ÜBER DIE ANWENDUNG EINER KLASSE UNIFORMISIERENDER TRANZENDENTEN ZUR UNTERSUCHUNG DER WERTVERTEILUNG ANALYTISCHER FUNKTIONEN.

Von

FRITHIOF NEVANLINNA

in HELSINGFORS.

Einleitung.

Nachdem PICARD schon im Jahre 1879 mit Hilfe der Umkehrfunktion der elliptischen Modulfunktion seine berühmten Sätze über die maximale Anzahl der Ausnahmewerte eindeutiger analytischer Funktionen bewies und hiermit der funktionentheoretischen Forschung ein weites und schönes Feld eröffnete, ist die weitere Entwicklung auf diesem Gebiet hauptsächlich mittels sog. »elementärer Methoden» d. h. unter Vermeidung höherer uniformisierender Hilfstranzendenten als der Logarithmus befördert worden. Die vorliegende Abhandlung knüpft an die ursprüngliche, zweifelsohne sachgemässere Picardsche Methode und verfolgt den Zweck, letztere zunächst so weit auszuarbeiten und zu erweitern, dass sie die wichtigsten auf elementärem Wege gewonnenen Resultate und zwar in der gegenwärtig allgemeinsten und präziesesten von ROLF NEVANLINNA gegebenen Fassung liefert.

I.

1. Gemäss einem allgemeinen Abbildungssatz der Uniformisierungstheorie kann das Innere jedes, ein- oder mehrblättrigen, einfach zusammenhängenden Bereiches umkehrbar eindeutig und konform auf das Innere eines einfach zusammenhängenden und *schlichten* Gebietes G abgebildet werden. Hierbei hat man drei Fälle zu unterscheiden: entweder hat das Gebiet G *keinen* Randpunkt und umfasst somit die ganze geschlossene Ebene (elliptischer Fall); oder hat das

Gebiet G *einen* Randpunkt, der dann in den unendlich fernen Punkt der Ebene verlegt werden kann, so dass G aus der ganzen endlichen Ebene besteht (parabolischer Fall); oder aber kann als G von vornherein jedes beliebige, einfach zusammenhängende und schlichte Gebiet gewählt werden, das wenigstens *zwei* Randpunkte, dann aber notwendig ein ganzes zusammenhängendes Randkontinuum besitzt (hyperbolischer Fall). Jede dieser drei Möglichkeiten schliesst die zwei übrigen aus und wenn in dem letztgenannten (hyperbolischen) Fall als Gebiet G insbesondere das Innere eines endlichen Kreises oder einer Halbebene angenommen wird, so ist die abbildende Funktion in allen Fällen bis auf eine *lineare Transformation* eindeutig bestimmt.

2. Diesen Abbildungssatz wollen wir in dem speziellen Fall anwenden, wo der abzubildende Bereich eine über die z-Ebene ausgebreitete, *regulär verzweigte* Riemannsche Fläche $R(a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, \infty)$ ist mit Windungspunkten *unendlich hoher* Ordnung an den Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$ und ∞.

Die Anzahl der Windungspunkte $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, \infty$ ist offenbar wenigstens gleich zwei. Falls die Fläche R nur zwei Windungspunkte, a_1 und ∞, hat, so liegt der *parabolische* Fall vor; die Fläche wird in der Tat durch jede Funktion der Form

$$\zeta = \zeta(z;\, a_1,\, \infty) = \alpha \log (z - a_1) + \beta, \tag{1}$$

wo α und β beliebige Konstanten bezeichnen, auf die endliche, schlichte ζ-Ebene konform abgebildet. Ist dagegen die Anzahl der Windungspunkte grösser als zwei, so liegt der *hyperbolische* Fall vor, indem sich zeigen lässt, dass das Innere der Fläche $R(a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, \infty)$ dann immer z. B. auf das Innere der oberen ζ-Halbebene $\mathfrak{J}(\zeta) > 0$ konform abgebildet werden kann. Die abbildende Funktion bezeichnen wir mit

$$\zeta = \zeta(z;\, a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{q-1},\, \infty); \tag{1$'$}$$

sie ist bis auf eine lineare Transformation $\dfrac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}$ eindeutig bestimmt, welche die obere ζ-Halbebene in sich überführt und somit reelle Koeffizienten mit positiver Determinante hat.

Diese Funktion ist unendlich vieldeutig; es seien $\zeta_1(z)$ und $\zeta_2(z)$ zwei verschiedene Zweige derselben. Da die Ableitung $\zeta_1'(z)$ für jedes von den Werten $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$ und ∞ verschiedenes z von Null verschieden ist, so ist z und somit auch ζ_2 in der Umgebung der entsprechenden Stelle ζ_1 eine reguläre Funktion von ζ_1, welche überallhin in der oberen Halbebene $\Im(\zeta_1) > 0$ analytisch fortgesetzt werden kann und somit eine in dieser Halbebene eindeutige und reguläre Funktion ist. Genau dasselbe gilt aber von ζ_1 als Funktion von ζ_2 aufgefasst und es muss daher ζ_2 eine linear gebrochene Funktion von ζ_1 mit reellen Koeffizienten und positiver Determinante sein. Wenn man also von einem bestimmten Zweig der Funktion (1)' ausgeht, so sind alle übrigen Zweige lineare Transformationen dieser, welche die Eigenschaft haben die obere ζ-Halbebene in sich zu überführen. Diese Substitutionen bilden eine in der genannten Halbebene diskontinuierliche Gruppe $\Gamma(a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, \infty)$, die z. B. aus denjenigen $q-1$ Fundamentalsubstitutionen erzeugt werden kann, in denen sich ein bestimmter Zweig der Funktion ζ bei analytischer Fortsetzung in positiver Umlaufsrichtung bzw. um $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$ transformiert.

3. Es ist für das Folgende von Wichtigkeit das Verhalten der linear polymorphen Funktion $\zeta(z; a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, \infty)$ in der Umgebung der Windungspunkte näher zu kennen. Wenn z einen positiven Umlauf um *einen* der Windungspunkte a vollführt, so erleidet nach Obigem ein beliebiger Zweig ζ der Funktion eine lineare Transformation

$$\zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} = S(\zeta),$$

wo α, β, γ und δ reell sind und $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$. Eine solche Substitution kann elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch sein; wir behaupten, dass die Substitution $S(\zeta)$ notwendig *parabolisch* ist. In der Tat: wäre sie elliptisch, so hätte sie zwei konjugiert komplexe Fixpunkte α und $\bar{\alpha}$ (es sei z. B. $\Im(\alpha) > 0$) und könnte

$$\frac{\zeta' - \alpha}{\zeta' - \bar{\alpha}} = e^{\frac{2\pi i}{\lambda}} \frac{\zeta - \alpha}{\zeta - \bar{\alpha}}$$

geschrieben werden, wo λ reell ist. Hieraus würde folgen, dass die Funktion

$$\varphi(z) = \left(\frac{\zeta - \alpha}{\zeta - \bar{\alpha}}\right)^{|\lambda|}$$

in der Umgebung von $z = a$ eindeutig und, da $\Im(\zeta) > 0$ und also die Ungleichung $|\varphi(z)| < 1$ besteht, überdies begrenzt und somit im Punkte $z = a$ *regulär* wäre. Dies ist jedoch nicht möglich; denn wenn $\varphi(a) \neq 0$, so würde hieraus folgen, dass ζ selbst in der Umgebung von $z = a$ regulär wäre, was nicht der Fall ist, und wenn $\varphi(a) = 0$, so würde sich $\lim_{z \to a} \zeta = \alpha$ ergeben, was ebenfalls unmöglich ist, da α ein *innerer* Punkt der Halbebene $\Im(\zeta) > 0$, a dagegen ein *Randpunkt* der Fläche $R(a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, \infty)$ ist. Die Substitution S ist also nicht elliptisch. Wäre sie hyperbolisch, so hätte sie zwei reelle Fixpunkte α und β $(> \alpha)$ und könnte

$$\frac{\zeta' - \alpha}{\zeta' - \beta} = e^{\frac{2\pi}{\lambda}} \frac{\zeta - \alpha}{\zeta - \beta}$$

geschrieben werden, wo λ reell ist. Dann wäre

$$\varphi(z) = \left(\frac{\zeta - \alpha}{\zeta - \beta}\right)^{i|\lambda|}$$

in der Umgebung von $z = a$ eindeutig und, da $|\varphi(z)| = e^{-|\lambda| \arg \frac{\zeta - \alpha}{\zeta - \beta}}$, somit $1 < |\varphi(z)| < e^{\pi|\lambda|}$, *regulär*, wobei also $1 \leqq \varphi(a) \leqq e^{\pi|\lambda|}$. Andererseits ist jedoch, wenn z einen kleinen positiven Umlauf um a vollführt, $\Delta \arg \varphi(z) = |\lambda| \Delta \log \left|\frac{\zeta - \alpha}{\zeta - \beta}\right| = \pm 2\pi$, wonach $\varphi(a) = 0$ oder ∞ sein müsste, in Widerspruch zu Obigem. Die Substitution S ist also auch nicht hyperbolisch und muss daher parabolisch sein. Sie hat einen reellen Fixpunkt α und kann

$$\frac{1}{\zeta' - \alpha} = \frac{1}{\zeta - \alpha} + h$$

geschrieben werden, wo h ebenfalls reell ist. Wir setzen

$$\frac{2\pi}{|h|} \frac{1}{\alpha - \zeta} = \Sigma(\zeta);$$

da Σ hiernach eine reelle Substitution mit positiver Determinante $2\pi|h|$ ist, so folgt aus $\Im(\zeta) > 0$, dass auch $\Im(\Sigma) > 0$. Die Funktion

$$\varphi(z) = e^{i\Sigma(\zeta)}$$

ist somit in der Umgebung von $z = a$ beschränkt. Wenn z einen Umlauf um a macht, ändert sich $\Re(\Sigma) = \arg \varphi(z)$ um $\pm 2\pi$. Hieraus folgt dass die Funktion $\varphi(z)$ in der Umgebung von a eindeutig und somit in diesem Punkte regulär, und weiter dass a eine einfache Nullstelle von $\varphi(z)$ ist, so dass

$$\varphi(z) = \gamma_1(z-a) + \gamma_2(z-a)^2 + \cdots \quad (\gamma_1 \neq 0).$$

