Gruppe, d. h. zwischen den Erzeugenden b_1, a_2, \dots, b_p bestehen keine anderen Relationen als Identitäten. Die spätere Konstruktion eines Fundamentalbereichs für $H(\mathcal{A})$ in Φ wird das mühelos erkennen lassen. Man kann sich auch leicht direkt davon überzeugen, indem man aus dem Netz n , dem Dehnschen Gruppenbild von F , alle mit a_1 bezeichneten Netzseiten fortlässt. Der mit dem Nullpunkt zusammenhängende Teilkomplex des so abgeänderten Gruppenbildes bildet einen »Baum«, d. h. er enthält keine geschlossenen Züge, woraus die Behauptung folgt. Die Fixpunktmenge M auf E ist identisch mit der Menge der Häufungspunkte der Eckpunkte dieses Baumes.

Wenn zwei Intervalle gegeben sind, deren jedes einer topologischen Abbildung auf sich selbst ohne innere Fixpunkte unterworfen ist, so sind diese Abbildungen bekanntlich⁹ stets *ähnlich*, d. h. es gibt eine topologische Abbildung des einen Intervalls auf das andere, durch welche die topologische Abbildung des einen Intervalls auf sich selbst in diejenige des anderen Intervalls auf sich selbst transformiert wird. In unserem Falle gilt speziell: Ist h ein Fixelement bei \mathcal{A} und i_1 das von der Achse von $h b_1 h^{-1}$ begrenzte fixpunktfreie Intervall, so geht λi_1 aus λi durch Transformation mit h hervor, da nach (10) auf ganz E die Gleichung $\lambda = h \lambda h^{-1}$ gilt. Entsprechendes gilt für die mit j bei H äquivalenten Intervalle. Vergleichen wir λi und λj , so sind diese *nicht* durch ein Element aus F in einander transformierbar; denn i ist nicht mit j bei F äquivalent, j ist nämlich mit $E - i - V(b_1) - U(b_1)$ äquivalent bei a_1 , wie oben schon benutzt wurde. Es gibt aber eine durch einen Automorphismus hervorgerufene Randabbildung, die λi in λj transformiert: Es sei nämlich I der folgende Automorphismus erster Art:

$$I: \left[\begin{array}{l} a_1 \rightarrow a_1^{-1} \\ b_1 \rightarrow a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} \\ a_i \rightarrow b_1^{-1} a_i b_1 \\ b_i \rightarrow b_1^{-1} b_i b_1 \end{array} \right] \quad i = 2, \dots, p$$

und $g(E)$ die zugehörige Randabbildung. Da b_1 in $a_1 b_1^{-1} a_1^{-1}$ und $U(a_1)$ in $V(a_1)$ übergeht, ist $g i = j$. Ferner bestätigt man sofort durch Einsetzung, dass

$$\mathcal{A} I = I \mathcal{A}$$

⁹ H. KNESER: Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen, § 3. Math. Ann. 91 (1924).

ist. Diese Vertauschbarkeit zweier Elemente einer Gruppe schreiben wir in der Form:

$$\mathcal{A} \Leftrightarrow I.$$

Infolgedessen gilt auch für die Randabbildungen:

$$\lambda \Leftrightarrow g,$$

also ist $g \lambda g^{-1} = \lambda$. Somit geht λj aus λi durch Transformation mit g hervor. Zusammenfassend haben wir also:

Bei \mathcal{A} gehen die Abbildungen irgend zweier fixpunktfreier Intervalle auf sich durch Transformation mit einer durch einen Automorphismus erster Art hervorgerufenen Randabbildung (einer Operation aus H_0) aus einander hervor. Sind speziell die beiden Intervalle mit einander äquivalent, so gehört der Transformator zu F , und zwar zu $H(\mathcal{A})$.

Beispiel 3: Wir betrachten als weiteres Beispiel noch den mit \mathcal{A} verwandten Automorphismus

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A}_{a_1} = \mathcal{A} \cdot I_{0 a_1}$$

also:

$$\mathcal{A}': \begin{vmatrix} a_1 \rightarrow b_1 a_1 \\ b_1 \rightarrow a_1^{-1} b_1 a_1 \\ a_2 \rightarrow a_1^{-1} a_2 a_1 \\ \dots \\ b_p \rightarrow a_1^{-1} b_p a_1 \end{vmatrix}.$$

Da zu $I_{0 a_1}$ die Randabbildung $a_1^{-1}(E)$ gehört, gehört zu \mathcal{A}' die Randabbildung

$$\lambda' = a_1^{-1} \lambda.$$

Da $U(a_1)$ in i und $V(a_1)$ in j liegt, ist $\lambda' i$ ein Teilintervall von i und $\lambda' j$ ein Intervall, das j als Teilintervall enthält. Da eine topologische Abbildung eines abgeschlossenen Intervalles auf einen echten Teil seiner selbst stets mindestens einen Fixpunkt hat, so muss λ' mindestens je einen Fixpunkt in i und j haben. Es soll nun gezeigt werden, dass λ' nur zwei Fixpunkte hat und dass diese nicht Grundpunkte sind, dass also zwei aperiodische Intervalle entstehen. Die Potenzen von \mathcal{A}' sind:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= \mathcal{A}_{a_1} \\ \mathcal{A}'^2 &= \mathcal{A}_{a_1 \mathcal{A} a_1}^2 \\ \mathcal{A}'^3 &= \mathcal{A}_{a_1 \mathcal{A}^2 a_1 \mathcal{A} a_1}^3 \\ &\dots \\ \mathcal{A}'^n &= \mathcal{A}_{a_1 \mathcal{A}^{n-1} a_1 \mathcal{A}^{n-2} \dots a_1 \mathcal{A} a_1}^n, \end{aligned}$$

also

$$\mathcal{A}'^n = \mathcal{A}_{a_1 b_1^{n-1} a_1 b_1^{n-2} \dots a_1 b_1 a_1}^n.$$

Ferner ist (§ 12):

$$\mathcal{A}'^{-1} = \mathcal{A}_{a_1^{-1} \mathcal{A}^{-1}}^{-1},$$

also analog wie oben, für $n > 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'^{-n} &= \mathcal{A}_{a_1^{-1} \mathcal{A}^{-n} a_1^{-1} \mathcal{A}^{-(n-1)} \dots a_1^{-1} \mathcal{A}^{-1}}^{-n} \\ &= \mathcal{A}_{b_1^n a_1^{-1} b_1^{n-1} a_1^{-1} \dots b_1^2 a_1^{-1} b_1 a_1^{-1}}^{-n}. \end{aligned}$$

Man hat also

$$b_{1 \mathcal{A}'^n} = a_1^{-1} b_1^{-1} a_1^{-1} b_1^{-2} \dots a_1^{-1} b_1^{-(n-1)} a_1^{-1} \cdot b_1 \cdot a_1 b_1^{n-1} a_1 \dots b_1^2 a_1 b_1 a_1$$

$$b_{1 \mathcal{A}'^{-n}} = a_1 b_1^{-1} a_1 b_1^{-2} \dots a_1 b_1^{-n} \cdot b_1 \cdot b_1^n a_1^{-1} b_1^{n-1} a_1^{-1} \dots b_1 a_1^{-1},$$

und somit für die Entwicklung der Grundpunkte derselben:

$$k(V(b_{1 \mathcal{A}'^n}^{\pm 1})) = a_1^{-1} b_1^{-1} a_1^{-1} b_1^{-2} \dots a_1^{-1} b_1^{-(n-1)} a_1^{-1} \cdot b_1^{\pm 1} b_1^{\pm 1} b_1^{\pm 1} \dots,$$

$$k(V(b_{1 \mathcal{A}'^{-n}}^{\pm 1})) = a_1 b_1^{-1} a_1 b_1^{-2} \dots a_1 b_1^{-(n-1)} a_1 \cdot b_1^{\pm 1} b_1^{\pm 1} b_1^{\pm 1} \dots$$

$V(b_{1 \mathcal{A}'^n}^{\pm 1})$ konvergiert also für $n \rightarrow \infty$ gegen den Punkt P^+ mit der Entwicklung:

$$k(P^+) = a_1^{-1} b_1^{-1} a_1^{-1} b_1^{-2} a_1^{-1} b_1^{-3} \dots \text{ in inf.}$$

und für $n \rightarrow -\infty$ gegen den Punkt P^- mit der Entwicklung:

$$k(P^-) = a_1 b_1^{-1} a_1 b_1^{-2} a_1 b_1^{-3} \dots \text{ in inf.}$$

Da diese Entwicklungen nicht periodisch sind, sind P^+ und P^- nicht Grundpunkte. Wie die Entwicklungen zeigen, liegt P^+ in $[a_1^{-1}]$ und P^- in $[a_1]$, sie werden also durch $U(b_1)$ und $V(b_1)$ von einander getrennt. b_1 ist nicht Fixelement bei \mathcal{A}' , und die Endpunkte der Achse von b_1 überstreichen daher bei den

Potenzen von λ' fixpunktfreie Intervalle. Da nun diese beiden Intervalle von demselben Punktepaar $P^+ P^-$ begrenzt sind, gibt es nur diese beiden Intervalle auf E . $\lambda(E)$ erzeugt also zwei aperiodische Intervalle, getrennt durch zwei Fixpunkte, die nicht Grundpunkte sind, w. z. b. w.

Insbesondere ist also kein Grundpunkt Fixpunkt, also gibt es ausser der Identität keine Fixelemente bei \mathcal{A}' , $H(\mathcal{A}') = 1$. Wenn man aber solche Erzeugendenfolgen, die als Entwicklungen von Randpunkten auftreten, als »Grenzelemente von F » bezeichnet, so gibt es genau zwei Fix-Grenzelemente bei \mathcal{A}' , nämlich $k(P^+)$ und $k(P^-)$: Die Ausführung der Substitution \mathcal{A}' in diesen zeigt, dass sie ungeändert bleiben.

16. Korrespondenz der Fundamentalfolgen bei Automorphismen.

Es sei I ein Automorphismus, g die zugehörige Randabbildung und

$$f_1, f_2, \dots$$

eine Fundamentalfolge, die zu dem Randpunkt P gehört. Nach § 7 j) konvergiert dann

$$V(f_1), V(f_2), \dots$$

gegen P . Nach § 10 konvergiert dann

$$V(f_{1I}), V(f_{2I}), \dots$$

gegen gP . Ferner kommt in der Folge

$$f_{1I}, f_{2I}, \dots$$

kein Element unendlich oft vor, da dasselbe in der gegebenen Folge gilt. Also ist auch die neue Folge eine Fundamentalfolge, und sie gehört zu gP :

Die Menge der Fundamentalfolgen wird bei Automorphismen umkehrbar eindeutig in sich übergeführt, und diese Korrespondenz der Fundamentalfolgen legt die Randabbildung fest.

Wenn also auch die Konvergenten k_1, k_2, \dots des Grenzelements $k(P)$ im allgemeinen nicht wieder in die Konvergenten eines Grenzelements übergehen, so bilden doch die Elemente

$$k_{1I}, k_{2I}, \dots$$

eine Fundamentalfolge, die zu gP gehört.

Nun werde angenommen, dass gE Fixpunkte besitzt. f sei ein Element ausserhalb $H(I)$. Dann sind die Elemente der Folge

$$f, f_I, f_{I^2}, f_{I^3}, \dots$$

sämtlich verschieden, da I^n keine anderen Fixelemente hat als I . Ferner konvergiert die Punktfolge

$$V(f), V(f_I), V(f_{I^2}), \dots$$

gegen den einen Endpunkt des fixpunktfreien Intervalles, zu dem $V(f)$ gehört. Also hat man:

Ist f nicht Fixelement bei I und hat gE Fixpunkte, so sind f, f_I, f_{I^2}, \dots und $f, f_{I^{-1}}, f_{I^{-2}}, \dots$ Fundamentalfolgen, die zu den Endpunkten desjenigen fixpunktfreien Intervalls gehören, das den positiven Grundpunkt von f enthält.

Dass die Intervallendpunkte Fixpunkte sind, zeigt sich dabei darin, dass diese Folgen bei Ausübung einer beliebigen Potenz von I bis auf einen Anfangsabschnitt in sich übergehen.

Hierdurch wird eine Methode zur Bestimmung von Fixpunkten der Randabbildung und evtl. von Fixelementen des Automorphismus angewiesen: Da nämlich die Punktfolge $V(f_{I^n})$ für $n \rightarrow \infty$ gegen einen Intervallendpunkt, den wir etwa den »positiven« nennen können, konvergiert, muss $k(V(f_{I^n}))$ für wachsendes n immer höhere Konvergenten mit der Entwicklung des positiven Intervallendpunktes gemeinsam haben. Wenn nun das Intervall periodisch ist, so ist diese Entwicklung des Endpunktes periodisch, und diese Tatsache muss in einer Gesetzmässigkeit der Entwicklung $k(V(f_{I^n}))$ für wachsendes n zum Ausdruck kommen, die nach endlich vielen Schritten erkennbar ist.

Als Beispiel greifen wir auf den Automorphismus \mathcal{A} (§ 15, Beispiel 2) zurück. f sei ein Element ausserhalb $H(\mathcal{A})$. In $k(V(f))$ kommen nicht Fix-Konvergenten beliebig hoher Ordnung vor, da $V(f)$ nicht Fixpunkt von λE ist. Es sei r die grösste Zahl der Art, dass die Konvergente $(r-1)$ -ter Ordnung k_{r-1} Fixelement bei \mathcal{A} ist. Dann ist

$$k_r = k_{r-1} a_1^{\pm 1}$$

und also

$$k_{rI^n} = k_{r-1} a_1 b_1^n \text{ bzw. } k_{r-1} b_1^{-n} a_1^{-1}.$$

Die Punktfolge k_{rI^n} (o) konvergiert also für $n \rightarrow \infty$ gegen den positiven Grundpunkt von $k_{r-1} a_1 b_1 a_1^{-1} k_{r-1}^{-1}$ bzw. von $k_{r-1} b_1^{-1} k_{r-1}^{-1}$, also gegen Grundpunkte

von Elementen, die aus b_1^{-1} bezw. $a_1 b_1 a_1^{-1}$ durch Transformation mit Fixelementen hervorgehen. — Dass dies Intervall in der Tat dasjenige ist, welches $V(f)$ enthält, überlegt man sich leicht z. B. daraus, dass der die Entwicklung $k(V(f))$ darstellende Netzweg beim Übergang von k_{r-1} zu k_r den oben genannten, aus den mit b_1, a_2, \dots, b_p bezeichneten Netzseiten gebildeten Baum definitiv verlässt. — Wir können also kurz sagen, dass das Intervall, zu dem ein Punkt gehört, durch seine letzte Fixkonvergente festgelegt wird

17. **Fixelementgruppen verwandter Automorphismen.**

Es sei I ein Automorphismus erster Art, g die zugehörige Randabbildung und $H(I) \neq 1$. Angenommen es gibt ein Fixelement h , dessen Grundpunkte nicht Intervallendpunkte sind. Bei der Operation hE bleiben nur die Grundpunkte von h fest. Da diese Operation die Fixpunktmenge bei g in sich überführt, geht jedes fixpunktfreie Intervall in ein anderes über. Also hat hg nur die Grundpunkte von h zu Fixpunkten, bestimmt also zwei periodische Intervalle, und der Automorphismus

$$I \cdot I_{0h^{-1}} = I_{h^{-1}}$$

hat nur die Potenzen des zu h gehörigen primären Elements als Fixelemente; die Gruppe $H(I_{h^{-1}})$ ist also zyklisch.

Beispiel 4: Der mit \mathcal{A} verwandte Automorphismus

$$\mathcal{A} \cdot I_{0a_2^{-1}} = \mathcal{A}_{a_2^{-1}}$$

ist gegeben durch

$$\begin{cases} a_1 \rightarrow a_2 a_1 b_1 a_2^{-1} \\ a_2 \rightarrow a_2 \\ a_i \rightarrow a_2 a_i a_2^{-1}, \quad i = 3, \dots, p \\ b_i \rightarrow a_2 b_i a_2^{-1}, \quad i = 1, \dots, p. \end{cases}$$

Die Grundpunkte von a_2 begrenzen nicht fixpunktfreie Intervalle bei \mathcal{A} , da a_2 nicht transformierte von b_1 ist. a_2 ist primär. Also ist

$$H(\mathcal{A}_{a_2^{-1}}) = \{a_2\},$$

und bei der zugehörigen Randabbildung entstehen zwei periodische Intervalle. —

Nun werde angenommen, h sei ein primäres Fixelement bei I , dessen Achse ein fixpunktfreies Intervall i begrenzt. Der positive Grundpunkt von h möge

der negative Endpunkt von i sein. Ausser den Grundpunkten von h möge es noch andere Fixpunkte bei gE geben, die dann zu

$$E - i - U(h) - V(h) = j$$

gehören. Die in j gelegenen fixpunktfreien Intervalle von gE werden dann bei irgend einer Potenz h^n unter sich vertauscht, also hat jeder Automorphismus I_{h^n} , $n \neq 0$, j als fixpunktfreies Intervall. Bei einer negativen Potenz von h werden die Punkte von i in derselben Richtung verschoben wie bei g . Also hat I_{h^n} , $n > 0$, keinen Fixpunkt in i , und

$$H(I_{h^n}) = \{h\}.$$

Dagegen kann es einen — und dann offenbar *nur einen* — negativen Wert von n geben, für den I_{h^n} Fixpunkte in i hat, für den also $H(I_{h^n})$ eventuell mehr als die zyklische Gruppe $\{h\}$ umfasst.

Beispiel 5: Bei \mathcal{A} fällt der negative Endpunkt des in § 15 mit i bezeichneten Intervalls mit dem positiven Grundpunkt von b_1 zusammen. Der Automorphismus $\mathcal{A}_{b_1^{-1}}$ hat z. B. $a_1^{-1} b_1 a_1$ oder $a_1^{-1} a_2 a_1$ zu Fixelementen. Also gilt: $H(\mathcal{A}_{b_1^{-1}})$ ist für $n \neq 0, -1$ mit der zyklischen Gruppe $\{b_1\}$ identisch, für diese beiden speziellen Werte von n aber umfassender. —

Wir betrachten die Aufgabe, Fixelemente für verwandte Automorphismen zu finden, jetzt etwas allgemeiner:

I sei ein beliebiger Automorphismus. Dann gilt für beliebige Elemente f und h aus F und $n > 0$:

$$f_{(I_{h^{-1}})^n} = h h_I h_{I^2} \cdots h_{I^{n-1}} \cdot f_{I^n} \cdot h_{I^{n-1}}^{-1} \cdots h_{I^2}^{-1} h_I^{-1} h^{-1}$$

und wegen

$$(I_{h^{-1}})^{-1} = I_{h_{I^{-1}}} :$$

$$f_{(I_{h^{-1}})^{-n}} = h_{I^{-1}}^{-1} h_{I^{-2}}^{-1} \cdots h_{I^{-n}}^{-1} \cdot f_{I^{-n}} \cdot h_{I^{-n}} \cdots h_{I^{-2}} h_{I^{-1}}.$$

Setzt man

$$h h_I \cdots h_{I^{n-1}} = r_n$$

und

$$h_{I^{-1}}^{-1} h_{I^{-2}}^{-1} \cdots h_{I^{-n}}^{-1} = s_n,$$

so folgt

$$r_{n_{I_h^{-1}}} = r_{n+1} \cdot h^{-1}$$

$$s_{n_{I_h^{-1}}} = s_{n-1} \cdot h^{-1}.$$

Nun betrachten wir den Fall, dass die Entwicklungen der positiven Grundpunkte von r_n und s_n gegen Grenzelemente konvergieren:

$$\left. \begin{array}{l} k(V(r_n)) \rightarrow r \\ k(V(s_n)) \rightarrow s \end{array} \right\} n \rightarrow \infty.$$

Dann zeigen die beiden vorstehenden Gleichungen, dass r und s Entwicklungen von Fixpunkten bei I_h^{-1} sein müssen, in Übereinstimmung damit, dass die Darstellungen

$$r = h h_I h_{I^2} \cdots \text{ in inf.}$$

$$s = h_{I^{-1}}^{-1} h_{I^{-2}}^{-1} h_{I^{-3}}^{-1} \cdots \text{ in inf.}$$

bei Ausübung von I_h^{-1} formal ungeändert bleiben. (Vgl. die Entstehung der Entwicklungen der beiden Fixpunkte P^+ und P^- im Beispiel 3, § 15.) Es bleiben hier die beiden Fälle möglich, dass die Grenzelemente r und s aperiodisch und dass sie periodisch sein können. Im letzteren Fall sind wir zu eigentlichen Fixelementen von I_h^{-1} geführt worden. In beiden Fällen kann man folgendermassen weiterschliessen: Wenn f Fixelement von I oder von einer Potenz von I ist, so konvergiert der positive Grundpunkt von $f_{(I_h^{-1})^n}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen r und für $n \rightarrow -\infty$ gegen s . r und s bestimmen also auf E ein bei I_h^{-1} fixpunktfreies Intervall. Gibt es also zwei Fix-Grundpunkte bei I , die durch r und s getrennt werden, so folgt, dass I_h^{-1} nur die beiden Fixpunkte r und s auf E hat.

Man sieht, dass die oben betrachteten Fälle von dieser allgemeineren Betrachtung umfasst werden: Ist h Fixelement bei I , so sind r und s die periodischen Entwicklungen der Grundpunkte von h . Liegen in beiden durch diese auf E bestimmten Intervallen Fix-Grundpunkte von I , so folgt, dass $H(I_h^{-1})$ zyklisch ist. Begrenzt die Achse von h aber ein bei I fixpunktfreies Intervall, so ist jedenfalls das komplementäre Intervall, wenn es Fixgrundpunkte bei I enthält, bei I_h^{-1} fixpunktfrei.

Endlich ist folgender Satz, dessen Richtigkeit man unmittelbar durch Einsetzen prüft, oft von Nutzen:

$$\text{Aus } l_I = l \text{ und } h_I^n = l h l^{-1} \text{ findet man für } I_h^{-1} \text{ das Fixelement } h h_I \cdots h_{I^{n-1}} \cdot l.$$

z. B. hat man für den Automorphismus ($p = 2$):

$$I: \begin{cases} a_1 b_1 \\ b_1 \\ b_2^{-1} \\ b_2 a_2 \end{cases}$$

das Fixelement

$$l = b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}.$$

Es ist übrigens

$$H(I) = \{b_1, l\}.$$

Man findet

$$a_{2I^6} = l a_2 l^{-1}$$

$$b_{2I^6} = l b_2 l^{-1},$$

und kann hiernach für I_h^{-1} , wo h ein beliebiges Element der Gruppe $\{a_2, b_2\}$ ist, ein Fixelement bilden. z. B. für $h = b_2$ findet man so eine zyklische Fixelementgruppe, erzeugt durch das Fixelement bei $I_{b_2^{-1}}$:

$$b_2 b_{2I} \cdots b_{2I^5} \cdot l = b_2^2 a_2 b_2 a_2^2 b_2^{-2} a_2^{-1} b_2^{-1} a_2^{-2}.$$

18. Einteilung aller Automorphismen in Isogredienzklassen.

In § 12 wurden die Nebengruppen des aus allen inneren Automorphismen bestehenden Normalteilers \mathfrak{F} von \mathfrak{S} als »Automorphismenfamilien« und die Systeme innerhalb \mathfrak{S} in einander transformierbarer Automorphismen als »Automorphismenklassen« bezeichnet. Wir richten nun unser Augenmerk auf solche Gesamtheiten von Automorphismen, die durch innere Automorphismen in einander transformierbar sind. Wegen der besonderen Bedeutung dieses Begriffs in den vorliegenden Untersuchungen sei für eine solche Gesamtheit der Name »Isogredienzklass« eingeführt. Die zu zwei »isogredienten Automorphismen« gehörigen Randabbildungen werden durch ein Element aus F in einander transformiert; sie werden ebenfalls als »isogredient« bezeichnet.

Zwei isogrediente Automorphismen gehören nach Definition zur selben Automorphismenklasse. Sie gehören aber auch zur selben Familie. Denn man hat

$$I_{0f} I I_{0f}^{-1} = I_{fI} f^{-1}. \quad (11)$$

Die Einteilung aller Automorphismen in Isogredienzklassen ist also eine Unterteilung der Einteilung in Familien. Der Gleichung (11) entspricht, wenn g zu I gehört, die Gleichung

$$f g f^{-1} = f f I^{-1} g \quad (12)$$

für die Randabbildungen; diese liest man auch aus der Funktionalgleichung (8) ab.

Der häufigen Verwendung wegen formulieren wir dies als

Satz 5: *Notwendige und hinreichende Bedingung für die Isogredienz zweier zu derselben Familie gehörigen Automorphismen I_1 und I_2 , $I_2 = I_1 h^{-1}$, ist, dass es eine Lösung f der Gleichung $h = f f I_1^{-1}$ gibt, und stellen daneben den*

Satz 6: *Notwendige und hinreichende Bedingung für die Isogredienz zweier zu derselben Klasse gehörigen Automorphismen I_1 und I_2 , $I_2 = I_3^{-1} I_1 I_3$, ist, dass I_3 mit einem mit I_1 vertauschbaren Automorphismus verwandt ist.*

Die Bedingung ist hinreichend. Gibt es nämlich eine Darstellung

$$I_3 = I_4 \cdot I_{0f}, \quad I_4 \Leftrightarrow I_1,$$

so folgt die Behauptung durch Einsetzung in die obige Form für I_2 . — Die Bedingung ist aber auch notwendig. Aus

$$I_3^{-1} I_1 I_3 = I_{0f} I_1 I_{0f}^{-1}$$

folgt nämlich

$$(I_{0f}^{-1} I_3^{-1}) \cdot I_1 \cdot (I_3 I_{0f}) \cdot I_1^{-1} = I.$$

Der mit I_3 verwandte Automorphismus $I_4 = I_3 I_{0f}$ ist also mit I_1 vertauschbar.

Ein Automorphismus I wird also jedenfalls durch die Automorphismen der Familien von I_0 und der Potenzen von I , im Allgemeinen aber noch durch diejenigen weiterer Familien in isogrediente transformiert.

Für die Familie \mathfrak{F} selbst ist die Einteilung in Isogredienzklassen mit der Einteilung der Elemente von F in Klassen in einander transformierbarer identisch: I_{0f_1} ist mit allen $I_{0ff_1f^{-1}}$ für beliebiges f in F , und nur mit diesen, isogredient.

Ein Automorphismus I bewirkt eine *Einteilung der Elemente von F in Systeme*, die »*Isogredienzklassen in Bezug auf I* » heissen mögen:

Definition: Zwei Elemente f_1 und f_2 von F heissen »*isogredient in Bezug auf I* «, wenn $I_{f_1}^{-1}$ und $I_{f_2}^{-1}$ isogrediente Automorphismen sind.

Dann sind, wenn g zu I gehört, $f_1 g$ und $f_2 g$ isogrediente Abbildungen, es gibt also ein solches f , dass

$$f_2 g = f f_1 g f^{-1} = f f_1 f_I^{-1} g$$

ist wegen (8). Wir haben also:

Satz 7: *Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass f_1 und f_2 in Bezug auf I isogredient sind, ist, dass es eine Lösung f der Gleichung*

$$f_2 = f f_1 f_I^{-1}$$

gibt.

In Bezug auf den früher als Beispiel benutzten Automorphismus \mathcal{A} ist b_1 isogredient mit der Identität, denn es ist

$$b_1 = a_1^{-1} \cdot a_{1\mathcal{A}}.$$

Der Automorphismus $\mathcal{A}_{b_1^{-1}}$ des Beispiels 5, § 17, gehört also mit \mathcal{A} zu derselben Isogredienzklasse. Die zugehörige Randabbildung $b_1 \lambda$ geht also aus λ durch Transformation mit a_1^{-1} hervor:

$$b_1 \lambda = a_1^{-1} \lambda a_1.$$

Die Fixpunktmenge bei $b_1 \lambda$ geht also aus derjenigen von λ durch die Operation a_1^{-1} hervor, und wir können das Beispiel 5 noch dadurch vervollständigen, dass entsprechend

$$H(\mathcal{A}) = \{b_1, a_2, \dots, b_p\}$$

die Gleichung

$$H(\mathcal{A}_{b_1^{-1}}) = \{a_1^{-1} b_1 a_1, a_1^{-1} a_2 a_1, \dots, a_1^{-1} b_p a_1\}$$

besteht.

Allgemein schliesst man aus der Isogredienz der zugehörigen Randabbildungen:

Satz 8: *Sind I_1 und I_2 zwei isogrediente Automorphismen, $I_2 = I_1 f_I f^{-1}$, so ist die Fixelementgruppe $H(I_2)$ eine zu $H(I_1)$ konjugierte Untergruppe von F :*

$$H(I_2) = f H(I_1) f^{-1}$$

oder anders geschrieben

$$H(I_2) = H(I_1)_{I_0 f^{-1}}.$$

Satz 9: Die Elemente f_I^n für beliebiges n gehören alle zu derselben Isogredienzklasse in Bezug auf I .

Das zeigen die Identitäten ($n > 0$):

$$f_I^n \equiv f_{I^{n-1}}^{-1} f_{I^{n-2}}^{-1} \cdots f_I^{-1} f^{-1} \cdot f \cdot f_I f_{I^2} \cdots f_I^n,$$

$$f_{I^{-n}} \equiv f_{I^{-n}} f_{I^{-(n-1)}} \cdots f_{I^{-1}} \cdot f \cdot f^{-1} f_{I^{-1}}^{-1} \cdots f_{I^{-(n-1)}}^{-1}$$

unter Berücksichtigung des Satzes 7.

Beispiel 6: Der Automorphismus \mathcal{A}_{a_1, b_1^n} ist für beliebiges n mit dem Automorphismus $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_{a_1}$ des Beispiels 3 isogredient, die zugehörige Randabbildung enthält also zwei aperiodische Intervalle, getrennt durch zwei Fixpunkte P'^+ und P'^- , die nicht Grundpunkte sind:

$$H(\mathcal{A}_{a_1, b_1^n}) = 1.$$

Die Randabbildung geht für positives n aus derjenigen von \mathcal{A}' hervor durch Transformation mit

$$a_1 b_1^{n-1} a_1 b_1^{n-2} \cdots a_1 b_1 a_1.$$

Für P'^+ erhält man dann die Entwicklung

$$k(P'^+) = b_1^{-n} a_1^{-1} b_1^{-(n+1)} a_1^{-1} \dots$$

Es ist leicht, die Entwicklung von P'^- sowie die Entwicklungen beider Punkte im Fall eines negativen n aufzustellen und zu zeigen, dass sie Fix-Grenzelemente der betreffenden Automorphismen sind.

19. Automorphismen endlicher Ordnung.

Es sei $I \neq I_0$ ein Automorphismus erster Art und $I^n = I_0$. Es sei n die kleinste positive Zahl dieser Art, also die Ordnung von I . Nach § 11 ist dann

$$H(I^m) = 1, \quad m = 1, 2, \dots, n - 1,$$

und die zugehörigen Randabbildungen g^m fixpunktfrei, während $g^n = 1$ ist.

Wir betrachten nun die mit I verwandten Automorphismen. Es sei $I_{f^{-1}}$ ein solcher. Dann ist

$$k = f \cdot f_I \cdot f_{I^2} \cdots f_{I^{n-1}} \tag{13}$$

ein Fixelement von $I_{f^{-1}}$, wie die Ausübung von $I_{f^{-1}}$ unter Benutzung von $fI^n = f$ zeigt, und wie auch aus den allgemeinen Ausführungen in § 17 folgt.

Nun gilt für $r > 0$ nach den allgemeinen Formeln von § 17:

$$(I_{f^{-1}})^r = I_{f^{-1}} \dots I_{f^{-1}} \quad (14)$$

Für unser obiges I ziehen wir für $r = n$ aus (14) die Folgerung:

$$(I_{f^{-1}})^n = I_{0_{k^{-1}}}. \quad (15)$$

Nun ist zu unterscheiden, ob $k = 1$ ist oder nicht.

a) $k \neq 1$. Dann ist $H(I_{f^{-1}}) \neq 1$, also $H(I_{f^{-1}}) = H((I_{f^{-1}})^n)$. Die zu $(I_{f^{-1}})^n$ gehörige Randabbildung ist aber nach (15) die Operation k aus F , also ist

$$H((I_{f^{-1}})^n) = \{k^*\},$$

wenn k^* das zu k gehörige primäre Element ist. Also ist auch

$$H(I_{f^{-1}}) = \{k^*\}.$$

Die zugehörige Randabbildung fg bestimmt zwei periodische Intervalle, die zu dem primären Fixelement k^* gehören. Und es ist

$$(fg)^n(E) = k(E).$$

b) $k = 1$. Dann ist nach (15)

$$(I_{f^{-1}})^n = I_0.$$

Und n ist auch der kleinste Exponent dieser Art, denn aus

$$(I_{f^{-1}})^r = I_0$$

folgt wegen (14):

$$I^r = I_0 f I \dots f I^{r-1}.$$

I^r hat also ein Fixelement, was nur für $r = m \cdot n$ der Fall ist. Also sind fg , $(fg)^2, \dots, (fg)^{n-1}$ fixpunktfrei und $(fg)^n = 1$. Somit $H(I_{f^{-1}}) = 1$:

Satz 10: *Alle mit einem Automorphismus endlicher Ordnung verwandten Automorphismen haben als Fixelementgruppe entweder eine zyklische Gruppe oder die Identität. Dabei verhalten sich nach Satz 8 isogrediente Automorphismen gleichartig.*

Dies letztere tritt auch formal in (13) zu Tage, wenn man dort für f das mit f bezüglich I nach Satz 7 isogrediente Element hfh^{-1} einsetzt.

Bei dem im vierten Abschnitt behandelten Problem werden diejenigen mit I verwandten Automorphismen zu bestimmen sein, zu denen fixpunktfreie Randabbildungen gehören. Es wird also nach denjenigen Isogredienzklassen bezüglich I der Elemente von F gefragt, deren Elemente Lösungen der Gleichung

$$f f_I f_{I^2} \cdots f_{I^{n-1}} = 1 \quad (16)$$

sind. Es wird sich später ergeben, dass diese Gleichung nur eine *endliche* Anzahl von nicht isogredienten Lösungen hat und dass sich die Anzahl der als Lösungen auftretenden Isogredienzklassen bezüglich I aus der Darstellung von I ablesen lässt.

20. **Abbildung der auf E gelegenen vollständigen Systeme äquivalenter Punkte bei Automorphismen.**

Es sei P ein Punkt von E . Die Menge der Punkte fP , wenn f ganz F durchläuft, sei mit FP bezeichnet. FP ist überall dicht auf E ; denn wenn i ein beliebiges Intervall auf E und f ein Element ist, dessen positiver Grundpunkt in i liegt, und dessen negativer Grundpunkt von P verschieden ist (ein solches gibt es nach § 5), so liegt $f^n P$ für genügend grosses n in i . Ist I ein beliebiger Automorphismus, g die zugehörige Randabbildung und $gP = Q$, so ist $g(FP) = FQ$ wegen der Funktionalgleichung (8). Die vollständigen Systeme äquivalenter Punkte werden also durch g auf einander abgebildet.

Angenommen nun es sei

$$g(FP) = FP.$$

Dann ist etwa $gP = fP$. Das Element f ist hierbei nicht vollständig bestimmt, falls P Grundpunkt ist. Als »charakteristisches Element« $f^{(P)}$ des Punktes P von E sei, wenn P Grundpunkt ist, das primäre Element von F , das P zum positiven Grundpunkt hat, und sonst immer das Element 1 definiert. Dann ist der »Äquivalenzfaktor« f des Punktes P bei der Abbildung g nur bis auf eine willkürlich bleibende Potenz des charakteristischen Elements bestimmt:

$$gP = fP = f f^{(P)\alpha} P = f^{(fP)\alpha} fP.$$

Wenn nun h ein beliebiges Element aus F ist, so ist nach (8):

$$g h P = h_I g P = h_I f P = h_I f h^{-1} \cdot h P.$$

Die Äquivalenzfaktoren aller Punkte von FP bei I bilden also eine Isogredienzklassse in Bezug auf I^{-1} . Diese ist vollkommen bestimmt, wenn P nicht Grundpunkt ist. Wenn nun FP einen Fixpunkt bei g enthalten soll, etwa den Punkt hP , so ist nach der letzten Gleichung

$$h_I f h^{-1} = f^{(hP)\alpha}$$

also

$$f = h_I^{-1} h \cdot h^{-1} f^{(hP)\alpha} h = h_I^{-1} h \cdot f^{(P)\alpha}$$

oder

$$f f^{(P)-\alpha} = h_I^{-1} h.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass FP Fixpunkte bei I enthält, ist also, dass der Äquivalenzfaktor eines beliebigen Punktes von FP bei Hinzufügung einer geeigneten Potenz seines charakteristischen Elements in die Isogredienzklassse der Identität bezüglich I^{-1} fällt.

