SUR L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES BINÔMES

PAR

W. KAPTEYN
à UTRECHT.

En désignant par y une fonction algébrique de la variable x, définie par l'équation algébrique irréductible

$$\varphi(x, y) = 0$$

ABEL a démontré que, si l'intégrale $\int y\,dx$ est elle-même une fonction algébrique de x, elle est exprimable par une fonction entière en y dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x. Dans les pages suivantes nous nous proposons de faire une application de ce théorème remarquable qui compte avec quelques autres théorèmes de l'éminent mathématicien Norwégien, parmi les sources les plus fertiles du calcul intégral.

1. Supposons que l'équation $\varphi(x, y) = 0$ se réduise à la forme

$$y^q = F(x) \tag{1}$$

q étant un nombre entier et $F(x)$ une fonction rationnelle de x; dans ce cas le théorème cité nous apprend que, si l'intégrale $\int y\,dx$ est une fonction algébrique, on aura

$$\int y\,dx = yf(x) + \text{ const.} \tag{2}$$

où $f(x)$ représente une fonction rationnelle de x. Évidemment l'équation (2) ne sera pas remplie si l'on choisit pour $F(x)$ la fonction rationnelle la plus générale. Cherchons donc la forme la plus générale de $F(x)$ qui s'accorde avec la condition (2). Pour y parvenir, différentions les équations (1) et (2) et eliminons $\frac{dy}{dx}$. De cette manière on obtient

$$\frac{q\left(1-\frac{df(x)}{dx}\right)}{f(x)}=\frac{\frac{dF(x)}{dx}}{F(x)} \tag{3}$$

ou

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{q}\frac{d}{dx}\lg\left[f(x)^q F(x)\right]. \tag{3'}$$

Posons, dans cette équation pour $f(x)^q F(x)$ la fonction rationnelle la plus générale

$$\begin{aligned} f(x)^q F(x) &= B(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_l)^{\alpha_l} \\ &= \prod_{i=1}^{i=l}(x-a_i)^{\alpha_i} \end{aligned}$$

où $B, a_1, a_2, \ldots, a_l$ représentent des constantes arbitraires et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ des nombres entiers positifs ou négatifs. En substituant cette valeur dans l'équation (3) celle-ci se réduira à

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{i=l}\frac{\alpha_i}{x-a_i}=\sum_{i=1}^{i=l}\frac{A_i}{x-a_i}$$

qui fera connaître la forme la plus générale de $f(x)$ s'accordant avec la forme adoptée pour $f(x)^q F(x)$. Cela posé, l'équation (3) donne la forme cherchée de la fonction $F(x)$.

En effet, on aura

$$\frac{d}{dx}\lg F(x)=q\sum_{i=1}^{i=l}\frac{A_i}{x-a_i}+q\,\frac{d}{dx}\lg\sum_{i=1}^{i=l}\frac{A_i}{x-a_i}$$

ou, par intégration

$$F(x)=C^q\left(\sum_{i=1}^{i=l}\frac{A_i}{x-a_i}\right)^q\prod_{i=1}^{i=l}(x-a_i)^{qA_i},$$

C^q désignant une constante arbitraire.

De cette discussion il résulte que si y satisfait à une équation de la forme (1) et si la fonction $\int y\,dx$ est algébrique, y doit admettre la forme

$$y = C\sum_{i=1}^{i=l}\frac{A_i}{x-a_i}\prod_{i=1}^{i=l}(x-a_i)^{A_i} \tag{4}$$

où qA_i représente un nombre entier.

Cette condition nécessaire est aussi suffisante, car si y admet la forme précédente, on aura

$$\int y\,dx = C\prod_{i=1}^{i=l}(x-a_i)^{A_i}. \tag{5}$$

2. D'après les considérations précédentes, pour savoir si l'intégrale $\int y\,dx$, où y satisfait à une équation (1), est algébrique, on n'a qu'à examiner si y est réductible à la forme (4) ou non.

C'est ce que nous allons faire pour l'expression binôme

$$y = (x-\alpha)^m(\beta+\gamma x+\ldots+\lambda x^n)^p \tag{6}$$

en supposant

1° que l'équation

$$\beta+\gamma x+\ldots+\lambda x^n = 0 \tag{7}$$

n'admet que des racines inégales $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

2° que α est une constante différente de ces racines;

3° que m et n sont des nombres entiers, dont le dernier est positif;

4° que p est un nombre fractionnaire, dont le dénominateur est le nombre entier q.