Man hat somit in der Umgebung von $z = a$

$$\Sigma(\zeta) = -i \log(z-a) + c_0 + c_1(z-a) + \cdots, \tag{2}$$

eine Entwicklung, die in der Umgebung des unendlich fernen Windungspunktes offenbar durch

$$\Sigma(\zeta) = -i \log \frac{1}{z} + c_0 + \frac{c_1}{z} + \cdots \tag{2'}$$

zu ersetzen ist. Wir sehen somit, dass jeder Zweig unserer Funktion ζ sich in der Umgebung eines der Windungspunkte derart verhält, dass eine passend gewählte linear gebrochene Funktion $\Sigma(\zeta)$ mit reellen Koeffizienten und positiver Determinante in der Umgebung dieser Stelle eine Entwicklung der Form (2) bzw. (2)′ zulässt.

In der Umgebung jeder von den Windungspunkten verschiedenen Stelle z_0 ist ζ in jedem ihrer Zweige regulär und somit

$$\zeta = c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots, \tag{3}$$

wobei zu beachten ist, dass $\Im(c_0) > 0$ und $c_1 \neq 0$, da einem solchen Punkt in jedem Zweige ein innerer Punkt der Halbebene $\Im(\zeta) > 0$ entspricht und die Abbildung in einem inneren Punkt konform ist.

4. Die Umkehrung der oben betrachteten linear vieldeutigen Funktionen ergibt gewisse eindeutige automorphe Funktionen. In dem einfachsten Fall $q=2$ erhält man Exponentialfunktionen, für $q>2$ eine in der Halbebene $\Im(\zeta)>0$ existierende und reguläre, in bezug auf die oben definierte Gruppe $\Gamma(a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, \infty)$ automorphe Funktion vom Grenzkreistypus

$$z = z(\zeta; a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, \infty). \tag{4}$$

In dem Fundamentalpolygon, welches $2(q-1)$ Seiten und lauter parabolische Spitzen hat, nimmt sie jeden Wert z mit Ausnahme von $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$ und ∞ einmal an und nähert sich in den Spitzen diesen Ausnahmewerten. Für $q = 3$ ist sie, bis auf gewisse lineare Transformationen, mit der elliptischen Modulfunktion identisch.

5. Die oben eingeführten Uniformisierungstranzendenten

$$\zeta(z;\, a_1,\, \infty),\ \zeta(z;\, a_1,\, a_2,\, \infty),\, \ldots,\, \zeta(z;\, a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{q-1},\, \infty),\, \ldots \tag{5}$$

spielen bei Untersuchungen, welche das allgemeine Problem der *Wertverteilung* einer eindeutigen analytischen Funktion in der Umgebung einer isolierten, wesentlich singulären Stelle oder Linie betreffen, eine fundamentale Rolle. Die hierbei anzuwendende Methode ist im Prinzip die folgende:

Wenn $z(x)$ eine eindeutige analytische Funktion der Variable x bezeichnet und es sich um die Ermittelung der Verteilungen derjenigen Werte x handelt, wo die Funktion $z(x)$ gewisse vorgegebene Werte $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$ und ∞ annimmt, so bilde man die zusammengesetzte Funktion

$$\bar{\zeta}(x) = \zeta\,[z(x);\, a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{q-1},\, \infty].$$

Diese Funktion ist für die genannten Werte x logarithmisch singulär und das Problem ist auf die Untersuchung der Verteilung dieser *Singularitäten* zurückgeführt. Diese Untersuchung und die daraus herfliessenden Resultate gestalten sich bekanntlich wesentlich verschieden, jenachdem die Anzahl q gleich 2 oder grösser als 2 ist, weil nämlich im erstgenannten Fall die Funktion $\zeta = \zeta(z;\, a_1,\, \infty)$ *unbeschränkt* veränderlich ist, während das Wertgebiet der Funktionen $\zeta(z;\, a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{q-1},\, \infty)$ für $q > 2$ *auf die Halbebene* $\mathfrak{J}(\zeta) > 0$ *beschränkt* ist.

Indessen bereitet der Umstand, dass die Funktionen ζ und die vermittels dieser gebildeten zusammengesetzten Funktionen $\bar{\zeta}$ in komplizierter Weise verzweigt sind, Schwierigkeiten; nur der allereinfachste Fall, wo die zu untersuchende Funktion die Werte $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$ und ∞ überhaupt nicht annimmt, lässt sich in bekannter Weise unmittelbar behandeln, eben weil $\bar{\zeta}(x)$ dann *eindeutig* ist, und liefert für $q > 2$ u. A. die klassischen Picardschen Sätze. Um diese Schwierigkeiten zu beseitigen, kann man von folgendem von Schwarz[1] herrührenden Gedanken Gebrauch machen, der bekanntlich in der Uniformisierungstheorie Anwendung gefunden hat.

6. Wir betrachten zunächst den Fall $q = 2$. Wenn z irgend einen geschlossenen Umlauf vollführt, so erleidet die Funktion $\zeta(z;\, a_1,\, \infty)$ gemäss (1) eine lineare Transformation, die entweder identisch ist oder aber eine euklidische Verschiebung der ζ-Ebene definiert, wobei also das *euklidische* Linienelement

[1] Gesammelte Abhandlungen, Bd. II, S. 362—364.

$|d\zeta|$ invariant bleibt. Demnach ist der Logarithmus des Vergrösserungsverhältnisses, $u(z;\, a_1,\, \infty) = \log\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|$, eine *eindeutige* Funktion; in der Tat ergibt sich aus (1) für u, bis auf eine belanglose additive Konstante, der Ausdruck

$$u(z;\, a_1,\, \infty) = \log\frac{1}{|z-a_1|}. \tag{6}$$

Diese Funktion genügt der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$, wird an den Stellen $z = a_1$ und $z = \infty$ unendlich bzw. wie $-\log|z-a_1|$ und $-\log|z|$ und ist durch diese Eigenschaften bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Wenn $q > 2$ ist, so wird die Funktion $\zeta(z;\, a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{q-1},\, \infty)$ bei einem geschlossenen Umlauf der Variable z einer linear gebrochenen, parabolischen oder hyperbolischen Transformation der Gruppe $\Gamma(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{q-1},\, \infty)$ unterworfen, welche die Halbebene $\Im(\zeta) > 0$ auf sich selbst konform abbildet. Eine solche Transformation kann nun bekanntlich als eine nichteuklidische, hyperbolische, Verschiebung dieser Halbebene aufgefasst werden, wobei das *hyperbolische* Linienelement $\frac{|d\zeta|}{\Im(\zeta)}$ invariant bleibt.[1] Hiernach ist jetzt der Logarithmus des hyperbolischen Vergrösserungsverhältnisses,

$$u(z;\, a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{q-1},\, \infty) = \log\frac{\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|}{\Im(\zeta)} \tag{7}$$

eine *eindeutige* reelle Funktion von z. Diese Funktion genügt der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u = e^{2u}, \tag{8}$$

die also für $q > 2$ die Rolle der Gleichung $\Delta u = 0$ übernimmt, was den fundamentalen Unterschied zwischen dem allgemeinen Fall $q > 2$ und dem speziellen

---

[1] Wenn z einen geschlossenen Umlauf vollführt, so geht ζ in $\zeta' = \frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}$ über, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reell und $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$. Hiernach ist $|d\zeta'| = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{|\gamma\zeta+\delta|^2}|d\zeta|$ und $\Im(\zeta') = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{|\gamma\zeta+\delta|^2}\Im(\zeta)$ und somit in der Tat $\frac{|d\zeta'|}{\Im(\zeta')} = \frac{|d\zeta|}{\Im(\zeta)}$.