III. ABSCHNITT.

Stetige Abbildungen.

21. Topologische Abbildungen der Fläche φ auf sich. T -Funktionen.

Die Fläche φ ($= \mathcal{D}$ mod F , § 3) werde einer topologischen, d. h. eindeutigen und stetigen Abbildung τ auf sich selbst unterworfen. q sei ein Punkt von φ , $q' = \tau q$ der Bildpunkt, x_0 einer der Koordinatenwerte von q , x_0' ein solcher von q' . Nun sei x ein beliebiger Punkt von \mathcal{D} und W ein stetiges Kurvenstück in \mathcal{D} , das von x_0 nach x führt. W liegt über einem stetigen Kurvenstück w auf φ . Das stetige Kurvenstück, das über τw liegt und in x_0' beginnt, möge in x' endigen. Dann schliesst man leicht aus der Eigenschaft von \mathcal{D} , universelle Überlagerungsfläche von φ zu sein: x' hängt nur von x , nicht von W ab. Jedem Punkte x ist also eindeutig ein Bildpunkt $x' = t(x)$ zugeordnet. Einer Umgebung von x (die man zunächst so klein wählen kann, dass sie kein Paar bei F äquivalenter Punkte enthält) entspricht eine Umgebung von x' . Zwei verschiedenen Werten von x entsprechen zwei verschiedene Werte von x' . Durch Betrachtung der reziproken Abbildung $\tau^{-1}\varphi$ folgt, dass alle diese Beziehungen umkehrbar sind. Die Funktion $x' = t(x)$ bestimmt also eine *topologische Abbildung* $t\mathcal{D}$ von \mathcal{D} auf sich, bei der zwei äquivalente Punkte stets wieder in zwei äquivalente Punkte übergeführt werden. Umgekehrt wird durch jede Abbildung $t\mathcal{D}$ mit

dieser Eigenschaft eine topologische Abbildung $\tau\varphi$ festgelegt. Alle Funktionen $t(x)$ dieser Art bilden eine Gruppe die mit T bezeichnet sei; jede solche Funktion $t(x)$ wird hinfort als eine *T-Funktion* bezeichnet. $t\Phi$ »liegt über« $\tau\varphi$. Bei der Bestimmung von t war die Wahl von q , x_0 und x_0' zum Teil frei. Es sei also t_1 eine zweite über $\tau\varphi$ liegende *T-Funktion*. Dann liegt $t_1 t^{-1}$ über der identischen Abbildung von φ , ist also ein Element f aus F , eine »Decktransformation der universellen Überlagerungsfläche«. Also ist $t_1 = f t$, und wir haben:

Jede topologische Abbildung von φ auf sich bestimmt eine *Familie verwandter T-Funktionen*, deren Mitglieder aus einander durch Hinzufügung einer Operation aus F hervorgehen.

22. Funktionalgleichung der T-Funktionen. Induzierte Automorphismen. Abbildungsklassen.

Es sei t eine *T-Funktion* und f ein Element aus F . Dann ist $t f t^{-1}$ eine *T-Funktion*, die über der identischen Abbildung von φ liegt, also ein Element f' aus F :

$$t f t^{-1} = f'. \tag{17}$$

Dies zeigt, dass F ein *Normalteiler* von T und die Zuordnung $f \rightarrow f'$ ein *Automorphismus* I von F ist, der als »durch t induziert« bezeichnet sei. t genügt also in ganz Φ der *Funktionalgleichung*

$$t f x = f t x, \tag{18}$$

die mit der Funktionalgleichung (8) der früher betrachteten Randabbildungsfunktionen $g(E)$, (§ 13), übereinstimmt und, wie diese, mit einem System von $2p$ Funktionalgleichungen entsprechend (9) gleichbedeutend ist. Der Wert von t in einem Fundamentalbereich von F bestimmt also t in ganz Φ .

Nach (18) ist t mit allen Elementen der Fixelementgruppe $H(I)$ und nur mit diesen Elementen von F vertauschbar.

Nun sei h ein Element aus F . Die mit t verwandte *T-Funktion* $h t$ induziert dann nach (17) wegen

$$h t f t^{-1} h^{-1} = h f' h^{-1}$$

den mit I verwandten Automorphismus $I_{h^{-1}}$. Die ganze Familie der über $\tau\varphi$ liegenden *T-Funktionen* induziert also eine Automorphismenfamilie, woraus sich ein Einteilungsprinzip für die τ ergibt:

Jeder topologischen Abbildung von φ auf sich ist eindeutig eine Familie von Automorphismen von F zugeordnet. Zwei Abbildungen von φ werden zu derselben *Abbildungsklasse* gerechnet, wenn ihnen *dieselbe Automorphismenfamilie* zugeordnet ist.

Insbesondere heisst eine Abbildung $\tau \varphi$ »zur Klasse der Identität gehörig«, wenn ihr die Familie \mathfrak{F} der inneren Automorphismen zugeordnet ist. Eine der zugehörigen T -Funktionen induziert dann den identischen Automorphismus, ist also mit allen Elementen von F vertauschbar.

Wird I_1 durch t_1 und I_2 durch t_2 induziert, so wird durch $t_2 t_1$ der Automorphismus $I_1 I_2$ induziert, wie (18) zeigt. Die Gruppe T ist also mit \mathfrak{F} isomorph¹⁰, und dabei entspricht der Einheit I_0 von \mathfrak{F} derjenige Normalteiler T_0 von T , dessen Elemente den identischen Automorphismus I_0 induzieren. Die Gesamtheit $T_{\mathfrak{F}}$ derjenigen T -Funktionen, die Automorphismen aus der Familie \mathfrak{F} der Identität induzieren, bildet also ebenfalls einen Normalteiler von T , da \mathfrak{F} Normalteiler von \mathfrak{F} ist. Bezeichnet endlich (τ) die Gruppe aller topologischen Abbildungen von φ auf sich und $(\tau)_0$ die Gesamtheit derjenigen τ , die zur Klasse der Identität gehören, so ist also $(\tau)_0$ ein Normalteiler von (τ) , und die »Gruppe der Abbildungsklassen« ist durch jede der vier *holoedrisch isomorphen Faktorgruppen*

$$\frac{(\tau)}{(\tau)_0} = \frac{T}{T_{\mathfrak{F}}} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}} = \frac{H}{F} \quad (19)$$

gegeben, wo H nach § 13 die Gruppe der durch Automorphismen hervorgerufenen Randabbildungen bedeutet.

23. Jeder Automorphismus wird von T -Funktionen induziert.

Satz 11: *Die von den topologischen Abbildungen von φ hervorgerufenen Automorphismenfamilien enthalten alle Automorphismen von F .*

Dieser Satz ist von M. DEHN aufgestellt worden, der mir früher einen für $p = 2$ ganz durchgeführten Beweis mitgeteilt hat; dieser Beweis operierte auf der Fläche φ selbst unter Benutzung der am Schlusse von § 9 angegebenen Dehnschen Sätze. Hier soll der Beweis so geführt werden, dass wir zu einem gegebenen Automorphismus eine zugehörige T -Funktion in \mathcal{O} konstruieren, und zwar indem wir zwei geeignet gewählte Fundamentalbereiche von F topologisch

¹⁰ Hier wird die im nächsten Paragraphen zu beweisende Tatsache vorweggenommen, dass es zu jedem Automorphismus T -Funktionen gibt, die ihn induzieren.

so auf einander abbilden, dass in äquivalenten Randpunktpaaren der durch die Funktionalgleichung (18) geforderte Zusammenhang besteht. Wir stellen uns zunächst statt des in § 3 definierten Fundamentalbereichs B einen für die vorliegende Aufgabe besser geeigneten her, der durch eine leicht zu übersehende Abänderung aus B entsteht.

i sei eine der Zahlen $1, 2, \dots, p$. Die Achsen von a_i und b_i schneiden sich in einem Punkte D_i . Nun werden der Reihe nach gebildet: das Bild der Achse von b_i bei a_i , also die Achse von $a_i b_i a_i^{-1}$, das Bild der Achse von a_i bei dieser letzteren Operation, also die Achse von $a_i b_i a_i b_i^{-1} a_i^{-1}$, das Bild der Achse von $a_i b_i a_i^{-1}$ bei der Reziproken dieser letzteren Operation, also die Achse von $a_i b_i a_i^{-1} b_i \cdot a_i b_i^{-1} a_i^{-1}$, das Bild der Achse von $a_i b_i a_i b_i^{-1} a_i^{-1}$ bei der Reziproken der letzteren Operation, also die Achse von $k_i a_i k_i^{-1}$, wo k_i den Kommutator $a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ bedeutet. Die beiden zuletzt erhaltenen Elemente sind $k_i b_i k_i^{-1}$ und $k_i a_i k_i^{-1}$. Setzt man nun dieses Verfahren unbegrenzt fort, indem man jeweils zwei mal das zuletzt erhaltene Element direkt als Transformator verwendet und dann zwei mal das reziproke des zuletzt erhaltenen Elements verwendet, so erhält man nach jeweils vier Schritten Elemente der Form $k_i^n b_i k_i^{-n}$, $k_i^n a_i k_i^{-n}$ für wachsendes n . Die Grundpunkte aller dieser Elemente konvergieren also bei Fortsetzung des Prozesses gegen $V(k_i)$. Die Schnittpunkte der Achsen je zweier aufeinanderfolgender dieser Elemente seien der Reihe nach mit

$$D_i, D_i^{(1)}, D_i^{(2)}, \dots$$

bezeichnet. Wiederholt man dasselbe Verfahren mit Vertauschung der Rollen von a_i und b_i , so erhält man eine neue Elementfolge, deren Grundpunkte gegen $U(k_i)$ konvergieren und die zur Entstehung einer Reihe von Schnittpunkten

$$D_i, D_i^{(-1)}, D_i^{(-2)}, \dots$$

Anlass geben. Dasjenige Teilgebiet Z_i von Φ , das ausserhalb aller dieser Achsenkreise und innerhalb des Achsenkreises von k_i liegt, ist ein im Sinne der nicht-euklidischen Metrik konvexer Bereich, der bei der Gruppe $\{k_i\}$ in sich übergeht. Denn bei k_i wird die Achse von k_i in sich verschoben, und das andere, aus unendlich vielen Seiten bestehende Randstück ρ_i von Z_i wird so in sich verschoben, dass jede Seite die drei nächstfolgenden überspringt und in die vierte übergeht. Speziell ist

$$k_i D_i^{(-2)} = D_i^{(+2)}.$$

Die Figur Z_i geht durch Spiegelung an $O D_i$ in sich über, $D_i^{(2)}$ und $D_i^{(-2)}$ haben

also gleichen Abstand von E und liegen daher auf denjenigen Orthogonalkreisen k_i C_i und C_i zu E und zu der Achse von k_i , die die Rolle der Kreise $S(C)$ und C in der Figur 4 spielen.

Nun seien die Eckpunkte des in § 3 benutzten Fundamentalbereichs B anfangend von dem Schnittpunkt der Seiten B_1 und A_p (er wurde in § 3 H genannt) folgendermassen bei linksläufigem Umlauf bezeichnet:

$$Q_1 \ Q_{11} \ Q_{12} \ Q_{13} \ Q_2 \ Q_{21} \ Q_{22} \ Q_{23} \ \dots \ Q_p \ Q_{p1} \ Q_{p2} \ Q_{p3}.$$

Dann führt b_i^{-1} den Punkt Q_{i+1} in Q_{i1} und $a_i b_i a_i^{-1}$ den Punkt Q_{i1} in Q_i , also k_i den Punkt Q_{i+1} in Q_i über $(i \bmod p)$:

$$k_i Q_{i+1} = a_i b_i a_i^{-1}. \quad b_i^{-1} Q_{i+1} = a_i b_i a_i^{-1} Q_{i1} = Q_i.$$

Q_i und Q_{i+1} haben gleichen Abstand von E , also liegt Q_{i+1} auf C_i und Q_i auf $k_i C_i$. Die Kreise C_i und $k_{i+1} C_{i+1}$ schneiden sich in Q_{i+1} . Der von Q_{i+1} nach $D_i^{(-2)}$ führende Teilbogen von C_i heisse l_i . Der neue Fundamentalbereich Ω von F wird dann begrenzt von $l_i, k_i l_i$ und dem Teilpolygon $D_i^{(-2)} D_i^{(-1)} D_i D_i^{(1)} D_i^{(2)}$ des Randstückes ρ_i von Z_i für $i = 1, 2, \dots, p$.

Die Randstücke von Ω sind paarweise bei a_i, b_i und den aus diesen zusammengesetzten Operationen k_i äquivalent. Dabei ordnen sich die mit Ω äquivalenten Bereiche um jeden der mit D_i äquivalenten Punkte zu je fünf an; einer der vier Winkel, die bei dem Schnitt der Achsen von a_i und b_i entstehen, wird nämlich noch durch die Strecke l_i geteilt. Um jeden der mit Q_i äquivalenten Punkte ordnen sich die mit Ω äquivalenten Bereiche zu je p an, wie aus dem Folgenden noch ersichtlich sein wird.

Die Figur 13 veranschaulicht die Beziehung der Fundamentalbereiche B und Ω zu einander, und zwar für denjenigen Teil dieser Bereiche, der durch die nichteuclidische Gerade $Q_1 Q_2$ abgeschnitten wird. Die Figur entspricht dabei $p = 2$, wobei speziell die Achse von k_1 Durchmesser von E wird und mit der Geraden $Q_1 Q_2$ zusammenfällt; im übrigen ist aber die gegenseitige Lage und Beziehung der einzelnen Teile der Figur für $p > 2$ dieselbe. Der betrachtete Teil von B besteht aus $V + I + II + III + IV$, der entsprechende von Ω aus $V + I' + II' + III' + IV'$. Dabei ist, wie man leicht aus der Figur abliest,

$$\begin{aligned} I' &= a_1 I, & II' &= b_1 II, \\ III' &= a_1 b_1 III, & IV' &= b_1 a_1 IV. \end{aligned}$$

Die die Berandung dieses Teiles von B bildenden Geraden, also in der Be-

nennung von § 3 die Seiten A_1 und B_1 des Netzes N , setzen sich in Ω zusammen aus den Geradenstücken, die IV' von II' , II' von V , V von I' und I' von III' trennen. Die Pfeile tragenden Geraden sind die Achsen der angeschriebenen Elemente. —

Die Achsen von k_1, k_2, \dots, k_p liegen ganz ausserhalb einander, wie z. B. die Entwicklungen ihrer Grundpunkte zeigen; nur für $p=2$ fallen die beiden Achsen ganz zusammen wegen

$$R \equiv k_1 k_2 = 1.$$

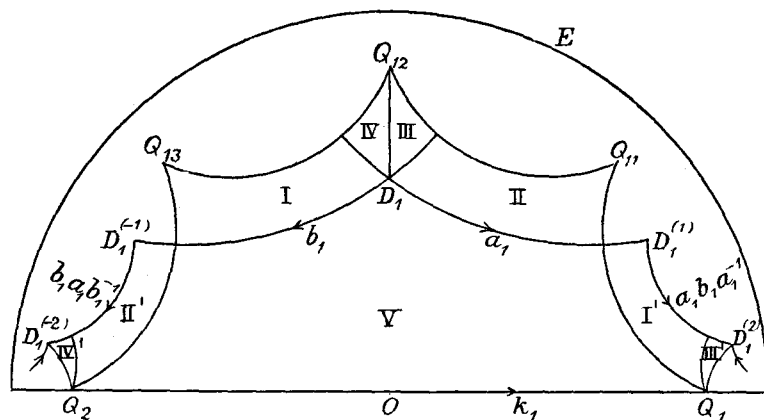


Fig. 13.

$k_1 \Omega$ hat mit Ω die Strecke $k_1 l_1$ gemeinsam. $k_1 \Omega$ wird durchsetzt von den Achsen von

$$k_1, k_1 k_2 k_1^{-1}, \dots, k_1 k_p k_1^{-1},$$

die alle zwischen $V(k_1)$ und $U(k_p)$ auf E aufsitzen. Ω grenzt an die »Achsenzüge« q_1, \dots, q_p (Randstücke der Z_1, \dots, Z_p). $k_1 \Omega$ grenzt also an die Achsenzüge

$$k_1 q_1 = q_1, k_1 q_2, \dots, k_1 q_p.$$

Die von Q_1 ausgehende freie Seite von $k_1 \Omega$ (für $p > 2$) entspricht der Seite $k_2 l_2$ von Ω , an welche $k_2 \Omega_2$ grenzt; an diese freie Seite grenzt also $k_1 k_2 \Omega$, und dieser Bereich grenzt an die Achsenzüge

$$k_1 k_2 q_1, k_1 k_2 q_2 = k_1 q_2, k_1 k_2 q_3, \dots, k_1 k_2 q_p.$$

An die der Seite $k_3 l_3$ von Ω entsprechende freie Seite $k_1 k_2 k_3 l_3$ von $k_1 k_2 \Omega$, die (für $p > 3$) als freie Seite von Q_1 ausgeht, grenzt nun $k_1 k_2 k_3 \Omega$. Dies Verfahren

setzt man im Zyklus um Q_1 fort, bis man zu $k_1 k_2 \dots k_{p-1} \Omega$ kommt. Dies ist aber wegen

$$(20) \quad R \equiv k_1 k_2 \dots k_p = 1$$

mit $k_p^{-1} \Omega$ identisch, grenzt also längs l_p an Ω . Um Q_1 ist also bei rechtsläufigem Umlauf ein Zyklus von p Bereichen

$$\Omega, k_1 \Omega, k_1 k_2 \Omega, \dots, k_1 k_2 \dots k_{p-1} \Omega = k_p^{-1} \Omega$$

angeordnet. Aus Symmetriegründen folgt nun, dass der Winkel zwischen den von Q_i ausgehenden Strecken l_{i-1} und $k_i l_i$ die Grösse $\frac{2\pi}{p}$ hat. Speziell für $p=2$ liegen diese Strecken also auf derselben Geraden.

Die obigen p Bereiche stossen an diejenigen $p(p-1)$ Achsenzüge, die aus q_1, q_2, \dots, q_p durch die Operationen

$$1, k_1, k_1 k_2, \dots, k_1 k_2 \dots k_{p-1}$$

hervorgehen. Die zyklische Anordnung der Endpunkte dieser Achsenzüge auf E ist aus der Anordnung der p Bereiche um Q_1 und der Lage der q_i zu Ω leicht abzulesen.

Endlich brauchen wir für $p > 2$ noch ein System von Hilfslinien: m_i sei eine geradlinige, gerichtete Strecke, die von $D_{i-1}^{(-2)}$ nach $D_i^{(2)}$ führt ($i \bmod p$). m_i schneidet also von Ω ein gleichschenkliges Dreieck \mathcal{A}_i mit der Grundlinie m_i und der Spitze Q_i ab. Ω_0 sei der Teil von Ω , der nach Fortnahme dieser p kongruenten Dreiecke übrig bleibt. Die Dreiecke

$$\mathcal{A}_1, k_1 \mathcal{A}_2, k_1 k_2 \mathcal{A}_3, \dots, k_1 k_2 \dots k_{p-1} \mathcal{A}_p$$

ordnen sich zu einem regulären p -Eck \mathcal{A} mit dem Mittelpunkt Q_1 an. Die Seiten desselben sind

$$m_1, k_1 m_2, k_1 k_2 m_3, \dots, k_1 k_2 \dots k_{p-1} m_p.$$

Die Ecken desselben sind die Punkte

$$D_1^{(2)}, k_1 D_2^{(2)}, k_1 k_2 D_3^{(2)}, \dots, k_1 k_2 \dots k_{p-1} D_p^{(2)} = k_p^{-1} D_p^{(2)} = D_p^{(-2)}.$$

Der Fundamentalbereich Ω ist durch $\Omega_0 + \mathcal{A}$ ersetzbar.

Nun sei K diejenige Untergruppe von F , die von k_1, k_2, \dots, k_p erzeugt wird. K ist wegen (20) eine freie Gruppe mit $p-1$ Erzeugenden. Mit $K\Omega$ sei die

Gesamtheit der mit Ω bei K äquivalenten Bereiche bezeichnet. Bildet man nun entsprechend dem obigen Zyklus von p mit Ω äquivalenten Bereichen um Q_1 die analogen Zyklen um Q_2, \dots, Q_p und weiter um die mit Q_i äquivalenten Ecken der schon erhaltenen Bereiche u.s.w., so erschöpft man durch dieses Verfahren gerade ganz $K\Omega$. Ist k ein beliebiges Element aus K , so grenzt $k\Omega$ an die Achsenzüge kQ_1, \dots, kQ_p . Jeder Achsenzug kQ_i ist Querschnitt von E , und der eine der Teile, in die er Φ zerlegt, ist ein (nichteuclidisch-)konvexes Gebiet. Der Durchschnitt aller dieser konvexen Gebiete, wenn $i=1, 2, \dots, p$ und k ganz K durchläuft, ist ein *konvexes Gebiet* Π , dessen Rand von allen kQ_i gebildet wird; denn jeder der Querschnitte kQ_i von E hat alle übrigen auf seiner Hohlseite. Nun ist offenbar

$$K\Omega = K(\Omega_0 + \mathcal{A}) = \Pi.$$

Ist also f ein Element in F aber ausserhalb K , so hat das konvexe Gebiet $f\Pi$ mit Π höchstens Randpunkte von Π gemeinsam. Φ wird also in dieser Weise durch K und seine Nebengruppen in konvexe Gebiete aufgeteilt.

Im Falle $p=2$, wo das »Ansatzstück« \mathcal{A} verschwindet und Ω_0 mit Ω identisch ist, ist K zyklisch, und Π wird von Q_1 und Q_2 begrenzt, die ihre Endpunkte auf E gemeinsam haben und beide durch $k_1=k_2^{-1}$ in sich verschoben werden.

— Die Berandung von B entspricht der Anbringung des kanonischen Schnittsystems der Fig. 1 auf φ . Die Berandung von Ω entspricht einer anderen oft benutzten Aufschneidung der Fläche, nämlich der Verwendung von p selbständigen Rückkehrschnittpaaren, deren Kreuzungspunkte durch p »Zügel« mit einem beliebigen Punkt der Fläche verbunden sind. Denkt man sich in Fig. 1 auf der Fläche φ die geschlossenen geodätischen Linien eingezeichnet, die die Achsen der a_i und b_i darstellen, so erhält man p zu einander fremde Paare von Rückkehrschnitten. Ihre Kreuzungspunkte werden durch die geodätischen Segmente l_i mit Q und durch die gerichteten geodätischen Segmente m_i mit einander verbunden. So entsteht Fig. 14 ($p=3$), in welcher die A_i und B_i fortgelassen und die Achsen durch die Namen der zugehörigen Substitutionen bezeichnet sind. Ferner ist noch die Lage der die Achsen der k_i darstellenden geschlossenen geodätischen Linien angedeutet, die je einen Torus von der Fläche abschnüren. Im Falle $p=2$ gibt es nur eine von diesen, und diese geht durch Q ; die m_i fallen dann mit den l_i zusammen.

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen führen wir nunmehr den Beweis der obigen Behauptung durch. Es sei also ein beliebiger Automorphismus I ($f \rightarrow f'$) von F gegeben. Es soll ein Ω entsprechender Bereich Ω' konstruiert

werden; entsprechende Dinge werden dabei stets durch Hinzufügung eines Akzents gekennzeichnet. Das Resultat des § 9, dass die zyklische Anordnung der Grundpunkte bei I erhalten bleibt, wird beständig verwendet.

Die Achsen von a'_i und b'_i schneiden sich in D'_i . Analog wie oben leiten wir hieraus eine Elementfolge

$$b'_i, a'_i, a'_i b'_i a_i'^{-1}, a'_i b'_i a'_i b_i'^{-1} a_i'^{-1}, \dots$$

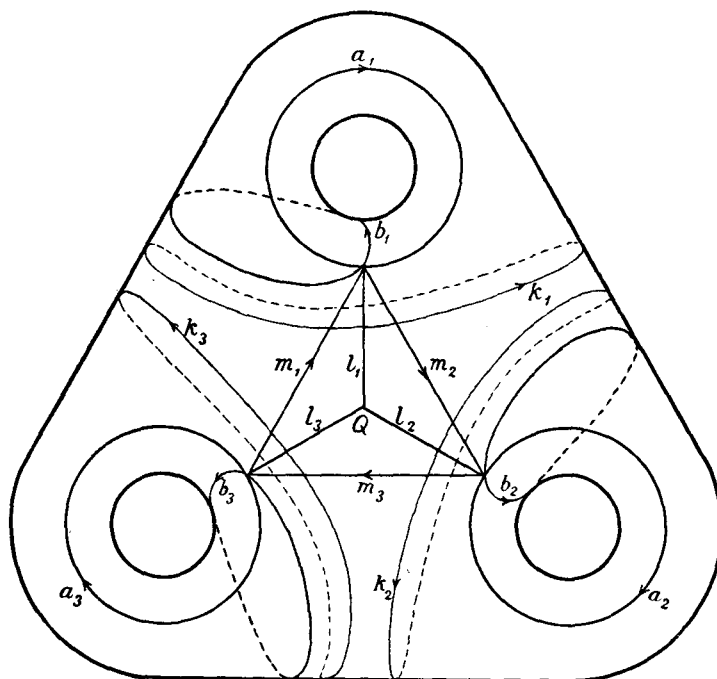


Fig. 14.

ab; die zugehörigen Achsen schneiden sich in $D'_i, D_i^{(1)'}, D_i^{(2)'}, \dots$. Die Grundpunkte dieser und der analogen Folge konvergieren gegen die Grundpunkte von $k'_i = a'_i b'_i a_i'^{-1} b_i'^{-1}$. Dem konvexen Bereich Z_i entspricht ein konvexer Bereich Z'_i als Zwischengebiet aller dieser Achsen, begrenzt von der Achse von k'_i und einem »Achsenzuge« q'_i .

Nun sei $K' = K_I$ die von k'_1, \dots, k'_p erzeugte Untergruppe von F und k' das Zeichen für ein beliebiges Element aus K' . Jedem Achsenzug kq_i entspricht nun ein Achsenzug $k'q'_i$. Die Menge der Endpunkte der Achsenzüge $k'q'_i$ geht aus der Menge der Endpunkte der kq_i durch die zu I gehörige Randabbildung gE hervor. Sie hat also dieselbe zyklische Anordnung wie diese. Jeder $k'q'_i$ hat also

alle übrigen auf seiner Hohlseite. Zusammen bestimmen also die $k'q_i'$ ein *konvexes Gebiet* Π' , wie die kq_i das konvexe Gebiet Π bestimmten.

Nun liegen auf dem Rande von Π' die Punkte $D_i^{(2)'}$ und $D_i^{(-2)'}$ in derselben zyklischen Anordnung wie die entsprechenden ungestrichenen Punkte auf dem Rande von Π . Zieht man also geradlinige, gerichtete Strecken m_i' von $D_{i-1}^{(-2)'}$ nach $D_i^{(2)'}$, so schneiden diese aus Π' ein konvexes Polygon Ω_0' aus. Ebenso bilden die Strecken

$$m_1', k_1' m_2', k_1' k_2' m_3', \dots, k_1' k_2' \dots k_{p-1}' m_p'$$

die Seiten eines *konvexen Polygons* \mathcal{A}' , das mit m_1' an Ω_0' grenzt; die Ecken

$$(21) \quad D_1^{(2)'}, k_1' D_2^{(2)'}, k_1' k_2' D_3^{(2)'}, \dots, k_1' k_2' \dots k_{p-1}' D_p^{(2)'}, k_p'^{-1} D_p^{(2)'}, D_p^{(-2)'}$$

liegen nämlich auf dem Rande von Π' in derselben zyklischen Anordnung wie die entsprechenden ungestrichenen auf dem Rande von Π . Durch Ausübung aller Elemente von K' und Vergleich mit den betreffenden Elementen aus K folgt nun, dass

$$K'(\Omega_0' + \mathcal{A}') = \Pi'$$

ist. Ist f ein Element in F aber ausserhalb K , so wird Π durch die Operation f auf die andere Seite eines der Π begrenzenden Achsenzüge kq_i verlegt, da $f\Pi$ mit Π höchstens Randpunkte von Π gemeinsam hat. Aus der Erhaltung der zyklischen Anordnung der Grundpunkte bei gE folgt, dass dann auch $f'\Pi'$ von Π' durch das betreffende $k'q_i'$ getrennt ist, dass diese beiden Gebiete also keine inneren Punkte gemeinsam haben.

Nun können wir den Beweis dadurch zu Ende bringen, dass wir eine geeignete topologische Beziehung zwischen $\Omega_0 + \mathcal{A}$ und $\Omega_0' + \mathcal{A}'$ aufstellen. Der Symmetrie halber, und um ein später erforderliches Nebenresultat bequem zu erhalten, stellen wir erst einen zu Ω analogen Bereich her: Q_1' sei ein *beliebiger* Punkt im Inneren von \mathcal{A}' . Er wird mit den Ecken (21) von \mathcal{A}' durch geradlinige Strecken verbunden, die in dieser Reihenfolge mit

$$k_1' l_1', k_1' k_2' l_2', k_1' k_2' k_3' l_3', \dots, k_1' k_2' \dots k_p' l_p' = l_p'$$

bezeichnet werden. \mathcal{A}' wird dadurch in p Dreiecke

$$\mathcal{A}_1', k_1' \mathcal{A}_2', \dots, k_1' \dots k_{p-1}' \mathcal{A}_p'$$

zerlegt. Dann sei Ω' der Bereich, der aus Ω_0' durch Hinzufügung der Dreiecke $\mathcal{A}_1' + \mathcal{A}_2' + \dots + \mathcal{A}_p'$ entsteht. \mathcal{A}_i' hat m_i' als Grundlinie und

$$Q_i' = k_{i-1}'^{-1} k_{i-2}'^{-1} \dots k_1'^{-1} Q_1'$$

als Spitze. Ω' wird begrenzt von $l_i', k_i' l_i'$ und dem Teilpolygon $D_i^{(-2)'} D_i^{(-1)'} D_i^{(1)'} D_i^{(2)'}$ von q_i' ($i=1, 2, \dots, p$). Die Randstücke von Ω' sind paarweise bei a_i', b_i' und den aus diesen zusammengesetzten Operationen k_i' äquivalent.

Ω' ist ein konvexer Bereich. Auf keiner der Seiten von Ω' gibt es ein Paar bei F äquivalenter Punkte, abgesehen von den Endpunkten der auf den q_i' liegenden Seiten; das folgt daraus, dass Φ durch die Gesamtheit der Bereiche $F\Omega'$ einfach und lückenlos überdeckt wird. (Auf die Tatsache dass den a_i' und b_i' Kurventypen ohne Doppelpunkte entsprechen, wurde schon am Schluss von § 9 im Anschluss an Dehn aufmerksam gemacht.)

Eine Umlaufung von Ω und die entsprechende Umlaufung von Ω' ergeben in Φ offenbar den gleichen oder entgegengesetzten Umlaufssinn, je nachdem I von erster oder zweiter Art ist.

Nun sei s irgend eine gerichtete Seite von Ω und $f s$ die damit äquivalente (f ist also eines der Elemente $a_i^{\pm 1}, b_i^{\pm 1}$ oder $k_i^{\pm 1}$). s' sei die entsprechende Seite von Ω' unter Berücksichtigung der richtigen Durchlaufung. Dann ist $f' s'$ die damit äquivalente. Nun sei t eine beliebig gewählte topologische Abbildung von s auf s' . Dann ist $f' t f^{-1}$ eine topologische Abbildung von $f s$ auf $f' s'$. Lässt man s je einen Repräsentanten jedes Paares äquivalenter Seiten von Ω durchlaufen, so kommt man zu einer topologischen Abbildung des Randes von Ω auf den Rand von Ω' . Dann sei t eine topologische Abbildung von Ω auf Ω' , die auf dem Rande von Ω mit der schon definierten übereinstimmt. t genügt dann auf dem Rande von Ω der Funktionalgleichung

$$(22) \quad t f x = f' t x$$

für die in Frage kommenden Elemente f , die die Randseiten äquivalent auf einander beziehen. Überträgt man nun diese Abbildung $t\Omega$ auf alle mit Ω äquivalenten Bereiche $f\Omega$, nunmehr für beliebiges f in F , mit Hülfe der Gleichung (22), so erhält man eine topologische Abbildung t von Φ auf sich, die (22) genügt, also eine T -Funktion, die I induziert. Damit ist unser Ziel erreicht.

Wir wollen für spätere Zwecke diese T -Funktion noch auf besondere Art wählen. Die Geraden des Netzes N , also die Bilder der kanonischen Kurven A_i

und B_i , ergeben in Ω $4p$ geradlinige Querschnitte, von denen je vier von jedem der Punkte Q_i nach benachbarten auf q_i und q_{i-1} gelegenen Seiten von Ω führen. Vgl. Fig. 13. Keine zwei dieser Querschnitte treffen einander ausserhalb der Punkte Q_i . Sie zerlegen Ω in $4p+1$ konvexe Polygone. Ihre Bilder bei t sind Jordanbogenquerschnitte in Ω' . Nun kann man die Abbildung t unter Berücksichtigung folgender Wünsche wählen:

1. Bei der früheren Auswahl des Punktes Q_1' in \mathcal{A}' sorgt man dafür, dass Q_1' nicht auf einer Geraden des Netzes N liegt.
2. Bei der Auswahl der topologischen Abbildung der einzelnen Randseiten von Ω auf die entsprechenden von Ω' sorgt man dafür, dass die Bilder der von den Q_i verschiedenen Endpunkte der Querschnitte von Ω nicht auf Geraden des Netzes N fallen. Das ist möglich, denn die Achsen der a_i' und b_i' liegen nicht auf Geraden des Netzes N . Diese Geraden sind nämlich Achsen von Elementen, denen Kurventypen mit notwendigen Doppelpunkten entsprechen.
3. Die Ausdehnung der topologischen Abbildung auf das Innere von Ω nimmt man folgendermassen vor: Jeder der Querschnitte von Ω wird zunächst irgendwie topologisch auf diejenige geradlinige Strecke abgebildet, die die bereits festgelegten Bildpunkte seiner Endpunkte verbindet. Das ist möglich, weil Ω' konvex ist. Nun ist der Rand jedes der konvexen Teilpolygone von Ω auf den Rand des entsprechenden, ebenfalls konvexen Teilpolygons von Ω' topologisch abgebildet. Diese Abbildung dehnt man irgendwie topologisch auf das Innere der Teilpolygone aus.

Bei der durch diese T -Funktion festgelegten, zu I gehörigen topologischen Abbildung von φ auf sich sind die Bildkurven A_i' und B_i' der kanonischen Kurven A_i und B_i aus einer endlichen Anzahl von geodätischen Linienstücken zusammengesetzt, deren Endpunkte ausserhalb der A_i und B_i liegen. Die $2p$ Kurven A_i', B_i' haben daher mit den $2p$ Kurven A_i, B_i nur endlich viele Schnittpunkte.

24. **T -Funktionen mit vorgeschriebener Funktionalgleichung und vorgeschriebenen Werten in endlich vielen Punkten von Φ .**

In diesem Paragraphen soll der Satz 11 des vorigen Paragraphen folgendermassen erweitert werden:

Satz 12: *Wenn ein Automorphismus von F und eine endliche Anzahl unter einander nicht äquivalenter Punkte von Φ beliebig vorgegeben sind, so gibt es T -Funktionen, die den gegebenen Automorphismus induzieren und in den gegebenen Punkten beliebig vorgeschriebene (unter einander nicht äquivalente) Werte haben.*

Hilfssatz 1: Es gibt eine topologische Abbildung τ von φ auf sich von der Klasse der Identität, die die n vorgegebenen (verschiedenen) Punkte d_1, d_2, \dots, d_n in die n vorgegebenen (verschiedenen) Punkte d'_1, d'_2, \dots, d'_n überführt.

