ÜBER DIE MODULN DER THETAFUNCTIONEN

VON

F. SCHOTTKY
in MARBURG.

Die ABEL'schen Functionen von ρ Variabeln, welche durch die Thetafunctionen definirt werden, hängen ausser von den Variabeln ab von $\frac{1}{2}\rho(\rho+1)$ Parametern, den Periodicitätsmoduln. Die ABEL'schen Functionen der RIEMANN'schen Theorie enthalten nur $3\rho - 3$ wesentliche Parameter. Sie sind demnach, sobald ρ den Werth 3 übersteigt, specieller Natur, und damit der RIEMANN'sche Fall eintritt, müssen zwischen den Periodicitätsmoduln eine Anzahl von Gleichungen stattfinden.

Für $\rho = 4$ besteht eine solche Relation. Diese habe ich in einer früheren Arbeit aufgestellt (CRELLE's Journal, Bd. 102). Auf einem andern Wege ist Herr POINCARÉ zu ihr gelangt (Journal de Math., (5) I), sodass für die merkwürdige Formel zwei Beweise vorliegen. Es ist natürlich eine transcendente Relation zwischen den 10 Periodicitätsmoduln, aber sie erscheint als algebraische Gleichung zwischen den Anfangswerthen von 24 geraden Thetafunctionen. Da diese 24 Functionen auf sehr verschiedene Arten gewählt werden können, so ist damit ein System von sehr vielen Gleichungen zwischen den Anfangswerthen der geraden Theta gegeben, charakteristisch für den RIEMANN'schen Fall der ABEL'schen Functionen von vier Variabeln.

Zunächst erwartete ich, nach der Analogie der Fälle $\rho = 2$ und $\rho = 3$, dass sich dieses Gleichungssystem würde auflösen lassen, dass sich für die einzelnen Moduln algebraische Ausdrücke aufstellen lassen würden, die das System identisch befriedigen. Diese Erwartung wurde nicht ohne weiteres

Acta mathematica. 27. Imprimé le 10 janvier 1903.

erfüllt. Um das Problem nicht ungelöst zulassen, war ich genöthigt, die Anzahl der unbestimmten Grössen zu vermehren, und nicht nur jedem geraden θ_m eine bestimmte Constante c_m zuzuordnen — das Anfangsglied in der Entwickelung von θ_m nach homogenen Functionen der Variabeln —, sondern ebenso auch jedem ungeraden Theta eine Constante u_m. Diese Constante u_m ist gleichfalls das Anfangsglied in der Entwickelung der ungeraden Function θ_m, aber es ist der Werth dieser linearen Function für specielle Werthe der vier Variabeln. Diese vier Werthe lassen sich so wählen, dass zwischen den c einerseits und den u andrerseits ein Gleichungssystem besteht, scheinbar complicirter als das, welches die c allein unter sich verbindet, für das sich aber eine algebraische Lösung ungezwungen darbietet. Allerdings werden die u und die c nicht durch unabhängige Hülfsgrössen ausgedrückt, aber sie werden in Verbindung gesetzt mit einem System von zehn Punkten im Raume, die durch eine geometrisch übersichtliche Bedingung verknüpft sind.

Es zeigen sich bei diesen Betrachtungen so viele Analogien mit den Abel'schen Functionen von zwei und drei Variabeln, sogar mit den elliptischen, dass ich es für richtig halte, die ganze Untersuchung im vollen Zusammenhange mit den Theorien der Functionen von weniger als vier Variabeln zu führen, auch wenn ich dadurch vielfach auf bekanntes Gebiet komme.

§ 1.

Für das System der geraden und ungeraden Theta, die einer Klasse Abel'scher Functionen zugeordnet sind, ist charakteristisch, dass in den Hälften der Perioden zugleich eine Gruppe von Permutationen der Grössen des Systems gegeben ist. Vermehrt man das Argument u — ich verstehe darunter das System der ρ Variabeln — um eine ganze Periode 2ω, so geht jede Thetafunction in sich selbst über, multiplicirt mit einem Exponentialfactor. Vermehrt man aber u nur eine halbe Periode ω, so entsteht eine Permutation. Da bei einer Addition mehrerer halben Perioden die Reihenfolge gleichgültig ist, da ferner die Addition zweier gleichen halben Perioden eine ganze Periode hervorbringt, so ist auch bei der Zusammensetzung der Permutationen die Reihenfolge gleichgültig, und die Wiederholung derselben Permutation führt zur ursprünglichen Gruppirung zurück.