$q=2$ markiert.[1] Ferner ist, wie aus den Entwicklungen (2), (2)' und (3) hervorgeht, u nebst ihren partiellen Ableitungen jeder Ordnung überall endlich und stetig, die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$ und ∞ ausgenommen, wo sie logarithmisch unendlich wird. Um den Charakter dieser Singularitäten genauer zu bestimmen bemerke man, dass man in der rechten Seite der Gleichung (7) die Funktion ζ mit einer beliebigen linear gebrochenen Transformation $\Sigma(\zeta)$ ersetzen darf, deren Koeffizienten reel und von positiver Determinante sind, weil u gegenüber einer solchen Substitution invariant ist. Um nun das Verhalten der Funktion u in der Umgebung einer der Stellen a zu ermitteln, wähle man diese Transformation insbesondere so, dass $\Sigma(\zeta)$ in der Umgebung von a eine Entwicklung der Form (2) hat, was gemäss des S. 163 gesagten möglich ist. Dann ist

$$\left|\frac{d}{dz}\Sigma(\zeta)\right| = \frac{1}{|z-a|}\left|1 + ic_0(z-a) + \cdots\right|$$

und

$$\Im\left[\Sigma(\zeta)\right] = \log\frac{1}{|z-a|} + \Im(c_0) + \Im\left[c_1(z-a)\right] + \cdots,$$

folglich

$$\log\left|\frac{d}{dz}\Sigma(\zeta)\right| - \log\Im\left[\Sigma(\zeta)\right] = \log\frac{1}{|z-a|} - \log_2\frac{1}{|z-a|} + \log\left|1 + ic_0(z-a) + \cdots\right|$$
$$- \log\left(1 + \frac{\Im(c_0) + \cdots}{\log\frac{1}{|z-a|}}\right).$$

Es ist hiernach in der Umgebung des Punktes a

$$u = \log\frac{1}{|z-a|} - \log_2\frac{1}{|z-a|} + \varepsilon(z-a), \tag{9}$$

wo $\varepsilon(z)$ allgemein eine Funktion bezeichnet, die nebst ihren mit $|z|$ multiplizierten Ableitungen erster Ordnung für $z\to 0$ verschwindet. In der Umgebung des unendlich fernen Punktes erhält man in derselben Weise von (2)' ausgehend die Entwicklung

$$u = -\log|z| - \log_2|z| + \varepsilon\left(\frac{1}{z}\right). \tag{9'}$$

---

[1] In der Tat ist, wenn wir $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ schreiben, $\Delta u = \Delta\log\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| - \Delta\log\eta = - \Delta\log\eta = \frac{1}{\eta^2}\left\{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right\} = \frac{1}{\eta^2}\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2 = e^{2u}$.

Durch die Eigenschaften (8), (9) und (9)' ist die Funktion u *eindeutig bestimmt.* In der Tat: Sei v eine zweite Funktion mit denselben Eigenschaften; dann ist die Differenz $h=u-v$ in der ganzen unendlichen z-Ebene stetig und *verschwindet* für $z=a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$ und ∞. Wäre nun h nicht identisch gleich Null, so hätte diese Differenz im Endlichen ein *positives* Maximum oder ein *negatives* Minimum oder beides. Nun ist an einer Stelle wo h ein Maximum hat $\Delta h \leqq 0$ und an einer Minimumstelle $\Delta h \geqq 0$[1]; andererseits ist aber

$$\Delta h = e^{2u} - e^{2v} = 2e^{2[v+\vartheta(u-v)]}h, \quad (0<\vartheta<1),$$

und somit Δh positiv und negativ jenachdem h selber positiv oder negativ ist. Somit ist die Existenz eines positives Maximums oder negativen Minimums bei der Funktion h unmöglich und folglich muss h identisch verschwinden, also $v \equiv u$ sein.

Wir haben hiermit die Funktionenfolge (5) durch eine Reihe äqvivalenter reeller Funktionen

$$(10) \qquad u(z;\, a_1,\, \infty),\ u(z;\, a_1,\, a_2,\, \infty), \ldots,\ u(z;\, a_1,\, a_2, \ldots, a_{q-1},\, \infty), \ldots$$

ersetzt, die bei Untersuchungen über das Wertverteilungsproblem im Prinzip dasselbe leisten, dabei jedoch den wesentlichen Vorzug haben in der ganzen z-Ebene *eindeutige* Funktionen zu sein.

II.

7. Wir wenden uns jetzt dem Wertverteilungsproblem der eindeutigen analytischen Funktionen zu. Es sei $z=z(x)$ eine innerhalb des Kreises $|x|<R$ eindeutige und meromorphe Funktion; wir stellen uns die Aufgabe die Verteilung derjenigen in diesem Kreise gelegenen Werte x zu untersuchen, wo $z(x)$ die vorgegebenen Werte $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$ und ∞ annimmt.

In diesem Kapitel betrachten wir zunächst den Fall $q=2$; mittels einer linearen Transformation kann man erreichen, dass die vorgegebenen zwei Werte 0 und ∞ sind. Die Untersuchung der Verteilung der Nullstellen α und der ∞-Stellen β von $z(x)$ und der hiermit zusammenhängenden Fragen reduziert sich nach der oben im ersten Kapitel dargelegten Methode auf die potentialtheoretische Untersuchung der harmonischen Funktion

[1] Dies ergibt sich unmittelbar aus der elementaren Theorie der Extremwerte.

$$u[z(x);\,0,\,\infty] = \log\frac{1}{|z(x)|}, \tag{11}$$

welche in dem Kreise $|x| < R$ eindeutig und regulär ist, die Stellen α und β ausgenommen, wo sie, wenn diese Stellen einfach gezählt werden, logarithmisch unendlich wird bzw. wie $-\log|x-\alpha|$ und $\log|x-\beta|$. Diese Untersuchung ist von ROLF NEVANLINNA und teilweise vom Verfasser in einigen früheren Arbeiten systematisch durchgeführt worden.[1] Ich beschränke mich in diesem Zusammenhang darauf das vom Gesichtspunkt des oben formulierten Wertverteilungsproblemes wichtigste Ergebnis, den sog. Jensenschen Satz, in der von ROLF NEVANLINNA gegebenen Formulierung herzuleiten. Der nachfolgende Beweis dieses Satzes ist im Prinzip nicht neu[2]; ich werde ihn dessenungeachtet vollständig durchführen um die Analogie mit dem später behandelten Fall $q > 2$ und somit die Einheitlichkeit der ganzen Methode klar hervortreten zu lassen.

8. Wir beschreiben um den Nullpunkt mit dem Halbmesser t $(0 < t < R)$ einen Kreis, der durch keine der 0- oder ∞-Stellen von $z(x)$ hindurch geht, und isolieren die innerhalb dieses Kreises liegenden 0- und ∞-Stellen unserer Funktion mittels kleiner Kreise. Diese Kreise begrenzen mit dem oben genannten ein Gebiet innerhalb dessen und auf dessen Rande die harmonische Funktion (11) eindeutig und regulär ist. Folglich ist das über sämtliche Berandungskreise erstreckte Integral der inneren Normalableitung

$$\int \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = 0.$$

Lässt man hier die Halbmesser der kleinen Isolierungskreise gegen Null konvergieren und setzt man[3]

$$\mu(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|z(re^{i\varphi})|\,d\varphi,$$

[1] Ich verweise insbesondere auf folgende Abhandlungen:

F. und R. NEVANLINNA: *Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie,* Acta Soc. Scient. Fennicae, Tom. L N:o 5.

R. NEVANLINNA: *Zur Theorie der meromorphen Funktionen,* Acta mathematica Bd. 46.

[2] E. LINDELÖF: *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini.* Acta Soc. Sc. Fennicae, T. 31, 1902.

[3] Wir machen darauf aufmerksam, dass $\mu(r)$ eine für $0 \leqq r < R$ *stetige* Funktion von r ist.

so ergibt sich

$$t\mu'(t) = n(t, 0) - n(t, \infty),$$

wo allgemein $n(r, a)$, bei Beachtung der Multiplizitäten, die Anzahl der innerhalb des Kreises $|x| = r$ gelegenen a-Stellen von $z(x)$ bezeichnet. Es sei ferner $n_0(a)$ die Multiplizität des Nullpunktes als a-Stelle der Funktion $z(x)$ und $0 < r_1 \leqq r_2 \leqq \cdots$ die absoluten Beträge der von Null verschiedenen a-Stellen von $z(x)$. Wir setzen mit ROLF NEVANLINNA

$$(12) \qquad N(r, a) = \int_0^r [n(t, a) - n_0(a)] \frac{dt}{t} + n_0(a) \log r = \log \frac{r^{n(r, a)}}{r_1 r_2 \cdots r_{n-n_0}},$$

wonach N eine mit r wachsende, als Funktion von $\log r$ aufgefasst *konvexe* Funktion ist, die für $r \geqq 1$ *positiv* ist. Wenn man dann die oben erhaltene Relation durch t dividiert und hierauf zwischen den Grenzen r_0 und r $(0 < r_0 < r < R)$ integriert, was wegen der Stetigkeit des Mittelwertes μ erlaubt ist, so ergibt sich nach hierauf folgendem Grenzübergang $r_0 \to 0$

$$\mu(r) = N(r, 0) - N(r, \infty) + \log |c|,$$

wo c den ersten von Null verschiedenen Koeffizienten der Laurentschen Entwicklung von $z(x)$ in der Umgebung des Nullpunktes bezeichnet. Dies ist der Jensensche Satz.

Um ihn auf eine übersichtliche Form zu bringen, hat ROLF NEVANLINNA (loc. cit.) in die Theorie der meromorphen Funktionen neben $N(r, a)$ folgende Fundamentalgrössen eingeführt:

$$(13) \qquad m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \frac{1}{|z(re^{i\varphi}) - a|} \, d\varphi, \quad m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |z(re^{i\varphi})| \, d\varphi$$

und

$$(14) \qquad T(r, a) = m(r, a) + N(r, a),$$

wo allgemein $\overset{+}{\log} \varrho$ die Grösse $\log \varrho$ oder 0 bezeichnet jenachdem $\log \varrho \geqq 0$ oder $\log \varrho < 0$ ist. Die Funktion m ist gemäss ihrer Definition nichtnegativ und von der Funktion T lässt sich zeigen, dass sie eine mit r monoton *wachsende*, als

Funktion von $\log r$ aufgefasst *konvexe* Funktion ist.[1] Man hat nun $\mu(r) = m(r, \infty) - m(r, 0)$ und der Jensensche Satz kann einfach durch die Beziehung

$$T(r, \infty) = T(r, 0) + \log|c| \tag{15}$$

ausgedrückt werden.