Das ist unmittelbar zu sehen: Man verbinde d_i mit d'_i durch einen geodätisch-polygonalen Weg c_i der Art, dass keine zwei der c_i einen Punkt gemeinsam haben, und schliesse c_i in ein geschlossenes geodätisches Polygon ein, dessen Inneres δ_i heisse, so dass keine zwei der Polygone einander treffen. Dann unterwirft man jedes δ_i einer topologischen Abbildung τ auf sich, die d_i in d'_i überführt und auf dem Rande von δ_i die Identität ist. Ausserhalb der δ_i ist τ die Identität. Dann gibt es eine über τ liegende T -Funktion, die den identischen Automorphismus I_0 induziert, nämlich diejenige, die einen Punkt von \mathcal{O} , der über einem ausserhalb aller δ_i liegenden Punkt von φ liegt, in sich überführt.

Hilfssatz 2: Es gibt eine I_0 induzierende T -Funktion, die einen beliebigen Punkt D des Fundamentalbereichs B in $a_1 D$ überführt.

Wir können annehmen, dass D der Nullpunkt O ist, da wir sonst nur mit einer I_0 induzierenden T -Funktion zu transformieren brauchen, die D in O überführt (Hilfssatz 1). Die Seiten von B seien wieder linksläufig numeriert, von dem Schnittpunkt von B_1 und A_p anfangend. P, Q, R seien drei innere Punkte der dritten Seite von B , in dieser Reihenfolge bei linksläufigem Umlauf. O wird mit Q und mit dem auf der ersten Seite von B gelegenen Punkte $a_1 Q$ durch eine gerade Strecke verbunden. P wird mit $a_1 P$ und R mit $a_1 R$ so durch einfache Polygonquerschnitte in B verbunden, dass diese den Weg $Q O (a_1 Q)$ zwischen sich enthalten. Diese beiden Querschnitte werden auf die Strecken $v=1, 0 \leq u \leq 1$ und $v=-1, 0 \leq u \leq 1$ einer u - v -Ebene topologisch abgebildet, ferner $P Q$ auf $u=0, 1 \geq v \geq 0$, $Q R$ auf $u=0, 0 \geq v \geq -1$; durch die Festsetzung: wenn x auf (u, v) abgebildet ist, soll $a_1 x$ auf $(u+1, v)$ abgebildet werden, ist dann die Abbildung des Stückes $(a_1 P) (a_1 Q) (a_1 R)$ der ersten Seite von B auf $u=1, 1 \geq v \geq -1$ festgelegt. Endlich wird $Q O (a_1 Q)$ auf $v=0, 0 \leq u \leq 1$ abgebildet und die Abbildung irgendwie zu einer topologischen Abbildung γ des Teilstücks $P R (a_1 R) (a_1 P)$ von B auf das Rechteck $0 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1$ ergänzt. Durch die obengenannte Festsetzung wird γ zu einer Abbildung des ganzen aus diesem Teilstück durch die Gruppe $\{a_1\}$ hervorgehenden Teiles ω von \mathcal{O} auf den ganzen Parallelstreifen $-1 \leq v \leq 1$ ergänzt. Dieser Parallelstreifen wird nun der topologischen Abbildung

$$u' = u + 1 - |v|, \quad v' = v$$

auf sich unterworfen, und diese vermitteltst γ zu einer Abbildung t von ω auf sich zurückübertragen. In den mit ω äquivalenten Bereichen, von denen ja keine zwei einen Punkt gemeinsam haben, wird t durch

$$t f x = f t x$$

und ausserhalb dieser Bereiche als die identische Abbildung erklärt. Dann ist t eine T -Funktion, die I_0 induziert und O in $a_1 O$ überführt.

Aus der Vertauschbarkeit von t mit jedem Element f aus F folgt, dass t den Punkt $f O$ in $f a_1 O$ überführt.

Hilfssatz 3: Wenn in Φ_n unter einander nicht äquivalente Punkte D_1, D_2, \dots, D_n und n weitere Punkte D_1', D_2', \dots, D_n' so gegeben sind, dass D_1 mit D_1', \dots, D_n mit D_n' äquivalent ist, so gibt es eine I_0 induzierende T -Funktion, die D_1 in D_1', \dots, D_n in D_n' überführt.

Man stelle sich zunächst auf Grund von Hilfssatz 2 $2pn$ T -Funktionen $t_{i,h}$ her, die sämtlich I_0 induzieren und folgende Eigenschaften haben: h sei das Zeichen für eine beliebige Erzeugende von F . D_i^0 sei der in B gelegene, mit D_i äquivalente Punkt. Dann soll $t_{i,h}$ den Punkt D_i^0 in $h D_i^0$ und alle $D_j, j \neq i$, in sich überführen. Dazu ist es nur nötig, bei der Konstruktion von $t_{i,h}$ dasjenige Teilstück von B , in dem $t_{i,h}$ nicht die identische Abbildung ist (das also dem beim Beweis von Hilfssatz 2 mit $PR(a_1 R)(a_1 P)$ bezeichneten Teilstück entspricht) so zu wählen, dass es keinen der Punkte $D_j^0, j \neq i$, enthält, was offenbar stets möglich ist. Dann führt $t_{i,h_1} \cdot t_{i,h_2}$ den Punkt D_i^0 in $h_1 h_2 D_i^0$ über. Man kann also eine Kombination t_i aus $t_{i,a_1}^{\pm 1}, \dots, t_{i,b_p}^{\pm 1}$ bilden, die D_i^0 in D_i überführt, und eine Kombination t_i' , die D_i^0 in D_i' überführt. Endlich sei $t^{(i)} = t_i' t_i^{-1}$ gesetzt.

Dann gilt:

- 1) $t^{(i)}$ ist als »Produkt« von T -Funktionen wieder eine T -Funktion.
- 2) $t^{(i)}$ induziert I_0 , da alle »Faktoren« dies tun.
- 3) $t^{(i)}$ führt D_i in D_i' über.
- 4) $t^{(i)}$ führt alle $D_j, j \neq i$, in sich über, also auch alle mit D_j äquivalenten Punkte.

Dann ist

$$t^{(1)} t^{(2)} t^{(3)} \dots t^{(n)}$$

die verlangte Funktion.

Hilfssatz 4: Wenn in Φ n unter einander nicht äquivalente Punkte D_1, \dots, D_n und n weitere unter einander nicht äquivalente Punkte D'_1, \dots, D'_n gegeben sind, so gibt es eine I_0 induzierende T -Funktion, die D_1 in D'_1, \dots, D_n in D'_n überführt.

Die gegebenen Punkte mögen über den Punkten $d_1, \dots, d_n, d'_1, \dots, d'_n$ von φ liegen. Dann sei τ eine zur Klasse der Identität gehörige topologische Abbildung von φ auf sich, die d_1 in d'_1, \dots, d_n in d'_n überführt, und t eine über τ liegende und I_0 induzierende T -Funktion (Hilfssatz 1). Dann ist $t D_1 = D''_1, \dots, t D_n = D''_n$, wo D''_1 mit D'_1, \dots, D''_n mit D'_n äquivalent ist. Ferner sei t_1 eine I_0 induzierende T -Funktion, die D''_1 in D'_1, \dots, D''_n in D'_n überführt (Hilfssatz 3). Dann ist $t_1 t$ die gesuchte Funktion.

Nunmehr ergibt sich unmittelbar der an die Spitze dieses Paragraphen gestellte Satz 12:

I sei ein beliebiger Automorphismus von F , ferner seien D_1, \dots, D_n und D'_1, \dots, D'_n zwei beliebig vorgegebene Systeme von je n unter einander nicht äquivalenten Punkten von Φ . t sei eine T -Funktion, die I induziert (§ 23). t_1 sei eine T -Funktion, die I_0 induziert und die n unter einander nicht äquivalenten Punkte $t D_1, t D_2, \dots, t D_n$ in D'_1, D'_2, \dots, D'_n überführt (Hilfssatz 4). Dann führt die T -Funktion $t_1 t$ D_1 in D'_1, \dots, D_n in D'_n über. Und $t_1 t$ induziert den Automorphismus $I \cdot I_0 = I$.

25. T -Funktionen, die den Nullpunkt festlassen.

Es sei I ein beliebiger Automorphismus von F . Dann lässt sich nach Satz 12 eine T -Funktion t finden, die I induziert und dabei die Bedingung $t(o) = o$ erfüllt. t entwirft von dem Netze n ein topologisches Bild $t n = n'$ in Φ . Bezeichnen wir wie früher auf n die Netzseite, die vom Nullpunkt O nach $a_1 O$ führt, mit a_1 und einer Pfeilspitze, und analog für die übrigen Erzeugenden, so ist $t a_1$ ein Jordanbogen, der von O nach $a'_1 O$ führt und mit a'_1 bezeichnet sei, und analog. Überträgt man diese Bezeichnungen auf alle äquivalenten Netzseiten, so stellen die beiden einander einbeschriebenen, topologisch regulären Netze n und n' den Automorphismus I in derselben anschaulichen Weise dar, wie dies im § 9 durch die dort mit n und n' bezeichneten Netze geschah. Der Unterschied ist, dass die Netzseiten von n' jetzt im allgemeinen nicht mehr geradlinig sind, dafür aber sich ausserhalb der Netzeckpunkte nicht mehr überschneiden.

Der Punkt von φ , über dem der Nullpunkt O liegt, wurde in § 1 mit q

bezeichnet. Sei w ein Weg auf φ , der von q ausgeht und nach q zurückkehrt. Das Kurvenstück W in \mathcal{D} , das über w liegt und von O ausgeht, möge in fO endigen. So ist jeder geschlossenen Kurve w auf φ mit dem Anfangspunkt q eindeutig ein Element f aus F , und zwei miteinander unter Festhaltung von q homotopen Kurven dasselbe Element von F zugeordnet.

Die T -Funktionen mit Fixpunkt O bilden eine Gruppe. Ihr entspricht eindeutig die Gruppe der topologischen Abbildungen von φ mit Fixpunkt q . Das Bild der von q ausgehenden Flächenkurve a_1 bei der Abbildung $\tau\varphi$, über der $t\mathcal{D}$ liegt, ist die von q ausgehende Flächenkurve $\tau a_1 = a_1'$, über der die Netzseite a_1' von n' liegt und der also das Element a_1' zugeordnet ist. Es können also die neuen Erzeugenden an den Bildern der kanonischen Schnittkurven unmittelbar abgelesen werden.

Solange man keinen Punkt von φ auszeichnet, sind den geschlossenen Kurven auf φ die Elementklassen von F und den topologischen Abbildungen von φ die Automorphismenfamilien von F zugeordnet. Nach Wahl eines beliebigen Punktes q von φ sind den geschlossenen Kurven auf φ mit Anfangspunkt q die einzelnen Elemente von F und den topologischen Abbildungen von φ mit Fixpunkt q die einzelnen Automorphismen von F zugeordnet. Und dabei kommen alle Automorphismen vor.

26. Eine Normalform für die Darstellung der Automorphismen von F .

Die im vorigen Paragraphen benutzten Netze n und n' können dazu verwandt werden, um Darstellungen des Automorphismus I abzulesen. Irgend ein Netzseitenweg auf n , der von O nach $a_1'O$ führt, ergibt einen Ausdruck in den a_1, \dots, b_p , der das Element a_1' darstellt, und analog für die übrigen Erzeugenden. Es soll nun gezeigt werden, dass jeder Automorphismus in der besonders einfachen Form dargestellt werden kann, die für das Kriterium des § 8 benutzt wurde, dass es also eine solche Darstellung

$$a_i' = \alpha_i(a_1, \dots, b_p), \quad b_i' = \beta_i(a_1, \dots, b_p) \tag{23}$$

gibt, die einen Automorphismus der freien Gruppe $\{a_1, \dots, b_p\}$ darstellt und bei der $R(\alpha_1, \dots, \beta_p)$ eine Transformierte von $R(a_1, \dots, b_p)^{\pm 1}$ ist.

Sei u_1 ein Punkt von \mathcal{D} , der weder auf n noch auf n' liegt, und u_1, u_2, \dots die Gesamtheit der mit u_1 äquivalenten Punkte. Jedem stetigen gerichteten Kurvenstück in \mathcal{D} , das alle Punkte u_i vermeidet, entspricht in Bezug auf jeden der

Punkte u_i eine bestimmte Arcusänderung. Zwei Netzwege auf n (oder n') mit gemeinsamem Anfangs- und Endpunkt, die in *allen* u_i die gleiche Arcusänderung ergeben, können sich nur durch solche Teilstücke unterscheiden, die unmittelbar hintereinander im entgegengesetzten Sinn durchlaufen werden, da ja jede Netzmasche ein u_i enthält. Netzwege ohne solche Teilstücke mögen »einfach« heissen. Jeder Netzseite von n' entspricht dann eindeutig ein einfacher Netzseitenzug von n , der dieselben beiden Netz Eckpunkte verbindet und in allen u_i dieselbe Arcusänderung hervorruft und umgekehrt. (Ersetzt man jeden Teilbogen der Netzseite von n' , der einen Querschnitt einer Masche M von n bildet, durch denjenigen Teilbogen des Randes von M , der mit dem betrachteten Querschnitt zusammen den zu M gehörigen Punkt u_i nicht umschliesst, so wird man zu einem zusammenhängenden Weg auf n geführt, der sich eindeutig auf den gesuchten einfachen Netzseitenzug auf n reduzieren lässt.) Dadurch möge man zu den Ausdrücken (23) für die a_1', \dots, b_p' gelangen. Bei Vertauschung von n und n' möge sich

$$a_i = \bar{\alpha}_i(a_1', \dots, b_p'), \quad b_i = \bar{\beta}_i(a_1', \dots, b_p')$$

ergeben. Dann muss offenbar *identisch* in den a_i, b_i

$$\bar{\alpha}_i(a_1, \dots, \beta_p) \equiv a_i$$

gelten und analog. Durchläuft man von O aus die Maschenberandung

$$a_1' b_1' a_1'^{-1} b_1'^{-1} \dots a_p' b_p' a_p'^{-1} b_p'^{-1}$$

von n' , so erhält man in Bezug auf den im Inneren dieser Masche liegenden Punkt u_μ die Arcusänderung $+2\pi$ oder -2π , je nachdem t die Indikatrix erhält oder umkehrt (dabei ist Rechtsdrehung als positive Arcusänderung gerechnet) und in allen übrigen u_i die Arcusänderung 0. Also ergibt auch die Durchlaufung des Netzseitenweges

$$\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots \alpha_p \beta_p \alpha_p^{-1} \beta_p^{-1}$$

von n in u_μ die Arcusänderung $\pm 2\pi$ und in allen übrigen u_i die Arcusänderung 0. Dieser Netzseitenweg auf n besteht dann aus der Berandung derjenigen Masche von n , die u_μ enthält, und eventuell offenen Netzseitenzügen von n die an diese angesetzt sind und unmittelbar hinter einander im entgegengesetzten Sinn durchlaufen werden. Dann ist aber

$$R(a_1, \dots, \beta_p) \equiv h(a_1, \dots, b_p) R(a_1, \dots, b_p)^{\pm 1} h^{-1},$$

identisch in den a_i, b_i , womit die frühere Normalform erreicht ist.

Mann kann sich diese Überlegung auf der Fläche φ selbst folgendermassen veranschaulichen: u sei der Punkt von φ , über dem die u_i liegen. Die in u punktierte Fläche φ heisse φ^* . $R(a_1, \dots, b_p)$ ist dann auf φ^* eine auf die Punktierung zusammenziehbare Kurve, also nicht mehr homotop o . Die Fundamentalgruppe von φ^* ist die freie Gruppe mit den Erzeugenden a_1, \dots, b_p . Dann entsprechen die Kurven a'_1, \dots, b'_p dem Primitivsystem α_1, \dots, β_p dieser Gruppe, und das Bild von R wird wieder eine einfache auf die Punktierung zusammenziehbare Kurve. Wählt man noch insbesondere t so, dass $\tau\varphi$ in u einen Fixpunkt hat, was man nach Satz 12 kann, so liegt t auch über einer topologischen Abbildung von φ^* .

27. ***S*-Funktionen. Stetiger Zusammenhang zweier zu derselben Automorphismenfamilie gehörigen stetigen Abbildungen der Fläche.**

Unter einer »*S*-Funktion«, genauer: einer »zum Automorphismus I gehörigen *S*-Funktion« $s(x)$ wird eine für $|x| < 1$ definierte eindeutige stetige Funktion vom Betrage < 1 verstanden, die der Funktionalgleichung

$$sfx = f_I s x \tag{24}$$

genügt. Die *S*-Funktionen enthalten also die *T*-Funktionen, sind aber im allgemeinen nicht, wie diese, eindeutig umkehrbar, sodass die *S*-Funktionen keine Gruppe bilden.

Eine *S*-Funktion $s\Phi$ liegt über einer eindeutigen stetigen Abbildung $\sigma\varphi$ von φ auf sich. Die in dieser Weise entstehenden eindeutigen stetigen Abbildungen von φ auf sich mögen als σ -Abbildungen bezeichnet sein. Über derselben Abbildung $\sigma\varphi$ liegt jede »mit s verwandte *S*-Funktion« $h s\Phi$, wo h ein beliebiges Element aus F ist. Diese induziert den Automorphismus $I_{h^{-1}}$. Die in § 22 bewirkte Klasseneinteilung der topologischen Abbildungen $\tau\varphi$ kann also auf die σ -Abbildungen erweitert werden:

Zwei σ -Abbildungen von φ werden zu derselben *Abbildungsklasse* gerechnet, wenn ihnen dieselbe *Automorphismenfamilie* zugeordnet ist.

Es soll nun gezeigt werden, dass die Menge der eine *Abbildungsklasse* ausmachenden σ -Abbildungen von φ stetig zusammenhängt, dass also diese Klasseneinteilung sich unter den BROUWERSCHEN Begriff der *Abbildungsklasse* subsumiert.¹¹

¹¹ L. E. J. BROUWER: Sur la notion de »Classe« de transformations d'une multiplicité, Proceedings Vth Intern. Congr. of Math. Cambridge 1913, und: Énumération des classes de représentation 36—26404. *Acta mathematica*. 50. Imprimé le 18 septembre 1927.

Es seien also σ_0 und σ_1 zwei σ -Abbildungen von φ , s_0 und s_1 zwei beziehungsweise über σ_0 und σ_1 liegende S -Funktionen, die denselben Automorphismus I induzieren. x sei ein beliebiger Punkt von Φ . Dann sei $s_t(x)$ der Punkt, der die nichteuklidische Verbindungsstrecke von $s_0(x)$ und $s_1(x)$ im nichteuklidischen Abstandsverhältnis $t:(1-t)$ teilt ($0 \leq t \leq 1$). Die so für $|x| < 1$ definierte Funktion $s_t(x)$ ist eindeutig und stetig und hat einen Betrag < 1 ; sie genügt auch der Funktionalgleichung

$$s_t f x = f_I s_t x.$$

Denn um $s_t f x$ zu erhalten, muss man die von $s_0 f x$ nach $s_1 f x$ führende Strecke zeichnen und im Verhältnis $t:(1-t)$ teilen. Diese Strecke ist aber wegen $s_0 f x = f_I s_0 x$ und $s_1 f x = f_I s_1 x$ das Bild der von $s_0 x$ nach $s_1 x$ führenden Strecke bei f_I , woraus die Behauptung folgt. s_t ist also für jedes $0 \leq t \leq 1$ eine zu I gehörige S -Funktion und zwar für $t=0$ bzw. $t=1$ die gegebene Funktion s_0 bzw. s_1 . Die einparametrische Schar σ_t , $0 \leq t \leq 1$, von σ -Abbildungen von φ , über der s_t liegt, stellt den geforderten stetigen Zusammenhang von σ_0 und σ_1 her.

Insbesondere kann man bei gegebenem σ_0 die σ -Abbildung σ_1 als eine zur Klasse von σ_0 gehörige *topologische* Abbildung, also s_1 als eine zu I gehörige T -Funktion wählen. Jede σ -Abbildung kann also stetig in eine topologische Abbildung übergeführt werden. Aus der Tatsache, dass der *Brouwersche Abbildungsgrad*¹² bei stetiger Änderung der Abbildung ungeändert bleibt, folgt dann, dass der Abbildungsgrad einer σ -Abbildung von φ gleich $+1$ oder -1 ist, je nachdem die zugehörige Automorphismenfamilie aus Automorphismen erster oder zweiter Art besteht.

28. Stetiger Anschluss der Randabbildung.

Es sei I ein beliebiger Automorphismus von F , $s \Phi$ eine zu I gehörige S -Funktion und $g E$ die zu I gehörige Randabbildung (§ 10). Dann wird $s \Phi$ durch $g E$ abgeschlossen, d. h. die beiden Funktionen s und g zusammen bestimmen eine stetige Abbildung der abgeschlossenen Kreisscheibe $\Phi + E$ auf sich.

Zum Beweise dieser Behauptung ist Folgendes nachzuweisen: Es sei P ein

tions d'une surface sur une autre surface, Comptes rendus, t. 171 p. 89 (1920). Diese letztere Arbeit umfasst den obigen Satz. — Selbstverständlich sind zwei zu verschiedenen Automorphismenfamilien gehörige σ -Abbildungen von φ nicht stetig in einander überführbar.

¹² L. E. J. BROUWER: Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, § 1; Math. Annalen Bd. 71, S. 97 ff.

beliebiger Punkt von E und P_1, P_2, P_3, \dots eine gegen P konvergierende, im übrigen beliebig gewählte Folge von Punkten von Φ ; dann konvergiert die Punktfolge sP_1, sP_2, sP_3, \dots gegen gP . \bar{P}_n sei der im zentralen Fundamentalbereich B von F gelegene, mit P_n äquivalente Punkt, und

$$P_n = f_n \bar{P}_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Da der nichteuklidische Abstand von O und \bar{P}_n beschränkt bleibt, ist auch der Abstand von $f_n O$ und $f_n \bar{P}_n = P_n$ beschränkt, also $f_n O \rightarrow P$ für $n \rightarrow \infty$. Die Elemente f_n bilden also eine zu P gehörige Fundamentalfolge (§ 7, j). Dann bilden die Elemente $f_n I$ eine zu gP gehörige Fundamentalfolge (§ 16), also $f_n I O \rightarrow gP$ für $n \rightarrow \infty$. Nun gehören alle Punkte $s\bar{P}_n$ dem Bereich sB an, haben also einen beschränkt bleibenden Abstand von O ; also folgt $f_n I s\bar{P}_n \rightarrow gP$ für $n \rightarrow \infty$. Es ist aber nach der Funktionalgleichung für s

$$f_n I s\bar{P}_n = s f_n \bar{P}_n = s P_n,$$

also $sP_n \rightarrow gP$ für $n \rightarrow \infty$, w. z. b. w.

In dem besonderen Falle, wo I der identische Automorphismus I_0 und gE also die identische Randabbildung ist, ist es leicht, den stetigen Anschluss von gE an $s\Phi$ direkt zu erkennen, ohne den Begriff der Fundamentalfolge zu benutzen. In § 2 wurde die Funktion $\delta(x_1, x_2)$ definiert; da sie gleich Sin^2 der halben nicht-euklidischen Entfernung von x_1 und x_2 ist, hat man

$$\delta(f(x_1), f(x_2)) = \delta(x_1, x_2)$$

für jedes f aus F . Nun ist die Funktion s in dem jetzt betrachteten Fall mit jedem f vertauschbar. Also ist

$$\mathcal{A}(x) = \delta(x, s(x)) = \delta(f(x), f(s(x))) = \delta(f(x), s(f(x))) = \mathcal{A}(f(x))$$

für jedes f aus F . $\mathcal{A}(x)$ hat also in äquivalenten Punkten denselben Wert und ist daher in Φ beschränkt, da es in B beschränkt ist. Aus

$$\mathcal{A}(x) = \frac{|s(x) - x|^2}{(1 - |x|^2)(1 - |s(x)|^2)} < \text{const.}$$

folgt $s(x) \rightarrow x$ für $|x| \rightarrow 1$, also stetiger Anschluss der identischen Abbildung auf E .

Der Einheitlichkeit halber wird nun gE oft mit sE bezeichnet, sodass von $s(\mathcal{O} + E)$ gesprochen werden kann. Man achte aber darauf, dass sE nicht von der besonderen Funktion $s\mathcal{O}$ im einzelnen, sondern nur von dem durch s induzierten Automorphismus abhängt. Jeder Klasse von σ -Abbildungen von \mathcal{O} entspricht also eine Familie verwandter Randabbildungen, und die Methode dieser Arbeit besteht wesentlich darin, solche Eigenschaften der Abbildungen, die der Klasse zukommen, aus der zugehörigen Randabbildungsfamilie abzulesen. An die Stelle der Untersuchung stetiger Abbildungen in zwei Dimensionen wird also die Untersuchung topologischer Abbildungen in einer Dimension gesetzt.

Man kann $s(x)$ zu einer auf der ganzen komplexen x -Kugel K definierten Funktion erweitern, indem man auch das Äussere \mathcal{P} von E als universelle Überlagerungsfläche von φ auffasst. Wir setzen dazu fest: Jedes Punktepaar x und $\frac{1}{\bar{x}}$ (\bar{x} ist der konjugiert komplexe Wert zu x) soll über dem gleichen Punkt von φ liegen. $s(x)$ wird dann in \mathcal{P} ebenfalls durch Spiegelung an E definiert, sodass allgemein gilt

$$s(x) = \frac{1}{s\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)}.$$

Die stetige Abbildung sK von K auf sich hängt stetig mit einer topologischen Abbildung von K auf sich zusammen, hat also wie diese den Grad $+1$ oder -1 . Daraus folgt, dass bei der Abbildung sK jeder Punkt von K als Bildpunkt auftritt.

29. Reguläre und singuläre Punkte bezüglich einer Untergruppe von F .

Definition: Es sei F_1 eine beliebige Untergruppe von F . Ein Punkt P der komplexen Kugel K heisse »bezüglich F_1 regulär«, wenn es eine Umgebung von P gibt, die kein Paar bei F_1 äquivalenter Punkte enthält, andernfalls »bezüglich F_1 singulär«.

Alle Punkte von \mathcal{O} und \mathcal{P} sind bezüglich F_1 regulär, da sie bezüglich F regulär sind. Die bezüglich F_1 singulären Punkte sind also auf E zu suchen. Jeder reguläre Punkt besitzt eine nur aus regulären Punkten bestehende Umgebung. Jeder Grundpunkt eines Elementes von F_1 ist offenbar singulär bezgl. F_1 , und das Gleiche ist für jeden Häufungspunkt solcher Punkte der Fall. Sei m die Menge der Grundpunkte der Elemente von F_1 und M die durch Hinzufügung

der Häufungspunkte von m entstehende »abgeschlossene Hülle von m «. Es soll gezeigt werden, dass die Menge der bezüglich F_1 singulären Punkte mit der Menge M identisch ist.

Es sei P ein bezüglich F_1 singulärer Punkt und i ein P enthaltendes Segment von E . Die zu beweisende Behauptung besagt, dass i einen Grundpunkt von F_1 enthält.

Hilfssatz: Es seien O, P, Q, R vier Punkte in dieser zyklischen Reihenfolge auf E . α und β seien zwei hyperbolische Substitutionen mit gleicher Verschiebungslänge und negativem Grundpunkt in O . Q sei der positive Grundpunkt von α , R derjenige von β . Dann ist der Verschiebungsbogen $P-\alpha P$ auf E kleiner als

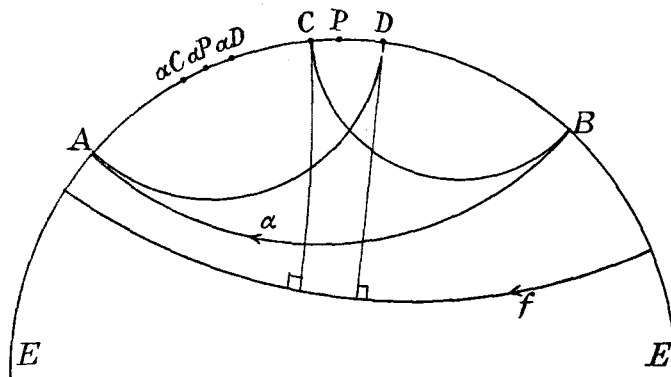


Fig. 15.

der Verschiebungsbogen $P-\beta P$. Denn es sei γ eine hyperbolische Substitution mit O als positivem und P als negativem Grundpunkt und solcher Verschiebungslänge, dass $\gamma Q=R$. Dann ist $\beta=\gamma\alpha\gamma^{-1}$ und $\beta P=\gamma\alpha\gamma^{-1}P=\gamma\alpha P=\gamma(\alpha P)$; der Bogen $P-\alpha P$ wird durch γ zu $P-\beta P$ gedehnt. Durch zweimalige Anwendung erweitert man diesen Hilfssatz zu dem Fall, dass der negative Grundpunkt von β nicht in O sondern in einem Punkt O_1 liegt, der dem von P und Q freien Bogen OR von E angehört.

Nun seien A und B die Endpunkte des obigen Segments i (Fig. 15). α sei eine hyperbolische Substitution mit A als positivem und B als negativem Grundpunkt, deren Verschiebungslänge kleiner als die kleinste in der Gruppe F vorkommende Verschiebungslänge ist. CPD sei ein P enthaltendes und so klein gewähltes Intervall, dass es ausserhalb seines Bildes bei α liegt. (C trennt also P und αD .) C wird mit B und D mit A durch zu E senkrechte Kreise verbunden. Dadurch wird eine Umgebung u von P bestimmt, nämlich das in der Figur

gezeichnete Kreisbogendreieck und sein Spiegelbild in E . Nun sei f ein solches Element von F_1 , dessen Grundpunkte beide nicht dem Intervall $AB = i$ angehören. Dann werden die Punkte von i nach dem Hilfssatz durch f stärker verschoben, als durch α . Fällt man von C und D die nichteuklidischen Lote auf die Achse von f , so enthalten diese u zwischen sich, $f u$ hat also mit u keinen Punkt gemeinsam. Da nun P bezüglich F_1 singulär sein soll, so gibt es ein solches Element f_1 in F_1 , dass $f_1 u$ mit u Punkte gemeinsam hat, und mindestens einer der Grundpunkte von f_1 muss also in i liegen, w. z. b. w.

Wenn die Grundpunkte von F_1 überall dicht auf E liegen, so ist M mit E identisch. So ist für F selbst ganz E singulär. Angenommen nun, die Grundpunkte von F_1 seien nicht überall dicht auf E . Dann besteht die Menge $E - M$ der regulären Punkte auf E aus endlich oder abzählbar vielen Intervallen, deren Gesamtheit sich bei Ausübung irgend eines Elementes von F_1 reproduziert, da die Menge m der Grundpunkte von F_1 und also auch M sich dabei reproduziert. Ganz analog wie im § 14 folgt nun: Wenn eines der $E - M$ bildenden Intervalle ein Paar bei F_1 äquivalenter Punkte enthält, so wird es von der Achse eines Elementes von F_1 begrenzt, und es enthält dann nur solche Paare von bei F_1 äquivalenten Punkten, die sich bei einer Potenz dieses Elementes entsprechen. Das Intervall möge dann ein »bezüglich F_1 periodisches Intervall« heissen. »Bezüglich F_1 aperiodische Intervalle« enthalten kein Paar bei F_1 äquivalenter Punkte, und ihre Endpunkte sind nicht Grundpunkte von F_1 .

30. Abbildungen der zu Untergruppen von F gehörigen Überlagerungsflächen von φ .

Es sei F_1 eine Untergruppe von F . Fasst man jedes vollständige System von bei F_1 äquivalenten Punkten von \mathcal{O} als einen Punkt auf, so gelangt man zu einer Überlagerungsfläche von φ , die als die »zu F_1 gehörige Überlagerungsfläche von φ « oder als » $\mathcal{O} \bmod F_1$ « bezeichnet sei. \mathcal{O} ist die universelle Überlagerungsfläche von $\mathcal{O} \bmod F_1$, und F_1 ist die zugehörige Gruppe der Decktransformationen von \mathcal{O} über $\mathcal{O} \bmod F_1$.¹³

Nun sei s eine S -Funktion und I der durch s induzierte Automorphismus

¹³ $\mathcal{O} \bmod F_1$ ist im Allgemeinen keine »reguläre« Überlagerungsfläche von φ (s. z. B. WEYL, Die Idee der Riemannschen Fläche, S. 50), so dass nicht von einer Gruppe von Decktransformationen von $\mathcal{O} \bmod F_1$ über φ gesprochen werden kann.

von F . Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass s über einer eindeutigen und stetigen Abbildung von $\Phi \bmod F_1$ auf sich liegt, ist, dass zwei bei F_1 äquivalente Punkte durch s wieder in zwei bei F_1 äquivalente Punkte übergehen, also, zufolge (24), dass F_1 durch I isomorph in sich transformiert wird.

Diese Bedingung ist insbesondere stets erfüllt, wenn man als F_1 eine aus Fixelementen bei I bestehende Untergruppe von F nimmt. Es sei H_1 eine solche Gruppe und $\Phi \bmod H_1 = \Phi_1$ gesetzt. Angenommen, h_1, h_2, h_3, \dots sei ein (endliches oder unendliches) System von Fixelementen bei I , das H_1 erzeugt. Nun sei s_1 eine I induzierende S -Funktion, die den Nullpunkt O festlässt (§ 24). Ein System von Kurvenstücken in Φ , die in O anfangen und beziehungsweise in $h_1(O), h_2(O), \dots$ endigen, liegt über einem Fundamentalsystem geschlossener Kurven auf Φ_1 . Diese gehen wegen $s_1 \rightleftharpoons h_i, i=1, 2, \dots$, bei $s_1 \Phi_1$ in Bildkurven über, die mit ihren Originalen homotop sind, und dasselbe ist daher für alle geschlossenen Kurven auf Φ_1 der Fall. Da nun nach § 27 $s \Phi$ und $s_1 \Phi$ und daher auch $s \Phi_1$ und $s_1 \Phi_1$ stetig zusammenhängen ohne Unterbrechung der Gültigkeit der Funktionalgleichung, ist dasselbe für die ursprünglich betrachtete Abbildung $s \Phi_1$ der Fall.

Insbesondere kann man für H_1 die umfassendste Gruppe ihrer Art, also die früher mit $H(I)$ bezeichnete Gruppe aller Fixelemente bei I nehmen. Der Rand von $\Phi \bmod H$ wird durch die Punktmenge $E \bmod H$ gebildet. Denjenigen Punkten von E , die bezüglich H regulär sind (§ 29), kann man aber den Charakter von Randpunkten dadurch nehmen, dass man, wie am Schluss von § 28 ausgeführt, die ganze komplexe Kugel K als doppelt zählende universelle Überlagerungsfläche von φ auffasst und diese $\bmod H$ reduziert. Ein bezüglich H regulärer Punkt von E wird dann ein gewöhnlicher Punkt von $K_1 = K \bmod H$. Ein bezüglich H periodisches Intervall auf E (§ 29) gibt zu keiner Berandung von K_1 Anlass, da ihm auf K_1 eine singularitätenfreie geschlossene Kurve entspricht, die es überlagert. Wohl aber bleiben die Endpunkte bezüglich H aperiodischer Intervalle auf E — wenn es solche gibt — Randpunkte von K_1 .

Angenommen nun, es treten keine bezüglich H aperiodischen Intervalle auf. Dann hat K_1 keine Randpunkte. K_1 wird von $K-M$ mit der Randmenge M überlagert, wo M die Menge der bezüglich H singulären Punkte ist. H ist die zugehörige Gruppe der Decktransformationen. Wenn nun H von einer endlichen Anzahl, etwa ν , von Operationen erzeugt wird und man um die Grundpunkte derselben je einen Kreis so zeichnen kann, dass diese einander paarweise bei den erzeugenden Operationen entsprechen und ganz ausserhalb von einander liegen,

so ist H eine freie Gruppe mit ν Erzeugenden und $K_1 = K \text{ mod } H$ eine geschlossene Fläche vom Geschlecht ν (Vgl. den Schluss von § 2 für $\nu=1$).