D'après ces suppositions on voit que l'expression (6) satisfait à une équation de la forme (1).

Comme les quantités a_i dans la formule (4) sont toutes différentes, supposons qu'ils contiennent les racines de l'équation (7) et encore une série $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_l$ d'autres.

En identifiant maintenant la fonction (6) avec

$$C\left(\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}+\frac{A_{n+1}}{x-a_{n+1}}+\ldots+\frac{A_l}{x-a_l}\right)$$
$$\times(x-a_1)^{A_1}(x-a_2)^{A_2}\ldots(x-a_n)^{A_n}(x-a_{n+1})^{A_{n+1}}\ldots(x-a_l)^{A_l}$$

il est évident que cette expression doit rester invariable quand on permute les racines $a_1, a_2, .., a_n$ de toutes les manières possibles.

Il s'ensuit qu'on doit avoir

$$A_1 = A_2 = .. = A_n.$$

Or, parce que

$$\beta + \gamma x + .. + \lambda x^n = \lambda(x - a_1)(x - a_2)..(x - a_n)$$

on aura

$$\frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + .. + \frac{1}{x - a_n} = \frac{d}{dx}\lg(\beta + \gamma x + .. + \gamma x^n);$$

par suite la forme précédente se réduira à

$$\frac{C}{\lambda^{A_1}}\left[A_1 \frac{\gamma + 2\delta x + .. + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + .. + \lambda x^n} + \frac{A_{n+1}}{x - a_{n+1}} + .. + \frac{A_l}{x - a_l}\right]$$
$$\times (\beta + \gamma x + .. + \lambda x^n)^{A_1}(x - a_{n+1})^{A_{n+1}}..(x - a_l)^{A_l}.$$

Cette forme ne saurait être identique avec la fonction (6) à moins que

$$A_1 = 1 + p.$$

En effet, on voit d'abord que A_1 doit être différent de zéro, parce que dans le cas contraire les deux membres de l'identité supposée ne présenteraient pas les mêmes points critiques. On trouvera donc

$$(x - \alpha)^m = \frac{C}{\lambda^{A_1}}\left[A_1 \frac{\gamma + 2\delta x + .. + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + .. + \lambda x^n} + \frac{A_{n+1}}{x - a_{n+1}} + .. + \frac{A_l}{x - a_l}\right]$$
$$\times (\beta + \gamma x + .. + \lambda x^n)^{A_1 - p - 1}(x - a_{n+1})^{A_{n+1}}..(x - a_l)^{A_l}.$$

Remarquons ensuite, que le premier membre de cette équation est indépendant de $a_1, a_2, .., a_n$; il faut donc que l'ordre $A_1 - p - 1$ des zéros ou des poles $a_1, a_2, .., a_n$ du second membre soit aussi zéro. En introduisant cette égalité, l'équation précédente s'écrit

$$(x - \alpha)^m = \frac{C}{\lambda^{1+p}}\left[(1 + p) \cdot \frac{\gamma + 2\delta x + .. + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + .. + \lambda x^n} + \frac{A_{n+1}}{x - a_{n+1}} + .. + \frac{A_l}{x - a_l}\right]$$
$$\times (\beta + \gamma x + .. + \lambda x^n)(x - a_{n+1})^{A_{n+1}}..(x - a_l)^{A_l}.$$

Le premier membre étant ici une fonction rationnelle, les quantités $A_{n+1}, \ldots, A_l$ doivent représenter des nombres entiers; et comme le premier membre admet un zéro ou un pôle d'ordre m, selon que m est un nombre positif ou négatif, il faut que le second membre présente le même caractère.

Posons, pour satisfaire à la dernière condition

$$a_{n+1} = \alpha$$

et

$$A_{n+1} \neq 0.$$

Dans cette supposition on aura

$$A_{n+1} - 1 = m.$$

Si, au contraire $A_{n+1} = 0$, le second membre ne saurait admettre le point α comme pôle, tandis qu'un zéro d'ordre m ne serait pas impossible. Il faut donc distinguer deux cas et examiner sous quelles conditions les identités suivantes peuvent exister.