Wenn wir jetzt den Jensenschen Satz auf die Funktion $z(x)-a$ statt $z(x)$ anwenden und zugleich bemerken, dass die ∞-Stellen für diese Funktionen dieselben sind, während[2]

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|z(re^{i\varphi})-a|\,d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|z(re^{i\varphi})|\,d\varphi\right| \leqq \overset{+}{\log}|a| + \log 2,$$

so erhalten wir

$$T(r, a) = T(r, \infty) + h(r) \tag{16}$$

wo

$$|h(r)| \leqq |\log|c|| + \overset{+}{\log}|a| + \log 2 \tag{16'}$$

und c jetzt den ersten nicht verschwindenden Koeffizienten der Laurentschen Entwicklung der Funktion $z(x)-a$ in der Umgebung des Nullpunktes bezeichnet. Wenn wir also mit $T(r)$ eine Funktion bezeichnen, die bis auf eine additive Konstante gleich $T(r, \infty)$ ist, welche Konstante so gewählt werden mag, dass $T(r)$ bereits für $r = 0$ *positiv* ist, so gilt folgender Satz, den Rolf Nevanlinna wegen seiner fundamentalen Bedeutung für die ganze Theorie der meromorphen Funktionen als den »ersten Hauptsatz» dieser Theorie bezeichnet:

Zu jeder innerhalb eines Kreises $|x| < R$ eindeutigen, meromorphen Funktion $z(x)$ gehört eine positive, monoton wachsende und in bezug auf $\log r$ konvexe Funktion $T(r)$ derart, dass für jeden endlichen oder unendlichen komplexen Wert a die Beziehung

$$T(r, a) = m(r, a) + N(r, a) = T(r) + O(1) \tag{17}$$

---

[1] Rolf Nevanlinna, loc. cit. S. 14.

[2] Es ist $\overset{+}{\log}|z-a| \leqq \overset{+}{\log}(|z|+|a|) \leqq \overset{+}{\log}|z| + \overset{+}{\log}|a| + \log 2$ und andererseits $\overset{+}{\log}|z| = \overset{+}{\log}|z-a+a| \leqq \overset{+}{\log}(|z-a|+|a|) \leqq \overset{+}{\log}|z-a| + \overset{+}{\log}|a| + \log 2$, woraus die obige Ungleichung folgt.

besteht, wo $O(1)$ *eine Grösse bezeichnet, deren absoluter Betrag gemäss* $(16)'$ *kleiner als* $|\log|c|| + \overset{+}{\log}|a| +$ eine numerische Konstante *ist.*

9. In bezug auf die nähere Analyse dieses Satzes verweise ich auf die oben zitierte Arbeit von ROLF NEVANLINNA; hier sei nur noch Folgendes über die Bedeutung der Fundamentalgrösse T für das Verhalten der Funktion $z(x)$ erwähnt.

Wir betrachten zunächst den Fall einer in der ganzen x-Ebene meromorphen Funktion $z(x)$, wo also $R = \infty$. Da $T(r)$ eine mit r monoton wachsende Funktion ist, so existiert $\lim\limits_{r \to \infty} T(r)$ und ist entweder endlich oder positiv unendlich. Falls dieser Grenzwert endlich ist, so reduziert sich $z(x)$ auf eine *Konstante*, falls $T(r) = O(\log r)$, so ist $z(x)$ eine *rationale* Funktion und umgekehrt. Von diesen speziellen Fällen abgesehen ist der unendlich ferne Punkt eine wesentlich singuläre Stelle der Funktion $z(x)$. Man bezeichnet dann die obere Grenze

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log T(r)}{\log r}$$

als die *Ordnung* der Funktion $z(x)$, die hiernach von endlicher oder unendlich hoher Ordnung ist, jenachdem diese obere Grenze endlich oder unendlich ist.[1]

Falls $z(x)$ eine innerhalb des endlichen Kreises $|x| < R$ meromorphe Funktion ist, so ist die Endlichkeit des Grenzwertes $\lim\limits_{r \to R} T(r)$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Funktion $z(x)$ sich als Qvotient zweier für $|x| < R$ *beschränkter* Funktionen darstellen lasse; gemäss eines bekannten Satzes von FATOU nähert sich die Funktion dann bei radieller Annäherung an die Peripherie $|x| = R$ fast überall einem bestimmten Grenzwert. Ist wiederum $\lim\limits_{r \to R} T(r) = +\infty$, so bezeichnet man die obere Grenze

$$\overline{\lim_{r \to R}} \frac{\log T(r)}{\log \frac{1}{R - r}}$$

[1] Dieser Ordnungsbegriff ist in dem speziellen Fall einer ganzen Funktion mit der herkömmlichen äqvivalent. Überhaupt ergibt eine systematisch durchgeführte potentialtheoretische Analyse der harmonischen Funktion (11) u. A. als Spezialfall die klassische Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung. Wir verweisen in dieser Hinsicht auf eine kleine Schrift des Verfassers: *Bemerkungen zur Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung* (Soc. Scient. Fennicae, Comm. Phys.-Mat. II. 4, 1923) und vor allem auf die zwei ersten Kapiteln der oben erwähnten Abhandlung: *Zur Theorie der meromorphen Funktionen* von ROLF NEVANLINNA.

als die *Ordnung* der Funktion $z(x)$, die also von endlicher oder unendlich hoher Ordnung ist, jenachdem diese obere Grenze endlich oder unendlich ist.

III.

10. Wir gehen nun in der Behandlung des Wertverteilungsproblems weiter und wenden uns jetzt dem allgemeinen Fall zu. Mit $z(x)$ bezeichnen wir, wie vorhin, eine innerhalb des Kreises $|x| < R$ eindeutige und meromorphe Funktion; es gilt die Verteilungen derjenigen Werte x zu untersuchen, wo diese Funktion die beliebig vorgegebenen Werte $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$ und ∞ annimmt, wobei also $q > 2$.

Gemäss der im ersten Kapitel dargelegten Methode bilden wir mit Hilfe der Funktion (7) die zusammengesetzte Funktion

$$(18) \qquad \bar{u}(x) = u[z(x); a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, \infty] = \log \frac{\left|\frac{d\zeta[z(x)]}{dz}\right|}{\Im(\zeta[z(x)])};$$

es wird unsere erste Aufgabe sein die charakteristischen Eigenschaften dieser Funktion festzustellen.

Zunächst ist $\bar{u}(x)$ offenbar eine innerhalb des Kreises $|x| < R$ eindeutige reelle Funktion von x, die überall in diesem Kreise, die a_1-, a_2-, $\ldots$, a_{q-1}- und ∞-Stellen der Funktion $z(x)$ ausgenommen, nebst ihren partiellen Ableitungen stetig ist. An den genannten Ausnahmestellen ist $\bar{u}(x)$ logarithmisch unendlich und zwar gemäss den Entwicklungen (9) und (9)' in folgender Weise: Wenn α eine p-fache a-Stelle der Funktion $z(x)$ ist, so dass in der Umgebung dieser Stelle

$$z - a = \gamma_p(x-\alpha)^p + \cdots \qquad (\gamma_p \neq 0),$$

so ist

$$\bar{u}(x) = p \log \frac{1}{|x-\alpha|} - \log_2 \frac{1}{|x-\alpha|} - \log p\,|\gamma_p| + \varepsilon(x-\alpha).$$

Falls α eine p-fache Unendlichkeitsstelle der Funktion $z(x)$ ist, somit

$$z = \frac{\gamma_{-p}}{(x-\alpha)^p} + \cdots \qquad (\gamma_{-p} \neq 0),$$

so ist in der Umgebung dieser Stelle

$$\bar{u}(x) = -p \log \frac{1}{|x-\alpha|} - \log_2 \frac{1}{|x-\alpha|} - \log p\,|\gamma_{-p}| + \varepsilon(x-\alpha);$$

hier bezeichnet, wie vorhin, $\varepsilon(x)$ allgemein eine Funktion, die nebst ihren mit $|x|$ multiplizierten Ableitungen erster Ordnung für $x \to 0$ verschwindet. Da ferner die äussere Funktion $u(z)$ der Differentialgleichung (8) genügt, so ergibt eine kurze Rechnung für unsere zusammengesetzte Funktion die Differentialgleichung

$$\Delta \bar{u} = |z'(x)|^2 e^{2\bar{u}}.$$

Wenn wir also die Funktion

$$v(x) = u[z(x);\, a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, \infty] + \log|z'(x)| = \log \frac{\left|\frac{d\zeta[z(x)]}{dx}\right|}{\Im(\zeta[z(x)])} \tag{19}$$

einführen, so hat diese Funktion folgende Eigenschaften:

1° Die Funktion $v(x)$ ist nebst ihren Ableitungen innerhalb des Kreises $|x| < R$ eindeutig und stetig, die a_1-, a_2-, ..., a_{q-1}- und ∞-Stellen und die mehrfachen Stellen der Funktion $z(x)$ ausgenommen, wo sie sich folgendermassen verhält:

In der Umgebung einer p-fachen a_1-, a_2-, ..., a_{q-1}- oder ∞-Stelle α ist

$$v(x) = \log \frac{1}{|x-\alpha|} - \log_2 \frac{1}{|x-\alpha|} + \varepsilon(x-\alpha); \tag{20}$$

in der Umgebung einer p-fachen Stelle α wo $z(x)$ von den obigen Werten verschieden ist und die Entwicklung $z = \gamma_0 + \gamma_p(x-\alpha)^p + \cdots$ $(\gamma_0 \neq a,\ \gamma_p \neq 0)$ hat, ist

$$v(x) = (1-p) \log \frac{1}{|x-\alpha|} + u(\gamma_0) + \log p\,|\gamma_p| + \varepsilon(x-\alpha). \tag{21}$$

2° Die Funktion $v(x)$ genügt der Differentialgleichung

$$\Delta v = e^{2v}. \tag{22}$$

Unser Problem ist auf die Untersuchung der durch die obigen Eigenschaften charakterisierten Funktion $v(x)$ zurückgeführt.