Wir müssen mit diesen Permutationen so rechnen, als ob es Grössen wären. Die Grundgesetze sind sehr einfach. Es ist $\varkappa\lambda = \lambda\varkappa$, ferner $\varkappa\varkappa = 0$, wenn mit dem Symbol 0 bezeichnet wird, dass keine Änderung eintritt. Ist $\varkappa\lambda\mu = 0$, so ist $\varkappa = \lambda\mu$, $\lambda = \varkappa\mu$, etc. Wenn wir die Permutation »0« mit einrechnen, so ist die Anzahl der Permutationen ebenso gross, wie die der Theta.

Nun findet aber eine Complication statt, die daher rührt, dass die Thetafunctionen theils gerade theils ungerade sind. Es werde, wenn $\varkappa$ das Zeichen für eine beliebige Permutation, und θ_α irgend eins der 4^ρ Theta ist, mit $\theta_{\alpha\varkappa}$ dasjenige Theta bezeichnet, das aus θ_α durch die Permutation $\varkappa$ hervorgeht. Der Quotient

$$\frac{\theta_{\alpha\varkappa}}{\theta_\alpha} = f_\alpha$$

ist dann eine gerade oder ungerade Function von u, aber keine ABEL'sche Function der Klasse — abgesehen natürlich von dem Falle $\varkappa = 0$. Dagegen gehört, wenn λ eine neue Permutation bedeutet, und man

$$\frac{\theta_{\alpha\varkappa\lambda}}{\theta_{\alpha\lambda}} = f_{\alpha\lambda}$$

bildet, der Quotient beider f:

$$\varphi_\alpha = \frac{f_\alpha}{f_{\alpha\lambda}} = \frac{\theta_{\alpha\varkappa}\,\theta_{\alpha\lambda}}{\theta_\alpha\,\theta_{\alpha\varkappa\lambda}}$$

zu den Functionen der Klasse. Ob diese ABEL'sche Function φ_α gerade oder ungerade ist, hängt ab von den beiden Permutationen $\varkappa$, λ, aber nicht von der gewählten Function θ_α. Denn bildet man ebenso:

$$\varphi_\beta = \frac{\theta_{\beta\varkappa}\,\theta_{\beta\lambda}}{\theta_\beta\,\theta_{\beta\varkappa\lambda}},$$

so entspringt φ_β aus φ_α durch Vermehrung des Arguments um eine halbe Periode. Es geht aber offenbar durch Vermehrung von u um eine halbe Periode eine gerade Function wieder in eine gerade über, und eine ungerade in eine ungerade.

Zwei Permutationen können sich demnach verschieden zu einander verhalten; wir führen das Zeichen

$$(\varkappa, \lambda) = (\lambda, \varkappa)$$

ein, welches $+1$ oder -1 sein soll, jenachdem die oben gebildeten Quotienten $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ gerade oder ungerade Functionen sind, und nennen im ersten Falle, mit FROBENIUS, die Permutationen $\varkappa, \lambda$ syzygetisch, im andern azygetisch.

Das Zeichen $(\varkappa, \lambda)$ entscheidet noch eine andre Frage. Es sei ω die halbe Periode, die der Permutation λ entspricht. Es ist dann, bis auf einen constanten Faktor, $f_{\alpha\lambda}$ mit $f_\alpha(u+\omega)$ identisch. Aus der Gleichung

$$\varphi_\alpha(-u) = (\varkappa, \lambda)\varphi_\alpha(u)$$

folgt demnach:

$$\frac{f_\alpha(-u)}{f_\alpha(-u+\omega)} = (\varkappa, \lambda)\frac{f_\alpha(u)}{f_\alpha(u+\omega)}.$$

Da andrerseits offenbar

$$\frac{f_\alpha(-u)}{f_\alpha(-u+\omega)} = \frac{f_\alpha(u)}{f_\alpha(u-\omega)}$$

ist, so ergiebt sich:

$$f_\alpha(u+2\omega) = (\varkappa, \lambda)f_\alpha(u).$$

Dies sagt aus: Bei der Vermehrung um eine ganze Periode bleibt der Quotient

$$\frac{\theta_{\alpha\varkappa}}{\theta_\alpha}$$

ungeändert oder er wechselt sein Zeichen, je nachdem die Hälfte dieser ganzen Periode, oder die entsprechende Permutation, sich syzygetisch oder azygetisch zur Permutation $\varkappa$ verhält. Hieraus ziehen wir zwei Folgerungen:

Erstens dass, wenn $\varkappa, \lambda, \mu$ drei Permutationen sind,

$$(\varkappa, \mu)(\lambda, \mu) = (\varkappa\lambda, \mu)$$

ist. Wir können hinzufügen, dass auch

$$(\varkappa, \lambda)(\varkappa, \mu) = (\varkappa, \lambda\mu)$$

ist, da ja $(\varkappa, \lambda)$ mit $(\lambda, \varkappa)$ identisch ist. Allgemein, wenn ω, ω' irgendwelche Combinationen gegebener Permutationen sind, ist:

$$(\omega, \omega') = \Pi(\varkappa, \varkappa'),$$

wobei sich das Product erstreckt über alle Elemente $\varkappa$ von ω und $\varkappa'$ von ω'. Ferner ist offenbar stets

$$(0, \varkappa) = 1; \qquad (\varkappa, \varkappa) = 1,$$

wenn 0 wieder das Zeichen für die identische Permutation bedeutet.

Eine zweite Folgerung ist die, dass die identische Permutation 0 die einzige ist, die sich zu allen andern syzygetisch verhält. Denn ist $\varkappa$ von 0 verschieden, so ist der Quotient f_a keine Abel'sche Function der Klasse und es muss daher ganze Perioden geben, die f_a in $-f_a$ überführen.

§ 2.

Es seien $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ die Zeichen für eine Reihe von Permutationen oder halben Perioden. Fügen wir zu dieser Reihe noch alle aus ihnen combinirten Permutationen hinzu: $\varkappa_1\varkappa_2$, $\varkappa_1\varkappa_3$, $\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3$ etc., und ausserdem, als Combination 0^{ter} Ordnung, die Permutation 0 oder die ganze Periode, so erhalten wir eine Gruppe. Die gegebene Reihe $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ soll unabhängig heissen, wenn die 2^n Combinationen lauter verschiedene Permutationen darstellen; n ist dann die Ordnung der Gruppe, und $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ eine Basis.

Wir können so für die ganze Gruppe der 4^ρ Permutationen eine Basis

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{2\rho}$$

aufstellen. Wenn wir dann eine beliebige Permutation ω nehmen, und das Verhalten von ω zu den Elementen der Basis feststellen durch die Werthe der 2ρ Vorzeichen

$$(\omega, \varkappa_\alpha) = \varepsilon_\alpha, \qquad (\alpha=1,2,\ldots,2\rho)$$

so ist umgekehrt ω eindeutig fixirt durch die Angabe dieser 2ρ Vorzeichen. Denn wäre ω' eine zweite Permutation, die derselben Gleichungen genügt, so wäre offenbar $\omega\omega'$ syzygetisch zu allen Elementen der Basis und somit zu allen 4^ρ Permutationen überhaupt. Dann muss aber nach dem letzten Satz in § 1 $\omega\omega' = 0$, d. h. $\omega' = \omega$ sein. Es folgt hieraus, dass auch jeder Wahl der 2ρ Vorzeichen ε immer eine und nur eine Permutation ω entsprechen muss.

Nehmen wir jetzt eine unabhängige Reihe, die aus weniger als 2ρ Elementen besteht:

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n \qquad (n < 2\rho).$$

Wenn wir dann die n Gleichungen aufstellen:

$$(\omega, \varkappa_\alpha) = \varepsilon_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

in denen die ε beliebig gewählte Vorzeichen bedeuten sollen, so giebt es genau $2^{2\rho-n}$ Permutationen, die diesen n Bedingungen genügen. Denn wenn wir die gegebene Reihe durch Hinzufügung von $2\rho - n$ neuen Elementen $\varkappa_{n+1}, \ldots, \varkappa_{2\rho}$ zu einer Basis des ganzen Systems vervollständigen, so können wir über die $2\rho - n$ hinzutretenden Vorzeichen $(\omega, \varkappa_\alpha)$ willkürlich verfügen.

Speciell giebt es hiernach genau $2^{2\rho-n}$ Permutationen, die sich zur Basis einer gegebenen Gruppe n^{ter} Ordnung, und damit zu dieser ganzen Gruppe G, syzygetisch verhalten. Diese bilden ihrerseits wieder eine Gruppe G', und offenbar steht G zu G' in derselben Beziehung, wie G' zu G.

Wenn alle Elemente einer Gruppe G sich gegenseitig syzygetisch verhalten, so nennt man sie eine syzygetische oder Göpel'sche Gruppe. Dazu genügt offenbar, dass die Elemente der Basis sich paarweise syzygetisch verhalten:

$$(\varkappa_\alpha, \varkappa_\beta) = +1.$$

Die Ordnung einer solchen Gruppe kann nicht grösser als ρ sein. Denn wir haben gesehen: es giebt genau $2^{2\rho-n}$ Permutationen, die zu allen Elementen von G syzygetisch sind. Dazu gehören aber die Elemente von G selbst. Folglich ist $2^n \leqq 2^{2\rho-n}$, d. h. $n \leqq \rho$. Wenn $n < \rho$ ist, so giebt es Permutationen, die zu allen Elementen von G syzygetisch sind, ohne in dieser Gruppe selbst enthalten zu sein. Folglich lässt sich jede Göpel'sche Gruppe von niedrigerer als der ρ^{ten} Ordnung zu einer Gruppe von der ρ^{ten} Ordnung ergänzen.