Der oben betrachteten S -Funktion $s(x)$, die nach § 28 auf ganz K erklärt ist, entspricht eine stetige Abbildung sK_1 von K_1 . Betrachten wir wieder zunächst eine mit s stetig zusammenhängende S -Funktion s_1 , die den Nullpunkt O festlässt. Oben wurde gezeigt, dass jedes Kurvenstück in \mathcal{O} , das O mit einem mit O bei H äquivalenten Punkt verbindet, über einer geschlossenen Kurve von K_1 liegt, die mit ihrem Bild bei s_1K_1 homotop ist. Hier können wir nun offenbar die Bedingung, dass das Kurvenstück in \mathcal{O} verlaufen soll, dahin abschwächen, dass es in $K-M$ verlaufen soll; auf diese Weise ergibt sich, dass alle von dem O entsprechenden Punkt ausgehenden geschlossenen Kurven von K_1 mit ihrem Bild bei s_1K_1 homotop sind, d. h. dass die Abbildung s_1 der geschlossenen Fläche K_1 zur Klasse der Identität gehört. Dasselbe gilt dann für die ursprünglich betrachtete Abbildung sK_1 , da sie mit s_1K_1 stetig zusammenhängt, also zur selben Klasse gehört. — Man sieht, dass K_1 die schwächste Überlagerungsfläche von \mathcal{O} ist, auf der zu der gegebenen S -Funktion s eine stetige Abbildung von der Klasse der Identität gehört; denn K_1 entsteht ja, indem man K mittels der umfassendsten Gruppe von mit s vertauschbaren Elementen von F , nämlich $H(I)$, reduziert.

IV. ABSCHNITT.

Das Fixpunktproblem.

31. Klasseneinteilung der Fixpunkte einer stetigen Abbildung.

Es sei σ eine stetige Abbildung (σ -Abbildung, § 27) von \mathcal{O} und q ein Fixpunkt von $\sigma\mathcal{O}$:

$$\sigma q = q.$$

x_0 sei ein über q liegender Punkt von \mathcal{O} und s die über σ liegende S -Funktion, für welche

$$s x_0 = x_0$$

ist. Ist nun f ein Element aus F , so hat die ebenfalls über σ liegende S -Funktion $f s f^{-1}$ in $f x_0$ einen (über q liegenden) Fixpunkt. Induziert s den Automorphismus I , so induziert $f s f^{-1}$ den damit isogredienten Automorphismus

$$I_{of} \cdot I \cdot I_{of^{-1}} = I_{fIf^{-1}}$$

Vgl. (11), § 18. Demgemäss sollen nun auch zwei durch eine Operation aus F in einander transformierbare S -Funktionen, s und fsf^{-1} , als *isogrediente S -Funktionen* bezeichnet werden. Zwei solche haben also äquivalente Fixpunkt mengen.

Jedem Fixpunkt von σ ist also eine *Isogredienzklass*e von Automorphismen von F zugeordnet (§ 18). Diese bildet eine Teilmenge der zu σ gehörigen Automorphismenfamilie.

Definition: Die Gesamtheit derjenigen Fixpunkte von $\sigma\varphi$, denen dieselbe Isogredienzklass e zugeordnet ist, wird als eine »*Fixpunkt klass*e» bezeichnet.

Es seien q_1 und q_2 zwei Fixpunkte von $\sigma\varphi$, s_1 eine über σ liegende S -Funktion, die einen über q_1 liegenden Fixpunkt hat, s_2 eine solche, die einen über q_2 liegenden Fixpunkt hat. Wenn nun q_1 und q_2 zur selben Fixpunkt klass e gehören, so sind s_1 und s_2 nach Definition isogrediente S -Funktionen, haben also äquivalente Fixpunkt mengen, also besitzt s_1 auch einen über q_2 gelegenen Fixpunkt. Wenn andererseits q_1 und q_2 nicht zur selben Fixpunkt klass e gehören, so sind s_1 und s_2 nicht isogredient, also speziell nicht identisch, und s_1 besitzt also keinen über q_2 gelegenen Fixpunkt. Wenn der von s_1 induzierte Automorphismus Fixelemente hat, so reproduziert sich bei diesen die Fixpunktmenge von $s_1\Phi$ wegen (24). Wir haben also:

Satz 13: *Wenn eine über $\sigma\varphi$ liegende S -Funktion $s\Phi$ überhaupt Fixpunkte besitzt, so überdeckt ihre Fixpunktmenge die Punkte einer und nur einer Fixpunkt klass e von $\sigma\varphi$, und diese vollständig, und zwar im Allgemeinen unendlich oft.*

Die Frage nach einer *eineindeutigen* Repräsentation aller Fixpunkte von $\sigma\varphi$ wird in § 33 beantwortet werden.

Eine nur auf φ selbst operierende, geometrische Definition der Klasseneinteilung der Fixpunkte von $\sigma\varphi$ kann so ausgesprochen werden: Es seien q_1 und q_2 zwei Fixpunkte von $\sigma\varphi$ und k ein von q_1 nach q_2 führendes gerichtetes stetiges Kurvenstück auf φ . Dann führt auch σk von q_1 nach q_2 , also ist $k(\sigma k)^{-1}$ eine geschlossene Kurve auf φ . *Dann und nur dann, wenn man k so wählen kann, dass $k(\sigma k)^{-1}$ eine der Null homotope, d. h. auf φ zusammenziehbare Kurve wird, gehören q_1 und q_2 zur selben Fixpunkt klass e von $\sigma\varphi$.* Denn dann und nur dann liegen über q_1 und q_2 gleichzeitig Fixpunkte einer über $\sigma\varphi$ liegenden Abbildung $s\Phi$, und man wählt k als ein diese letzteren verbindendes Kurvenstück in Φ .

Insbesondere gehören also alle Punkte eines aus Fixpunkten von $\sigma\varphi$ be-

stehenden Kontinuums auf φ derselben Klasse an. — Die Ausbreitung der Menge der Fixpunkte einer Klasse hängt gewissermassen von der zufälligen Gestalt der Abbildung σ im Kleinen ab; man wird vermuten, dass man eine bestimmte Fixpunktklasse durch stetige Abänderung von σ *entweder* ganz zum Verschwinden bringen *oder* durch einen einzigen Punkt repräsentieren kann. Wir suchen zunächst nach einem hinreichenden Kriterium dafür, dass sich eine bestimmte Fixpunktklasse nicht durch stetige Abänderung von σ zum Verschwinden bringen lässt, dass sie also der betrachteten *Abbildungsklasse* eigentümlich ist (§ 35–37), und greifen sodann das Problem an, die Anzahl und die gegenseitige Verknüpfung der einer gegebenen Abbildungsklasse eigentümlichen, topologisch notwendigen Fixpunktklassen zu bestimmen (§ 38 u. ff.).

32. Endlichkeit der Klassenzahl.

Es sei eine beliebige σ -Abbildung $\sigma\varphi$ von φ auf sich vorgelegt. $s\mathcal{D}$ sei irgend eine über $\sigma\varphi$ liegende S -Funktion und I der durch s induzierte Automorphismus. B sei ein Fundamentalbereich von F , etwa die in § 3 definierte zentral gelegene Netzmasche von N . q_1 sei ein Fixpunkt von $\sigma\varphi$, x_1 der darüber gelegene Punkt von B . Dann ist sx_1 mit x_1 äquivalent, etwa $sx_1 = f_1 x_1$. Also hat sB an der Netzmasche $f_1 B$ Teil. sB ist aber ein Teilbereich eines mit E konzentrischen kleineren Kreises, hat also nur an endlich vielen Netzmaschen Teil, etwa an

$$f_1 B, f_2 B, \dots, f_m B.$$

Jedem Fixpunkt von $\sigma\varphi$ wird also durch das obige Verfahren eines dieser m Elemente zugeordnet. Zwei Fixpunkte, denen dabei dasselbe Element, etwa f_i , zugeordnet wird, treten gleichzeitig als Fixpunkte bei $f_i^{-1}s\mathcal{D}$ in die Erscheinung, gehören also zur selben Klasse. Also hat $\sigma\varphi$ *höchstens* m Klassen von Fixpunkten: **Satz 14:** *Die Anzahl der Fixpunktklassen einer σ -Abbildung ist endlich.*

Wir wollen die Klassenzahl genauer bestimmen. Es sei x_1 ein Punkt von \mathcal{D} , der über einem Fixpunkt von $\sigma\varphi$ liegt, und etwa:

$$sx_1 = f_1 x_1.$$

h sei ein beliebiges Element von F . Dann ist wegen (24)

$$shx_1 = h_I f_1 h^{-1} \cdot hx_1.$$

Die Äquivalenzfaktoren (§ 20) des vollständigen Systems äquivalenter Punkte $F x_1$ bilden also eine Isogredienzklass in Bezug auf I^{-1} , ganz ebenso wie in § 20 für die Randpunkte ausgeführt (es gelten ja dieselben Funktionalgleichungen). Ist nun $s x_2 = f_2 x_2$, so gehören die beiden Fixpunkte, über denen x_1 und x_2 liegen, offenbar dann und nur dann zur selben Klasse, wenn es eine Lösung h der Gleichung

$$f_2 = h_I f_1 h^{-1}$$

gibt, wenn also f_1 und f_2 zu derselben Isogredienzklass in Bezug auf I^{-1} gehören (vgl. § 18). Wir haben also: *Die Anzahl der Fixpunktklassen von $\sigma\varphi$ ist gleich der Anzahl derjenigen Isogredienzklassen in Bezug auf I^{-1} , auf die sich die bei dem obigen Verfahren auftretenden Elemente aus der Reihe f_1, f_2, \dots, f_m verteilen.*

33. Eineindeutige Repräsentation aller Fixpunkte von $\sigma\varphi$.

Es sei eine σ Abbildung $\sigma\varphi$ vorgelegt. Bildet man die ganze Familie der über σ liegenden S -Funktionen:

$$s_1^* \Phi, s_2^* \Phi, s_3^* \Phi, \dots,$$

so kommt jeder Fixpunkt von $\sigma\varphi$ jedenfalls als Fixpunkt eines $s_i^* \Phi$ vor. Aber jeder kommt unendlich oft vor. Wenn s_i^* und s_k^* isogredient, d. h. durch eine Operation aus F in einander transformierbar sind, so haben sie äquivalente Fixpunkt-mengen (§ 31). Zunächst haben wir also aus jeder Klasse isogredienter S -Funktionen einen Repräsentanten auszuwählen: Es sei

$$s_1 \Phi, s_2 \Phi, s_3 \Phi, \dots$$

ein vollständiges System unter einander nicht isogredienter über $\sigma\varphi$ liegender S -Funktionen und

$$I_1, I_2, I_3, \dots$$

die von diesen induzierten Automorphismen von F . Aber auch hier kommt — wie schon in Satz 13 zum Ausdruck gebracht ist — ein Fixpunkt von $\sigma\varphi$ im Allgemeinen noch unendlich oft vor. Wenn nämlich Fixelemente bei I_n existieren, $H(I_n) > 1$, so reproduziert sich die Fixpunktmenge von $s_n \Phi$ nach der Funktionalgleichung bei $H(I_n)$. Man hat also nur diejenigen Fixpunkte von $s_n \Phi$ zu zählen, die in einem *Fundamentbereich* von $H(I_n)$ liegen. Diese liegen aber auch wirklich über verschiedenen Fixpunkten von $\sigma\varphi$. Zwei äquivalente Punkte dieses

Fundamentalebereichs entsprechen einander nämlich bei einem Element von F , das nicht Fixelement bei I_n ist, die beiden Punkte können also zufolge der Funktionalgleichung (24) nicht zugleich Fixpunkte bei $s_n \mathcal{D}$ sein:

Satz 15: *Wenn $s_n \mathcal{D}$, $n=1, 2, \dots$, ein vollständiges System nicht isogredienter, über $\sigma \mathcal{D}$ liegender S -Funktionen, I_n der durch s_n induzierte Automorphismus von F und β_n ein Fundamentalebereich der Fixelementgruppe $H(I_n)$ ist, so wird durch die Gesamtheit der Fixpunkte aller $s_n \beta_n$ die Menge der Fixpunkte von $\sigma \mathcal{D}$ genau einmal dargestellt. Nach Satz 14 hat $s_n \beta_n$ nur für endlich viele Werte von n Fixpunkte, und für jeden dieser Werte von n wird durch $s_n \beta_n$ eine Fixpunktklasse von $\sigma \mathcal{D}$ vollständig dargestellt.*

Es ist zweckmässig, diesen Sachverhalt noch in einer anderen, für die praktische Ausführung oft bequemeren Form auszudrücken, die an die Auswahl einer bestimmten S -Funktion anknüpft. Es sei $s \mathcal{D}$ eine bestimmte unter den über $\sigma \mathcal{D}$ liegenden S -Funktionen und I der durch s induzierte Automorphismus. Dann stellt $f s \mathcal{D}$ die ganze Familie der über $\sigma \mathcal{D}$ liegenden S -Funktionen dar, wenn f ganz F durchläuft. $f_1 s$ und $f_2 s$ sind dann und nur dann isogredient, wenn f_1 und f_2 bezüglich I isogredient sind, wenn es also ein solches f gibt, dass (Satz 7, § 18)

$$f_2 = f f_1 f_1^{-1}$$

ist. Man hat also ein solches System von Elementen von F :

$$f_0 = 1, f_1, f_2, \dots$$

auszuwählen, dass jedes Element von F mit einem von diesen, aber keine zwei von diesen unter sich in Bezug auf I isogredient sind, und alle $f_n s \mathcal{D}$ auf Fixpunkte zu untersuchen. Nur endlich viele von diesen besitzen Fixpunkte, und zwar ist in einem Fundamentalebereich von $H(I_{f_n}^{-1})$ eine Fixpunktklasse einfach und vollständig repräsentiert.

34. Endliche Ausbreitung der einzelnen Fixpunktclassen.

Mit den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen gilt:

Satz 16: *Es gibt einen mit E konzentrischen Kreis mit einem Radius $\varrho < 1$, der die Fixpunkt mengen aller $s_n \beta_n$ (Satz 15) umschliesst.*

Beweis: Wir betrachten zunächst einen bestimmten Wert von n und setzen $H(I_n) = H$. Dann sei

$$k_0 = 1, k_1, k_2, \dots,$$

eine solche Folge von Elementen von F , dass

$$F = H + k_1 H + k_2 H + \dots$$

eine Zerlegung von F nach H ist. Mit Benutzung des Fundamentalbereichs B von F erhält man dann in

$$\beta_n = B + k_1 B + k_2 B + \dots$$

einen Fundamentalbereich von H . Es ist zu zeigen, dass es Fixpunkte von $s_n \Phi$ in $k_r B$ nur für endlich viele Werte von r geben kann:

In der Tat, sei $s_n P = P$ und P in $k_r B$ gelegen. Dann ist

$$s_n (k_r^{-1} P) = k_{rI_n}^{-1} k_r (k_r^{-1} P),$$

also hat $k_{rI_n}^{-1} k_r B$ an $s_n B$ Teil. Wenn nun $s_n B$ an

$$f_1 B, f_2 B, \dots, f_m B$$

und nur an diesen Fundamentalbereichen Teil hat, so muss etwa

$$k_{rI_n}^{-1} k_r = f_\mu$$

sein. Zu jedem der m Werte von μ gibt es aber *höchstens* einen Wert von r , denn wenn auch

$$k_{sI_n}^{-1} k_s = f_\mu$$

für $r \neq s$ gälte, so wäre

$$k_{rI_n}^{-1} k_r = k_{sI_n}^{-1} k_s,$$

also

$$k_r k_s^{-1} = (k_r k_s^{-1})_{I_n},$$

also $k_r k_s^{-1}$ zu H gehörig im Widerspruch dazu, dass $k_r H$ und $k_s H$ verschiedene Nebengruppen von H sein sollten. Es gibt also einen Kreis im Inneren von E , der die Fixpunktmenge von $s_n \beta_n$ für den in Betracht gezogenen Wert von n umschließt. Da aber $s_n \Phi$ nur für endlich viele Werte von n Fixpunkte hat, gibt es — nach Wahl der β_n — auch, wie behauptet, einen Kreis, der die Bedingung gleichzeitig für alle n erfüllt.

Betrachten wir die auf den Rand erweiterte Abbildung $s_n(\Phi + E)$. Die Menge m der Grundpunkte von $H(I_n)$ und daher auch ihre abgeschlossene Hülle M , d. h.

die Menge der bezüglich $H(I_n)$ singulären Punkte (§ 29) sind Fixpunkte von $s_n E$. Wenn nun $s_n \mathcal{O}$ überhaupt Fixpunkte hat, so ist offenbar jeder Punkt von m und daher auch von M Häufungspunkt von Fixpunkten von $s_n \mathcal{O}$. Der eben bewiesene Satz 16 besagt nun, dass die Menge M der bezüglich $H(I_n)$ singulären Punkte mit der Menge aller auf E gelegenen Häufungspunkte der Fixpunkte von $s_n \mathcal{O}$ identisch ist. Denn wenn die Fixpunktmenge von $s_n \beta_n$ für beliebige Wahl von β_n keine Häufungspunkte auf E hat, so kann kein bezüglich $H(I_n)$ regulärer Punkt von E Häufungspunkt von Fixpunkten von $s_n \mathcal{O}$ sein. — Es sei aber ausdrücklich hervorgehoben, dass nichtsdestoweniger die Möglichkeit offen bleibt, dass bezüglich $H(I_n)$ reguläre Punkte von E Fixpunkte von $s_n E$ sein können.

35. Richtungsfunktion §. Index.

Bei der Bestimmung von Fixpunkten einer Abbildung in der Euklidischen Ebene bedient man sich bekanntlich häufig mit Vorteil des Begriffes der Arcusvariation. In der hier verwendeten nichteuklidischen Metrik ist derselbe naturgemäss durch den folgenden zu ersetzen:

Es seien x und y zwei verschiedene Punkte von \mathcal{O} . (Durch Spiegelung an E wird die Begriffsbildung auch auf \mathcal{P} übertragen.) Man legt den zu E senkrechten Kreis durch x und y . Durchläuft man diesen in der Richtung von x nach y über y hinaus, so sei z der Punkt, in dem man auf E stösst. z ist also der unendlich ferne Punkt des von x ausgehenden und nach y zeigenden Halbstrahls in der nichteuklidischen Metrik. z ist eine Funktion $z(x, y)$ von x und y , deren expliziter Ausdruck

$$z(x, y) = \frac{x\bar{y} - \bar{x}y + \sqrt{(x-y)(\bar{x}-\bar{y})(1-x\bar{y})(1-\bar{x}y)}}{y(1+x\bar{x}) - x(1+y\bar{y})}$$

lautet; dabei entspricht der obigen Richtungsbestimmung die Festsetzung, dass immer der positive Wert der Quadratwurzelgrösse zu nehmen ist. Für zusammenfallende x und y verliert die Funktion $z(x, y)$ ihren Sinn. Wenn x und y zwei verschiedene Punkte auf E sind, so bleibt die Definition bestehen, und es ist einfach $z(x, y) = y$. (Wir brauchen nur den Fall, wo x und y beide in \mathcal{O} oder beide auf E liegen.) — Ist f eine lineare Substitution, die E in sich überführt, so ist offenbar

$$z(f(x), f(y)) = f(z(x, y)). \quad (26)$$

Nun sei eine S -Funktion $s(\Phi + E)$ gegeben. Mit Π sei die Fixpunktmenge von $s(\Phi + E)$ bezeichnet, und

$$\Phi + E - \Pi = \Omega$$

gesetzt. Dann ist

$$z(x, s(x))$$

eine in Ω eindeutige stetige Funktion vom Betrage 1. Aus ihr wird weiter die stetige reelle Funktion

$$\xi(x; s) = \frac{1}{2\pi i} \log z(x, s(x))$$

gebildet, deren Wert im Punkte x nur mod 1 bestimmt ist. Jedem stetigen gerichteten Weg in Ω wird nun das $\int d\xi$ längs des Weges, und jeder geschlossenen gerichteten Kurve in Ω also eine ganze Zahl, der »Index« der gerichteten Kurve, zugeordnet. Dieser ist bei stetiger Variation der Kurve in Ω konstant, also insbesondere Null, wenn sich die Kurve stetig auf einen Punkt von Ω zusammenziehen lässt, ohne Π zu treffen.

Als positive Durchlaufungsrichtung von E ist diejenige definiert, in welcher $\frac{1}{2\pi i} \log z$ wächst, also bei der hier benutzten üblichen Orientierung der komplexen Ebene diejenige, für welche man Φ zur Linken hat. Diese Definition der positiven Durchlaufungsrichtung werde auf alle in $\Phi + E$ liegenden Jordankurven übertragen. Es sei C eine in Ω gelegene Jordankurve mit einem von Null verschiedenen Index, der für positive Durchlaufung von C den Wert j haben möge. Dann enthält C eine Teilmenge Π_1 von Π im Inneren. Jede Jordankurve C_1 in Ω , die Π_1 und keinen anderen Punkt von Π im Inneren enthält, hat dann bei positivem Umlauf ebenfalls den Index j , wie man durch Vermittlung einer Jordankurve C_2 erschliesst, die im Inneren sowohl von C wie von C_1 liegt und selbst Π_1 im Inneren enthält. Man kann daher j als den *Index der isolierten Teilmenge Π_1 von Π* bezeichnen. Dabei hat auch das Vorzeichen von j Bedeutung, indem es offenbar von der gewählten Orientierung der komplexen Ebene unabhängig ist.

Man kann sich die ξ -Werte an die Punkte einer unendlichblättrigen, über Ω unverzweigt ausgebreiteten Überlagerungsfläche geknüpft denken.

36. Invarianz des Index bei topologischer Transformation.

Es sei (mit den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen) C eine geschlossene stetige Kurve in Ω , etwa

$$C: x = x(u), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad x(0) = x(1), \quad s(x(u)) \neq x(u).$$

Dann ist $\xi(x(u); s)$ eine stetige Funktion von u . Man fixiere einen Funktionszweig durch Wahl des Ausgangswertes für $u = 0$ und schreibe die Funktion danach $\xi(u)$. Dann ist $\xi(1) - \xi(0)$ der Index von C .

Nun sei λ eine beliebige, die Indikatrix erhaltende, topologische Abbildung von $\Phi + E$ auf sich. Es soll gezeigt werden, dass der Index von λC bei der Abbildung $\lambda s \lambda^{-1}$ gleich dem Index von C bei s ist. Nach dem TIETZESCHEN Deformationssatz¹⁴ gibt es eine von einem Parameter $0 \leq v \leq 1$ stetig abhängende Folge von topologischen Abbildungen λ_v von $\Phi + E$ auf sich so, dass λ_0 die Identität und $\lambda_1 = \lambda$ ist. Nun sei

$$s_v = \lambda_v s \lambda_v^{-1}$$

und

$$\lambda_v(x(u)) = \tilde{x}(u, v)$$

gesetzt. Hier ist $\tilde{x}(u, v)$ für jedes festgehaltene u in v stetig, und zwar gleichmässig für alle u , also $\tilde{x}(u, v)$ stetig im Quadrate $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$. Dasselbe gilt dann von

$$\lambda_v(s(x(u))) = \lambda_v s \lambda_v^{-1} \cdot \tilde{x}(u, v) = s_v(\tilde{x}(u, v))$$

also auch von

$$\tilde{\xi}(u, v) = \frac{1}{2\pi i} \log z(\tilde{x}(u, v), s_v(\tilde{x}(u, v)));$$

es ist nämlich $s_v(\tilde{x}(u, v)) \neq \tilde{x}(u, v)$ für $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$, da diese beiden Punkte die Bilder der verschiedenen Punkte $x(u)$ und $s(x(u))$ bei λ_v sind. Fixiert man also die Funktion $\tilde{\xi}(u, v)$ durch $\tilde{\xi}(0, 0) = \xi(0)$, so ist $\tilde{\xi}(u, 0) = \xi(u)$. Dann ist die von v stetig abhängende Differenz

$$\tilde{\xi}(1, v) - \tilde{\xi}(0, v),$$

da sie eine ganze Zahl sein soll, eine Konstante, also

$$\tilde{\xi}(1, 1) - \tilde{\xi}(0, 1) = \tilde{\xi}(1, 0) - \tilde{\xi}(0, 0) = \xi(1) - \xi(0) \quad \text{w. z. b. w.}$$

¹⁴ Pal. Rend. 38 (1914).

Die obige Bedingung, dass λ die Indikatrix erhalten sollte, kann nun nachträglich leicht aufgehoben werden, da der Index von C offenbar bei Transformation von s mit der Spiegelung an der reellen Achse $\lambda(x) = \bar{x}$ erhalten bleibt.

Fasst man die Fläche φ als eine im gewöhnlichen Raum gelegene Fläche auf, so wird Φ zu einem Abbild ihrer universellen Überlagerungsfläche dadurch, dass man die aufgeschnittene Fläche φ auf einen Fundamentalbereich von F abbildet. Das schliesst mannigfache Willkür in sich. Wenn man durch zwei Ausführungen dieser Operation zu zwei Abbildungen der universellen Überlagerungsfläche von φ auf Φ gelangt ist, so gehen diese durch eine T -Funktion in einander über. Sind mittels der beiden Abbildungen zwei einander entsprechende S -Funktionen über einer σ -Abbildung $\sigma\varphi$ konstruiert, so werden diese durch die T -Funktion in einander transformiert. *Der obige Invarianzsatz gibt uns also das Recht, von dem Index einer isolierten, zur selben Fixpunktklasse gehörigen Fixpunktmenge von $\sigma\varphi$ schlechthin zu sprechen.*

Insbesondere haben äquivalente Fixpunktteilmengen isogredienter S -Funktionen denselben Index.

Von dem Recht, eine S -Funktion mit einer beliebigen T -Funktion zu transformieren, ohne die Indizes ihrer Fixpunkt mengen zu ändern, wird noch weiterhin Gebrauch gemacht.

37. Index einer Fixpunktklasse. Indexsumme Ξ . Allgemeines Fixpunktproblem.

Es sei wieder eine Abbildung $\sigma\varphi$ vorgegeben. $s\Phi$ sei eine darüber liegende S -Funktion, I der durch s induzierte Automorphismus. β sei ein Fundamentalbereich von $H(I)$. Dann ist eine Fixpunktklasse von $\sigma\varphi$ einfach und vollständig dargestellt durch die in β gelegene Teilmenge Π_1 der Fixpunkte von $s\Phi$ (§ 33). Π_1 hat dabei nur an endlich vielen der mit dem Fundamentalbereich B von F äquivalenten Bereichen Teil (§ 34). Wenn nun Π_1 isoliert ist, d. h. wenn es eine die Fixpunktmenge Π von $s(\Phi + E)$ nicht treffende, Π_1 und keinen anderen Punkt von Π im Inneren enthaltende Jordankurve C in $\Phi + E$ gibt, dann wird der Index von Π_1 , d. h. von C (§ 35), als *Index der betrachteten Fixpunktklasse* bezeichnet. Diese Isolierbarkeitseigenschaft braucht nun nicht notwendig vorzuliegen, nämlich dann nicht, wenn es Fixelemente bei I gibt. Denn dann kann es vorkommen, dass zwei äquivalente Punkte von Φ gleichzeitig zu einem aus Fixpunkten von $s\Phi$ bestehenden Kontinuum in Φ gehören; es hat oft Interesse, gerade dieses

Verhalten zu betrachten. Vgl. Beispiel 12, § 48. Im Allgemeinen wollen wir aber, um jeder Fixpunktklasse einen Index zuordnen zu können, über $\sigma\varphi$ die folgende »Annahme α » machen, durch die, wie man leicht erkennen wird, das allgemeine Fixpunktproblem keine unsachgemässe Einschränkung erleidet:

Annahme α : Es wird angenommen, dass unter den endlich oder abzählbar vielen Gebieten auf φ , die die Restmenge der Fixpunktmenge von $\sigma\varphi$ bilden, eines dasselbe Geschlecht wie φ hat.

In diesem Gebiet kann man dann ein kanonisches Schnittsystem von φ anbringen und dieses bei der Abbildung von φ auf den Fundamentalbereich B von F zu Grunde legen; dann hat keine der über $\sigma\varphi$ liegenden S -Funktionen Fixpunkte auf dem Netz N . (Mit anderen Worten: diese Bequemlichkeit kann man, wenn die Beziehung zwischen φ und \mathcal{O} schon vorliegt, bei Gültigkeit der Annahme α nötigenfalls durch Transformation der S -Funktion mit einer T -Funktion erreichen, was ohne Einwirkung auf die Indizes bleibt.) Dann kann man den Index der Berandung jeder Netzmasche bei s bilden. Stellt man nun den Fundamentalbereich von $H(I)$ wie in § 34 in der Form

$$\beta = B + k_1 B + k_2 B + \dots$$

dar, so haben diese Maschen bis auf höchstens endlich viele den Index Null, und der Index der Fixpunktklasse ist die Summe der Indizes über alle Maschen. Wählt man insbesondere k_1, k_2, \dots so, dass β ein einfach zusammenhängendes Gebiet wird, so kann man eine aus Netzseiten von N bestehende Kurve C in β bilden, die alle in β liegenden Fixpunkte von $s\mathcal{O}$ umschliesst, und hat dann offenbar Übereinstimmung des Index von C mit der Summe der Indizes der von C umschlossenen Maschen.

Für eine die Annahme α erfüllende Abbildung $\sigma\varphi$ ist also der Index jeder einzelnen Fixpunktklasse, und da es nur endlich viele solche gibt, auch die Summe der Indizes aller Fixpunktclassen definiert. Diese sei mit $\Xi = \Xi(\sigma)$ bezeichnet.

Nun ist zu erwarten (und das wird im Folgenden nicht generell, aber in einer Reihe von besonderen Fällen dargetan), dass die Anzahl der Fixpunktclassen mit einem von Null verschiedenen Index und der Index jeder einzelnen von ihnen, also auch die Indexsumme Ξ , allein von der Abbildungsklasse von σ abhängt. Dann erhält das allgemeine Fixpunktproblem folgende Form:

Allgemeines Fixpunktproblem: Die Anzahl der Fixpunktclassen mit einem von Null verschiedenen Index und den Index jeder Klasse für jede Abbildungsklasse von φ aus der zugehörigen Automorphismenfamilie von F zu bestimmen.

Betrachten wir noch einmal die Transformation der gegebenen Abbildung mit einer topologischen Abbildung. Es sei $\tau\varphi$ eine topologische Abbildung von φ auf sich, t eine über τ liegende T -Funktion und J der durch t induzierte Automorphismus. Dann induziert die S -Funktion $s_1 = tst^{-1}$ den Automorphismus $I_1 = J^{-1}IJ$. I_1 Gehört also mit I zur selben *Automorphismenklasse*, aber im Allgemeinen nicht zur selben *Isogredienzklass*e. Die Indizes der durch s und s_1 bestimmten Fixpunktclassen sind nach § 36 gleich. Das gleiche gilt aber auch für die übrigen Fixpunktclassen von σ und $\tau\sigma\tau^{-1}$. t transformiert nämlich die ganze Familie der mit s verwandten S -Funktionen in die ganze Familie der mit s_1 verwandten:

$$t \cdot f s \cdot t^{-1} = f_J \cdot t s t^{-1} = f_J s_1, \quad (27)$$

und dabei reproduziert sich die Einteilung in Isogredienzklassen in Bezug auf die in Betracht kommenden Automorphismen: die Gleichungen

$$f_2 = f \cdot f_1 \cdot f_I^{-1}$$

und

$$f_{2J} = f_J \cdot f_{1J} \cdot f_{J I_1}^{-1}$$

folgen durch Ausübung von J bzw. J^{-1} aus einander. Wenn also die Lösung des Fixpunktproblems allein von dem vorgelegten Automorphismus abhängt, so gilt: Bei der Lösung des allgemeinen Fixpunktproblems für einen vorgelegten Automorphismus ist es statthaft, diesen mit einem beliebigen Automorphismus zu transformieren. Bei dieser Transformation bleibt die Familie des vorgelegten Automorphismus als Familie beisammen, wie (27) zeigt, wir haben also als Zusatz zu der obigen Formulierung: *Die Lösungen des allgemeinen Fixpunktproblems beziehen sich auf die vollständigen Klassen in einander transformierbarer Automorphismenfamilien.* Man kann hierin den expliziten Ausdruck für den einleuchtenden Sachverhalt sehen, dass die Lösung des Fixpunktproblems für eine Abbildungsklasse nicht von der Auswahl eines kanonischen Schnittsystems auf der Fläche oder von der Auswahl eines Erzeugendensystems für die Gruppe F abhängen kann.

38. Zur Klasse der Identität gehörige stetige Abbildungen des Torus.

Die vorliegende Arbeit hat die Topologie der Flächen vom Geschlecht $p > 1$ zum Gegenstand. Es empfiehlt sich indessen, einen den Torus betreffenden Satz als Einleitung zu dem Folgenden und als Vergleichssatz aufzustellen. Da man

leicht die bisher aufgestellten Begriffe sinngemäss auf den Fall $p = 1$ überträgt, wird im Wesentlichen dieselbe Bezeichnungsweise beibehalten.

Die Euklidische x - y -Ebene \mathcal{D} sei die universelle Überlagerungsfläche des Torus φ so, dass Punkte mit ganzzahligen Koordinatendifferenzen über demselben Punkte von φ liegen. $s\mathcal{D}$ sei eine stetige Abbildung von \mathcal{D} auf sich, gegeben durch stetige Abbildungsfunktionen

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y)\end{aligned}$$

unter Gültigkeit der Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned}f(x + 1, y) &= f(x, y) + 1, & f(x, y + 1) &= f(x, y), \\ g(x + 1, y) &= g(x, y), & g(x, y + 1) &= g(x, y) + 1.\end{aligned}$$

Dann liegt $s\mathcal{D}$ über einer stetigen Abbildung $\sigma\varphi$, und σ hängt stetig mit der identischen Abbildung zusammen. Lässt man nämlich jeden Bildpunkt sP von \mathcal{D} sich gegen seinen Originalpunkt P geradlinig hin bewegen mit einer konstanten Geschwindigkeit, die der Entfernung von P und sP gleich ist, so erhält man eine Schar von der Zeit $t, 0 \leq t \leq 1$, stetig abhängende Abbildungen $s_t\mathcal{D}$, gegeben durch Abbildungsfunktionen f_t und g_t , die denselben Funktionalgleichungen wie f und g genügen. $s_t\mathcal{D}$ liegt daher über stetigen Abbildungen $\sigma_t\varphi$. σ_0 ist die gegebene Abbildung σ , und σ_1 ist die Identität.

Nun werde angenommen, dass $\sigma\varphi$ der Annahme α (§ 37) genügt. In demjenigen Restgebiet der Fixpunktmenge von $\sigma\varphi$, welches das Geschlecht 1 hat, wird ein kanonisches Rückkehrschnittpaar konstruiert, und die Korrespondenz von φ und \mathcal{D} sei so gewählt, dass die Geraden der ganzzahligen x über der einen, und die Geraden der ganzzahligen y über der anderen Kurve dieses Paares liegen. Der Richtungsfunktion ξ entspricht jetzt $\frac{1}{2\pi} \arctg \frac{y' - y}{x' - x}$, sodass wir es mit gewöhnlicher Arcusvariation zu tun haben. Die Grösse $\frac{y' - y}{x' - x}$ hat nun wegen der

Funktionalgleichungen in gegenüberliegenden Punkten auf den Seiten des Einheitsquadrates den gleichen Wert. Die gesamte Arcusvariation bei Umlaufung des Einheitsquadrates ist daher Null. Eine der Fixpunktclassen von $\sigma\varphi$ wird durch die in einer Quadratmasche gelegenen Fixpunkte von $s\mathcal{D}$ genau einmal dargestellt. Diese Fixpunktclass hat also den Index Null. Andere Fixpunkte von

$\sigma\varphi$ werden von solchen Punkten P überlagert, für welche P und sP ganzzahlige, nicht beide verschwindende Koordinatendifferenzen haben. Um diese zu erfassen, sind die mit s verwandten Abbildungen zu untersuchen, also Abbildungen $s_1\Phi$, definiert durch die Abbildungsfunktionen

$$\begin{aligned}x' &= f_1(x, y) = f(x, y) + a \\y' &= g_1(x, y) = g(x, y) + b,\end{aligned}$$

wo a und b irgend zwei ganze Zahlen sind. Dann genügen aber f_1 und g_1 denselben Funktionalgleichungen wie f und g , und dieselbe Betrachtung wie oben ergibt den Index Null für die Berandung einer Quadratmasche. Dass $\sigma\varphi$ nur endlich viele Fixpunktklassen hat, folgt, analog wie für $p > 1$ (§ 32), daraus, dass das Bild des Quadrates $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ bei s nur an endlich vielen mit diesem Quadrat äquivalenten Quadraten Teil hat. Zusammenfassend können wir dieses Ergebnis so aussprechen:

Satz 17: *Ist σ eine stetige zur Klasse der Identität gehörige Abbildung eines Torus auf sich, die die Annahme a erfüllt, d.h. gibt es auf dem Torus zwei doppelpunktfreie, sich in einem Punkt schneidende Kurven, auf denen keine Fixpunkte bei σ liegen und von denen jede mit ihrem Bild bei σ homotop ist, so ist $\Xi(\sigma) = 0$, indem jede der möglicherweise auftretenden (endlich vielen) Fixpunktklassen für sich den Index Null hat.*

Dass in diesem Fall nicht notwendig Fixpunkte vorzuliegen brauchen, zeigt das Beispiel $x' = x + \frac{1}{2}, y' = y$.