11. Wie bei der Herleitung des Jensenschen Satzes beschreiben wir um den Nullpunkt mit dem Halbmesser r $(0 < r < R)$ einen Kreis, der durch keine der singulären Stellen der Funktion $v(x)$ geht, und isolieren die innerhalb dieses Kreises liegenden singulären Punkte mittels kleiner Kreise. Innerhalb und auf dem Rande des so entstandenen mehrfach zusammenhängenden Kreisgebietes ist die Funktion $v(x)$ nebst ihren partiellen Ableitungen eindeutig und stetig. In Folge der Differentialgleichung (22) ist hiernach das über sämmtliche Berandungskreise erstreckte Integral der inneren Normalableitung

$$\int \frac{\partial v}{\partial n} ds = -\int \Delta v\, df = -\int e^{2v} df,$$

wo das Flächenintegral rechts über das genannte Gebiet zu erstrecken ist. Wir setzen

$$\mu(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(re^{i\varphi})\, d\varphi \tag{23}$$

und lassen die Halbmessern der kleinen Isolierungskreise gegen Null konvergieren.[1] Bei Beachtung der Entwicklungen (20) und (21) (wobei insbesondere zu bemerken ist, dass die mit $\varepsilon(x-a)$ bezeichneten Grössen nebst ihren mit $|x-a|$ multiplizierten Ableitungen erster Ordnung für $x \to a$ verschwinden) erhält man an der Grenze

$$r\mu'(r) = -\sum_{\nu=1}^{q} n(r, a_\nu) + [2n(r, \infty) + n^{(1)}(r, 0) - n^{(1)}(r, \infty)] + \frac{1}{2\pi}\int e^{2v} df,$$

wo $a_q = \infty$ und das Flächenintegral rechts über den Kreis $|x| < r$ zu erstrecken ist. Hier bezeichnet, wie vorhin, $n(r, a)$ die Anzahl der innerhalb des Kreises $|x| = r$ liegenden a-Stellen der Funktion $z(x)$ und $n^{(1)}(r, a)$ die analoge Grösse in bezug auf die Ableitung $z'(x)$, wobei jede Stelle gemäss ihrer Multiplizität gezählt wird.

Wir setzen der Kürze wegen

$$\sum_{\nu=1}^{q} n(r, a_\nu) = n(r), \quad 2n(r, \infty) + n^{(1)}(r, 0) - n^{(1)}(r, \infty) = n_1(r) \tag{24}$$

---

[1] Man bemerke, dass der Mittelwert $\mu(r)$, wie der entsprechende Mittelwert in dem Jensenschen Satze, für $0 \leqq r < R$ *stetig* ist.

und bemerken, dass $n_1(r)$ hiernach die Anzahl der innerhalb des Kreises $|x|=r$ liegenden *mehrfachen* Endlich- und Unendlichkeitsstellen der Funktion $z(x)$ angibt, wobei eine p-fache Stelle $p-1$ mal gezählt werden soll. Insbesondere ist hiernach, falls $x=0$ eine p-fache Stelle von $z(x)$ ist, $n_1(0)=p-1$. Aus dieser Bedeutung der Grösse $n_1(r)$ ist zu sehen dass sie, wie $n(r)$, *nichtnegativ* und *monoton wachsend* ist. Ferner führen wir schon an dieser Stelle die entsprechenden Mittelwerte

$$(25) \qquad \sum_1^q N(r, a_\nu) = N(r), \quad 2N(r, \infty) + N^{(1)}(r, 0) - N^{(1)}(r, \infty) = N_1(r)$$

ein, wo $N(r, a)$ durch (12) definiert wurde und $N^{(1)}(r, a)$ die analoge Bedeutung in bezug auf die Ableitung $z'(x)$ hat. Es ist hiernach $\frac{dN}{dr} = \frac{n(r)}{r}$ und $\frac{dN_1}{dr} = \frac{n_1(r)}{r}$.

Mit Benutzung der Bezeichnungen (24) erhält die obige Beziehung die Form

$$(26) \qquad r\mu'(r) = -n(r) + n_1(r) + \frac{1}{2\pi}\int e^{2v}\,df,$$

woraus schliesslich durch Differentiation nach r die Gleichung

$$(27) \qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\mu'(r)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2v(re^{i\varphi})}\,d\varphi$$

folgt. Man hätte selbstverständlich diese Relation auch direkt aus der Differentialgleichung

$$\Delta v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = e^{2v}$$

durch Integration in bezug auf φ zwischen den Grenzen 0 und 2π erhalten können; indessen ist es für das Nachfolgende von Bedeutung die aus der Gleichung (26) hervorgehenden Unstetigkeitssprünge der Ableitung $\mu'(r)$ zu kennen.

Wir machen jetzt, um weiter zu kommen, von der elementaren Ungleichung

$$(28) \qquad \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \log f(\varphi)\,d\varphi \leqq \log\left\{\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(\varphi)\,d\varphi\right\}$$

Gebrauch, die für jede innerhalb des Intervalles $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$ integrable, relle und nicht negative Funktion $f(\varphi)$ besteht.[1] Wendet man diese Ungleichung auf das rechts in (27) stehende Integral an, so ergibt sich für $\mu(r)$ folgende einfache Differentialungleichung

$$(29) \qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\mu'(r)) \geqq e^{2\mu(r)},$$

und es handelt sich nunmehr um die Integration dieser Ungleichung.

12. Wir führen hierzu vorübergehend statt r die Variable $t = \log r$ ein und setzen

$$(30) \qquad \mu(r) + N(r) + \log r = \mu(e^t) + N(e^t) + t = y(t),$$

woraus auf Grund der Beziehung (26) folgt

$$y'(t) = r\mu'(r) + n(r) + 1 = 1 + n_1(r) + \frac{1}{2\pi}\int e^{2v}\,df.$$

Da μ und N stetige Funktionen sind, so ist auch $y(t)$ für alle in Frage kommenden Werte t d. h. für $-\infty < t < \log R$ *stetig* und es ist $y(t) \to -\infty$ für $t \to -\infty$. Dagegen erleidet die Ableitung $y'(t)$ an den Stellen $t_1 < t_2 < \cdots$, wo die Anzahlsfunktion n_1 sich sprungweise ändert, dieselben, stets *positiven* Sprünge wie diese. Ferner bemerke man, dass diese Ableitung *positiv* (sogar $\geqq 1$) ist und dass $y'(t) \to 1 + n_1(0) = p$, falls $x = 0$ eine p-fache Stelle der Funktion $z(x)$ ist (vgl. S. 175). Die Differentialungleichung (29) erhält in t und y ausgedrückt die Form

$$y''(t) \geqq e^{2(y-N)}.$$

Da N mit wachsendem t oder r nie abnimmt, so folgt hieraus, dass für ein festes $\varrho < R$ und jedes $t \leqq \log\varrho$ *a fortiori*

$$y''(t) \geqq e^{2(y(t)-N(\varrho))}$$

oder nach Multiplikation beiderseits mit der *positiven* Grösse $2y'(t)$

$$\frac{d}{dt}(y'^2) \geqq e^{-2N(\varrho)}\frac{d}{dt}(e^{2y}).$$

[1] Diese Ungleichung ergibt sich durch einen einfachen Grenzübergang aus der bekannten Tatsache, dass das geometrische Mittel positiver Zahlen höchstens gleich dem arithmetischen Mittel dieser Zahlen ist.

Man integriere nun diese Ungleichung der Reihe nach in den auf einander folgenden, von den oben erwähnten Sprungstellen $t_1, t_2, \ldots$ getrennten Stetigkeitsintervallen der Ableitung $y'(t)$ und zwar von $t = -\infty$ anfangend bis $t = \log \varrho = \tau$. Bei Beachtung der oben angegebenen Grenzwerte der Funktionen $y(t)$ und $y'(t)$ für $t \to -\infty$ ergibt sich dann nach Addition der erhaltenen Ungleichungen die Beziehung

$$y'(\tau)^2 - p^2 - \Sigma[y'(t_\nu + 0)^2 - y'(t_\nu - 0)^2] \geqq e^{2(y(\tau) - N(\varrho))}.$$