Denken wir uns wieder eine beliebige Reihe von Permutationen: $\varkappa_1$, $\varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ gegeben. Wenn je zwei Glieder dieser Reihe sich syzygetisch verhalten, so entspringt hieraus eine Göpel'sche Gruppe. Nehmen wir aber jetzt im Gegentheil an, dass je zwei der Glieder sich azygetisch verhalten:

$$(\varkappa_\alpha, \varkappa_\beta) = -1 \qquad (\alpha \lessgtr \beta),$$

dann wollen wir die Reihe eine azygetische nennen. — Wir fügen noch eine Definition hinzu. Wenn durch die Zusammensetzung der einzelnen Permutationen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ die identische Permutation entsteht, also $\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n = 0$ ist, soll die Reihe eine geschlossene heissen.

Fragen wir uns zunächst, ob eine azygetische Reihe $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ zugleich eine geschlossene sein kann. Dann muss

$$\varkappa_n = \varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-1}$$

und deshalb

$$(\varkappa_n, \varkappa_n) = (\varkappa_1, \varkappa_n)(\varkappa_2, \varkappa_n)\ldots(\varkappa_{n-1}, \varkappa_n)$$

sein. Nun ist aber $(\varkappa_n, \varkappa_n) = 1$, während alle Faktoren der rechten Seite gleich -1 sind. Es ergiebt sich also:

$$1 = (-1)^{n-1},$$

d. h.: n muss eine ungerade Zahl sein. Umgekehrt ist leicht zu sehen, dass solche geschlossene Reihen wirklich existiren. Denn nehmen wir an dass eine gerade Zahl von Permutationen: $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{n-1}$ gegeben ist, die sich gegenseitig azygetisch verhalten. Fügen wir der Reihe hinzu: $\varkappa_n = \varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-1}$, so verhält sich offenbar $\varkappa_n$ azygetisch zu $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{n-1}$.

Es sei jetzt $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ eine geschlossene azygetische Reihe, und ω eine beliebige Permutation. Da $\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n = 0$ ist, so ist

$$(\omega, \varkappa_1)(\omega, \varkappa_2)\ldots(\omega, \varkappa_n) = 1.$$

Da n eine ungerade Zahl ist, so können nicht alle Factoren der linken Seite -1 sein; es giebt demnach keine Permutation ω, die sich gleichzeitig zu $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ azygetisch verhält. Mit andern Worten: Eine geschlossene azygetische Reihe kann nicht erweitert werden. Es folgt hieraus weiter, dass eine nicht geschlossene azygetische Reihe nothwendig unabhängig ist. Denn wäre das nicht der Fall, so müsste sich aus einer Anzahl ihrer Glieder eine geschlossene Reihe bilden lassen, und dies ist unmöglich, weil eine geschlossene azygetische Reihe nicht erweitert werden kann.

Eine nicht geschlossene azygetische Reihe kann dagegen stets erweitert werden. Wenn $n = 2\rho$ ist, kann allerdings nur noch das Glied

$$\varkappa_{2\rho+1} = \varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{2\rho}$$

hinzugefügt werden, wodurch sie zu einer geschlossenen azygetischen Reihe ergänzt wird. Ist aber $n < 2\rho$, so giebt es $2^{2\rho-n}$ Permutationen ω, die zu $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ azygetisch sind, also mindestens 2, und somit auch sicher eine, die von $\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_n$ verschieden ist.

Man kann demnach azygetische Reihen aufstellen, die aus 2ρ Gliedern bestehen, und die eine Basis bilden für die ganze Gruppe der 4^ρ Permutationen. Jede solche Reihe lässt sich durch Hinzufügung eines letzten Gliedes noch zu einer geschlossenen azygetischen Reihe ergänzen. Jede beliebige Permutation wird dann durch zwei complementäre Combinationen der Elemente $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{2\rho+1}$ dargestellt.

Denken wir uns wieder eine beliebige unabhängige Reihe $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ gegeben und bilden die Reihe der Thetafunktionen, die aus einer, θ_α, durch die Reihe dieser Permutationen hervorgehn:

$$\theta_\alpha, \; \theta_{\alpha\varkappa_1}, \; \ldots, \; \theta_{\alpha\varkappa_n},$$

so gilt zunächst der Satz: Die Function θ_α kann so gewählt werden, dass alle Glieder dieser Reihe gleichartige, d. h. entweder sämmtlich gerade oder sämmtlich ungerade Functionen sind.