Das allgemeine Fixpunktproblem auf dem Torus ist vollständig erledigt und liegt hinreichend ausführlich dargestellt vor¹⁵, sodass wir uns hier auf die durch Satz 17 gegebene Lösung des allgemeinen Fixpunktproblems für die Abbildungsklasse der Identität beschränken.

¹⁵ Zunächst in den zwei Abhandlungen in Math. Annalen Bd. 82 (1921):

J. NIELSEN, *Über die Minimalzahl der Fixpunkte bei den Abbildungstypen der Ringflächen*, und
L. E. J. BROUWER, *Über die Minimalzahl der Fixpunkte bei den Klassen von eindeutigen stetigen Transformationen der Ringflächen*,

in denen die Begriffe »Fixpunktklasse« und »Index« noch nicht klar hervortreten. Der Klassenbegriff wird dann eingeführt und der Beweis sehr vereinfacht und zugleich das Ergebnis auf beliebige stetige Abbildungen des (n-dimensionalen) Torus ausgedehnt in der dänisch geschriebenen Arbeit des Verfassers:

Ringfladen og Planen, Matematisk Tidsskrift B (1924).

Neuerdings ist unabhängig vom Verfasser Herr H. HOPF zu einer ähnlichen Darstellung gelangt: HEINZ HOPF, *Über Mindestzahlen von Fixpunkten*, Math. Zeitschr. 1927.

39. Die Richtungsgruppe (F).

Stellt man die ξ -Werte $-\infty < \xi < \infty$ auf einer Geraden Z dar, so ist Z dadurch als universelle Überlagerungsmannigfaltigkeit von E gedeutet. Der Gruppe F , als Gruppe von topologischen Abbildungen von E auf sich aufgefasst, entspricht dann eine Gruppe von topologischen Abbildungen von Z auf sich, die wir die »Richtungsgruppe« nennen und mit (F) bezeichnen.

Es soll eine abstrakte Darstellung von (F) durch erzeugende Operationen und definierende Relationen ermittelt werden.

Sei f ein beliebiges Element von F , z_0 ein beliebiger Punkt von E , ξ_0 einer der über z_0 liegenden ξ -Werte und ξ_1 einer der über fz_0 liegenden ξ -Werte. Dann ist eine topologische Abbildung von Z auf sich durch die Forderungen festgelegt, dass sie über fE liegen und ξ_0 in ξ_1 überführen soll. Da die Intervalle von ξ_0 bis $\xi_0 + 1$ und von ξ_1 bis $\xi_1 + 1$ je eine einmalige Bedeckung von E ergeben, wird diese Abbildung periodisch mit der Periode 1. Ein Punkt ξ_ν von Z , der über dem Grundpunkt $V(f)$ liegt, geht dabei in $\xi_\nu + \nu$ über, wo ν eine ganze Zahl ist, und diese Verschiebungszahl ist für alle über $V(f)$ und $U(f)$ liegenden ξ Werte dieselbe. Die erhaltene topologische Abbildung von Z möge dann mit

$$(f)_\nu$$

bezeichnet werden. Sie genügt der Funktionalgleichung

$$(f)_\nu(\xi + 1) = (f)_\nu\xi + 1. \quad (28)$$

Die über der identischen Operation 1 von F liegenden Operationen von (F) bilden eine Untergruppe von (F) , die von den Potenzen von

$$(1)_1,$$

d. h. der Verschiebung von Z in positiver Richtung um eine Einheit, gebildet wird. Diese ist mit allen Elementen von (F) vertauschbar; denn (28) besagt

$$(f)_\nu(1)_1\xi = (1)_1(f)_\nu\xi. \quad (29)$$

Man hat dann für alle Werte von n

$$(1)_1^n = (1)_n$$

und

$$(f)_\nu(1)_n = (1)_n(f)_\nu = (f)_{\nu+n}, \quad (29a)$$

sodass wir in den $2p + 1$ Operationen

$$(a_1)_0, (b_1)_0, \dots, (a_p)_0, (b_p)_0, (1)_1$$

ein Erzeugendensystem von (F) gefunden haben. Dabei ist

$$(a_1)_0^{-1} = (a_1^{-1})_0$$

und analog.

Nun wird ein vollständiges Relationensystem gesucht. Zunächst ergibt (29) die Vertauschungsrelationen

$$\left. \begin{array}{l} (a_i)_0 \Leftrightarrow (1)_1 \\ (b_i)_0 \Leftrightarrow (1)_1 \end{array} \right\} i = 1, \dots, p. \quad (30)$$

Wegen (30) kann jedes Element γ von (F) in der Form

$$\gamma = \Pi((a_i)_0, (b_i)_0) \cdot (1)_1^n$$

dargestellt werden. Soll nun γ die Identität, d.h.

$$\gamma = (1)_0$$

sein, so muss $\Pi((a_i)_0, (b_i)_0)$ über der identischen Abbildung von E liegen, also muss

$$\Pi(a_i, b_i) = 1$$

in F sein. Dann ist (vgl. § 8) identisch in den a_i, b_i

$$\Pi(a_i, b_i) \equiv \prod_{j=1}^m h_j^* h_j(a_i, b_i) R(a_i, b_i)^{e_j} h_j(a_i, b_i)^{-1}, \quad (31)$$

wo durch den Stern angedeutet wird, dass es sich um ein neues Produkt handelt. Die Identität (31) kann man ebenso gut in den $(a_i)_0, (b_i)_0$ statt in den a_i, b_i schreiben. Es kommt also alles darauf an, das Element

$$R((a_i)_0, (b_i)_0) = (a_1)_0 (b_1)_0 (a_1^{-1})_0 (b_1^{-1})_0 \dots (a_p)_0 (b_p)_0 (a_p^{-1})_0 (b_p^{-1})_0$$

zu bestimmen. Dies Element liegt über der Identität von F , also ist

$$R((a_i)_0, (b_i)_0) = (1)_1^x, \quad (32)$$

wo x zu bestimmen bleibt. Da $(1)_1$ mit allen Elementen von (F) vertauschbar ist,

heben sich dann auf der rechten Seite von (31) alle Transformatoren $h_j((a_i)_0, (b_i)_0)$ fort, sodass γ mittels (32) und (30) auf die Form

$$\gamma = (1)_1^{n+x \cdot \sum \epsilon_j}$$

gebracht ist, wo dann der Exponent Null sein muss.

Um nun den Exponenten x in (32) zu bestimmen, hat man sich das Folgende über die Produktbildung $(f)_0(f_1)_0$ klar zu machen: Bei fE erhalten die Punkte von E , die links von der gerichteten Achse $U(f)$ $V(f)$ liegen, eine negative Verschiebung, die Punkte rechts von der Achse eine positive Verschiebung, und diese Verschiebungen betragen weniger als einen Umkreis von E . Bei $(f)_0 Z$ bleiben die über $U(f)$ und $V(f)$ liegenden Punkte in Ruhe, und die übrigen Punkte erhalten teils eine negative, teils eine positive Verschiebung < 1 . Also gilt

$$-1 < (f)_0 \xi - \xi < 1$$

und weiter

$$\nu - 1 < (f)_\nu \xi - \xi < \nu + 1. \quad (33)$$

Nun gebe man den Achsen von f und f_1 Pfeilspitzen, die von dem negativen nach dem positiven Grundpunkt zeigen, und betrachte das Produkt $(f)_0(f_1)_0$ der Reihe nach in folgenden Fällen:

1) f und f_1 haben zusammenfallende Achsen. Dann bleiben die über den gemeinsamen Grundpunkten liegenden Punkte von Z sowohl bei $(f_1)_0$ wie bei $(f)_0$ fest, also ist

$$(f)_0(f_1)_0 = (ff_1)_0. \quad (34)$$

2) Die Achsen von f und f_1 schneiden einander. Dann bleiben die über $U(f_1)$ bzw. $V(f_1)$ liegenden Punkte von Z bei $(f_1)_0$ fest und erhalten bei $(f)_0$ Verschiebungen entgegengesetzten Vorzeichens. Zuzufolge (33) gilt also wieder (34).

3) Die Achsen von f und f_1 treffen einander nicht. Dann bestimmen sie zwischen sich ein Teilgebiet γ von $\mathcal{D} + E$, an dessen Berandung sie beide Teil haben. Wenn dann die Pfeilspitzen der beiden Achsen auf dem Rande von γ verschiedene Umlaufsinne bestimmen, so erhalten die Punkte von Z , die über $f_1^{-1}V(f)$ bzw. über $V(f_1)$ liegen, bei $(f)_0(f_1)_0$ Verschiebungen entgegengesetzten Vorzeichens, also gilt wieder (34).

4) Die Achsen von f und f_1 erteilen übereinstimmend dem Rande von γ einen Umlaufssinn, der a) dem positiven Umlaufssinn auf E entgegengesetzt ist, b) mit

ihm übereinstimmt. Hier hängt die Entscheidung der Frage von der Lage der Grundpunkte von ff_1 ab. Wir werden die Antwort aber nur in dem Fall brauchen, wo man über mindestens einen dieser Grundpunkte weiss, dass er auf einem der beiden zum Rande von γ gehörenden Teilbögen von E liegt. Jeder solche Punkt erhält nämlich im Fall a) zunächst bei f_1 eine positive Verschiebung und dann bei f entweder wieder eine positive Verschiebung (falls er nämlich auch in seiner neuen Lage noch zum Rande von γ gehört) oder eine negative Verschiebung (falls er auf die linke Seite der Achse von f geraten ist), die geringer ist als die vorhergehende positive Verschiebung, insgesamt also eine positive Verschiebung. Wenn aber ein Grundpunkt von ff_1 eine positive Verschiebung erhalten hat, so ist

$$(f)_0(f_1)_0 = (ff_1)_\nu$$

mit einem positiven Wert von ν . Da nun die Verschiebung von $V(f_1)$ weniger als einen Umkreis um E ausmacht, so folgt wegen (33) $\nu = 1$, also

$$(f)_0(f_1)_0 = (ff_1)_1 \tag{35 a}$$

im Fall a) und analog

$$(f)_0(f_1)_0 = (ff_1)_{-1} \tag{35 b}$$

im Fall b).

Nun geben in allen Fällen die Entwicklungen der Grundpunkte vollen Aufschluss darüber, welche der obigen Fälle jeweils eintreten. Da je zwei der Achsen von a_1 , b_1 und $a_1 b_1$ sich schneiden, ist nach (34)

$$(a_1)_0(b_1)_0(a_1^{-1})_0 = (a_1 b_1 a_1^{-1})_0. \tag{36}$$

Die Achsen von $a_1 b_1 a_1^{-1}$ und b_1^{-1} entsprechen dem Fall 4 a), und die Grundpunkte von $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} = k_1$ liegen in ihrem Zwischengebiet γ , also hat man nach (35 a)

$$(a_1 b_1 a_1^{-1})_0(b_1^{-1})_0 = (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1})_1,$$

und also, da das Gleiche für die übrigen Indizes gilt, mit der Bezeichnung

$$k_i = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1},$$

$$\begin{aligned} R((a_i)_0, (b_i)_0) &= (k_1)_1 (k_2)_1 \cdots (k_p)_1 \\ &= (k_1)_0 (k_2)_0 \cdots (k_p)_0 (1)_1^p. \end{aligned}$$

Nun entsprechen (für $p > 2$) die Achsen von k_1 und k_2 wieder dem Fall 4 a), und die Grundpunkte von $k_1 k_2$ liegen in ihrem Zwischengebiet, man hat also nach (35 a)

$$(k_1)_0 (k_2)_0 = (k_1 k_2)_1 = (k_1 k_2)_0 (1)_1,$$

und der gleiche Schluss gilt (für $p > 3$) für $k_1 k_2$ und k_3 u.s.w. bis zum vorletzten Schritt. Also hat man

$$R((a_i)_0, (b_i)_0) = (k_1 k_2 \cdots k_{p-1})_0 (k_p)_0 (1)_1^{p+(p-2)}.$$

Die Elemente $k_1 k_2 \cdots k_{p-1}$ und k_p sind aber zu einander reziprok wegen $R(a_i, b_i) = 1$, also gilt nach Fall 1)

$$(k_1 k_2 \cdots k_{p-1})_0 (k_p)_0 = (1)_0,$$

also

$$x = 2p - 2.$$

Somit hat sich für die Richtungsgruppe (F) die folgende abstrakte Darstellung ergeben:

$$(F) \left\{ \begin{array}{l} \text{Erzeugende: } (a_i)_0, (b_i)_0, (1)_1 \\ \text{Relationen: } \begin{array}{l} (a_i)_0 \rightleftharpoons (1)_1 \\ (b_i)_0 \rightleftharpoons (1)_1 \end{array} \\ (a_1)_0 (b_1)_0 (a_1)_0^{-1} (b_1)_0^{-1} \cdots (a_p)_0 (b_p)_0 (a_p)_0^{-1} (b_p)_0^{-1} = (1)_1^{2p-2}. \end{array} \right\} i = 1, 2, \dots, p.$$

Diese Gruppe ist zuerst von Herrn H. HOTELLING¹⁶ angegeben worden, der sie von einer etwas anders gewendeten Fragestellung aus und mit anderen Methoden gewinnt, wenn man auch die sachliche Übereinstimmung der beiden unabhängig von einander entstandenen Betrachtungsweisen mühelos erkennen wird. Nach HOTELLING ist (F) die Fundamentalgruppe derjenigen orientierbaren geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit, deren »Punkte« die *Flächenpunkte von φ gepaart mit einer von ihnen ausgehenden Richtung* sind. Der obige Exponent $2p - 2$ ist dann der (einzige) Torsionskoeffizient dieser Mannigfaltigkeit.

40. Zuwachs der Richtungsfunktion auf äquivalenten Wegstücken und auf E .

Es sei s eine S -Funktion, I der durch s induzierte Automorphismus, Π die Fixpunktmenge von $s(\Phi + E)$ und $\Phi + E - \Pi = \Omega$ gesetzt. $\xi(x; s)$ wird kurz mit

¹⁶ HAROLD HOTELLING, Three-dimensional Manifolds of States of Motion, Transact. Amer. Math. Soc. vol. 27 (1925).

$\xi(x)$ bezeichnet. w sei ein gerichtetes stetiges Kurvenstück in Ω , das von x_1 nach x_2 führt. ξ_1 sei ein bestimmt gewählter unter den nur Mod. 1 bestimmten Werten $\xi(x_1)$. Dann sei

$$\xi_2 = \xi_1 + \int_w d\xi \tag{37}$$

gesetzt. f sei ein Element von F , das Fixelement bei I , also mit s vertauschbar ist. Dann ist zufolge (26) (§ 35) in ganz Ω

$$z[f(x), s(f(x))] = z[f(x), f(s(x))] = f(z[x, s(x)]),$$

also

$$\xi(f(x)) = (f)_\nu \xi(x), \tag{38}$$

wobei die unbestimmte ganze Zahl ν der Unbestimmtheit von ξ Mod. 1 Rechnung trägt. Dann wird

$$\int_{fw} d\xi = \int_w d((f)_\nu \xi) = (f)_\nu \xi_2 - (f)_\nu \xi_1, \tag{39}$$

gültig für jedes ν ; die Unabhängigkeit der Differenz von ν ist evident wegen

$$(f)_\nu \xi = (f)_0 \xi + \nu.$$

Dann hat man wegen (38) und (39), gültig für jeden Wert von ν :

$$\int_w d[\xi(f(x)) - \xi(x)] = \int_w d[(f)_\nu \xi - \xi] = (f)_\nu \xi_2 - \xi_2 - [(f)_\nu \xi_1 - \xi_1].$$

Ersetzt man nun den Integrationsweg w durch einen beliebigen anderen in Ω von x_1 nach x_2 führenden Weg, so ändert sich ξ_2 höchstens um eine ganze Zahl, was wegen (28) ohne Einfluss auf die Differenz $(f)_\nu \xi_2 - \xi_2$ bleibt. Also ist

$$\int d[\xi(f(x)) - \xi(x)]$$

unabhängig vom Integrationsweg in Ω .

Nun seien x_1 und x_2 zwei zu Ω gehörige Punkte von E , die nicht durch die Fixpunktmenge von sE getrennt werden, also zum selben fixpunktfreien Intervall auf E gehören, und w sei der sie verbindende zu Ω gehörige Bogen von E . Dann kann man wieder (37) bilden. Da sw zum gleichen fixpunktfreien In-

tervall gehört, wie w , und hier $z(x, s(x)) = s(x)$ ist, liegt kein Punkt des Intervalls (ξ_1, ξ_2) der Achse Z über einem Fixpunkt von sE . Wenn es also überhaupt Fixpunkte bei sE gibt, so hängt $\xi_2 - \xi_1$ nur von der Lage der Punkte $s(x_1)$ und $s(x_2)$ ab. Wenn nun insbesondere w zu einem fixpunktfreien periodischen Intervall gehört, das durch die Grundpunkte des Fixelements f begrenzt wird, und

$$x_2 = f(x_1)$$

ist, so ist nach (38)

$$\xi_2 = (f)^\nu \xi_1,$$

und hier muss $\nu = 0$ sein; denn sonst gäbe es zwischen ξ_1 und ξ_2 einen Punkt der Z -Achse, der über einem Grundpunkt von f , also einem Fixpunkt von sE läge. Man hat also bei Integration längs E

$$\int_{x_1}^{f(x_1)} d\xi = (f)_0 \xi_1 - \xi_1. \quad (40)$$

41. Klassenindex Null bei zyklischer Fixelementgruppe.

Es sei s eine S -Funktion, I der zugehörige Automorphismus und $H(I)$ sei zyklisch, also, indem f das primäre Fixelement ist, $H(I) = \{f\}$. Bei sE mögen zwei fixpunktfreie, bei f periodische Intervalle entstehen (§ 14). Ω sei wieder der fixpunktfreie Teil von $\Phi + E$. Das Netz N gehöre ganz zu Ω auf Grund der Annahme α (§ 37). Der Index der durch $s\Phi$ dargestellten Fixpunktmenge wird nach § 37 durch das $\int d\xi$ über den Rand eines Fundamentalbereichs von $\{f\}$ definiert. Es ist daher zunächst ein solcher Fundamentalbereich herzustellen, dessen Rand fixpunktfrei ist.

$U(f)$ und $V(f)$ sind die einzigen Fixpunkte auf E . Die in einem Fundamentalbereich von $\{f\}$ gelegene Fixpunktmenge von $s\Phi$ lässt sich nach § 34 in einen ganz im Inneren von E gelegenen Kreis einschliessen. λ und μ (Fig. 16) seien zwei Abstandslinien zur Achse von f , die diesen Kreis zwischen sich enthalten. Dann enthält das durch λ und μ bestimmte Kreisweieck die gesamte Fixpunktmenge von $s\Phi$, da diese sich bei $\{f\}$ reproduziert. $C = z_1 z_2$ sei ein nichteuklidisches Lot auf der Achse von f , das mit keiner Geraden des Netzes N zusammenfällt und durch keinen Eckpunkt von N geht. Die von C durch-

schnittenen Netzmaschen sind dann so längs C aneinander gereiht, dass ihre Gesamtheit von zwei einfachen Netzseitenzügen berandet wird. AB sei ein Stück des einen dieser Netzseitenzüge, welches von einem Punkte A auf λ durch das Zweieck $\lambda\mu$ hindurch zu einem Punkte B auf μ führt.

Man verbinde A geradlinig mit z_1 und B mit z_2 (den Endpunkten von C auf E). So ist ein von Fixpunkten freier, von z_1 nach z_2 führender Weg w hergestellt. Dieser trifft offenbar sein Bild bei f nicht. w und fw enthalten

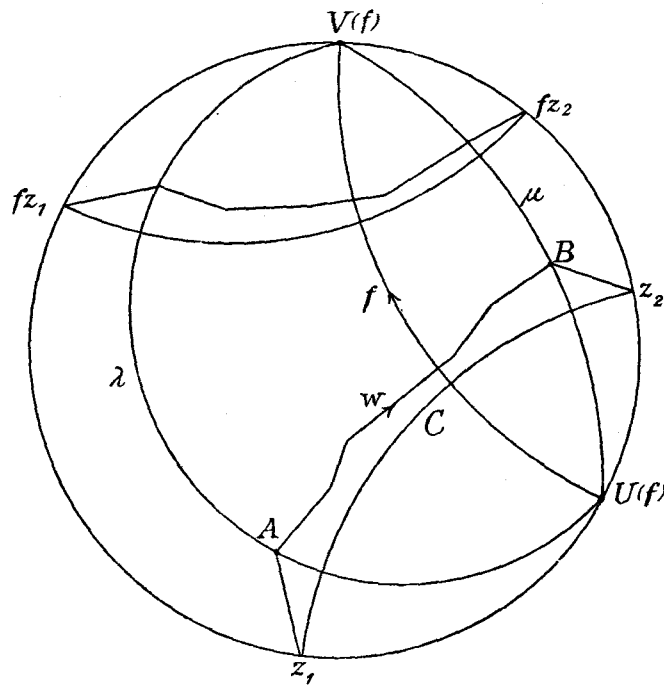


Fig. 16.

zwischen sich einen Fundamentalbereich von $\{f\}$ mit den vier »Eckpunkten» z_1, z_2, fz_2, fz_1 bei positivem Umlauf. Der Rand desselben gehört zu Ω , da ja auch die beiden Teilbögen von E von Fixpunkten frei sind.

Nun sei ξ_1 einer der Werte von $\xi(z_1)$. Ferner sei

$$\xi_2 = \xi_1 + \int_w d\xi.$$

Dann ist nach (39), für $\nu = 0$:

$$\int_{fw} d\xi = (f)_0 \xi_2 - (f)_0 \xi_1.$$

Die Beiträge zu $\int d\xi$ auf den beiden Bögen von E folgen aus (40), indem die dort gemachten Voraussetzungen hier erfüllt sind. Die vier Teilbeiträge zu $\int d\xi$ bei positivem Umlauf sind also der Reihe nach:

$$\int_{z_1}^{z_2} = \xi_2 - \xi_1$$

$$\int_{z_2}^{fz_2} = (f)_0 \xi_2 - \xi_2$$

$$\int_{fz_2}^{fz_1} = (f)_0 \xi_1 - (f)_0 \xi_2$$

$$\int_{fz_1}^{z_1} = \xi_1 - (f)_0 \xi_1,$$

und ihre Summe ist Null:

Satz 18: *Wenn s einen Automorphismus mit zyklischer Fixelementgruppe induziert und bei sE zwei fixpunktfreie periodische Intervalle entstehen, so hat die bei $s\Phi$ auftretende Fixpunktclass den Index Null.*

Es sei noch ausdrücklich darauf hingewiesen, dass über die Verschiebungsrichtung der Punkte der fixpunktfreien Intervalle bei der Abbildung sE nichts vorausgesetzt zu werden brauchte.

42. Die Birkhoffsche Formel.

In diesem Paragraphen wird das Fixpunktproblem (für $p > 1$) für die zur Klasse der Identität gehörigen stetigen Abbildungen erledigt.

Es sei also $\sigma\varphi$ eine zur Klasse der Identität gehörige σ -Abbildung, die der Annahme α (§ 37) genügt. Dann können wir annehmen, dass auf dem Netz N keine Fixpunkte der über σ liegenden S -Funktionen vorkommen. s sei die über σ liegende und den identischen Automorphismus I_0 induzierende S -Funktion; s ist also mit allen Elementen von F vertauschbar.

Nun soll der Index der durch $s \mathcal{D}$ dargestellten Fixpunktklasse von $\sigma \varphi$ bestimmt werden. Da die Fixelementgruppe $H(I_0)$ mit F identisch ist, ist $\int d\xi$ über den Rand eines Fundamentalbereichs von F bei positivem Umlauf zu bilden, indem dieser die Rolle der Kurve C (§ 37) spielt. Wir wählen die zentrale Masche B , deren Rand als von Fixpunkten frei angenommen wurde. Die Eckpunkte von B seien, von dem zunächst unterhalb der positiv-reellen Achse liegenden anfangend, linksläufig mit $Q_0, Q_1, \dots, Q_{4p-1}$ bezeichnet. Dann ist

$$\begin{aligned} Q_1 &= a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} Q_0 \\ Q_2 &= a_1^{-1} Q_1 \\ Q_3 &= b_1 Q_2 = a_1^{-1} Q_0 \\ Q_4 &= b_1 a_1 b_1^{-1} Q_3 = b_1 Q_1, \end{aligned}$$

und hiernach wiederholen sich diese Elemente, nur mit den Indizes 2, 3, u.s.w. Es werde für $\xi(Q_0)$ einer seiner Werte, ξ_0 , fixiert. Ferner sei dann

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_0 + \int_{Q_0}^{Q_1} d\xi \\ \xi_2 &= \xi_1 + \int_{Q_1}^{Q_2} d\xi \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_{4p} &= \xi_{4p-1} + \int_{Q_{4p-1}}^{Q_0} d\xi, \end{aligned}$$

wobei die Integrale längs der Randseiten von B zu bilden sind. Der gesuchte Index ist dann $\xi_{4p} - \xi_0$. Wegen

$$Q_1 = a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} Q_0$$

geht nun ξ_1 aus ξ_0 durch eine derjenigen topologischen Abbildungen der ξ -Achse auf sich hervor, die zu dem Element $a_1 b_1^{-1} a_1^{-1}$ gehören, etwa in der früheren Bezeichnung:

$$\xi_1 = (a_1 b_1^{-1} a_1^{-1})_{v_1} \xi_0, \quad (41)$$

und ebenso gibt es eine bestimmte ganze Zahl v_2 so, dass

$$\xi_2 = (a_1^{-1})_{v_2} \xi_1. \quad (42)$$

Nun ist

$$\xi_3 = \xi_2 + \int_{Q_2}^{Q_3} d\xi = \xi_2 - \int_{Q_0}^{Q_1} d((a_1^{-1})_{v_2} \xi) = \xi_2 - [(a_1^{-1})_{v_2} \xi_1 - (a_1^{-1})_{v_2} \xi_0]$$

auf Grund von (39), also wegen (42), (41), (36), (29 a) und (30):

$$\begin{aligned} \xi_3 &= (a_1^{-1})_{v_2} \xi_0 \\ &= (a_1^{-1})_{v_2} (a_1 b_1 a_1^{-1})_{-v_1} \xi_1 \\ &= (a_1^{-1})_{v_2} (a_1 b_1 a_1^{-1})_{-v_1} (a_1)_{-v_2} \xi_2 \\ &= (a_1^{-1})_0 (a_1 b_1 a_1^{-1})_0 (a_1)_0 (1)_{-v_1} \xi_2 \\ &= (b_1)_{-v_1} \xi_2. \end{aligned}$$

Weiter ist dann

$$\begin{aligned} \xi_4 &= \xi_3 + \int_{Q_3}^{Q_4} d\xi = \xi_3 - \int_{Q_1}^{Q_2} d((b_1)_{-v_1} \xi) = \\ &= \xi_3 - (b_1)_{-v_1} \xi_2 + (b_1)_{-v_1} \xi_1 \\ &= (b_1)_{-v_1} (a_1 b_1^{-1} a_1^{-1})_{v_1} \xi_0 \\ &= (b_1)_0 (a_1 b_1^{-1} a_1^{-1})_0 \xi_0 \\ &= (b_1)_0 (a_1)_0 (b_1)_0^{-1} (a_1)_0^{-1} \xi_0. \end{aligned}$$

Somit wird der gesuchte Index, da sich die letzte Formel mit Erhöhung der Indizes wiederholt,

$$\begin{aligned} \xi_{4p} - \xi_0 &= R((a_i)_0, (b_i)_0)^{-1} \xi_0 - \xi_0 \\ &= (r_1)^{2-2p} \xi_0 - \xi_0 = 2 - 2p \end{aligned}$$

auf Grund der letzten Relation der Gruppe (F).

Der Index der durch $s\Phi$ dargestellten Fixpunktklasse ist also $2 - 2p$.

Es bleiben noch die Indizes möglicher anderer Fixpunktklassen zu bestimmen. Es sei also f ein beliebiges Element aus E . Die mit $s\Phi$ verwandte S -Funktion $fs\Phi$ induziert den inneren Automorphismus $I_{0f^{-1}}$, vgl. § 12 und folgende. Die zugehörige Randabbildung ist fE mit den Fixpunkten $U(f)$ und $V(f)$ und zwei durch sie bestimmten periodischen fixpunktfreien Intervallen (§ 14). Die Fixelementgruppe $H(I_{0f^{-1}})$ ist die zyklische Gruppe $\{f^*\}$, wo f^* das zu der Achse von f gehörige primäre Element ist (§ 17). Nach Satz 18 hat somit die zugehörige Fixpunktklasse — wenn es überhaupt Fixpunkte bei $fs\Phi$ gibt — den Index Null.

Zusammenfassend haben wir also:

Satz 19: *Die endlich vielen Fixpunktklassen einer zur Klasse der Identität gehörigen Abbildung $\sigma\varphi$ haben alle den Index Null bis auf eine einzige, topologisch notwendige Klasse, die den Index $2 - 2p$ hat.*

Insbesondere gilt also auch für die Indexsumme

$$\Xi(I_0) = 2 - 2p, \tag{43}$$

wobei durch den Repräsentanten I_0 der Automorphismenfamilie der Identität, der als Argument von Ξ gesetzt ist, angedeutet werden soll, dass es sich wirklich um eine für die Abbildungsklasse gültige Formel handelt.

Nach Satz 17 ist (43) auch für $p=1$ richtig.

Die Formel (43) verdankt man G. D. BIRKHOFF¹⁷, der sie für eindeutige analytische Abbildungen einer analytischen Fläche vom Geschlecht p mit Hilfe eines von POINCARÉ stammenden Lemmas beweist und daraus auch für den allgemeinen topologischen Fall die Existenz mindestens eines Fixpunktes erschliesst. Durch die vorstehenden Ausführungen wird die Gültigkeit der Formel auf beliebige stetige Abbildungen von der Klasse der Identität ausgedehnt, ferner erkannt, dass, obwohl beliebig viele Fixpunktklassen auftreten können (§ 24), die Indexsumme $2 - 2p$ immer vom Beitrag einer einzigen Fixpunktklasse stammt, und endlich die Annahme endlich vieler Fixpunkte durch die viel schwächere Annahme α ersetzt. Wenn man nicht nur die Existenz von Fixpunkten überhaupt nachweisen, sondern auch die Rolle der einzelnen Fixpunktklassen durch Indizes bewerten will, kommt man natürlich um eine Annahme von der Art der Annahme α nicht herum; man braucht ja nur zu bedenken, dass in dem Grenzfall, wo alle

¹⁷ Dynamical systems with two degrees of freedom, Trans. Amer. Math. Soc. Bd. 18, besonders S. 286 ff.

Punkte von φ Fixpunkte von $\sigma\varphi$ sind, der Begriff des Index längst seinen Sinn verloren hat.

Dass es topologische Abbildungen von der Klasse der Identität mit *nur einem* Fixpunkt gibt, zeigt z. B. v. KERÉKJÁRTÓ¹⁸ durch ein Beispiel. Man konstruiert ein solches einfacher mittels des folgenden mir von H. KNESER mündlich mitgeteilten Hilfssatzes:

Eine topologische Abbildung einer Kreislinie auf sich, die mindestens einen Fixpunkt hat, lässt sich zu einer topologischen, im Inneren fixpunktfreien Abbildung der Kreisscheibe ergänzen.

In der Tat, wenn O ein Fixpunkt und P ein beliebiger Punkt der Kreislinie, P' das Bild von P (das auch mit P zusammenfallen kann) und p ein beliebiger Punkt auf der Sehne OP ist, so kann man festsetzen, dass der Bildpunkt p' von p auf der Sehne OP' liegen und etwa

$$\frac{Op'}{OP'} = \left(\frac{Op}{OP}\right)^2$$

sein soll.

An die Stelle der Kreisscheibe kann natürlich eine beliebige Jordanscheibe treten. Nun bilde man die einzelnen Randseiten des Fundamentalbereichs B von F so auf sich ab, dass ausser den Endpunkten der Randseite keine Fixpunkte vorkommen, und überdies noch so, dass die Abbildungen auf äquivalenten Randseitenpaaren durch das betreffende F -Element in einander transformiert werden. Diese topologische Abbildung des Randes von B auf sich, die in den $4p$ Ecken, und nur da, Fixpunkte hat, ergänze man nach dem Hilfssatz zu einer im Inneren fixpunktfreien Abbildung der Masche B . Die hierdurch bestimmte topologische Abbildung von φ gehört zur Klasse der Identität und hat als Fixpunkt nur den einen Punkt, über dem die Ecken von B liegen. — Hier liegt also nur die topologisch notwendige Fixpunktklasse, und diese nur durch *einen* Punkt vertreten, vor. Der Index dieses Punktes ist $2-2p$.

43. Die Alexandersche Formel.

In diesem Paragraphen wird ein von J. W. ALEXANDER¹⁹ herrührender, ausserordentlich wertvoller Satz wiedergegeben, der (in der hier verwendeten Termi-

¹⁸ Vorlesungen über Topologie I, Verlag Springer, 1923, S. 214.

¹⁹ J. W. ALEXANDER, Invariant points of a surface transformation of given class, Transact. Amer. Math. Soc. Vol. 25.

nologie gesprochen) die Summe Ξ der Indizes aller Fixpunktklassen explizit anzugeben gestattet. Dabei wird über die Abbildung eine recht spezielle Annahme gemacht; aber es ist ersichtlich, dass das Resultat von dieser Annahme unabhängig ist, wenn man, wie es bei späteren Anwendungen der Fall ist, von anderer Seite her weiss, dass Ξ nur von der betrachteten Automorphismenfamilie abhängt, so dass es genügt, Ξ in einem speziellen Fall zu bestimmen. — Die folgende Herleitung steht mit der von Alexander selbst gegebenen in engstem Zusammenhang.

Es sei ein beliebiger Automorphismus I gegeben. Nach § 23 konstruiere man eine T -Funktion $t\Phi$ mit folgenden Eigenschaften:

1. t induziert I .
2. Bezeichnet $\tau\varphi$ die topologische Abbildung von φ , über der $t\Phi$ liegt, und Σ das kanonische Schnittsystem

$$\Sigma = A_1, B_1, \dots, A_p, B_p$$

auf φ mit dem gemeinsamen Punkt Q , so soll auf Σ kein Fixpunkt von $\tau\varphi$ liegen.

3. τQ soll nicht auf Σ liegen.
4. $\tau\Sigma$ soll Σ nur in endlich vielen Punkten treffen, und in jedem dieser Punkte soll eine wirkliche Überschneidung einer Kurve von Σ mit einer solchen von $\tau\Sigma$ stattfinden. — Am Schluss von § 23 wurde dies dadurch erreicht, dass das Bild des über Σ liegenden Netzes N bei t aus geodätischen Linienstücken bestand, deren Endpunkte ausserhalb N lagen.

Die Eigenschaften 2), 3) und 4) bestehen dann auch bei $\tau^{-1}\varphi$.