Hier sind die Glieder der links auftretenden Summe sämtlich *positiv* und die Ungleichung besteht also *a fortiori*, wenn diese Summe weggelassen wird. Wenn wir nun noch wieder r statt ϱ und $t = \log r$ statt $\tau = \log \varrho$ schreiben, so haben wir also für jedes $t < \log R$ die Ungleichung

$$y'(t)^2 \geqq p^2 + e^{2(y(t) - N(r))}.$$

Für ein festes $\varrho < R$ und jedem $t \leqq \log \varrho$ besteht hiernach *a fortiori* die Ungleichung

$$y'(t)^2 \geqq p^2 + e^{2(y(t) - N(\varrho))},$$

woraus

$$dt \leqq [p^2 + e^{2(y - N(\varrho))}]^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Wird diese Ungleichung zwischen den Grenzen $t = \log r$ und $\tau = \log \varrho$ $(r < \varrho)$ integriert, so erhält man

$$\log \frac{\varrho}{r} \leqq \frac{1}{p} \log \frac{p e^{N(\varrho) - y(t)} + [1 + p^2 e^{2(N(\varrho) - y(t))}]^{\frac{1}{2}}}{p e^{N(\varrho) - y(\tau)} + [1 + p^2 e^{2(N(\varrho) - y(\tau))}]^{\frac{1}{2}}}$$

und somit *a fortiori*

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right)^p \leqq p e^{N(\varrho) - y(t)} + [1 + p^2 e^{2(N(\varrho) - y(t))}]^{\frac{1}{2}},$$

woraus durch Auflösung in bezug auf $y(t)$ folgt

$$y(t) \leqq N(\varrho) + \log \frac{2 p \varrho^p r^p}{\varrho^{2p} - r^{2p}}.$$

Wenn wir schliesslich vermittels der Gleichung (30) von $y(t)$ zu $\mu(r)$ übergehen, so erhalten wir für diesen Mittelwert folgende Ungleichung

$$\mu(r) \leqq N(\varrho) - N(r) + \log \frac{2p\varrho^p}{\varrho^{2p} - r^{2p}} + (p-1)\log r, \tag{31}$$

die also für jedes r des Intervalles $0 \leqq r < \varrho$ besteht, wo ϱ eine beliebige Zahl des Intervalles $0 < \varrho < R$ bezeichnet. Diese Ungleichung entspricht gewissermassen dem Jensenschen Satze und hat für das Wertverteilungsproblem im Fall $q > 2$ dieselbe grundlegende Bedeutung wie diese in dem einfachsten Fall $q = 2$.

13. Als erste Anwendung der Ungleichung (31) wollen wir den sog. Picard-Landauschen Satz in der von Charatheodory gegebenen präziesen Form herleiten. Wir nehmen an, dass unsere meromorphe Funktion $z(x)$ innerhalb des Kreises $|x| < R$ die Werte $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$ und ∞ überhaupt *nicht annimmt*; dann ist $N(r) = 0$ für $0 \leqq r < R$ und somit gemäss der Ungleichung (31)

$$\mu(r) \leqq \log \frac{2p\varrho^p}{\varrho^{2p} - r^{2p}} + (p-1)\log r.$$

Falls die Nullpunktsentwicklung der Funktion $z(x)$ mit den Gliedern $\gamma_0 + \gamma_p x^p + \cdots$ ($\gamma_0 \neq a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$; $\gamma_p \neq 0$) anfängt, so folgt aus den Gleichungen (23) und (21), dass

$$\lim_{r \to 0} \{\mu(r) - (p-1)\log r\} = u(\gamma_0) + \log p|\gamma_p| = \log \frac{p|\gamma_p||\zeta'(\gamma_0)|}{\Im[\zeta(\gamma_0)]}.$$

Wenn wir also in der obigen Ungleichung das zweite Glied rechts auf die linke Seite überführen und hierauf r gegen Null konvergieren lassen, so erhalten wir an der Grenze die Ungleichung

$$\log \frac{p|\gamma_p||\zeta'(\gamma_0)|}{\Im[\zeta(\gamma_0)]} \leqq \log \frac{2p}{\varrho^p}.$$

Diese Ungleichung besteht für jedes positive $\varrho < R$ und somit auch für $\varrho = R$; wenn wir

$$\frac{2\Im[\zeta(\gamma_0)]}{|\gamma_p||\zeta'(\gamma_0)|} = [R(\gamma_0, \gamma_p)]^p$$

setzen, so haben wir hiernach folgendes Resultat:

Falls die Funktion

$$z(x) = \gamma_0 + \gamma_p x^p + \cdots$$

für $|x| < R$ regulär ist und die Werte $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$ $(q > 2)$ nicht annimmt, so existiert eine nur von diesen Ausnahmewerten und den zwei ersten Koeffizienten γ_0 und γ_p der Nullpunktsentwicklung abhängige, im Übrigen von der Funktion $z(x)$ unabhängige positive Grösse $R(\gamma_0, \gamma_p)$ derart, dass $R \leqq R(\gamma_0, \gamma_p)$.[1]

14. Als zweite Anwendung der Ungleichung (31) werden wir aus ihr einige wichtige, das Wertverteilungsproblem betreffende Ungleichungen herleiten, deren Inhalt von ROLF NEVANLINNA als »zweiter Hauptsatz» seiner Theorie der meromorphen Funktion bezeichnet worden ist und zuerst von ihm mit Hilfe »elementärer Methoden», d. h. unter Vermeidung höherer uniformisierender Tranzendenten als der Logarithmus, bewiesen wurden.

Hierzu wollen wir zunächst die Ungleichung (31) durch einige weitere Abschätzungen umformen. Da

$$\varrho^{2p} - r^{2p} = (\varrho - r) \sum_{0}^{2p-1} \varrho^{2p-\nu-1} r^{\nu} > 2p r^{2p-1}(\varrho - r),$$

so ist *a fortiori*

$$\mu(r) < N(\varrho) - N(r) + \log \frac{1}{\varrho - r} + p \log \frac{\varrho}{r}.$$

[1] Der PICARD-LANDAUsche Satz kann nach CHARATHEODORY am einfachsten direkt mit Hilfe der linear polymorphen Funktion $\zeta(z; a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, \infty)$ folgendermassen bewiesen werden:

Wenn ein beliebiger Zweig der Funktion $\zeta(z)$ mit der zu untersuchenden regulären Funktion, die wir jetzt mit $f(x) = \gamma_0 + \gamma_p x^p + \cdots$ statt mit $z(x)$ bezeichnen, zusammengesetzt wird, so ist die zusammengesetzte Funktion $\zeta[f(x); a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, \infty]$ im vorliegenden Fall, wo $f(x) \neq a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$ und ∞, für $|x| < R$ eindeutig und regulär. Da ferner $\Im(\zeta) > 0$, so ist die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^p} \frac{\zeta[f(x)] - \zeta(\gamma_0)}{\zeta[f(x)] - \bar{\zeta}(\gamma_0)} = \frac{\gamma_p \zeta'(\gamma_0)}{2i\Im[\zeta(\gamma_0)]} + \cdots$$

für $|x| < R$ regulär und dem absoluten Betrag nach höchstens gleich R^{-p}, wobei in Folge des Maximalmodulprinzips Gleichheit nur dann eintritt, wenn $R^p |\varphi(x)| \equiv 1$, somit

$$f(x) = z\left[\frac{\zeta(\gamma_0) - \bar{\zeta}(\gamma_0)\xi}{1 - \xi}; a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, \infty\right], \left(\xi = e^{i\alpha}\left(\frac{x}{R}\right)^p\right);$$

hier bezeichnet $z(\zeta; a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, \infty)$ die eindeutige und automorphe für $\Im(\zeta) > 0$ existierende Umkehrfunktion (4) der linear polymorphen Funktion $\zeta(z)$ und α eine reelle Konstante. Insbesondere ist also

$$|\varphi(0)| = \frac{|\gamma_p| |\zeta'(\gamma_0)|}{2\Im[\zeta(\gamma_0)]} \leqq R^{-p}, \text{ d. h. } R \leqq R(\gamma_0, \gamma_p),$$

womit der Satz bewiesen ist. Dieser Beweis zeigt unmittelbar, dass die erhaltene Grenze genau ist, weil sie bei der oben genannten automorphen Funktion erreicht wird. Wir bemerken, dass diese Tatsache auch aus der Herleitung der Ungleichung (31) hervorgeht, wenn man an jeder Stelle auf die Bedingungen für das Bestehen des Gleichheitszeichens achtgibt.

Um hier die Grösse $N(\varrho) - N(r)$ zu eliminieren, verfahren wir mit ROLF NEVANLINNA folgendermassen: Man fixiere die Zahl ϱ' so, dass $r < \varrho' \leqq 2r$ und $\varrho' < R$ und beschränke in der obigen Ungleichung ϱ auf das Intervall $r < \varrho < \varrho'$. Da $N(r)$ als Funktion von $\log r$ aufgefasst konvex ist, so hat man

$$N(\varrho) - N(r) \leqq \frac{\log \frac{\varrho}{r}}{\log \frac{\varrho'}{r}} [N(\varrho') - N(r)] \leqq \frac{\log \frac{\varrho}{r}}{\log \frac{\varrho'}{r}} N(\varrho').$$

Nun ist gemäss (14) und dem »ersten Hauptsatz»

$$N(\varrho') < \sum_{1}^{q} T(\varrho', a_\nu) = q\, T(\varrho') + O(1)^{1};$$

ferner hat man $\log \frac{\varrho}{r} < \frac{\varrho - r}{r}$ und, da $\varrho' \leqq 2r$, $\log \frac{\varrho'}{r} = \int\limits_{r}^{\varrho'} \frac{dt}{t} > \frac{\varrho' - r}{\varrho'} \geqq \frac{\varrho' - r}{2r}$, folglich

$$N(\varrho) - N(r) < 2q \frac{\varrho - r}{\varrho' - r} T(\varrho') + O(1).$$

Die Zahl ϱ kann beliebig innerhalb des Intervalles $r < \varrho < \varrho'$ angenommen werden; wir fixieren ϱ so, dass

$$2q \frac{\varrho - r}{\varrho' - r} T(\varrho') = 1, \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{\varrho - r} = \frac{2q}{\varrho' - r} T(\varrho'),$$

wozu $2q\, T(\varrho') > 1$ sein muss, was stets angenommen werden kann, da die Grösse $T(r)$ nur bis auf eine additive Konstante definiert und wachsend ist. Dann wird

$$\log \frac{1}{\varrho - r} = \log 2q + \log \frac{1}{\varrho' - r} + \log T(\varrho').$$

[1] Der erste Hauptsatz ergibt für $|O(1)|$ die obere Grenze

$$|O(1)| < \sum_{1}^{q-1} (|\log|\gamma_0 - a_\nu|| + \overset{+}{\log}|a_\nu|) + qk,$$

wo $\gamma_0 = z(0)$ und k eine rein numerische Konstante bezeichnet.