$$\text{(I)}\quad 1 = \frac{C}{\lambda^{1+p}}\left[(1+p)\frac{\gamma + 2\delta x + \ldots + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n} + \frac{1+m}{x-\alpha} + \frac{A_{n+2}}{x - a_{n+2}} + \ldots + \frac{A_l}{x - a_l}\right]$$
$$\times (\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n)(x-\alpha)(x - a_{n+2})^{A_{n+2}} \ldots (x - a_l)^{A_l}$$

et

$$\text{(II)}\quad (x-\alpha)^m = \frac{C}{\lambda^{1+p}}\left[(1+p)\frac{\gamma + 2\delta x + \ldots + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n} + \frac{A_{n+2}}{x - a_{n+2}} + \ldots + \frac{A_l}{x - a_l}\right]$$
$$\times (\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n)(x - a_{n+2})^{A_{n+2}} \ldots (x - a_l)^{A_l}$$

m étant un nombre positif dans la dernière de ces équations. Comme les premiers membres de ces équations ne présentent plus de zéros ou de pôles dans les points $a_{n+2}, \ldots, a_l$, il faut que l'ordre des zéros ou des pôles $a_{n+2}, \ldots, a_l$ dans les seconds membres soit aussi zéro.

Par suite

$$A_{n+2} - 1 = \ldots = A_{l-1} = 0.$$

Si donc on pose

$$(x - a_{n+2}) \ldots (x - a_l) = x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots + A_i$$

les équations (I) et (II) se réduisent aux suivantes

$$(8) \qquad 1 = \frac{C}{\lambda^{1+p}}\left[(1+p)\frac{\gamma + 2\delta x + \ldots + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n} + \frac{1+m}{x-\alpha} + \frac{ix^{i-1} + (i-1)A_1 x^{i-2} + \ldots + A_{i-1}}{x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots + A_i}\right]$$
$$\times (\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n)(x-\alpha)(x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots + A_i)$$

et

$$(9) \qquad (x-a)^m = \frac{C}{\lambda^{1+p}}\left[(1+p)\frac{\gamma + 2\delta x + \ldots + n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n} + \frac{ix^{i-1} + (i-1)A_1 x^{i-2} + \ldots + A_i}{x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots + A_i}\right]$$
$$\times (\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n)(x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots + A_i).$$

La discussion précédente suppose que le polynôme $x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots + A_i$ n'admet que des racines simples $a_{n+2}, \ldots, a_l$ différentes de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et α. Or, l'équation (8) ne saurait être remplie par un polynôme

$$x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots + A_i$$

à racines multiples. En effet pour une telle racine ce polynôme et sa dérivée s'évanouissant simultanément, le second membre se réduirait à zéro ce qui serait absurde.

De même ce polynôme ne saurait admettre une racine simple $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Quant à l'équation (9) il est également impossible que le polynôme admettrait une racine multiple différente de α, ou les racines simples $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

On conclura donc que l'intégrale $\int y\,dx$ étant algébrique, il doit être possible de satisfaire à une des équations (8) ou (9) par un polynôme $x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots + A_i$ ne contenant point de racine α.

Réciproquement, si la condition (8) est vérifiée, l'intégrale s'écrit d'après (5)

$$(10) \qquad \int y\,dx = \frac{C}{\lambda^{1+p}}(\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n)^{1+p}(x-a)^{1+m}(x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots + A_i)$$

et, si la condition (9) est remplie

$$\int y\,dx = \frac{C}{\lambda^{1+p}}(\beta + \gamma x + \ldots + \gamma x^n)^{1+p}(x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots + A_i). \tag{11}$$

3. En appliquant la méthode précédente au cas ordinaire

$$y = x^m(a + bx^n)^p$$

on obtiendra aisément les résultats suivants.

L'intégrale $\int y\,dx$ sera seulement algébrique dans les deux cas suivants

1° si

$$\frac{m+1}{n} + p = -1 - r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

et alors

$$\int y\,dx = \frac{x^{1+m}}{(1+m)a}(a + bx^n)^{1+p}\left[\frac{n}{m+1+rn} \cdot \frac{2n}{m+1+(r-1)n} \cdot \frac{rn}{m+1+n}\frac{b^r}{a^r}x^{nr}\right.$$
$$\left. + \frac{2n}{m+1+(x-1)n} \cdot \frac{rn}{m+1+n}\frac{b^{r-1}}{a^{r-1}}x^{n(r-1)} + \ldots + 1\right]$$