Die Grundmasche B des Netzes N wird durch $t^{-1}N$ in endlich viele einfach zusammenhängende Teilbereiche

$$O_1, O_2, \dots, O_\nu$$

zerlegt. Dann wird B durch tN ebenfalls in ν Teilbereiche zerlegt, von denen jeder mit einem der Bereiche tO_i äquivalent ist. Es seien

$$t_1 O_1, t_2 O_2, \dots, t_\nu O_\nu$$

diese neuen Teilbereiche von B , wobei die t_i also mit t verwandte T -Funktionen sind, also über $\tau\varphi$ liegen. t_i kann für verschiedene Werte von i dieselbe T -Funktion sein. Die Anzahl der verschiedenen Fixpunktklassen bestimmenden unter diesen T -Funktionen ist höchstens gleich der Anzahl nicht isogredienter T -Funktionen über $\tau\varphi$, bei denen B mit seinem Bild Punkte gemein hat. Ohne dass

wir diese Anzahl zu bestimmen brauchen, können wir nun so schliessen: Fixpunkte von $t_i O_i$ gehören zur selben Fixpunktklasse von $\tau\varphi$ als Teil der Fixpunktmenge von $t_i \Phi$, und der Index dieser Fixpunktteilmenge ist gleich $\int d\xi(x; t_i)$, erstreckt über den positiv umlaufenen fixpunktfreien Rand von O_i . Selbst wenn erst mehrere der O_i eine Fixpunktklasse von $\tau\varphi$ vollständig enthalten, gilt doch, dass die Summe Ξ der Indizes aller Fixpunktclassen von $\tau\varphi$ durch die Summe der Indizes der positiv umlaufenen Ränder der Gebiete O_i bei $O_i \rightarrow t_i O_i$ gemessen wird, und diese soll nun ermittelt werden.

Man bezeichne wieder die Ecken von B mit

$$Q_0, Q_1, \dots, Q_{4p-1}$$

wie in § 42. Q^- bzw. Q^+ seien die über $\tau^{-1}Q$ bzw. τQ liegenden Punkte von B. h sei eine der gerichteten Kurven des Systems Σ , H diejenige über h liegende Randseite von B, bei deren Durchlaufung B zur Linken liegt, fH die damit äquivalente Randseite von B. H^- bzw. H^+ sei die Menge der über $\tau^{-1}h$ bzw. τh liegenden Jordanbögen in B. Nun durchlaufe ein Punkt p auf φ die gerichtete Kurve $\tau^{-1}h$. Der über p liegende Punkt P von B durchläuft dann H^- und springt dabei endlich oft von einem Randpunkt von B zu dem äquivalenten. P werde dabei stets demjenigen der an H^- stossenden Bereiche O_i zugerechnet, auf dessen Rand er einen positiven Bogen durchläuft; i nimmt dabei also der Reihe nach verschiedene Werte an. Dann durchläuft $t_i P$ stetig und monoton die Randseite H oder fH , je nachdem τ die Indikatrix erhält oder umkehrt, also je nachdem der Grad ε von τ den Wert $+1$ oder -1 hat. Nehmen wir zunächst den ersten Fall an. Dann sei Q_v der Anfangspunkt, also Q_{v+1} der Endpunkt von H . Der Richtungshalbstrahl $P \rightarrow t_i P$ geht von der Lage $Q^- Q_v$ aus und endet in der Lage $Q^- Q_{v+1}$ und schneidet stets die Netzgerade, auf der H liegt. Der zugehörige Richtungspunkt z ist also an den einen Teilbogen (H) von E gebunden, der durch diese Netzgerade bestimmt wird und auf der von B abgewandten Seite liegt. Jedem Sprung von P entspricht ein Sprung von z auf dem Teilbogen (H) von E , der nach Grösse und Vorzeichen völlig bestimmt ist. Rechnet man zunächst diese Sprungwerte mit ein, so durchläuft der Richtungspunkt $z[P, t_i P]$ den positiven Teilbogen $z(Q^-, Q_v) \rightarrow z(Q^-, Q_{v+1})$ auf E , während P H^- durchläuft. Lässt man h der Reihe nach jede Kurve von Σ und deren Reziproke sein, so vollführt z einen positiven Umlauf um E und genau ebenso für $\varepsilon = -1$ einen negativen Umlauf um E . Man kann die Sprünge als durch eine stetige Variation des Richtungshalbstrahles erzeugt denken,

indem man den Punkt P jedesmal, wenn er einen Randpunkt von B erreicht, geradlinig durch das Innere von B zum äquivalenten Randpunkt wandern lässt und während dieser Bewegung von P den Bildpunkt festhält, sodass sich der Richtungshalbstrahl um den Bildpunkt dreht. Mit dieser Festsetzung können wir, wenn Σ^- die Menge aller H^- , also das Abbild von $\tau^{-1}\Sigma$ in B bedeutet, schreiben

$$\int_{\Sigma^-} d\xi = \varepsilon.$$

Nun lässt man P einen positiven Umlauf um B ausführen. Der Bildpunkt $t_i P$ (mit wechselndem i) liegt dabei auf Σ^+ , d. h. über $\tau\Sigma$, springt also jedes Mal, wenn P Σ^- überkreuzt. Rechnet man wieder die Sprungwerte ein, indem man jetzt den Originalpunkt P festhält, während der Bildpunkt die »Sprungsehne« des konvexen Bereiches B durchläuft, so wird $\int d\xi$ längs H durch den auf $E-(H)$ gelegenen Bogen $z(Q_v, Q^+) \rightarrow z(Q_{v+1}, Q^+)$ gemessen, der unabhängig von ε und zwar immer positiv ist; insgesamt ergibt das für alle $4p$ Seiten H einen positiven Umlauf um E . Es ist also

$$\int_{\Sigma+\Sigma^-} d\xi = 1 + \varepsilon, \tag{44}$$

wobei das Integral die von der positiven Umlaufung der Begrenzungen aller O_i herrührenden Beiträge und überdies noch die Sprungwerte enthält. Es ist also noch die Summe der Sprungwerte zu bilden und abzuziehen.

Betrachten wir also einen Punkt x auf der Randseite H von B , in dem Σ^- an den Rand von B stösst. Er liegt über einem Schnitt zwischen der Kurve h von Σ und etwa der Kurve $\tau^{-1}k$ von $\tau^{-1}\Sigma$ (Fig. 17). Der mit x äquivalente Punkt auf dem Rande von B heisse x' ; von diesem aus setzt sich die über $\tau^{-1}k$ liegende Kurvenstückmenge K^- in B fort. Die vier an x und x' stossenden Gebiete O_i seien wie in der Figur mit O_1, O_2, O_3, O_4 bezeichnet. Der Bildpunkt $y = t_1 x$, der bei der positiven Umlaufung von O_1 als Bildpunkt von x auftritt, liegt auf dem Rande von B als Schnitt einer über k liegenden Randseite mit H^+ . Der damit äquivalente Randpunkt sei y' . Dann überlegt man sich leicht, dass

$$\begin{aligned} t_1 x &= y \\ t_2 x &= y' \\ t_3 x' &= y \\ t_4 x' &= y' \end{aligned} \tag{45}$$

ist. Um über die Lage von y und y' , von denen man nur weiss, dass sie äquivalent und von x und x' verschieden sind, nichts vorauszusetzen, sind diese beiden Punkte in der Figur 17 nicht gezeichnet; es wird nur durch Hineinschreiben

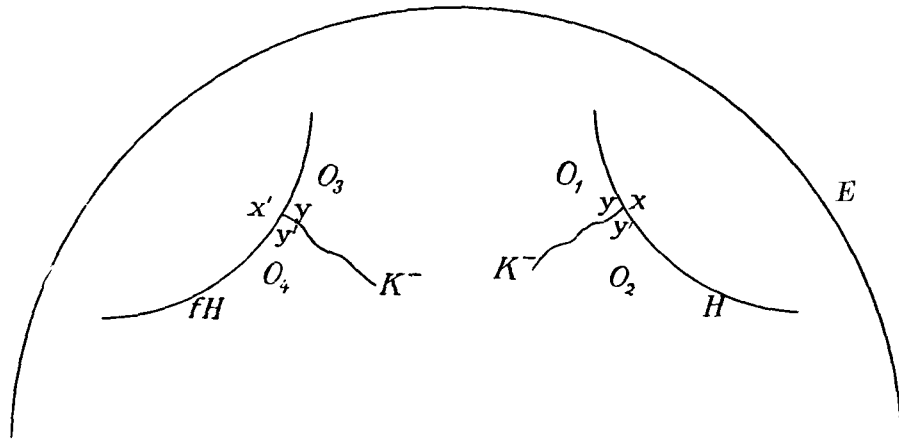


Fig. 17.

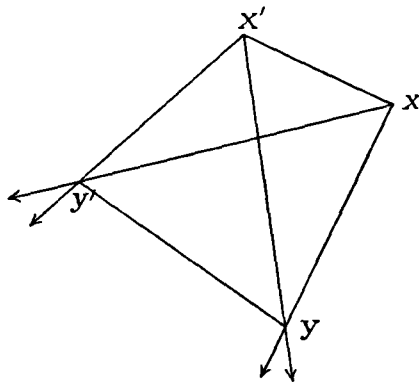


Fig. 17 a.

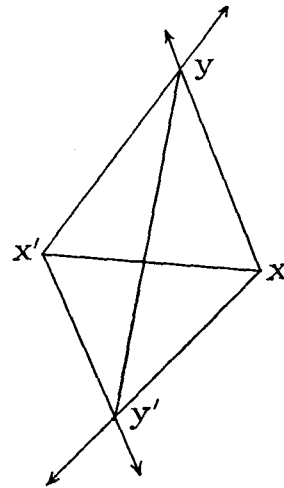


Fig. 17 b.

dieser Buchstaben in die bei x und x' entstehenden Ecken an (45) erinnert. Vergegenwärtigt man sich nun die oben geschilderte stetige Erzeugung der Sprungwerte, bei der man von Originalpunkt P und Bildpunkt \bar{P} jeweils den einen fest-

hält und den anderen eine Sehne des konvexen Bereiches B durchwandern lässt, so findet man das Folgende über die 4 zu dem betrachteten Schnitt gehörigen Sprungwerte:

	P	\bar{P}	$P\bar{P}$ dreht um
Bei Durchlaufung von K^- auf x zu	durchläuft xx'	fest in y	y
» » » fH	fest in x'	durchläuft yy'	x'
» » » K^- auf x' zu	durchläuft $x'x$	fest in y'	y'
» » » H	fest in x	durchläuft $y'y$	x

Der Strahl $P\bar{P}$ geht also von der Stellung xy aus und kehrt zu dieser zurück, sodass der Richtungspunkt z des Strahles eine ganze Anzahl von Umläufen um E ausführt. Nun sind die Punkte x, x', y und y' die Ecken eines konvexen Polygons; keiner von ihnen fällt in eine Ecke von B und höchstens zwei auf dieselbe Seite. Wenn nun die Sehnen xx' und yy' sich nicht schneiden, so ist die Sprungsumme Null, wie man aus obiger Tabelle und Fig. 17 a leicht abliest; wenn die Sehnen sich aber schneiden, so zeigt Fig. 17 b, dass die Sprungsumme eine Volldrehung in dem durch die Punktfolge

$$xy'x'y \tag{46}$$

bestimmten Umlaufsinn ausmacht. (Diese Bestimmung der zu einem bestimmten Schnitt zwischen Σ und $\tau\Sigma$ gehörigen Sprungsumme wie auch die obige Ermittlung der Zahl $1 + \varepsilon$ ist übrigens unabhängig von der benutzten Metrik.) Dafür aber, dass die Punktepaare xx' und yy' sich auf dem Rande von B trennen, ist notwendig und hinreichend, dass die beiden benutzten Kurven h und k ein konjugiertes Paar des kanonischen Schnittsystems Σ auf φ sind. Nun kann man der Überschneidung einer Kurve durch eine andere auf der orientierbaren Fläche φ dadurch die Ordnungszahl $+1$ oder -1 zuordnen, dass man etwa festsetzt, dass A_1 die Kurve B_1 mit der Ordnungszahl $+1$ überschneidet. Soll nun die zu dem oben betrachteten Schnitt gehörige Sprungsumme eine positive Volldrehung ausmachen, so muss nach (46) y' auf der an H und fH stossenden Randseite von B liegen. Durchläuft ein Punkt P von x aus K^- ins Innere von B , so durchläuft der Bildpunkt t_2P ein Stück dieser Randseite in positiver oder negativer Richtung, je nachdem $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ ist. Dementsprechend wird h von $\tau^{-1}k$ in gleichem oder entgegengesetztem Sinne wie von k überschritten. Umgekehrt ist

es für eine negative Volldrehung. Nun bezeichne man nach Poincaré mit $N(k, h)$ die algebraische Summe der Ordnungszahlen, die zu den Überschneidungen der gerichteten Kurve h durch die gerichtete Kurve k gehört. Dann ist die zu allen Schnittpunkten zwischen $\tau^{-1}k$ und h gehörige Sprungsumme, als Anzahl von ganzen Umläufen des Richtungspunktes z um E , also als ganzzahliger Summand in $\int d\xi$ gedeutet, durch

$$N(\tau^{-1}k, h) \cdot N(k, h) \cdot \varepsilon = N(k, \tau h) \cdot N(k, h)$$

gegeben, indem durch Ausübung von τ die Ordnungszahl mit ε multipliziert wird. Das gilt auch, wenn k und h kein konjugiertes Paar bilden, indem dann $N(k, h) = 0$ ist. Insgesamt ergibt sich also wegen

$$N(A_i, B_i) = -N(B_i, A_i) = 1$$

für die Sprungsumme die Zahl

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p [N(A_i, B_i) \cdot N(A_i, \tau B_i) + N(B_i, A_i) \cdot N(B_i, \tau A_i)] \\ &= - \sum_{i=1}^p [N(\tau B_i, A_i) + N(B_i, \tau A_i)] \end{aligned}$$

und durch Subtraktion derselben von dem oben ermittelten Betrage (44) für die Indexsumme Ξ die Formel

$$\Xi_A = 1 + \varepsilon + \sum_{i=1}^p [N(\tau B_i, A_i) + N(B_i, \tau A_i)]. \quad (47)$$

Das ist die Formel von J. W. ALEXANDER. Durch Hinzufügung des Index A zu Ξ soll angedeutet werden, dass die Formel allgemein nur unter Gültigkeit der obigen Voraussetzungen über die Abbildung $\tau\varphi$ bewiesen ist. Für ihre Ausdehnung auf die Fälle $p=0$ und $p=1$ sei auf die l. c.¹⁹⁾ genannte Arbeit von Alexander verwiesen. Für $p=1$ folgt sie auch aus den l. c.¹⁵⁾ genannten Arbeiten des Verfassers.

Die Schnittzahlen $N(h, k)$ zweier Kurven h und k auf φ , die sich nur endlich

oft treffen, sind von POINCARÉ wie folgt bestimmt²⁰: Man stelle h und k in F dar und mache die Erzeugenden von F vertauschbar:

$$h \sim \prod_{i=1}^p a_i^{\alpha_i} b_i^{\beta_i}$$

$$k \sim \prod_{i=1}^p a_i^{\alpha'_i} b_i^{\beta'_i}.$$

Dann ist

$$N(h, k) = \sum_{i=1}^p \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha'_i & \beta'_i \end{vmatrix}. \quad (48)$$

Die Minimale Schnitzzahl und die Ordnungszahl jedes Schnittpunktes (jeder »Schnittklasse«) wird durch die Schnitte der Achsen von h und k dargestellt und ist leicht aus den Entwicklungen der Grundpunkte $V(h)$ und $V(k)$ abzulesen. Man erkennt dadurch, wie sich $N(h, k)$ aus den auf die einzelnen Schnittklassen, d.h. Achsenschnitte, verteilten Ordnungszahlen $+1$ und -1 zusammensetzt.

Ist die Schnitzzahl von h und k nicht endlich, so wird man $N(h, k)$ durch (48) definieren. Diese Zahl hängt also nur von den die Kurven darstellenden Elementklassen von F ab.

Ist nun die zu $\tau\varphi$ gehörige Automorphismenfamilie durch den zu Anfang angeführten Automorphismus I :

$$[a_i \rightarrow a'_i, b_i \rightarrow b'_i]$$

bestimmt, und ist (bei Vertauschbarkeit der Erzeugenden)

$$a'_e \sim \prod_{i=1}^p a_i^{\alpha_{ei}} b_i^{\beta_{ei}} \quad (49)$$

$$b'_e \sim \prod_{i=1}^p a_i^{\gamma_{ei}} b_i^{\delta_{ei}},$$

so ist nach (48)

$$N(\tau B_i, A_i) = -\delta_{ii}$$

$$N(B_i, \tau A_i) = -\alpha_{ii},$$

²⁰ Cinquième Complément à l'Analysis Situs, Rend. d. Circ. mat. d. Palermo XVIII (1904).

also wird (47):

$$\Xi_A = 1 + \varepsilon - \sum_{i=1}^p (\alpha_{ii} + \delta_{ii}). \quad (50)$$

Ξ_A hängt also nur von der Automorphismenfamilie ab und zwar ausser von ε nur von der *Spur* der (49) bestimmenden Exponentensummenmatrix. Wenn der als richtig zu vermutende Satz, dass die Indexsumme Ξ nur von der Abbildungsklasse abhängt, allgemein bewiesen wird, so ist $\Xi_A = \Xi$.

Ist I der identische Automorphismus, so ist

$$\varepsilon = \alpha_{ii} = \delta_{ii} = 1, \quad i = 1, \dots, p,$$

und (50) ergibt

$$\Xi_A(I_0) = 2 - 2p.$$

Das ist (unter den jetzigen speziellen Voraussetzungen) die Birkhoffsche Formel (43), die im vorigen Paragraphen unter allgemeineren Voraussetzungen (nämlich nur der Annahme α) abgeleitet wurde.

Transformiert man die betrachtete Abbildung $\tau\varphi$ mit einer beliebigen topologischen Abbildung $\tau_1\varphi$, so hat $\tau_1\tau\tau_1^{-1}$ denselben Wert von ε wie τ und genügt denselben Voraussetzungen, die zur Formel (50) führten. Ferner hat $\tau_1\tau\tau_1^{-1}$ nach § 36 denselben Wert von Ξ , also von Ξ_A , wie τ . Somit folgt, dass die Spur $\Sigma(\alpha_{ii} + \delta_{ii})$ der Exponentensummenmatrix sich bei Transformation des Automorphismus mit einem beliebigen Automorphismus nicht ändert.

44. Vollständige Lösung des Fixpunktproblems für alle die Indikatrix erhaltenden Abbildungsklassen, in deren Automorphismenfamilie Automorphismen endlicher Ordnung vorkommen.

Es sei $s\mathcal{D}$ eine über $\sigma\varphi$ liegende S -Funktion, die der Annahme α genügt, und der von s induzierte Automorphismus I (erster Art) sei von endlicher Ordnung:

$$I^n = I_0.$$

Dann ist $H(I) = 1$ und sE fixpunktfrei (§ 11). Der Fundamentalbereich von $H(I)$ ist \mathcal{D} selbst. $\int d\xi$ über den Rand E von \mathcal{D} ergibt den Index $+1$ für die durch $s\mathcal{D}$ dargestellte Fixpunktclassen von $\sigma\varphi$. — Betrachten wir nun die mit s

verwandte S -Funktion fs . Diese induziert $I_{f^{-1}}$. Aus f und I bildet man das Element k der Gleichung (13), § 19.

Ist nun $k \neq 1$, so ist $H(I_{f^{-1}})$ zyklisch, und bei fsE entstehen zwei periodische fixpunktfreie Intervalle (§ 19). Nach Satz 18 (§ 41) hat also die durch $fs\mathcal{O}$ dargestellte Fixpunktklasse den Index Null. Insbesondere kann $fs\mathcal{O}$ fixpunktfrei sein.

Ist aber $k=1$, so ist $(I_{f^{-1}})^n = I_0$ (§ 19), und die durch $fs\mathcal{O}$ dargestellte Fixpunktklasse hat wie die durch $s\mathcal{O}$ dargestellte den Index $+1$. Die Bedingung dafür, dass das wirklich eine neue Fixpunktklasse von $\sigma\varphi$ ist, ist nach § 33 die, dass f nicht in Bezug auf I mit 1 isogredient ist. Die Anzahl der Fixpunktklassen von $\sigma\varphi$ mit einem von Null verschiedenen Index ist somit gleich der Anzahl der Isogredienzklassen bezüglich I , die Lösungen der Gleichung (16) (§ 19) sind. Diese Anzahl hängt nur von I ab, und die Indexsumme Ξ ist daher für alle Abbildungen der betrachteten Abbildungsklasse dieselbe. Sie kann somit unter den speziellen Voraussetzungen, die zur Alexanderschen Formel (47) oder (50) führen, ermittelt werden. Wir haben also:

Satz 20: *Induziert eine S -Funktion einen Automorphismus erster Art endlicher Ordnung, so hat die stetige Flächenabbildung, die sie darstellt, genau*

$$2 - \sum_{i=1}^p (\alpha_{ii} + \delta_{ii})$$

Fixpunktklassen mit dem Index 1 und ausserdem nur noch möglicherweise Fixpunktklassen mit dem Index Null. — Die Bedeutung der Zahlen α_{ii} und δ_{ii} ist durch (49) gegeben.

Zugleich folgt als rein gruppentheoretisches Korollar:

Satz 21: *Ist I ein Automorphismus erster Art von F von der Ordnung n mit den Exponentensummen (49), so hat die Gleichung*

$$x x_I x_{I^2} \cdots x_{I^{n-1}} = 1$$

genau

$$2 - \sum_{i=1}^p (\alpha_{ii} + \delta_{ii})$$

bezüglich I nicht isogrediente Lösungen. Also ist

$$\sum (\alpha_{ii} + \delta_{ii}) \leq 1,$$

da es jedenfalls immer die Lösung $x = 1$ gibt.

Beispiel 7: Der Automorphismus

$$I: [a_i \rightarrow a_{i+1}, b_i \rightarrow b_{i+1}] \quad (i \bmod p)$$

hat die Ordnung p . Hier ist

$$a_{ii} = \delta_{ii} = 0,$$

also

$$\Xi_1 = 2.$$

Die Gleichung

$$x x_I \cdots x_{I^{p-1}} = 1 \tag{51}$$

hat ausser der Identität die Lösung

$$x = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}.$$

(Man überlegt sich übrigens auch leicht direkt durch gruppentheoretische Methoden, dass (51) nur Lösungen der Formen

$$f f_{I^{-1}}$$

und

$$f a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} f_{I^{-1}}$$

für beliebiges f aus F hat.) Diese beiden Isogredienzklassen in Bezug auf I entsprechen den zwei Fixpunktklassen mit Index $+1$, deren Existenz aus $\Xi_A = 2$ folgt. Dass das wirklich verschiedene Isogredienzklassen sind, erkennt man am einfachsten daran, dass sie zu Fixpunkten verschiedener Klasse führen: Man nehme als zu I gehörige S -Funktion die p -tel Drehung:

$$s(x) = e^{\frac{2\pi i}{p}} \cdot x.$$

$s\mathcal{O}$ hat den einzigen Fixpunkt $x=0$. Die Ecken des Fundamentalbereiches B werden bei $s\mathcal{O}$ vertauscht, liegen also über einem Fixpunkt von $\sigma\varphi: a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} s\mathcal{O}$ hat einen Fixpunkt in Q_0 und nur diesen. — Bei dieser speziellen S -Funktion sind also die beiden topologisch notwendigen Fixpunktklassen durch je einen Punkt repräsentiert, und weitere Fixpunktklassen treten nicht auf. —

Man bemerkt, dass man bei der Bestimmung des Index der Ξ_A topologisch notwendigen Fixpunktklassen von der vorangestellten Annahme α keinen Gebrauch macht, indem die Isolierbarkeit dieser Fixpunktklassen von selbst gesichert

ist. Es scheint möglich zu sein, auch für andere etwa auftretende Fixpunktklassen (mit dem Index Null, entsprechend einem $I_{f^{-1}}$, dessen zugehöriges $k \neq 1$ ist) diese Isolierbarkeit nachzuweisen, sodass im Fall dieses Paragraphen die Annahme α von selbst erfüllt wäre. Ich gehe auf die Untersuchung dieser Frage hier nicht ein, sondern füge nur noch die folgende damit im Zusammenhang stehende Bemerkung hinzu.

Es sei γ eine geschlossene, gerichtete, nicht mit Null homotope Kurve auf φ und c ein zugehöriges Element von F . Die Bedingung dafür, dass γ mit seinem Bilde $\sigma\gamma$ homotop ist, ist die, dass es ein f in F gibt, für welches

$$c_I = f^{-1} \cdot c \cdot f$$

ist. Also hat $I_{f^{-1}}$ das Fixelement $c \neq 1$, und dieses ist nach § 19 eine Potenz des primären Elements k^* , das zu der Achse des durch (13), § 19, definierten Elementes $k(f)$ gehört:

Satz 22: *Alle mit ihrem Bilde bei $\sigma\varphi$ homotopen (nicht zusammenziehbaren) Kurven werden dargestellt durch die Potenzen solcher primären Elemente von F , von denen eine Potenz in die Form*

$$ff_I \cdots f_I^{n-1}$$

gebracht werden kann.

Abgesehen von diesem genaueren Bezug auf die primären Elemente kann man also kurz sagen, dass (13) alle bei $\sigma\varphi$ dem Typus nach invarianten Kurven darstellt, wenn f ganz F durchläuft.

45. Über die Auflösung der Automorphiegleichung.

Wenn man im Falle des vorigen Paragraphen die Ξ Fixpunktklassen von $\sigma\varphi$ mit einem von Null verschiedenen Index einzeln durch die Fixpunkt mengen überlagernder S -Funktionen aufzeigen will, so hat man unter der Voraussetzung

$$I^n = I_0$$

(n ist die kleinste positive Zahl dieser Art) ein vollständiges System von bezüglich I nicht isogredienten Lösungen der Automorphiegleichung

$$\nu(x) = 1 \tag{52}$$

aufzustellen, wo zur Abkürzung

$$x x_I x_{I^2} \cdots x_{I^{n-1}} = v(x)$$

gesetzt ist und x ein Element von F bedeutet.

Wenn nun

$$n = q \cdot m, \quad q > 1, m > 1,$$

ist, so setze man

$$\mu(x) = x x_I \cdots x_{I^{m-1}}$$

und

$$\Pi(y) = y y_{I^m} \cdots y_{I^{m(q-1)}}.$$

Ist nun

$$v(x_1) = 1,$$

und setzt man

$$\mu(x_1) = y_1,$$

so folgt

$$\Pi(y_1) = 1.$$

Umgekehrt wird man (52) dadurch zu lösen suchen können, dass man erst eine Lösung y_1 der Gleichung

$$\Pi(y) = 1 \tag{53}$$

bestimmt und danach die Gleichung

$$\mu(x) = y_1 \tag{54}$$

löst. Hierbei ist es von Wichtigkeit, dass bezüglich I^m isogrediente Lösungen von (53) auf bezüglich I isogrediente Lösungen von (52) führen (das Umgekehrte ist evident):

Satz 23: Aus

$$v(x_1) = 1,$$

$$\mu(x_1) = y_1, \quad \mu(x_2) = y_2$$

und

$$y_2 = f y_1 f_{I^m}^{-1}$$

folgt

$$x_2 = f x_1 f_I^{-1}.$$

Beweis: Es sei $f x_1 f_I^{-1} = z$ gesetzt. Aus der Definition von $\mu(x)$ folgt

$$\mu(z) = \mu(f x_1 f_I^{-1}) = f \mu(x_1) f_I^{-1} = f y_1 f_I^{-1} = y_2 = \mu(x_2), \quad (55)$$

also ausführlich geschrieben:

$$z z_I \cdots z_{I^{m-1}} = x_2 x_{2I} \cdots x_{2I^{m-1}}.$$

Übt man I auf beide Seiten dieser Gleichung aus, so kommt

$$z^{-1} \mu(z) z_{I^m} = x_2^{-1} \mu(x_2) x_{2I^m},$$

also wegen (55)

$$z^{-1} y_2 z_{I^m} x_2^{-1} y_2^{-1} x_2 = I,$$

oders anders geschrieben:

$$(z x_2^{-1})_{I^m} = y_2^{-1} (z x_2^{-1}) y_2.$$

Somit hat der Automorphismus $(I^m)_{y_2^{-1}}$ das Fixelement $z x_2^{-1}$.

Nun ist

$$((I^m)_{y_2^{-1}})^q = (I^{mq})_{\mu(y_2)^{-1}} = I^{mq} = I^n = I,$$

da

$$\Pi(y_2) = f \Pi(y_1) f^{-1} = f v(x_1) f^{-1} = I$$

ist. $(I^m)_{y_2^{-1}}$ ist also ein wegen $m < n$ nicht identischer Automorphismus endlicher Ordnung und hat als solcher nur die Identität als Fixelement. Also ist

$$z x_2^{-1} = f x_1 f_I^{-1} x_2^{-1} = I,$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Aus Satz 23 folgert man für $f = I$ das Korollar:

$$\text{Aus } v(x_1) = I \text{ und } \mu(x_1) = \mu(x_2) \text{ folgt } x_1 = x_2.$$

Und daraus weiter:

$$\text{Aus } \mu(x_1) = I \text{ folgt } x_1 = I.$$

Ist $\nu(x_1) = 1$, so ist x_1^{-1} eine Lösung der Automorphiegleichung, die aus $\nu(x) = 1$ entsteht, wenn man I durch I^{-1} ersetzt. Man findet nämlich wegen $I^n = I_0$:

$$x_1^{-1} x_1^{-1} I^{-1} \cdots x_1^{-1} I^{-(n-1)} = x_1^{-1} (\nu(x_1))^{-1} x_1 = 1.$$

Bezüglich I isogrediente Lösungen führen dabei auf bezüglich I^{-1} isogrediente Lösungen.

Aus Satz 23 folgt, dass verschiedene Fixpunktklassen von $\sigma\varphi$ als verschiedene Fixpunktklassen von $\sigma^m\varphi$ bestehen bleiben, wenn m ein Teiler von n ist. Also ist

$$\Xi(I^m) \supseteq \Xi(I), \quad (56)$$

wenn m ein Teiler der Ordnung von I ist. Dabei kann sowohl das Ungleichheitszeichen wie das Gleichheitszeichen vorkommen, wie das folgende Beispiel zeigen wird. Das liegt daran, dass es zu einer Lösung y_1 von (53) nicht notwendig eine Lösung für x in (54) zu geben braucht.

Beispiel 8: Es mag noch ein Beispiel für dieses Auflösungsverfahren durchgerechnet werden, das zugleich die Fortsetzbarkeit der Faktorenerlegung des Exponenten veranschaulicht. Dabei sei $p = 2$ und der einfacheren Schreibweise wegen

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad a_2 = c, \quad b_2 = d$$

gesetzt; es ist also

$$R = a b a^{-1} b^{-1} c d c^{-1} d^{-1} = 1.$$

Nun betrachten wir den Automorphismus erster Art

$$I = \begin{cases} c^{-1} b \\ b^{-1} a^{-1} \\ a^{-1} b^{-1} c d \\ c^{-1} \end{cases}$$

und finden durch Potenzieren desselben unter Benutzung von $R = 1$:

$$I^2 = \begin{cases} c^{-1} d^{-1} \\ a c \\ b^{-1} c d \\ d^{-1} c^{-1} b a \end{cases} \quad I^4 = \begin{cases} d^{-1} c^{-1} \cdot a^{-1} \cdot d c \\ c^{-1} d^{-1} \cdot b^{-1} \cdot c d \\ c^{-1} \\ d^{-1} \end{cases}$$

und hieraus $I^8 = I_0$. Auf Grund der Exponentensummen findet man

$$\Xi(I) = \Xi(I^2) = 2, \quad \Xi(I^4) = 6.$$

Analog mit (53) sucht man nun zunächst ein Repräsentantensystem für die 6 Isogredienzklassen bezüglich I^4 , die Lösungen der Gleichung

$$y y_{I^4} = 1$$

sind, und findet mühelos die 6 Lösungen:

$$1, \quad c, \quad d, \quad acd, \quad bdc, \quad a^{-1}b^{-1}cd.$$

Dass diese 6 Elemente wirklich zu lauter verschiedenen Isogredienzklassen bezüglich I^4 gehören, folgt daraus, dass f und $f_{I^4}^{-1}$ für jedes f in allen Erzeugenden die gleichen Exponentensummen haben und die Exponentensumme in der gleichen Erzeugenden daher für zwei Elemente f_1 und $f f_1 f_{I^4}^{-1}$ eine gerade Differenz haben muss. Nun weiss man wegen $\Xi(I^2) = 2$, dass ausser dem Element 1 noch genau eines der obigen 6 Elemente in der Form $x x_{I^2}$ darstellbar sein muss. Man findet, dass die (54) entsprechende Gleichung

$$x x_{I^2} = acd$$

die Lösung

$$x = dc$$

hat. Wegen $\Xi(I) = 2$ weiss man weiter, dass es genau eine Lösung der Gleichung

$$x x_I = dc$$

geben muss, und findet hierfür die Lösung

$$x = ac.$$

Da wir uns wegen der obigen Bemerkung über reziproke Automorphismen auf die Potenzen von I bis zur vierten beschränken können, ist nur noch

$$I^8 = \begin{cases} d^{-1} c^{-1} b a c \\ c^{-1} a^{-1} d c \\ d \\ d^{-1} c^{-1} b \end{cases}$$

zu untersuchen. Man findet $\Xi(I^3) = 2$. Da nun dc eine nicht mit 1 isogrediente Lösung für I^2 ist, ist $c^{-1}d^{-1}$ eine solche für $I^6 = I^{-2}$, und die nicht mit 1 isogrediente Klasse von Lösungen für I^3 ergibt sich also durch Lösung von

$$xxI^3 = c^{-1}d^{-1}.$$

Man findet

$$x = c^{-1}.$$

Hiermit ist das Beispiel vollständig behandelt. Es hat sich ergeben: $s\mathcal{O}$ sei eine I induzierende S -Funktion; sie liege über $\sigma\varphi$. Dann gehört $\sigma^8\varphi$ zur Klasse der Identität, besitzt also nach Satz 19 eine topologisch notwendige Fixpunktmenge vom Index $2 - 2p = -2$. Für die Potenzen von σ gilt:

$\sigma\varphi$ besitzt zwei Klassen vom Index 1 dargestellt durch s und acs .
 $\sigma^2\varphi$ » » » » » 1 » » s^2 » $dc s^2$.
 $\sigma^3\varphi$ » » » » » 1 » » s^3 » $c^{-1}s^3$.
 $\sigma^4\varphi$ » sechs » » » 1 » »
 $s^4, \quad cs^4, \quad ds^4, \quad acds^4, \quad bdc s^4, \quad a^{-1}b^{-1}cds^4$.
 $\sigma^5\varphi$ besitzt zwei Klassen vom Index 1 dargestellt durch s^5 und cs^5 .
 $\sigma^6\varphi$ » » » » » 1 » » s^6 » $c^{-1}d^{-1}s^6$.
 $\sigma^7\varphi$ » » » » » 1 » » s^7 » $c^{-1}a^{-1}s^7$.
 $\sigma^8\varphi$ » eine Klasse » » -2 » » s^8 .

Für die höheren Potenzen wiederholen sich die Faktoren sowie die Klassenzahlen und Indizes; die Exponenten von s steigen weiter. Es ist ja nichts über s^8 bekannt, als dass es den identischen Automorphismus induziert.