Da schliesslich $\log\frac{\varrho}{r} < \log\frac{\varrho'}{r} \leqq \log 2$, so ergibt sich, wenn noch ϱ statt ϱ' geschrieben wird, die für $0 < r < \varrho \leqq 2r$ und $\varrho < R$ gültige Ungleichung

$$\mu(r) < \log\frac{1}{\varrho - r} + \log T(\varrho) + O(1). \tag{32}$$

Bei der weiteren Behandlung dieser Ungleichung nehmen wir zunächst an, dass es sich um eine in der ganzen endlichen x-Ebene meromorphe Funktion $z(x)$ handelt, so dass $R = \infty$. Wenn diese Funktion dann von der endlichen Ordnung λ ist, d. h. falls

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log T(r)}{\log r} = \lambda,$$

so hat man für jedes $\lambda' > \lambda$, sobald ϱ genügend gross ist, $\log T(\varrho) < \lambda' \log \varrho$. Setzt man also in der Ungleichung (32) $\varrho = 2r$, so wird von einem gewissen Wert r ab

$$\mu(r) < (\lambda' - 1)\log r + O(1) = O(\log r). \tag{33}$$

Ist dagegen $z(x)$ eine in der ganzen Ebene meromorphe Funktion *unendlich* hoher Ordnung, so machen wir von folgenden Borelschen Lemma[1] Gebrauch: Wenn $f(r)$ eine für $r \geqq r_0 \geqq 0$ definierte reelle und positive, mit r *monoton wachsende* Funktion ist, so gilt für jedes $k > 1$ die Ungleichung

$$f(\varrho) < [f(r)]^k, \text{ wo } \varrho = r + \frac{1}{\log f(r)}$$

und zwar für jedes $r \geqq r_0$, mit eventueller Ausnahme einer Wertmenge $I(k)$ von *endlichem* Mass. Wir wenden diesen Satz auf die Funktion $T(r)$ an, welche den Bedingungen des Satzes genügt. Wenn man hiernach in der Ungleichung (32) $\varrho = r + \frac{1}{\log T(r)}$ setzt, so ist für jedes r, mit eventueller Ausnahme einer Wertmenge $I(k)$ von endlichem Mass, $\log T(\varrho) < k \log T(r)$. Da ferner $\log\frac{1}{\varrho - r} = \log_2 T(r)$, so wird

$$\mu(r) < k \log T(r) + \log_2 T(r) + O(1) = O(\log T(r)), \tag{34}$$

[1] *Sur les zéros des fonctions entières.* Acta math. Bd. 20.

eine Ungleichung, die also für jedes r mit Ausnahme der Wertmenge $I(k)$ besteht.

Wir behandeln jetzt in entsprechender Weise den Fall, wo die Funktion $z(x)$ nur innerhalb eines endlichen Kreises $|x| < R$ eindeutig und meromorph ist. Wenn diese Funktion von *endlicher* Ordnung λ ist, d. h. falls

$$\overline{\lim_{r\to R}} \frac{\log T(r)}{\log \frac{1}{R-r}} = \lambda,$$

so ist für $\lambda' > \lambda$ von einem gewissen Wert ϱ ab $\log T(\varrho) < \lambda' \log \frac{1}{R-r}$. Wir nehmen in der Ungleichung (32) $\varrho = \frac{1}{2}(r+R)$, was mit der Bedingung $\varrho \leqq 2r$ zusammenreimt, sobald $r \geqq \frac{R}{3}$; man erhält

$$(33)' \qquad \mu(r) < (\lambda' + 1) \log \frac{1}{R-r} + O(1) = O\left(\log \frac{1}{R-r}\right).$$

Wenn dagegen die Ordnung der Funktion $z(x)$ *unendlich* ist, so setze man

$$\frac{1}{R-\varrho} = \frac{1}{R-r} + \frac{1}{\log T(r)};$$

aus dem oben erwähnten Borelschen Satz folgt dann, dass $\log T(\varrho) < k \log T(r)$ $(k > 1)$ für jedes $r < R$ mit eventueller Ausnahme einer Wertmenge $I(k)$ derart, dass das über diese Wertmenge erstreckte Integral

$$\int d\left(\frac{1}{R-r}\right) = \int \frac{dr}{(R-r)^2}$$

endlich ist.[1] Ferner erhält man

$$\log \frac{1}{\varrho - r} = 2 \log \frac{1}{R-r} + \log_2 T(r) + O(1)$$

und somit

$$(34)' \quad \mu(r) < k \log T(r) + \log_2 T(r) + 2 \log \frac{1}{R-r} + O(1) = O(\log T(r)) + O\left(\log \frac{1}{R-r}\right).$$

[1] Wenn wir die dem Intervall (r, R) zugehörige Teilmenge von $I(k)$ mit $I(r, k)$ bezeichnen, so ist hiernach $\lim\limits_{r\to R} (R-r)^{-2} I(r, k) = 0$.

15. Um zu den Ungleichungen zu gelangen, deren Inhalt den »zweiten Hauptsatz» der Theorie der meromorphen Funktionen ausmacht, bedürfen wir noch einer Abschätzung des Mittelwertes

$$\mu(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\varphi})\,d\varphi =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u[z(re^{i\varphi});\, a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, \infty]\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|z'(re^{i\varphi})|\,d\varphi = \mu_1(r) + \mu_2(r)$$

nach unten hin. Aus dem Jensenschen Satze folgt sogleich, dass

$$\mu_2(r) = N^{(1)}(r, 0) - N^{(1)}(r, \infty) + O(1). \tag{35}$$

Um das erste Glied $\mu_1(r)$ abzuschätzen, bestimmen wir die positive Zahl $\delta \leqq \frac{1}{e}$ so, dass die Kreise $|z-a_\nu| = \delta$ $(\nu = 1, 2, \ldots, q-1)$ ausserhalb einander und innerhalb des Kreises $|z| = \frac{1}{\delta}$ liegen. In dem von diesen Kreisen begrenzten mehrfach zusammenhängenden Bereich ist $u(z;\, a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, \infty)$ nach unten (und nach oben) beschränkt und es ist somit

$$\mu_1(r) = \sum_1^{q-1} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z-a_\nu|\leqq\delta} u[z(re^{i\varphi})]\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|\geqq\frac{1}{\delta}} u[z(re^{i\varphi})]\,d\varphi + O(1).$$

Nun ist gemäss der Entwicklung (9) für $|z-a_\nu| \leqq \delta$

$$u[z(re^{i\varphi})] = \log\frac{1}{|z(re^{i\varphi})-a_\nu|} - \log_2\frac{1}{|z(re^{i\varphi})-a_\nu|} + O(1);$$

da ferner

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z-a_\nu|\leqq\delta} \log\frac{1}{|z(re^{i\varphi})-a_\nu|}\,d\varphi = m(r, a_\nu) + O(1)$$

und, in Folge der Ungleichung (28)

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z-a_\nu|\leqq\delta}\log_2\frac{1}{|z(re^{i\varphi})-a_\nu|}\,d\varphi\leqq\log\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z-a_\nu|\leqq\delta}\log\frac{1}{|z(re^{i\varphi})-a_\nu|}\,d\varphi+1\right\}\leqq$$

$$\overset{+}{\log}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z-a_\nu|\leqq\delta}\log\frac{1}{|z(re^{i\varphi})-a_\nu|}\,d\varphi+\log 2=\overset{+}{\log}\,m(r,a_\nu)+O(1),$$

so wird

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z-a_\nu|\leqq\delta}u[z(re^{i\varphi})]\,d\varphi>m(r,a_\nu)-\overset{+}{\log}\,m(r,a_\nu)+O(1).$$

Auf Grund der Entwicklung $(9)'$ erhält man in derselben Weise

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|\geqq\frac{1}{\delta}}u[z(re^{i\varphi})]\,d\varphi>-m(r,\infty)-\overset{+}{\log}\,m(r,\infty)+O(1).$$

Hiernach ist

$$\mu(r)>\sum_1^q m(r,a_\mu)-2m(r,\infty)-\sum_1^q\overset{+}{\log}\,m(r,a_\nu)+O(1),$$

wo in den Summen $a_q=\infty$ zu setzen ist. Da ferner $m(r,\infty)=T(r)-N(r,\infty)+O(1)$, so ergibt sich schliesslich bei Beachtung von (35) und der früher eingeführten Bezeichnung $N_1(r)=2N(r,\infty)+N^{(1)}(r,0)-N^{(1)}(r,\infty)$

$$\mu(r)>\sum_1^q m(r,a_\nu)-2T(r)+N_1(r)-\sum_1^q\overset{+}{\log}\,m(r,a_\nu)+O(1).$$ [1]