2° si

$$\frac{m+1}{n} = 1 + r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

et alors

$$\int y\,dx = \frac{1}{n(1+p+r)b}(a + bx^n)^{1+p}\left[x^{rn} - \frac{r}{p+r} \cdot \frac{a}{b}x^{(r-1)n}\right.$$
$$\left. + \frac{r-1}{p+r-1} \cdot \frac{r}{p+r}\frac{a^2}{b^2}x^{(r-2)n} - \ldots + (-1)^r \frac{1}{p+1} \cdot \frac{2}{p+2} \cdot \frac{r}{p+r}\frac{a^r}{b^r}\right].$$

4. En supposant

$$y = x^m(a + bx^n + cx^{2n})^p$$

on trouvera que l'intégrale est seulement algébrique en trois cas. Les résultats sont ici plus compliqués et se présentent sous les formes suivantes.

1° Si

$$\frac{m+1}{n} + 2p = -2 - r \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

et si les $r + 1$ équations linéaires à r inconnues

$$\begin{aligned}
&ncA_n + (1 + p)nb = 0,\\
&2ncA_{2n} + (2 + p)nbA_n - (1 + m + rn)a = 0,\\
&3ncA_{3n} + (3 + p)nbA_{2n} - [1 + m + (r - 1)n]aA_n = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&rncA_{rn} + (r + p)nbA_{(r-1)n} - (1 + m + 2n)aA_{(r-2)n} = 0,\\
&\qquad (1 + r + p)nbA_{rn} - (1 + m + n)aA_{(r-1)n} = 0
\end{aligned}$$

sont compatibles, on aura

$$\int y\,dx = \frac{1}{(1 + m)aA_{rn}}(a + bx^n + cx^{2n})^{1+p}x^{1+m}(x^{rn} + A_nx^{(r-1)n} + \dots + A_{rn}).$$

2° Si

$$\frac{m + 1}{n} = 2 + r \qquad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

et si les $r + 1$ équations linéaires à r inconnues

$$\begin{aligned}
&(2p + r + 1)cA_n + (p + r + 1)b = 0,\\
&(2p + r)cA_{2n} + (p + r)bA_n + ra = 0,\\
&(2p + r - 1)cA_{3n} + (p + r - 1)bA_{2n} + (r - 1)aA_n = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(2p + 2)cA_{rn} + (p + 2)bA_{(r-1)n} + 2aA_{(r-2)n} = 0,\\
&(p + 1)bA_{rn} + aA_{(r-1)n} = 0
\end{aligned}$$

sont compatibles, on aura

$$\int y\,dx = \frac{1}{(2p + r + 2)n}(a + bx^n + cx^{2n})^{1+p}(x^{rn} + A_nx^{(r-1)n} + \dots + A_{rn}).$$

3° Si

$$p = -\frac{2k + 1}{2}, \qquad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

$$m = k_1 n - 1, \qquad (k_1 = 1, 2, \dots, 2k)$$

$$r = 2k - 1$$

on aura

$$\int y\,dx = \frac{C}{c^{1+p}}(a + bx^n + cx^{2n})^{1+p}(x^{rn} + A_n x^{(r-1)n} + \ldots + A_{rn})$$

où les quantités $\frac{C}{c^{1+p}}, A_n, A_{2n}, \ldots, A_{rn}$ satisfont aux $r + 1$ équations linéaires, dont tous les seconds membres à l'exception d'un seul, sont zéro

$$-cA_n + \frac{r}{2}b = 0,$$

$$-2cA_{2n} + \left(\frac{r}{2} - 1\right)bA_n + ra = 0,$$

$$-3cA_{3n} + \left(\frac{x}{2} - 2\right)bA_{2n} + (r - 1)aA_n = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-(r - k_1 + 2)cA_{(r-k_1+2)n} + \left(-\frac{r}{2} + k_1 - 1\right)bA_{(r-k_1+1)n} + k_1 aA_{(r-k_1)n} = \frac{c^{1+p}}{nC},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-rcA_{rn} + \left(\frac{r}{2} - r + 1\right)bA_{(r-1)n} + 2aA_{(r-2)n} = 0,$$

$$-\frac{r}{2}bA_{rn} + aA_{(r-1)n} = 0.$$

Pour plus de détails nous renverrons à notre mémoire sur ce sujet, inséré dans les Comptes Rendus de l'Académie des sciences d'Amsterdam, 2^e série, t. 17, p. 92.