46. Automorphismen erster Art mit Invertelementen.

Es sei I ein Automorphismus erster Art, induziert durch $s\mathcal{O}$, und $k \neq 1$ ein solches Element von F , dass

$$kI = k^{-1}$$

ist. Dann hat I den charakteristischen Exponenten 2 (§ 11) und die Randabbildung sE ist fixpunktfrei (Satz 2, § 11). Die Fixpunktmenge von $s\mathcal{O}$ hat also den Index 1. Nun betrachten wir $k^m s\mathcal{O}$. Diese S -Funktion induziert $I' = I_k^{-m}$. Es ist

$$k_{I'} = k^m k^{-1} k^{-m} = k^{-1}.$$

Also hat auch die Fixpunktmenge von $k^m s \Phi$ den Index 1. Es bleibt zu untersuchen, wann $k^m s$ mit s isogredient ist. Aus

$$k^m = l l_I^{-1}$$

folgt durch Ausübung von I

$$k^{-m} = l_I l_{I^2}^{-1}$$

und durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen

$$1 = l l_{I^2}^{-1}.$$

l muss also Fixelement von I^2 sein. Nun hat I^2 jedenfalls alle Potenzen von k als Fixelemente. Für $l = k^r$ kommt

$$k^m = k^r k_I^{-r} = k^{2r}$$

und ebenso

$$k^{2r+1} = k^r k k_I^{-r}.$$

Die geraden Potenzen von k sind also bezüglich I mit 1 und die ungeraden mit k isogredient. Soll nun etwa noch k mit 1 isogredient sein, so muss das jedenfalls auf Grund eines Fixelements l bei I^2 zustande kommen, das nicht Potenz von k ist. k ist also bestimmt nicht isogredient mit 1, wenn I^2 keine anderen Fixelemente als Potenzen von k hat:

Satz 24: *Wenn für den durch s induzierten Automorphismus erster Art I und das Element $k \neq 1$ gilt*

$$k_I = k^{-1},$$

$$H(I^2) = \{k\},$$

so hat die durch s dargestellte Flächenabbildung jedenfalls zwei Fixpunktclassen mit dem Index 1, dargestellt durch s und ks .

Beispiel 9: Betrachten wir für $p = 2$ mit derselben Bezeichnung der Erzeugenden wie im vorigen Beispiel den Automorphismus erster Art:

$$I = \begin{cases} c \\ b^{-1} c d \\ b^{-1} c a \\ c a \end{cases}.$$

Um zunächst eventuell existierenden Fixelementen von I nachzuspüren, verwenden wir die in § 16 skizzierte Methode, die darin besteht, die Ausübung von I auf ein Nicht-Fixelement zu iterieren. Es ergibt sich durch sechsmalige Wiederholung:

$$a \rightarrow c \rightarrow b^{-1} c a \rightarrow d^{-1} a c \rightarrow a^{-1} b^{-1} c a \rightarrow c^{-1} d^{-1} a c \rightarrow a^{-1} k,$$

wo

$$k = c^{-1} b a^{-1} b^{-1} c a = c^{-1} a^{-1} d c d^{-1} a$$

ist. Nun findet man bei Fortsetzung des Verfahrens:

$$k_I = k^{-1}.$$

Der Iterationsprocess führt also automatisch zur Auffindung dieses Invertelements; und zwar ist das unabhängig von dem gewählten Ausgangselement. Das ergibt sich leicht aus der Struktur der zu I gehörigen Randabbildung. Man hat sofort:

$$a_I^n = k^{-1} a k,$$

und wegen $a_I = c$

$$c_I^n = k c k^{-1},$$

also für beliebiges ganzzahliges n

$$a_I^{n^2} = k^{-n} a k^n, \quad c_I^{n^2} = k^n c k^{-n}.$$

Die Entwicklung von $U(k)$ und $V(k)$ zeigt, dass die Achse von k Durchmesser von E ist. Die beiden letzten Gleichungen zeigen, dass ihre Endpunkte die einzigen Randfixpunkte bei I^2 sind und zwei fixpunktfreie Intervalle begrenzen; die zyklische Verschiebungsrichtung auf E bei I^2 ist in beiden Intervallen dieselbe. Bei der Iteration eines beliebigen von k verschiedenen Elementes wird daher allmählich eine immer höhere Potenz von k oder k^{-1} ausgeschieden werden, sodass die Aufmerksamkeit notwendig auf k gelenkt wird.

Da nun k primär und also $H(I^2) = \langle k \rangle$ ist, hat man nach Satz 24 zwei Fixpunktklassen mit dem Index +1. Wegen

$$\alpha_{11} = 0, \quad \delta_{11} = -1, \quad \alpha_{22} = 1, \quad \delta_{22} = 0$$

hat man nach (50):

$$\Xi_{,1}(I) = 2.$$

Wenn somit auch die zwei aufgezeigten Fixpunktklassen, die durch die Alexandersche Formel berechnete Indexsumme ergeben, so ist das hier natürlich noch kein Beweis dafür, dass nicht noch andere topologisch notwendige Fixpunktklassen existieren könnten, deren Beiträge zur Indexsumme sich dann aufheben müssten. (Man kann diesen Beweis aber leicht dadurch führen, dass man ein Beispiel einer zu I gehörigen S -Funktion mit nur zwei Fixpunktklassen bildet, was wir übergehen).

Wenn man die Untersuchung auf rein gruppentheoretischem Gebiet weiterführen, also die mit I verwandten Automorphismen untersuchen will, kann man zunächst versuchen, die Form von I durch Transformation mit einem geeigneten Automorphismus zu vereinfachen. Wenn hier nicht von vornherein gleich eine einfachere Form für I zu Grunde gelegt worden ist, so ist das geschehen, um zugleich an diesem Beispiel zu zeigen, wie der Iterationsprozess selbst die Aufmerksamkeit auf den Transformator lenkt, durch welchen sich eine formelle Vereinfachung erzielen lässt.

In den obigen Rechnungen zeichnete sich die Potenz I^{12} aus. Es ist

$$I^{12} = \begin{cases} k^{-1} a k \\ k c k^{-2} c^{-1} b k \\ k c k^{-1} \\ k^{-1} a k^2 a^{-1} d k^{-1}. \end{cases}$$

Man betrachtet daher den Automorphismus erster Art

$$T = \begin{cases} a^{-1} \\ c^{-1} b \\ c^{-1} \\ a^{-1} d, \end{cases}$$

der die Relation

$$T^2 = I_0$$

erfüllt, und findet

$$J = T I T^{-1} = \begin{cases} c \\ d \\ a b \\ a^{-1}. \end{cases}$$

Man kann also die Untersuchung von I durch diejenige von J ersetzen. Hier tritt

$$k = c d c^{-1} d^{-1} = b a b^{-1} a^{-1}$$

sofort als Invertelement, zu einer Diameterachse gehörig, hervor.

$$J^2 = \begin{cases} a b \\ a^{-1} \\ c d \\ c^{-1} \end{cases}$$

setzt die Vertauschbarkeit der zu J^2 gehörigen Randabbildung mit einer Halbdrehung von E in sich in Evidenz.

Hier hat man

$$J^{12n} = \begin{cases} k^{-n} a k^n \\ k^{-n} b k^n \\ k^n c k^{-n} \\ k^n d k^{-n}. \end{cases}$$

Die Bilder der dem Element a entsprechenden Flächenkurve gehören also bei allen Potenzen der betrachteten Abbildung $\sigma\varphi$ einem Zyklus von 12 verschiedenen topologischen Typen an, die sich bei σ zyklisch vertauschen. Dasselbe gilt für alle Kurven, deren entsprechende geschlossene geodätische Linie die durch die Achse von k dargestellte geschlossene geodätische Linie z nicht schneiden, die also in F durch a und b allein oder durch c und d allein darstellbar sind. Nimmt man aber eine andere Kurve, etwa eine zu $c^{-1}b$ gehörige Kurve λ , so hat man:

$$(c^{-1}b)_{J^{12n}} = k^n c^{-1} k^{-2n} b k^n.$$

Der Typus der Kurven $\sigma^r \lambda$ ist also nicht periodisch. Die mit $\sigma^r \lambda$ homotope geschlossene geodätische Linie auf φ schliesst sich mit wachsendem r immer enger und auf immer längeren Stücken ihres Verlaufes an z an. Man hat

$$\left. \begin{array}{l} V[(c^{-1}b)_{J^{2n}}] \rightarrow V(k) \\ U[(c^{-1}b)_{J^{2n}}] \rightarrow U(k) \end{array} \right\} n \rightarrow \infty.$$

Beispiel 10: An das vorstehende Beispiel eines nicht periodischen Automorphismus mit dem charakteristischen Exponenten 2 schliessen wir noch kurz ein solches für einen charakteristischen Exponenten > 2 . Es sei ($p = 2$)

$$I = \begin{cases} b^{-1} a^{-1} d c^{-1} \\ c^{-1} \\ c^{-1} b \\ b^{-1} a^{-1}. \end{cases}$$

Hier ist $\Xi_A(I) = 4$. Man findet $c_I s = c$, also hat I den charakteristischen Exponenten 3. Dann gehört zu I eine fixpunktfreie Randabbildung, also der Index + 1. Man findet nun auch für

$$I_{c^{-1}} \text{ und } I_{a^{-1}} \text{ und } I_a$$

den charakteristischen Exponenten 3, indem die dritten, nicht aber die ersten Potenzen dieser Automorphismen beziehungsweise

$$b, b^{-1}c, c$$

zu Fixelementen haben. Nun sind die vier Elemente

$$1, c, a, d^{-1}$$

zu je zweien bezüglich I nicht isogradient; man zeigt das leicht durch Betrachtung der Exponentensummen, wodurch man zu Systemen von linearen Gleichungen in ganzzahligen Unbekannten kommt, die, wie leicht erkennbar, keine Lösungen haben. Also sind durch die obigen vier verwandten Automorphismen vier verschiedene Fixpunktklassen je mit dem Index 1 aufgezeigt.

47. Indexbestimmung bei nicht-zyklischer Fixelementgruppe.

Es sei $s\mathcal{D}$ eine über $\sigma\varphi$ liegende S -Funktion, I der durch s induzierte Automorphismus und $H = H(I) \neq 1$ die zugehörige Fixelementgruppe. H soll nicht zyklisch sein, also mehr als ein primäres Fixelement enthalten. Andererseits soll es auch Nicht-Fixelemente geben, also $H \neq F$. Nach dem in § 11 und § 14 ausgeführten ist dann I von erster Art und die Fixpunktmenge Π_E von sE ist abgeschlossen und nirgends dicht. Wenn Π_E isolierte Punkte enthält, so können das jedenfalls nicht Grundpunkte von F sein.

$\sigma\varphi$ genüge der Annahme α (§ 37). Dann sei das Netz N fixpunktfrei. Π_β sei die Fixpunktmenge von $s\mathcal{D}$. Die Menge aller derjenigen Punkte der zentralen Netzmasche B , die mit einem Punkte von Π_β äquivalent sind, werde mit einer ganz innerhalb B gelegenen Jordanpolygonscheibe c bedeckt. β sei ein Fundamentalbereich von H . Die in β gelegene Teilmenge von Π_β wird nach § 34 durch endlich viele mit c äquivalente Polygonscheiben bedeckt; ihre Menge heiße C , und HC sei diejenige Teilmenge von \mathcal{D} , die durch alle aus C durch die Operationen von H hervorgehenden Polygonscheiben gebildet wird. HC bedeckt ganz Π_β , und $\mathcal{D} - HC$ ist ein fixpunktfreies, zusammenhängendes Gebiet.

Die Menge der Häufungspunkte von HC auf E ist mit der Menge M der bezüglich H singulären Punkte (§ 29) identisch. M ist eine perfekte, nirgends dichte Menge, die eine Teilmenge von Π_E oder mit Π_E identisch ist.

Ein nicht zu Π_E gehöriger Punkt von E hat, da er nicht zu M gehört, eine fixpunktfreie Umgebung, lässt sich also durch eine fixpunktfreie Strecke mit einem Punkte von $\Phi - HC$ verbinden. Zwei solche Punkte, P und Q , lassen sich also durch einen in $\Phi - HC$ gelegenen und somit fixpunktfreien polygonalen Querschnitt verbinden, ebenso zwei andere Punkte derselben Art, die P und Q nicht trennen, durch einen ebensolchen Querschnitt, der den ersten nicht trifft.

Nun soll angenommen werden, dass es gelingt, mittels 2ν fixpunktfreier Querschnitte dieser Art in Φ einen Fundamentalbereich β für H abzugrenzen. Die Begrenzung von β soll also aus diesen 2ν Querschnitten und den zwischen ihnen gelegenen 2ν Segmenten von E , die ebenfalls als fixpunktfrei vorausgesetzt werden, bestehen. Doch soll ein solches Segment auch auf einen Punkt zusammenschrumpfen dürfen, indem zwei im Zyklus aufeinanderfolgende Querschnitte einen Endpunkt auf E gemeinsam haben können. Da β ein Fundamentalbereich von H sein soll, müssen die Querschnitte sich notwendig zu je zweien bei einem Element von H entsprechen. Man schliesst sofort, dass H dann eine freie Gruppe mit ν Erzeugenden ist.

Der Index der durch $s\Phi$ dargestellten Fixpunktklasse wird nun durch das $\int d\xi$ über die nach Voraussetzung fixpunktfreie, positiv umlaufene Begrenzung von β gemessen (§ 37). Dieses Integral soll nun ausgewertet werden.

q sei einer dieser 2ν Querschnitte, M und N seine Endpunkte. Bei der positiven Umlaufung von β werde q in der Richtung von M nach N durchlaufen. h sei das Element von H , durch welches q in den äquivalenten Berandungsquerschnitt von β übergeführt wird. Für die zugehörigen Integralbeiträge hat man wegen $h \Rightarrow s$:

$$\int_M^N d\xi + \int_{hN}^{hM} d\xi = \int_M^N d(\xi - (h)_\mu \xi),$$

wo die Unabhängigkeit dieses Wertes von der ganzen Zahl μ aus (39), § 40, folgt. Wir setzen daher $\mu = 0$ und haben nach den Entwicklungen von § 40, wenn noch einer der ξ -Werte von M mit ξ_M bezeichnet und

$$\xi_N = \xi_M + \int_M^N d\xi$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \int_M^N + \int_{hN}^{hM} &= \xi_N - \xi_M - [(h)_0 \xi_N - (h)_0 \xi_M] \\ &= \xi_N + \tau - \xi_M - [(h)_0 (\xi_N + \tau) - (h)_0 \xi_M] \end{aligned}$$

für beliebiges ganzes τ . Hier wähle man nun τ so, dass

$$0 \leq \xi_N + \tau - \xi_M < 1.$$

Die Strecke der ξ -Achse von ξ_M bis $\xi_N + \tau$ liegt über dem kleinsten positiven von sM nach sN führenden Bogen auf E , der mit

$$\text{pos}(sM \rightarrow sN)$$

bezeichnet sei. Dann liegt

$$(h)_0 (\xi_N + \tau) - (h)_0 \xi_M$$

über

$$\text{pos}(shM \rightarrow shN) = U - \text{pos}(shN \rightarrow shM),$$

wo U einen ganzen positiven Umlauf um E bedeutet. Der gesuchte Integralbeitrag wird also auf E durch

$$\text{pos}(sM \rightarrow sN) + \text{pos}(shN \rightarrow shM) - U$$

gemessen.

Ist nun O der bei Umlaufung von β auf N folgende »Eckpunkt«, in dem also der auf q folgende Querschnitt ansetzt, und berücksichtigt man, dass sE eine topologische, den Umlaufssinn erhaltende Abbildung ist, so folgt, dass

$$\int_N^O d\xi$$

durch

$$\text{pos}(sN \rightarrow sO)$$

gemessen wird. Summiert man nun diese Beiträge bei Umlaufung von β , so gibt die Summe aller dieser kleinsten positiven Bögen genau einen positiven Umlauf

um E , da die zyklische Anordnung der 2ν »Eckpunkte« von β bei s erhalten bleibt. Hiervon sind ν ganze Umläufe abzuziehen:

Der gesuchte Index ist also $1 - \nu$.

§ 41 zeigt, dass dies Ergebnis auch für $\nu = 1$ richtig ist.

Wendet man auf diesen Fall die Betrachtung des § 30 an, so ist (mit den dortigen Bezeichnungen)

$$K_1 = K \bmod H$$

eine geschlossene Fläche vom Geschlecht ν , auf der durch s eine zur Klasse der Identität gehörige Abbildung sK_1 hervorgerufen wird. Nach Satz 19 (S. 313) hat diese eine Fixpunktklasse mit dem Index $2 - 2\nu$ und überdies möglicherweise noch Klassen mit dem Index Null. Die obigen Betrachtungen zeigen nun, dass die wesentliche Klasse gerade die durch sK dargestellte ist. Dabei ist keiner der über K_1 liegenden E -Punkte Fixpunkt (die Punkte von M liegen nicht über $K \bmod H$), und der Index $2 - 2\nu$ verteilt sich der Symmetrie wegen je zur Hälfte auf Φ und Ψ .

Man achte aber darauf, dass auch solche Punkte von K , die bei s in vermittelst H äquivalente Punkte übergehen, bei sK_1 als Fixpunkte auftreten. Dass sie das obige Ergebnis nicht stören, liegt daran, dass sie eben Fixpunktklassen mit dem Index Null bilden. Das gilt auch im Fall des § 41 ($\nu = 1$) wegen Satz 17, § 38.

48. Beispiele.

Das Verfahren des vorigen Paragraphen soll an einigen Beispielen illustriert werden, die zugleich einige für die allgemeine Methode wichtige Bemerkungen zu machen gestatten.

Beispiel 11. Wir betrachten den Automorphismus \mathcal{A} des Beispiels 2, § 15. s sei eine \mathcal{A} induzierende und die Annahme α erfüllende S -Funktion. Die Randabbildung sE ist in § 15 vollständig behandelt. Es soll nun, wie dort angekündigt, ein Fundamentalbereich für

$$H(\mathcal{A}) = \{b_1, a_2, b_2, \dots, a_p, b_p\}$$

in der Art wie in § 47 konstruiert werden.

Es sei Q ein beliebiger Punkt des fixpunktfreien Intervalls i und P ein beliebiger Punkt von j (§ 15), q_1 ein sie verbindender fixpunktfreier Querschnitt in Φ . Dann verbindet $b_1 q_1$ die Punkte $b_1 Q$ und $b_1 P = P_1$. Nun werde bezeichnet:

$$\begin{aligned} P_2 &= a_2^{-1} P_1 \\ P_3 &= b_2^{-1} P_2 \\ P_4 &= a_2 P_3 \\ P_5 &= b_2 P_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_6 &= a_3^{-1} P_5 \\ P_7 &= b_3^{-1} P_6 \\ P_8 &= a_3 P_7 \\ P_9 &= b_3 P_8 \\ \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{4(p-2)+2} &= a_p^{-1} P_{4(p-2)+1} \\ P_{4(p-2)+3} &= b_p^{-1} P_{4(p-2)+2} \\ P_{4(p-1)} &= a_p P_{4(p-2)+3} \\ P' &= b_p P_{4(p-1)}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$P' = b_p a_p b_p^{-1} a_p^{-1} \dots b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} b_1 P = a_1 b_1 a_1^{-1} P.$$

P' liegt also in j .

Die genannten Punkte liegen auf E in der zyklischen Anordnung

$$P, Q, b_1 Q, P_1, P_4, P_3, P_2, P_5, P_8, P_7, P_6, \dots, P_{4(p-2)+1}, P_{4(p-1)}, P_{4(p-2)+3}, P_{4(p-2)+2}, P',$$

und keiner von ihnen ist Fixpunkt bei sE , da P und Q nicht Fixpunkte sind und nur Operationen von H ausgeübt wurden. Nun verbinde man durch fixpunktfreie Querschnitte in \mathcal{O} für $n = 0, 1, \dots, p-2$:

$$\begin{array}{llll} P_{4n+1} & \text{mit} & P_{4(n+1)} & \text{durch} & q_{n+2} \\ P_{4n+2} & \text{»} & P_{4n+3} & \text{»} & a_{n+2}^{-1} q_{n+2} \\ P_{4(n+1)} & \text{»} & P_{4n+3} & \text{»} & r_{n+2} \\ P_{4n+2} & \text{»} & P_{4(n+1)+1} & \text{»} & b_{n+2} r_{n+2} \end{array}$$

und zwar so, dass keine zwei von diesen sich in \mathcal{O} treffen. Diese letzte Bedingung kann man erfüllen. Denn man zeichne diese Querschnitte zunächst als auf E senkrechte Kreisbögen. Dann treffen sie einander nicht in \mathcal{O} und entsprechen einander richtig paarweise mittels der obigen H -Elemente. Aber sie enthalten möglicherweise Fixpunkte von $s\mathcal{O}$. Jeder von ihnen kann aber (da seine Endpunkte nicht Punkte der Randfixpunktmenge M sind) nur endlich viele

der Polygonscheiben durchsetzen, deren Gesamtheit im vorigen Paragraphen mit HC bezeichnet wurde. Man ersetze dann jedes Schnittsegment mit einer solchen Polygonscheibe durch einen polygonalen Weg in der Nähe des Scheibenrandes und zwar für äquivalente Querschnitte in gleicher Weise; dabei kann man es vermeiden, Schnittpunkte der Querschnitte mit einander einzuführen.

Durch diese $\nu = 2p - 1$ Querschnittspaare

$$q_1, q_2, \dots, q_p, r_2, \dots, r_p$$

ist ein Fundamentalbereich β von H abgegrenzt. H ist die freie Gruppe mit $2p - 1$ Erzeugenden, wie schon in § 15 bemerkt wurde.

Der zu \mathcal{A} gehörige Index ergibt sich nun nach § 47 zu

$$1 - \nu = 2 - 2p,$$

und das ist auch der Wert von $\Xi_{\mathcal{A}}$ in Formel (50).

Die Fläche $K_1 = K \bmod H(\mathcal{A})$ hat das Geschlecht $\nu = 2p - 1$. Auf ihr liegen zwei geschlossene Kurven, die von $E - M$ überdeckt werden; diese werden dargestellt durch die beiden zur Berandung von β gehörigen Segmente von E , nämlich $P'P$ in j und $Q(b_1 Q)$ in i .

Jede Abbildung $\sigma\varphi$ der durch \mathcal{A} bestimmten Abbildungsklasse hat also eine Fixpunktmenge vom Index $2 - 2p$. Dass sie nicht mehr Fixpunktmenge zu haben braucht, sieht man leicht an einer speziellen Abbildung dieser Klasse: Man schliesse eine Kurve vom Typus b_1 auf φ in einen mit einem Kreisring homöomorphen Bereich ein. Ausserhalb dieses Bereiches lasse man die Abbildung die Identität sein. Den Bereich selbst bilde man topologisch so auf sich ab, wie dies in der komplexen Ebene für den Kreisring

$$r \leq |e^{i\theta}| \leq R$$

durch die Transformation

$$\begin{aligned} \varrho' &= \varrho \\ \Theta' &= \Theta + \frac{\varrho - r}{R - r} 2\pi \end{aligned}$$

geschieht. Das Innere des Bereiches ist dann fixpunktfrei, der Rest der Fläche bildet eine zusammenhängende Fixpunktmenge, also nur eine Fixpunktmenge.

Wenn somit auch das Fixpunktproblem für die in diesem Beispiel betrachtete Abbildungsklasse vollständig gelöst ist, so hat es doch Interesse, einer gruppen-

theoretischen Lösung (die nicht die Konstruktion einer speziellen Abbildung zu Hilfe nimmt) noch etwas weiter nachzugehen. Es wäre also zu zeigen, dass mögliche andere Fixpunktklassen den Index Null haben müssen. Man hat also S -Funktionen f_s zu betrachten, wo f je einen Repräsentanten aller Isogredienzklassen bezüglich \mathcal{A} durchläuft. Das geht zunächst noch leicht, solange man f in H wählt. Dann hat nämlich \mathcal{A}_f^{-1} zufolge § 17 im Allgemeinen eine zyklische Fixelementgruppe, führt also zufolge § 41 auf den Index Null. Nur in dem Fall, wo f in b_1^{+1} transformierbar ist, also die Achse von f bei \mathcal{A} ein fixpunktfreies Intervall auf E bestimmt, hat \mathcal{A}_f^{-1} eine umfassendere Fixelementgruppe. Dann ist aber f isogredient mit 1, — siehe die Bemerkung nach Satz 7, § 18. — Wie nun aber, wenn f nicht in H liegt? Es sei z. B. $f = a_1^{-1}$. Nach Beispiel 3, § 15, führt $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_{a_1}$ auf zwei Fixpunkte auf E , die nicht Grundpunkte sind und die früher mit P^+ und P^- bezeichnet wurden, und im übrigen ist $a_1^{-1} s E$ fixpunktfrei, also $H(\mathcal{A}') = 1$.

Nach § 34 sind P^+ und P^- nicht Häufungspunkte von Fixpunkten. Also ein mit E konzentrischer Kreis mit genügend grossem Radius < 1 umschliesst die (eventuell vorhandene) Fixpunktmenge von $a_1^{-1} s \mathcal{D}$; der Index, der zu dieser S -Funktion gehört, ist also wohldefiniert. Wäre er nicht Null, so müsste sich bei jeder Abbildung der Klasse von \mathcal{A} die entsprechende neue Fixpunktklasse vorfinden, im Widerspruch zu obigem Beispiel. Aber wie kann man, ohne auf das Beispiel zu rekurrieren, allein aus der für $a_1^{-1} s$ gültigen Funktionalgleichung

$$a_1^{-1} s f x = f_{\mathcal{A}'} a_1^{-1} s x$$

erschliessen, dass der Index Null sein muss?

Die folgende Beantwortung dieser Frage reicht über das vorliegende spezielle Beispiel hinaus und trägt, wie der folgende Paragraph zeigen wird, ein wesentlich neues Moment in die Indexbestimmung hinein.

P^+ hat die Entwicklung (§ 15):

$$a_1^{-1} b_1^{-1} a_1^{-1} b_1^{-2} a_1^{-1} b_1^{-3} \dots \text{ in inf.}$$

und P^- die Entwicklung

$$a_1 b_1^{-1} a_1 b_1^{-2} a_1 b_1^{-3} \dots \text{ in inf.}$$

Wir betrachten das Fixelement bei \mathcal{A}

$$\gamma = a_2 b_1$$

und nennen die Achse desselben A . Die Entwicklungen der Grundpunkte von γ sind die periodischen Wiederholungen von $a_2 b_1$ bzw. von $b_1^{-1} a_2^{-1}$. Diese Grundpunkte trennen also P^+ und P^- von einander. Nun ist (vgl. § 15):

$$\gamma_n = \gamma A^n = a_1^{-1} b_1^{-1} a_1^{-1} b_1^{-2} \dots a_1^{-1} b_1^{-(n-1)} a_1^{-1} \cdot \gamma \cdot a_1 b_1^{n-1} \dots a_1 b_1 a_1.$$

Die Achse dieses Elements heisse A_n . Diese Achsen A_n ziehen sich mit wachsendem n auf P^+ zusammen.

sA ist ein Jordanbogen, der die Grundpunkte von

$$\gamma_1 = a_1^{-1} \gamma a_1$$

verbindet und durch die Verschiebung γ_1 mit sich selbst zur Deckung gebracht wird, also zwischen zwei Abstandslinien zur Achse A_1 von γ_1 verläuft. Der maximale nichteuklidische Abstand von sA und A_1 heisse l . Nun ist γ_n eine Transformierte von γ , also A_n mit A äquivalent, und zufolge der Funktionalgleichung ist dann die aus sA_n und A_{n+1} gebildete Figur mit der aus sA und A_1 gebildeten äquivalent, also haben auch sA_n und A_{n+1} den Maximalabstand l .

Nun zeigt die obige Form von γ_n , dass die beiden Elemente γ_n und γ_{n+1} aus den Elementen γ und

$$\delta_n = b_1^{-n} a_1^{-1} \cdot \gamma \cdot a_1 b_1^n$$

durch Transformation mit demselben Element hervorgehen. Die aus den Achsen A_n und A_{n+1} gebildete Figur ist also kongruent mit der aus A und der Achse D_n von δ_n gebildeten. D_n geht aus A durch die Verschiebung $b_1^{-n} a_1^{-1}$ hervor, die Endpunkte von D_n konvergieren also mit wachsendem n gegen $U(b_1)$. Der kürzeste nichteuklidische Abstand von D_n und A wächst also mit n über alle Grenzen. Dasselbe gilt daher auch für den kürzesten Abstand von A_n und A_{n+1} . Und da sA_n innerhalb des Abstandes l von A_{n+1} verläuft, können A_n und sA_n sich höchstens für endlich viele Werte von n treffen.

Nun wählen wir einen solchen Wert n , dass A_n innerhalb einer fixpunktfreien Umgebung von P^+ verläuft und sein Bild sA_n nicht trifft. sA_n verläuft dann ganz innerhalb der durch A_n abgegrenzten Umgebung von P^+ , denn bei s strömen die Randpunkte von P^- fort und gegen P^+ hin, die Endpunkte von sA_n liegen also näher an P^+ als ihre Urbilder. Für jeden Punkt x von A_n trifft also der von x nach sx zeigende nichteuklidische Halbstrahl den Rand E in einem Punkte $z(x)$ auf dem kleinen Randbogen, der durch die Endpunkte von

A_n bestimmt wird und P^+ enthält. Umgekehrt liegen die Verhältnisse bei P^- . Man kann dort, gestützt auf eine ganz analoge Betrachtung, eine fixpunktfreie Umgebung von P^- durch einen zu E orthogonalen Bogen B abgrenzen, wobei sB nicht B trifft, sondern ganz auf der von P^- abgewandten Seite von B verläuft. Für jedes x auf B liegt dann $z(x)$ auf dem durch B abgegrenzten grossen Randbogen, der P^- nicht enthält. Lässt man nun einen Punkt x E umlaufen, jedoch so, dass er die Fixpunkte P^+ bzw. P^- auf den kleinen Bögen A_n bzw. B umgeht, so ist $z(x)$ überall definiert, und die Gesamtvariation von z wird Null, da $z(x)$ nie in P^- fällt. Eine eventuell durch $s\mathcal{O}$ dargestellte Fixpunktklasse hat also den Index Null. w. z. b. w.

Man kann also die in allen Nichtfixpunkten definierte Funktion $z(x)$ in P^+ stetig ergänzen, indem man diesen Punkt als seinen eigenen z -Punkt erklärt. Dagegen bleibt P^- »wesentlich singulär«; man kann für $z(x)$ jeden beliebigen Grenzwert vom Betrage 1 in P^- erhalten, indem man x in passender Weise gegen P^- konvergieren lässt. — Wir kommen auf diese Verhältnisse im nächsten Paragraphen zurück.

Beispiel 12: Wir betrachten noch ein Beispiel einer Abbildungsklasse mit negativer Indexsumme Ξ , wo dieser negative Wert von Ξ durch Beiträge von mehr als einer Fixpunktklasse mit negativem Index zustande kommt.

s sei eine S -Funktion, die der Annahme α genügt und die den Automorphismus erster Art ($p = 2$):

$$I = \begin{cases} c^{-1} b. a. b \\ \quad \quad b \\ \quad \quad \quad c \\ c^{-1} b. d. c \end{cases}$$

induziert. Man hat sofort für beliebiges n

$$I^n = \begin{cases} (c^{-1} b)^n a b^n \\ \quad \quad \quad b \\ \quad \quad \quad \quad c \\ (c^{-1} b)^n d c^n \end{cases}$$

und

$$\Xi_A(I^n) = -2.$$

Man sieht, dass die Entwicklung von $V(a^n)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen die Entwicklung

von $V(c^{-1}b)$ und für $n \rightarrow -\infty$ gegen die Entwicklung von $U(c^{-1}b)$ strebt, und schliesst daraus, dass die Achse von $c^{-1}b$ ein fixpunktfreies, periodisches Intervall bei sE begrenzt. Durch Betrachtung von $U(a^n)$ und von $U(d^n)$ folgt dasselbe für die Achsen von b und c . Da $b c^{-1}$ aus $c^{-1}b$ durch Transformation mit dem Fixelement c (oder mit b^{-1}) hervorgeht, gilt dasselbe für die Achse von $b c^{-1}$. Man vergegenwärtige sich die gegenseitige Lage dieser Intervalle in der Fig. 18, wo sie auf E stärker ausgezogen sind. Die Verschiebungsrichtung in diesen Inter-

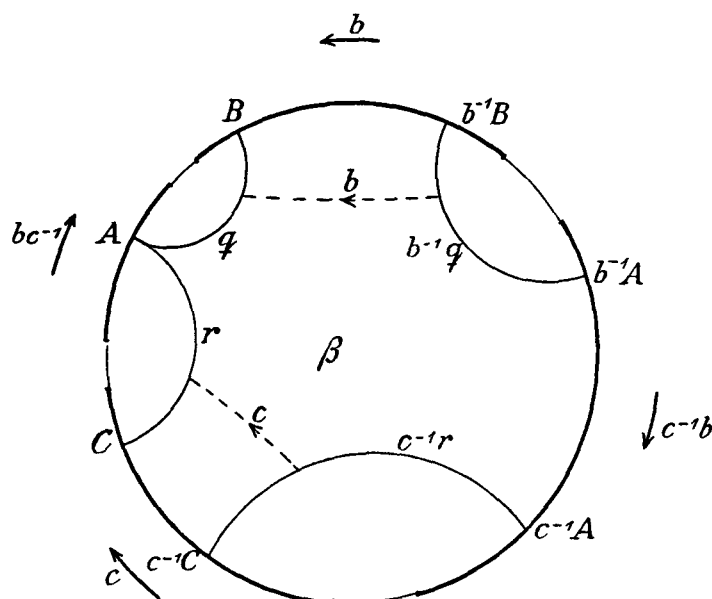


Fig. 18.

vallen bei Ausübung des das Intervall begrenzenden Elements ist durch Pfeile ausserhalb E angegeben. Nun seien A , B und C beliebige Punkte der bzw. zu $b c^{-1}$, b und c gehörigen Intervalle. A wird mit B durch einen fixpunktfreien Querschnitt q und mit C durch r verbunden. In der Figur ist noch $b^{-1}q$ und $c^{-1}r$ gezeichnet und die Korrespondenz der Querschnittspaare durch gestrichelte Linien angedeutet.

$H(I)$ ist die freie Gruppe $\{b, c\}$, wie aus dem konstruierten Fundamentalbereich β erschlossen, im übrigen aber auch leicht rein gruppentheoretisch abgeleitet werden kann. Übt man alle Operationen von $\{b, c\}$ auf β aus, so wird \mathcal{O} ganz ausgefüllt. Achtet man dabei auf die Abbilder von q und r bei allen Operationen von $\{b, c\}$, so wird jeder Fixpunkt auf dem Rande vom Mittelpunkt durch unendlich viele dieser Bilder getrennt, und umgekehrt ist jeder solche

Punkt Fixpunkt auf E . Jedem solchen Punkt ist also eine aus den Symbolen b und c und ihren Inversen gebildete Folge umkehrbar eindeutig zugeordnet. (Eine solche »Entwicklung der Fixpunkte auf E nach der Fixelementgruppe« tritt allgemein im Falle des § 47 auf.) Man beachte, dass $c^{-1}A = c^{-1}b(b^{-1}A)$ ist, dass also auf der geschlossenen Fläche $K_1 = K \bmod H$ vom Geschlecht 2 drei verschiedene geschlossene, von $E-M$ überlagerte Kurven auftreten.

Nach der Methode von § 47 haben wir also für $s\Phi$ den Index $1 - \nu = -1$ gefunden und sind wegen $\Xi_A = -2$ darauf angewiesen, jedenfalls noch eine Fixpunktklasse zu suchen.

Betrachten wir die S -Funktion cs , die $I' = I_{c^{-1}}$ induziert! Durch dasselbe Verfahren wie oben findet man leicht, dass die vier Fixelemente von I'

$$c, \quad cd^{-1} \cdot b^{-1}c \cdot dc^{-1}, \quad d^{-1}a \cdot b \cdot a^{-1}d, \quad d^{-1} \cdot b^{-1}c \cdot d$$

durch ihre Achsen vier fixpunktfreie periodische Intervalle begrenzen (für c ist das jetzt das zu dem oben benutzten komplementäre Intervall) und dass man einen Fundamentalbereich für $H(I')$ durch $\nu = 2$ Paare von Querschnitten herstellen kann, indem man sich auf diese vier Intervalle stützt. Man findet also für $cs\Phi$ den Index -1 .

Ist das nun eine neue Fixpunktklasse? Mit anderen Worten: ist es sicher, dass es keine Lösung der Gleichung

$$xx_I^{-1} = c$$

gibt? Diese Frage lässt sich bejahen und zugleich das behandelte Beispiel abschliessen, indem man eine bestimmte Abbildung der vorliegenden Abbildungsklasse in folgender Weise konstruiert.