Da gemäss dem ersten Hauptsatz (17) von einem gewissen r ab (sobald $N(r,a)\geqq 0$) $m(r,a)<T(r)+O(1)$, so folgt hieraus, dass *a fortiori*

$$\mu(r)>\sum_1^q m(r,a_\nu)-2T(r)+N_1(r)-O(\log T(r)). \tag{36}$$

Um die Analogie mit dem im zweiten Kapitel behandelten speziellen oder »ausgearteten» Fall $q=2$ hervorzuheben, bemerken wir, dass die oben durchgeführte Analyse des Mittelwertes $\mu(r)$ gewissermassen der Zerlegung

[1] Bei gewissen Fragestellungen, die VALIRON (Acta Math. Bd. 47) neulich behandelt hat, ist es von Bedeutung, eine explizite untere Grenze der Grösse $O(1)$, die hauptsächlich von den Werten $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$ abhängt, zu kennen. Es bietet keine prinzipielle Schwierigkeiten die erhaltene Ungleichung in dieser Hinsicht zu komplettieren.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|z(re^{i\varphi})|\,d\varphi = m(r,\infty) - m(r,0)$$

des Jensenschen Mittelwertes entspricht, die mit dem Jensenschen Satze kombiniert das Wesentliche des »ersten Haupsatzes» lieferte. Hier entspricht dem Jensenschen Satze die Ungleichung (31) oder die daraus hergleiteten Ungleichungen (33), (34), (33)' und (34)', die in der Tat in Verbindung mit der obigen Ungleichung (36) unmittelbar die Hauptungleichungen des »zweiten Hauptsatzes» ergeben, zu denen wir jetzt übergehen.

16. Wir behandeln wieder zuerst den Fall einer in der ganzen x-Ebene meromorphen Funktion $z(x)$. Aus der Ungleichung (34) in Verbindung mit der Abschätzung (36) ergibt sich die Ungleichung

$$\sum_1^q m(r, a_\nu) < 2\,T(r) - N_1(r) + O(\log T(r)) \tag{37}$$

die also von einem gewissen r ab für jedes r besteht mit eventueller Ausnahme einer Wertmenge von endlichem Mass. Ist die Funktion $z(x)$ insbesondere von endlicher Ordnung, so ist $\log T(r) = O(\log r)$ und die obige Ungleichung besteht dann für genügend grosse Werte von r ausnahmslos. In der Summe links ist zunächst $a_q = \infty$; indessen besteht die Ungleichung offenbar unverändert auch für ein endliches a_q. Um dies einzusehen, braucht man nur diese Ungleichung statt für q, für $q+1$ Werte $a_1, a_2, \ldots, a_q$ und $a_{q+1} = \infty$ anzuwenden und hierauf aus der links stehenden Summe das letzte Glied $m(r, a_{q+1}) = m(r, \infty)$ einfach wegzulassen, wonach die Ungleichung *a fortiori* auch fernerhin besteht, da $m(r, \infty) \geqq 0$. Beachtet man den »ersten Hauptsatz», wonach

$$m(r, a_\nu) = T(r) - N(r, a_\nu) + O(1),$$

so kann die Ungleichung (37) auch folgendermassen geschrieben werden:

$$(q-2)\,T(r) < \sum_1^q N(r, a_\nu) - N_1(r) + O(\log T(r)). \tag{37'}$$

Die Ungleichung (37) oder (37)' bezeichnet Rolf Nevanlinna als den »zweiten Hauptsatz» der Theorie der meromorphen Funktionen.

In bezug auf Anwendungen dieser wichtigen Ungleichungen verweise ich auf die mehrmals zitierte Abhandlung von ROLF NEVANLINNA über meromorphe Funktionen. Hier begnügen wir uns damit eine der wichtigsten Konsequenzen dieser Beziehung hervorzuheben.

Wenn wir von dem trivialen Fall absehen, wo $T(r) = O(1)$ und die Funktion $z(x)$ sich auf eine Konstante reduziert, so ist $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\log T(r)}{T(r)} = 0$. Da ferner $N_1(r) \geqq 0$, so folgt aus der Ungleichung (37), dass

$$\sum_1^q \delta(a_\nu) \leqq 2, \tag{38}$$

wo wir allgemein mit $\delta(a)$ die untere Grenze

$$\delta(a) = \underline{\lim}\, \frac{m(r, a)}{T(r)} \tag{39}$$

für $r \to \infty$ bezeichnen. Auf Grund dieser Definition ist $0 \leqq \delta(a) \leqq 1$; aus der Ungleichung (38), wo q beliebig gross angenommen werden kann, folgt nun unmittelbar vermittels einer bekannten Schlussfolgerung, dass $\delta(a)$ *im allgemeinen gleich Null sein muss* und höchstens für eine *abzählbare* Menge a-Werte, $a_1, a_2, \ldots$ positiv sein kann, wobei

$$\sum_1^\infty \delta(a_\nu) \leqq 2.$$

Auf Grund dieser Tatsache bezeichnet ROLF NEVANLINNA einen Wert a in bezug auf die meromorphe Funktion $z(x)$ als *Normalwert,* falls $\delta(a) = 0$, dagegen ist a ein *Ausnahmewert* dieser Funktion falls $\delta(a) > 0$ und $\delta(a)$ der zu diesem Ausnahmewert zugehörige *Defekt.*[1] In Folge des »ersten Hauptsatzes» kann dies auch folgendermassen ausgedrückt werden: Der Wert a ist ein Normalwert der Funktion $z(x)$ falls

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, \frac{N(r, a)}{T(r)} = 1;$$

dagegen hat man, falls a ein Ausnahmewert mit dem positiven Defekt $\delta(a)$ $(\leqq 1)$ ist,

[1] Diese Benennung hat Herr WIMAN in einer brieflichen Mitteilung an Rolf Nevanlinna vorgeschlagen.

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, a)}{T(r)} = 1 - \delta(a).$$

Mit Benutzung dieser Terminologie gilt somit nach Obigem folgender

Satz. *Eine in der ganzen endlichen x-Ebene eindeutige, meromorphe und nicht konstante Funktion hat höchstens eine abzählbare Menge von Ausnahmewerten. Die Summe der Defekten dieser Ausnahmewerte ist konvergent und höchstens gleich 2.*

Wenn man unter einen *Picardschen Ausnahmewert* jeden Wert a versteht, den die Funktion $z(x)$ überhaupt nicht oder nur *endlich* viele mal annimmt, so folgt aus dem Obigem unmittelbar als Spezialfall der klassische Picardsche Satz, wonach eine in der ganzen Ebene meromorphe und *nicht rationale* Funktion $z(x)$ höchstens *zwei* Picardsche Ausnahmewerte haben kann. In der Tat ist, falls die Funktion den Wert a nur endlich viele mal annimmt, gemäss (12)

$$N(r, a) = O(\log r).$$

Andererseits ist, da $z(x)$ keine rationale Funktion ist, auf Grund des S. 171 gesagten $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\log r}{T(r)} = 0$ und somit

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(r, a)}{T(r)} = 0.$$

Gemäss der allgemeineren Definition eines Ausnahmewertes ist hiernach der Wert a für $z(x)$ ein Ausnahmewert mit dem Defekt $\delta(a) = 1$. In Folge des obigen Satzes kann nun $z(x)$ höchstens *zwei* solche Ausnahmewerte besitzen, weil die totale Defektsumme anderenfalls grösser als 2 wäre. Wir sehen: wenn man den speziellen Picardschen Begriff des Ausnahmewertes mit dem allgemeinen von Rolf Nevanlinna eingeführten ersetzt, so kann zwar die *Anzahl* der Ausnahmewerte grösser als zwei, vielleicht sogar abzählbar unendlich sein, dagegen ist die *Defektsumme* nach wie vor höchstens gleich 2.

Wenn $z(x)$ nur innerhalb eines endlichen Kreises $|x| < R$ eindeutig und meromorph ist, so ergibt sich aus (34)′ in Verbindung mit (36) die Ungleichung

$$(40) \qquad \sum_1^q m(r, a_\nu) < 2\,T(r) - N_1(r) + O(\log T(r)) + O\left(\log \frac{1}{R-r}\right),$$

oder nach Elimination der Grössen m mittels des »ersten Hauptsatzes»

$$(40)' \qquad (q-2)\,T(r) < \sum_{1}^{q} N(r, a_\nu) - N_1(r) + O(\log T(r)) + O\left(\log \frac{1}{R-r}\right),$$

welche von einem gewissen r ab für jedes $r < R$ bestehen, möglicherweise mit Ausnahme einer Wertmenge, der eine endliche Variation von $\frac{1}{R-r}$ entspricht. Falls $z(x)$ von endlicher Ordnung ist, also $\log T(r) = O\left(\log \frac{1}{R-r}\right)$, so besteht die Ungleichung ohne diese Einschränkung.

Man sieht sofort, dass der oben formulierte Satz unverändert auch im vorliegenden Fall besteht, *falls* $T(r)$ *für* $r \to R$ *schneller als* $\log \frac{1}{R-r}$ *anwächst,* so dass

$$\lim_{r \to R} \frac{1}{T(r)} \log \frac{1}{R-r} = 0.$$

Andererseits weiss man, dass $z(x)$, falls $T(r)$ *beschränkt* ist, sich als Qvotient zweier für $|x| < R$ *beschränkter* Funktionen darstellen lässt. Dagegen ist der Fall, wo $T(r) = O\left(\log \frac{1}{R-r}\right)$ ohne beschränkt zu sein, bis auf weiteres wenig untersucht worden.