Man zeichne auf φ eine Kurve k vom Typus bc und eine Kurve l vom Typus $d^{-1}aba^{-1}dc$. k und l sollen einander nicht treffen, und jede von ihnen soll nur den einen durch ihren Typus bedingten Doppelpunkt haben. Fig. 19 zeigt ein solches Kurvenpaar. Dabei ist ein analog wie in Fig. 3 angeordnetes kanonisches Schnittsystem a, b, c, d zu Grunde gelegt. Dann besteht die Restmenge

$$\varphi - k - l$$

aus drei Gebieten, deren jedes mit dem Inneren eines Kreisringes homöomorph ist. Nun wird eine topologische Abbildung $\tau\varphi$ in folgender Weise definiert:

Alle Punkte von k und l sollen Fixpunkte sein; jedes der drei Ringgebiete wird einer topologischen Transformation in sich von der im vorigen Beispiel verwendeten Art unterworfen. Nimmt man den Doppelpunkt von k als Ursprung des kanonischen Schnittsystems und wählt man die »Drehrichtung« in den drei Ringgebieten in passender Weise, so sieht man leicht, dass die Kurve a in eine Kurve vom Typus $c^{-1} b a b$ und die Kurve d in eine Kurve vom Typus $c^{-1} b d c$ übergeht. Wir haben es also mit einer Abbildung der durch I bestimmten Klasse zu tun. Da man nur die zwei zusammenhängenden Fixpunkt mengen k und l hat, gibt es *höchstens* zwei Fixpunkt klassen. Andererseits erschlossen wir aus der Alexanderschen Formel die Existenz von mehr als einer Klasse. k und l gehören also wirklich zu *verschiedenen* Klassen. Man betrachte z. B. dasjenige Ringgebiet, dessen beide Randkurven vom Typus c sind, und betrachte ein solches Abbild in \mathcal{D} , für welches bei $s\mathcal{D}$ die eine Randkurve aus Fixpunkten be-

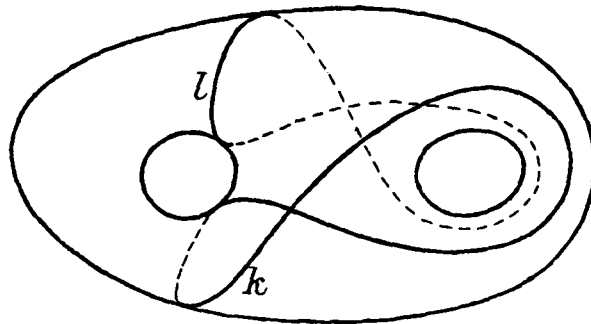


Fig. 19.

steht. Dann kann die andere es nicht gleichzeitig tun; denn ein Weg im Ringbereich von der einen Randkurve zur andern ist mit seinem Bilde bei $\tau\varphi$ nicht homotop. Man sieht auch, dass die andere Randkurve gerade eine solche äquivalente Verschiebung erleiden muss, wie sie durch das Element c^{-1} (oder ein damit gleichberechtigtes Element) gegeben ist. Darin erkennt man die gegenseitige Verbindung der oben aufgezeigten, durch $s\mathcal{D}$ und $cs\mathcal{D}$ dargestellten Fixpunkt klassen wieder.

Man sieht, dass $\tau\varphi$ nicht der Annahme α genügt. Das ist auch nicht nötig, um die gemachten Schlüsse zu rechtfertigen. Man entnimmt hieraus, dass es bei der Konstruktion von Beispielen für Abbildungen nicht immer zweckmässig ist, die einzelnen notwendigen Fixpunkt klassen durch einzelne Punkte zu repräsentieren, sondern dass man im Gegenteil oft mit Vorteil die einzelnen Fixpunkt klassen durch irreduzible Kontinua darstellt, die in ihrer Gesamtheit die Fläche

in möglichst einfach zusammenhängende Restbereiche zerlegen, in denen die Abbildung dann einfach beschreibbar ist. — Hieraus ergibt sich geradezu die Frage nach der grösstmöglichen Ausbreitung der Fixpunktmenge, oder anders gewendet die Frage nach dem *Mindestgrad von mehrfachem Zusammenhang*, den die Restmenge der Fixpunktmenge für eine gegebene Abbildungsklasse haben muss.

49. **Beispiel einer Fixpunktmenge mit negativem Index bei einem Automorphismus ohne Fixelemente.**

In allen bisher betrachteten Fällen von Fixpunktgruppen mit negativem Index kam dieser dadurch zu Stande, dass der betrachtete Automorphismus mehr als ein primäres Fixelement hatte. Es soll nun gezeigt werden, dass ein negativer Klassenindex auch auf wesentlich andere Weise entstehen kann.

Beispiel 13. Wir betrachten für $p = 2$ den folgenden Automorphismus I und seine Potenzen bis zur vierten:

$$I: \begin{cases} c^{-1} a^{-1} \\ b^{-1} a^{-1} \\ b^{-1} a^{-1} d \\ c^{-1} \end{cases} \quad I^2: \begin{cases} d^{-1} a b a c \\ a b a c \\ a b a \\ d^{-1} a b \end{cases}$$

$$I^3: \begin{cases} a^{-1} b^{-1} a^{-1} c^{-1} a^{-1} b^{-1} a^{-1} d \\ c^{-1} a^{-1} b^{-1} a^{-1} c^{-1} a^{-1} b^{-1} a^{-1} d \\ c^{-1} a^{-1} b^{-1} a^{-1} c^{-1} a^{-1} \\ a^{-1} b^{-1} a^{-1} \end{cases}$$

$$J = I^4: \begin{cases} a c a b a c d^{-1} a b a c a b a \\ d^{-1} a b a c a b a c d^{-1} a b a c a b a \\ d^{-1} a b a c a b a c d^{-1} a b a c \\ a c a b a c \end{cases}$$

Es ist zur Abkürzung $I^4 = J$ gesetzt. Die Entwicklungen der positiven Grundpunkte der Erzeugenden sind, wie unmittelbar zu sehen, die periodischen Wiederholungen der obigen Ausdrücke. Die Summe der kleinsten negativen Randbögen von $V(a)$ bis $V(a_I)$, von $V(a_I)$ bis $V(a_{I^2})$, von $V(a_{I^2})$ bis $V(a_{I^3})$ und von $V(a_{I^3})$ bis $V(a_J)$ ist grösser als 2π ; für die übrigen Erzeugenden ist die entsprechende

Summe kleiner als 2π . Daraus folgt, dass die Randabbildung g von I fixpunktfrei ist und dass die Randabbildung $g^4 = \gamma$ von J Fixpunkte hat. Zu I gehört also der Index + 1.

Nun soll die Fixpunktmenge von γ untersucht werden. Dazu sind die Potenzen von J zu bilden, um zu entscheiden, welchen Grenzlagen sich die Randpunkte bei den Potenzen von γ nähern. Nun ist identisch:

$$a_{J^n} = a \cdot (a^{-1} a_J) \cdot (a^{-1} a_J)_J \cdot (a^{-1} a_J)_{J^2} \cdots (a^{-1} a_J)_{J^{n-1}}.$$

Für die Ausübung der Potenzen von J auf den Erzeugendenausdruck

$$a^{-1} a_J = c a b a c d^{-1} a b a c a b a$$

beachte man, dass für den Teilausdruck $d^{-1} a$ gilt:

$$(d^{-1} a)_J = d^{-1} a \cdot b a c a b a.$$

Dann sieht man infolge des Fehlens negativer Exponenten, dass in dem obigen Ausdruck für a_{J^n} keine Auslöschung stattfindet und dass die Entwicklung von $V(a_{J^n})$ aus der periodischen Wiederholung dieses Ausdruckes besteht. Also konvergiert $V(a_{J^n})$ für $n \rightarrow \infty$ gegen den Punkt P_1 mit der Entwicklung

$$k(P_1) = a \cdot (a^{-1} a_J) \cdot (a^{-1} a_J)_J \cdots \text{in inf.}$$

Bildet man

$$J^{-1}: \begin{cases} a b^{-1} d^{-1} a b^{-1} c d^{-1} a b^{-1} d^{-1} a \\ a^{-1} d b a^{-1} d c^{-1} b a^{-1} d b a^{-1} c^{-1} b a^{-1} d b a^{-1} d c^{-1} b a^{-1} d b a^{-1} \\ a^{-1} d b a^{-1} d \\ c^{-1} b a^{-1} d b a^{-1} d c^{-1} b a^{-1} d, \end{cases}$$

so sieht man in entsprechender Weise, dass $V(a_{J^n})$ für $n \rightarrow -\infty$ gegen den Punkt P_2 mit der Entwicklung

$$k(P_2) = a \cdot (a^{-1} a_{J^{-1}}) \cdot (a^{-1} a_{J^{-1}})_{J^{-1}} \cdots \text{in inf.}$$

konvergiert. Gegen denselben Punkt konvergiert $V(b_{J^{-n}}^{-1})$ für $n \rightarrow -\infty$. $b_{J^{-1}}^{-1}$ beginnt nämlich mit a , und daraus entspringt, wie man sich leicht überzeugt, die nämliche Entwicklung. Ganz analog bestätigt man nun leicht das Folgende für weitere Grundpunkte bei den Potenzen J^n :

$$\begin{aligned}
 n \rightarrow \infty \quad \left. \begin{array}{l} V(b^{-1}) \\ V(a^{-1}) \end{array} \right\} &\rightarrow k(P_3) = a^{-1} \cdot (a a_J^{-1}) \cdot (a a_J^{-1})_J \cdots \text{ in inf.} \\
 n \rightarrow -\infty \quad \left. \begin{array}{l} V(a^{-1}) \\ V(b) \end{array} \right\} &\rightarrow k(P_4) = a^{-1} \cdot (a a_{J-1}^{-1}) \cdot (a a_{J-1}^{-1})_{J-1} \cdots \text{ in inf.} \\
 n \rightarrow \infty \quad \left. \begin{array}{l} V(b) \\ V(d^{-1} a) \end{array} \right\} &\rightarrow k(P_5) = d^{-1} a \cdot (a^{-1} d (d^{-1} a)_J) \cdot (a^{-1} d (d^{-1} a)_J)_J \cdots \text{ in inf.} \\
 n \rightarrow -\infty \quad \left. \begin{array}{l} V(d^{-1} a) \\ V(d^{-1}) \end{array} \right\} &\rightarrow k(P_6) = d^{-1} \cdot (d d_{J-1}^{-1}) \cdot (d d_{J-1}^{-1})_{J-1} \cdots \text{ in inf.} \\
 n \rightarrow \infty \quad \left. \begin{array}{l} V(d^{-1}) \\ V(c^{-1} b a^{-1}) \end{array} \right\} &\rightarrow k(P_7) = c^{-1} \cdot (c c_J^{-1}) \cdot (c c_J^{-1})_J \cdots \text{ in inf.} \\
 n \rightarrow -\infty \quad \left. \begin{array}{l} V(c^{-1} b a^{-1}) \\ V(d) \end{array} \right\} &\rightarrow k(P_8) = c^{-1} b \cdot (b^{-1} c (c^{-1} b)_{J-1}) \cdot (b^{-1} c (c^{-1} b)_{J-1})_{J-1} \cdots \text{ in inf.} \\
 n \rightarrow \infty \quad V(d) &\rightarrow k(P_1).
 \end{aligned}$$

Um die gegenseitige Lage dieser 8 Punkte und ihre Lage zu den benutzten 8 Grundpunkten deutlich zu machen, seien noch die Anfangsglieder ihrer Entwicklungen angegeben:

$$\begin{aligned}
 k(P_1) &= a c a b a \cdots \\
 k(P_2) &= a b^{-1} d^{-1} a b^{-1} \cdots \\
 k(P_3) &= a b^{-1} a^{-1} c^{-1} \cdots \\
 k(P_4) &= a^{-1} d b a^{-1} d \cdots \\
 k(P_5) &= d^{-1} a b a c \cdots \\
 k(P_6) &= d^{-1} a b^{-1} c d^{-1} \cdots \\
 k(P_7) &= c^{-1} a^{-1} b^{-1} a^{-1} \cdots \\
 k(P_8) &= c^{-1} b a^{-1} d b \cdots
 \end{aligned}$$

Die 8 Punkte liegen also in der Reihenfolge ihrer Indizes auf E , und jedes der 8 durch sie bestimmten Intervalle enthält einen der oben benutzten 8 Grundpunkte. Diese Intervalle sind also fixpunktfrei, und es gibt nur diese 8 Fixpunkte P_1, \dots, P_8 bei γ . Dann kann es kein Fixelement bei J geben, denn da sich die Fixpunktmenge bei einem solchen reproduziert und mehr als zwei Fixpunkte vorhanden sind, müssten die Grundpunkte eines Fixelements Häufungspunkte von Fixpunkten sein. Wir haben also das Ergebnis:

Der Automorphismus $J = I^4$ hat keine eigentlichen Fixelemente und genau 8 Fix-Grenzelemente. Die zugehörige Randabbildung $\gamma = g^4$ hat 8 aperiodische fixpunktfreie Intervalle getrennt durch die Fixpunkte P_1, \dots, P_8 .

Man sieht, dass bei der Randabbildung γE die Punkte von E gegen die Punkte P_1, P_3, P_5 und P_7 hin und von den Punkten P_2, P_4, P_6 und P_8 fort strömen. Die ersteren mögen die *positiven*, die letzteren die *negativen* Fixpunkte von γE heissen.

Die aus diesen 8 Punkten bestehende Punktmenge M muss bei $g E$ in sich übergehen, denn:

$$g^4(gM) = g(g^4M) = gM,$$

und da es ausser M keine *endliche* Punktmenge gibt, die bei g^4 in sich übergeht, so folgt $gM = M$. Man findet, da I mit $J = I^4$ vertauschbar ist:

$$(a a_J^{-1})_I = a_I a_{I.J}^{-1} = c^{-1} a^{-1} \cdot a_J c_J,$$

und daher

$$((a a_J^{-1})_{Jr})_I = c_{Jr}^{-1} (a^{-1} a_J)_{Jr} \cdot c_{Jr+1},$$

sodass P_3 bei g in P_1 übergeht. g bewirkt also eine zyklische Vertauschung von M um 2 Schritte, g^2 um 4 Schritte und g^3 um 6 Schritte, sodass zu I, I^2 und I^3 der Klassenindex $+1$ gehört.

Welcher Index ergibt sich nun für $J = I^4$? Hier ist die Sachlage mutatis mutandis wie bei der Behandlung des Automorphismus A' am Schluss des Beispiels 11, § 48, sodass eine kurze Andeutung des Beweises genügen mag.

$s(\mathcal{O} + E)$ sei eine beliebige zu J gehörige S -funktion. Nach § 34 liegen alle Fixpunkte von $s\mathcal{O}$ innerhalb eines mit E konzentrischen kleineren Kreises, sodass P_1, \dots, P_8 isolierte Fixpunkte sind. Man betrachte den positiven Fixpunkt P_1 und bestimme eine Folge von äquivalenten Achsen, die P_1 einschliessen und sich auf diesen Punkt zusammenziehen. Dann schliesst man leicht aus der Form von J , dass der kürzeste nichteuklidische Abstand dieser Achsen von ihren Bildkurven bei s bei der Durchlaufung der Folge über alle Grenzen wächst, dass also der Punkt $z(x)$ sehr nahe an P_1 liegt, wenn x eine genügend späte der Achsen der Folge durchläuft. — Man braucht hierbei die spezielle Form des betrachteten Automorphismus sehr wenig. Es seien nämlich A und B die Achsen zweier gleichberechtigten Elemente f und kfk^{-1} . Wenn nun die relative Lage von x und sx die gleiche ist für zwei variable Punkte x , von denen der eine A , der andere

B durchläuft, so folgt aus der Funktionalgleichung, dass k ein Fixelement des betrachteten Automorphismus ist. In einer unendlichen Folge von Achsenpaaren, in der die ersten Achsen aller Paare äquivalent und ebenso die zweiten Achsen aller Paare äquivalent sind und die gleiche relative Lage der Achsen eines Paares zu einander nur endlich oft vorkommt, wächst der kürzeste nichteuklidische Abstand der Achsen eines Paares in der Folge über alle Grenzen. Wenn also der betrachtete Automorphismus keine Fixelemente hat, so braucht man seine spezielle Form nur, um den Fall auszuschliessen, dass die relative Lage von A_i und sA_i für zwei Achsen $A_i (i=1, 2)$ die gleiche ist, ohne dass die relative Lage von x und sx die gleiche ist, wenn x die Achsen A_i durchläuft, dass also für den Bildpunkt eine Transformation mit einer Potenz des zu der Achse gehörigen Elements in Frage kommt. Hierdurch bekommt die in § 48 an dem Beispiel \mathcal{A}' auseinandergesetzte Methode eine ganz allgemeine Bedeutung. — Wir können also bei der zu obigem Automorphismus J gehörigen S -Funktion die Funktion $z(x)$ in den vier positiven Randfixpunkten stetig ergänzen und für die 4 negativen Fixpunkte wie früher bei \mathcal{A}' verfahren. Bei Erstreckung des Indexintegrals $\int d\xi$ über E unter Umgehung der acht Fixpunkte auf kleinen Bögen erhält man also den Index $1-\nu$, wo ν die Anzahl der negativen Fixpunkte ist, in unserem Falle also $1-4$:

Zu $J=I^4$ gehört der Index -3 .

Die in dieser Weise bei Abwesenheit von Fixelementen entstehenden Fixpunktklassen mit negativem Index erfordern keine Annahme von der Art der Annahme α über die Struktur der Fixpunktmenge; sie haben mit den Fixpunktklassen mit negativem Index, die früher auf Grund einer Fixelementgruppe mit mehr als einer Erzeugenden abgeleitet wurden, die Eigenschaft der »Stabilität gegenüber Iteration« gemeinsam: Jede Potenz der Abbildung hat dieselbe Klasse mit demselben Index, während bei allen bisher bekannten Klassen mit positivem Index dieser bei einer gewissen Potenz der Abbildung verloren geht.

50. Randabbildungen verwandter Automorphismen.

Es sei I ein beliebiger Automorphismus erster Art und $h \neq 1$ ein beliebiges Element von F . Wie in § 17 bilden wir die Elementfolge

$$r_n = h h_I h_{I^2} \dots h_{I^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dann ist

$$r_{n+1} = hr_n I = r_n h I^n.$$

1) Angenommen nun, es seien zwei Elemente dieser Folge einander gleich:

$$r_m = r_\mu, \quad \mu < m.$$

Dann ist

$$h I^\mu h I^{\mu+1} \dots h I^{m-1} = I,$$

also, indem wir $I^{-\mu}$ ausüben und $m - \mu = \nu$ setzen:

$$r_\nu = h h I \dots h I^{\nu-1} = I,$$

und durch Ausübung von I^m :

$$r_m^{-1} r_{m+\nu} = I,$$

also $r_{m+\nu} = r_m$ für alle m . Die Folge r_n ist also periodisch. Speziell hat man für $m = 1$:

$$h = r_1 = r_{\nu+1} = r_\nu h I^\nu = h I^\nu.$$

Folglich ist h Fixelement bei I^ν , aber wegen $r_\nu = I$ nicht bei I selbst, sodass die Randabbildung bei I fixpunktfrei sein muss. Nun ist nach (14), § 19, allgemein

$$(I_{h^{-1}})^n = (I^n)_{r_n^{-1}},$$

sodass hier

$$(I_{h^{-1}})^\nu = I^\nu$$

folgt; und da h nicht Fixelement von $I_{h^{-1}}$ ist, folgt, dass auch zu $I_{h^{-1}}$ eine fixpunktfreie Randabbildung gehört. Zu I sowohl wie zu $I_{h^{-1}}$ gehört also der Index $+1$:

Satz 25: *Notwendige Bedingung dafür, dass die Gleichung*

$$x x_I x_{I^2} \dots x_{I^{n-1}} = I$$

Lösungen hat, ist, dass I weder eigentliche Fixelemente noch Fix-Grenzelemente hat und dass n ein Vielfaches des charakteristischen Exponenten von I ist.

2) Danach werde nun angenommen, dass alle r_n verschieden sind. Dann sind alle Punkte $r_n(o)$ verschieden, und die Häufungspunkte dieser Punktmenge bilden eine auf E gelegene abgeschlossene Punktmenge M . M erfährt bei der zu

$I_{h^{-1}}$ gehörigen Randabbildung g eine eindeutige Abbildung in sich. Denn es sei P ein beliebiger Punkt von M und

$$r_{n_1}, r_{n_2}, r_{n_3}, \dots$$

eine zu P gehörige Fundamentalfolge. Dann ist gP Grenzpunkt der Folge

$$r_{n_i I_{h^{-1}}}(o), \quad i=1, 2, \dots$$

Nun ist allgemein

$$r_{n I_{h^{-1}}} = h \cdot r_{n I} \cdot h^{-1} = r_{n+1} h^{-1},$$

und da $h^{-1}(o)$ ein fester Punkt in \mathcal{D} ist, folgt, dass

$$r_{n_i+1}, \quad i=1, 2, \dots$$

eine zu gP gehörige Fundamentalfolge ist. Als Teilfolge der Folge r_n muss diese ihren Grenzpunkt auf M haben. Dass auch $g^{-1}P$ zu M gehört, folgt aus der letzten Gleichung, indem man n durch $n-1$ ersetzt und $(I_{h^{-1}})^{-1} = I_{h^{-1}}^{-1}$ ausübt:

$$r_{n(I_{h^{-1}})^{-1}} = r_{n-1} h_{I^{-1}},$$

und den gleichen Schluss verwendet. Damit ist die Behauptung erwiesen.

Wenn nun M nur aus *einem* Punkt besteht, so muss dieser Fixpunkt bei g sein. r_n ist eine zu diesem Punkt gehörige Fundamentalfolge.

Nun sei angenommen, M bestehe aus *mehr als einem aber endlich vielen* Punkten. Dann erfahren die Punkte von M bei g eine zyklische Vertauschung um eine gewisse Anzahl Schritte. Es sei $\nu \geq 1$ die kleinste Zahl, für welche g^ν jeden Punkt von M festlässt. Es wird behauptet, dass dann M aus genau ν Punkten besteht, dass also die Anzahl der Schritte bei der obigen Vertauschung zu der Anzahl der Punkte von M teilerfremd ist.

Es sei nämlich P ein Punkt von M und C ein Kreis um P , der ausser P keinen Punkt von M im Inneren oder auf dem Rande enthält. Man bestimme alle diejenigen r_n , für welche $r_n(o)$ innerhalb C fällt, und ordne diese nach steigendem Index:

$$r_{n_1}, r_{n_2}, \dots$$

Diese Folge bildet also eine zu P gehörige Fundamentalfolge. Da nun die Folge

$$r_{n_i+\nu}, \quad i=1, 2, \dots$$

nach dem Obigen zu $g^v P = P$ gehört, so liegen alle Punkte $r_{n_i+v}(o)$ bis auf höchstens endlich viele innerhalb C . Man kann also eine Zahl j so bestimmen, dass die Folge

$$r_{n_i+v}, i = j, j+1, \dots$$

eine Teilfolge der Folge

$$r_{n_i}, i = j, j+1, \dots$$

ist. Für dieselben Werte von i ist dann auch $r_{n_i+k\cdot v}$ für beliebiges festes positives k eine zu P gehörige Fundamentalfolge und das Gleiche gilt für die Folge

$$r_{n_i+k\cdot v}, n_i \text{ fest, } k = 0, 1, 2, \dots,$$

wenn $i \geq j$ gewählt ist. Dann ist aber

$$r_{n_j+k\cdot v+\mu}, 0 \leq \mu \leq v-1, k = 0, 1, 2, \dots$$

eine zu $g^v P$ gehörige Fundamentalfolge. Die Elemente dieser v Folgen enthalten aber alle Elemente der ursprünglichen Folge r_n von r_{n_j} an, sodass M durch die Punkte $g^v P$ erschöpft wird. M besteht also aus v Punkten, w. z. b. w.

Die Punkte der Folge $r_n(o)$ gehören also von einer gewissen Stelle an in periodisch wechselnder Wiederholung zu der unmittelbaren Umgebung der Punkte $P, gP, \dots, g^{v-1}P$.

Die Randabbildungen g, g^2, \dots, g^{v-1} sind also fixpunktfrei, sodass sich folgender Satz ergibt:

Satz 26: *Wenn die Punktfolge*

$$h h_I \dots h_I^{n-1}(o), n = 1, 2, \dots,$$

genau v Häufungspunkte auf E hat, so gehört zu allen Automorphismen $(I_h^{-1})^n, n \not\equiv 0 \pmod{v}$, der Index $+1$.

Die in § 17 mit s_n bezeichnete Elementfolge lässt sich zu ähnlichen Betrachtungen verwenden.

51. Beispiel einer Abbildungsklasse mit gleichzeitigem Auftreten von Fixpunktclassen mit positivem und solchen mit negativem Index.

Beispiel 14: Wir nehmen den Automorphismus I des Beispiels 13, § 49, unter Beibehaltung der dortigen Bezeichnung wieder auf und untersuchen den damit verwandten Automorphismus

$$I' = I_a = \begin{cases} a^{-1} c^{-1} \\ a^{-1} b^{-1} \\ a^{-1} b^{-1} a^{-1} d a \\ a^{-1} c^{-1} a \end{cases}$$

Um Fixpunkte für die zugehörige Randabbildung g' zu finden, benutzen wir die Elementfolge r_n des vorigen Paragraphen, wo jetzt $h = a^{-1}$ gesetzt wird und I den Automorphismus des Beispiels 13 bedeutet. Dann ist

$$\begin{aligned} r_{2n} &= a^{-1} a_I^{-1} a_{I^2}^{-1} a_{I^3}^{-1} \dots a_{I^{2n-1}}^{-1} \\ &= (a^{-1} a_I^{-1}) (a^{-1} a_I^{-1})_{I^2} \dots (a^{-1} a_I^{-1})_{I^{2n-2}} \\ &= c c_{I^2} c_{I^4} \dots c_{I^{2n-2}}. \end{aligned}$$

Dies ist, wie aus der früher angegebenen Form von I^2 ersichtlich ist, eine Fundamentalfolge, welche zum Punkte P_1 mit der Entwicklung

$$\begin{aligned} k(P_1) &= c c_{I^2} c_{I^4} \dots \text{ in inf} \\ &= c \cdot a b a \cdot d^{-1} a b a c a b a c d^{-1} a b a c \dots \end{aligned}$$

gehört. Ferner hat man dann:

$$\begin{aligned} r_{2n+1} &= a^{-1} a_I^{-1} \dots a_{I^{2n}}^{-1} \\ &= a^{-1} (a^{-1} a_I^{-1})_I (a^{-1} a_I^{-1})_{I^2} \dots (a^{-1} a_I^{-1})_{I^{2n-1}} \\ &= a^{-1} c_I c_{I^3} \dots c_{I^{2n-1}}. \end{aligned}$$

Diese Elemente bilden eine Fundamentalfolge, die zu dem Punkte P_3 mit der Entwicklung

$$\begin{aligned} k(P_3) &= a^{-1} c_I c_{I^3} \dots \text{ in inf} \\ &= a^{-1} \cdot b^{-1} a^{-1} d \cdot c^{-1} a^{-1} b^{-1} a^{-1} c^{-1} a^{-1} \dots \end{aligned}$$

gehört. Schreibt man diese

$$k(P_3) = a^{-1} (k(P_1))_I,$$

so tritt es in Evidenz, dass $P_3 = g' P_1$ ist. Hiermit haben wir den Fall des Satzes 26 mit $\nu = 2$, sodass zu I' der Index + 1 gehört.

Für g'^2 haben wir die beiden Fixpunkte P_1 und P_3 . Zwei weitere finden wir durch die Elementfolge

$$s_n = a_{I^{-1}} a_{I^{-2}} \dots a_{I^{-n}},$$

wo

$$I^{-1} = \begin{cases} a^{-1} d \\ d^{-1} a b^{-1} \\ d^{-1} \\ b^{-1} c \end{cases}, \quad I^{-2} = \begin{cases} d^{-1} a b^{-1} c \\ c^{-1} b a^{-1} d b a^{-1} d \\ c^{-1} b \\ b a^{-1} \end{cases}$$

ist.

Man findet:

$$s_{2n} \rightarrow b^{-1} c \cdot (b^{-1} c)_{I^{-2}} \cdot (b^{-1} c)_{I^{-4}} \dots \text{ in inf.}$$

$$= b^{-1} c \cdot d^{-1} a b^{-1} d^{-1} a \dots = k(P_2).$$

$$s_{2n+1} \rightarrow a^{-1} d \cdot (b^{-1} c)_{I^{-1}} (b^{-1} c)_{I^{-3}} \dots \text{ in inf.}$$

$$= a^{-1} d \cdot b a^{-1} \cdot c^{-1} b a^{-1} d b a^{-1} d c^{-1} b a^{-1} d \dots$$

$$= k(P_4) = a^{-1} d (k(P_2))_{I^{-1}}.$$

Man überzeugt sich nun leicht, dass diese 4 Punkte die einzigen Fixpunkte von $g'^2 E$ sind. Man braucht ja nur auf je ein Element, dessen positiver Grundpunkt in eines der vier durch P_1 bis P_4 bestimmten Teilintervalle fällt, die Automorphismen I'^2, I'^4, \dots und I'^{-2}, I'^{-4}, \dots auszuüben und sich zu überzeugen, dass die Entwicklungen des Grundpunktes dabei gegen obige vier Ausdrücke konvergieren. Wir haben also:

Bei der zu $I'^2 = (I_a)^2$ gehörigen Randabbildung entstehen 4 aperiodische Intervalle, getrennt durch die positiven Randfixpunkte P_1 und P_3 und die negativen Randfixpunkte P_2 und P_4 . Die Methode des § 49 ergibt also den Index -1 für I'^2 .

Hiermit ist zugleich erkannt, dass die beiden bei I und I' nachgewiesenen Fixpunktklassen mit dem Index $+1$ verschieden sind: Bei der zu I gehörigen Randabbildung gibt es 4 Punkte, die sich zyklisch um einen Schritt vertauschen, bei der zu I' gehörigen Randabbildung gibt es zwei Punkte, die ihren Platz tauschen; die beiden Abbildungen sind also nicht ähnlich und I und I' also nicht isogredient.

Wendet man die gleiche Methode auf I_c an, so führt die mit $h = c^{-1}$ gebildete Elementfolge r_n zu 4 Häufungspunkten auf E . Also gehört zu $I_c, (I_c)^2$ und

$(I_c)^3$ der Index $+1$ und zu $(I_c)^4$ der Index -3 . I_c verhält sich also wie I . Wendet man die Methode auf $I_{b^{-1}}$ an, so findet man, dass dieser Automorphismus sich wie I_a verhält, dass also zu $I_{b^{-1}}$ der Index $+1$ und zu $(I_{b^{-1}})^3$ der Index -1 gehört. Doch bleibt hier zu untersuchen, ob diese beiden Automorphismen mit den oben untersuchten isogredient sind oder nicht.

Hervorzuheben aber ist folgendes Ergebnis:

Die beiden verwandten Automorphismen I^2 und $(I_a)^2$ bestimmen für die zugehörige Abbildungsklasse je eine Fixpunktklasse, und zwar hat die zu I^2 gehörige den Index $+1$ und die zu $(I_a)^2$ gehörige den Index -1 . Die ALEXANDERSche Indexsumme für diese Abbildungsklasse ist Null. Dies zeigt, dass es nicht möglich ist, aus der ALEXANDERSchen Formel eine obere Schranke für die Anzahl der topologisch notwendigen Fixpunktclassen abzuleiten.

Zusatz bei der Korrektur: Das Auftreten einer Fixpunktklasse vom Index $+1$ gleichzeitig mit einer solchen vom Index -1 , wobei die letztere (im Gegensatz zu obigem Beispiel) durch eine freie Fixelementgruppe mit 2 Erzeugenden verursacht wird, lässt sich durch folgendes einfache Beispiel ($p = 2$) illustrieren:

$$I = \begin{cases} a \\ b \\ cd c^{-1} \\ c^{-1} \end{cases}, \quad I^4 = \begin{cases} a \\ b \\ k^{-1} c k \\ k^{-1} d k \end{cases},$$

wo $k = a b a^{-1} b^{-1} = d c d^{-1} c^{-1}$ ist. Es ist $\mathfrak{H}(I) = 0$ nach (50), S. 322. Als Fixelementgruppe $H(I)$ findet man die freie Gruppe $\{a, b\}$, und die Methode des § 47 ergibt also den Index -1 . Weiter hat man:

$$I_c = \begin{cases} c^{-1} a c \\ c^{-1} b c \\ d \\ c^{-1} \end{cases}, \quad (I_c)^4 = \begin{cases} k a k^{-1} \\ k b k^{-1} \\ c \\ d \end{cases}.$$

c ist Fixelement bei $(I_c)^4$, aber nicht bei I_c , sodass zu I_c der Index $+1$ gehört. Die beiden Klassen heben einander in der Indexsumme \mathfrak{H} auf. Dass es nicht mehr als diese beiden Klassen zu geben braucht, sieht man so: Man bilde einen Torus T mit einem kanonischen Schnittsystem c, d und unterwerfe diesen einer durch

$$c \rightarrow d, \quad d \rightarrow c^{-1}$$

charakterisierten Abbildung σT . Zuzufolge l. c. 15, S. 301, gehören zu σT zwei Fixpunktclassen vom Index $+1$, und σ lässt sich mit dieser Minimalzahl von

Fixpunkten bilden. Es sei Q der eine von diesen beiden Fixpunkten von σT . Da die Indikatrix von T bei σ erhalten bleibt, lässt sich Q zu einem einfach zusammenhängenden Fixpunktgebiet erweitern. Man bilde nun einen zweiten Torus T' mit dem kanonischen Schnittsystem a, b und lasse $\sigma T'$ die identische Abbildung sein. Diesen hefte man mit einer Ansatzscheibe an das Gebiet Q von T an. So entsteht ein Doppelring $T + T'$, auf dem $\sigma(T + T')$ zu der oben betrachteten Abbildungsklasse gehört und nur zwei Fixpunktklassen aufweist. — Durch dieses Ansetzen von T' wird der Index der Klasse Q um zwei Einheiten erniedrigt, also zu -1 . Um das zu verstehen, bedenke man, dass diese Fixpunktklasse von $\sigma(T + T')$ auf der universellen Überlagerungsfläche von $T + T'$ nicht isolierbar ist. Um ihren Index zu bestimmen, muss man $\sigma(T + T')$ so abändern, dass die Abbildung der »Annahme α «, S. 298, genügt.

Dies Beispiel führt zu folgender allgemeineren Überlegung: Man geht von einer beliebigen Abbildung $\sigma\varphi$ einer Fläche φ vom Geschlecht p und einer Abbildung $\sigma\varphi'$ einer Fläche φ' vom Geschlecht p' aus. Beide Abbildungen mögen etwa die Indikatrix erhalten. Bei beiden sollen Fixpunkte vorkommen, was man immer erreichen kann, indem man nötigenfalls Fixpunktklassen vom Index 0 hervorruft. Dann heftet man die beiden Flächen mit zwei einfach zusammenhängenden Fixpunktscheiben an einander, wodurch man zu einer Abbildung $\sigma(\varphi + \varphi')$ einer Fläche $\varphi + \varphi'$ vom Geschlecht $p + p'$ kommt. Man sieht, dass man dadurch eine grosse Freiheit in der Konstruktion von Beispielen für Flächenabbildungen mit gewünschten Kombinationen von Fixpunktklassen verschiedener Indizes erhält.

Weiter sieht man, dass man auf diesem Wege eine neue Handhabe zur Inangriffnahme des allgemeinen Fixpunktproblems suchen kann: Wenn es gelingt, bei einem vorgelegten Automorphismus ein *Fixelement* zu finden, durch welches eine einfache, der Null *homologe*, aber *nicht homotope* Kurve auf der Fläche bestimmt wird, so kann man diese aus Fixpunkten bestehen lassen und sie dann im Raume auf einen Punkt zusammenziehen. Dadurch wird ein Teil von der Fläche abgeschnürt, und man kann nun versuchen, das Fixpunktproblem für die betrachtete Abbildungsklasse auf jeder der beiden entstehenden Flächen niedrigeren Geschlechts zu lösen.