Denn nehmen wir an, die Glieder seien nicht gleichartig. Wir verstehen dann unter ε_ν den Werth $+1$ oder -1, je nachdem die Function mit dem Index $\alpha\varkappa_\nu$ gleichartig oder ungleichartig ist mit θ_α, und bestimmen eine Permutation ω, die den n Bedingungen

$$(\omega, \varkappa_\nu) = \varepsilon_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügt. Alsdann ist der Quotient

$$\frac{\theta_\alpha \, \theta_{\alpha\varkappa_\nu}}{\theta_{\alpha\omega} \, \theta_{\alpha\omega\varkappa_\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \nu)$$

gerade oder ungerade, jenachdem ε_ν gleich $+1$ oder -1 ist. Deshalb muss $\theta_{\alpha\omega\varkappa_\nu}$ in jedem Falle denselben Charakter haben wie $\theta_{\alpha\omega}$.

Ist $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ eine geschlossene Reihe von Permutationen, und n eine ungerade Zahl, so nennen wir auch die Reihe der $n+1$ Functionen:

$$\theta_\alpha, \; \theta_{\alpha\varkappa_1}, \; \ldots, \; \theta_{\alpha\varkappa_n}$$

eine geschlossene. Sie ist dadurch charakterisirt, dass der Quotient den wir enthalten, wenn wir die Hälfte dieser Functionen als Faktoren in den Zähler, die andere Hälfte in den Nenner aufnehmen, immer eine Abel'sche Function der Klasse ist.

Die Reihe θ_α, $\theta_{\alpha\varkappa}$, $\theta_{\alpha\lambda}$ wird geschlossen durch $\theta_{\alpha\varkappa\lambda}$, und ebenso gehört zu jeder ungeraden Anzahl von Thetafunctionen ein bestimmtes Theta, das die Reihe schliesst.

Wir wollen mit $\theta_{\alpha\beta\gamma}$ dasjenige Theta bezeichnen, das die Reihe θ_α, θ_β, θ_γ schliesst, ebenso mit $\theta_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$ das Schlussglied zu θ_α, θ_β, θ_γ, θ_δ, θ_ε, etc. Jede Combination ungerader Ordnung von Theta-Indices bezeichnet auf diese Weise wieder ein Theta. Dagegen bezeichnen die geraden Combinationen dieser Indices Permutationen. $\alpha\beta$ ist diejenige Permutation, die θ_α in θ_β überführt, $\alpha\beta\gamma\delta$ die, welche sich aus $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ zusammensetzt, u. s. f. Wir sagen ferner: die drei Functionen θ_α, θ_β, θ_γ verhalten sich syzygetisch oder azygetisch, je nachdem die ABEL'sche Function

$$\frac{\theta_\alpha\,\theta_\beta}{\theta_\gamma\,\theta_{\alpha\beta\gamma}}$$

gerade oder ungerade ist, und von einer Anzahl von Functionen

$$\theta_\alpha\,,\ \theta_\beta\,,\ \theta_\gamma\,,\ \theta_\delta\ \text{etc.}$$

sagen wir, dass sie eine azygetische Reihe bilden, wenn je drei Glieder sich azygetisch verhalten.

Es ist leicht zu sehen, dass, wenn $\varkappa, \lambda, \mu$ etc. eine azygetische Reihe von Permutationen ist, dann

$$\theta_\alpha\,,\ \theta_{\alpha\varkappa}\,,\ \theta_{\alpha\lambda}\,,\ \theta_{\alpha\mu}\ \text{etc.}$$

eine azygetische Reihe von Functionen darstellt. Falls die Reihe nicht geschlossen ist, ist sie auch unabhängig; wir können daher θ_α so wählen dass alle diese Functionen denselben Charakter haben. Daraus folgt dass sich die Thetafunctionen des ganzen Systems in folgender Weise anordnen lassen: Es kann zunächst eine azygetische Reihe von $2p+1$ gleichartigen Theta aufgestellt werden:

$$\theta_1\,,\ \theta_2\,,\ \ldots\,,\ \theta_{2p+1}.$$

Alle übrigen Theta werden dann bezeichnet durch die Combinationen ungerader Ordnung der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2p+1$. Da θ_1, θ_2, θ_3 sich azygetisch verhalten, so ist der Quotient

$$\frac{\theta_1\,\theta_2}{\theta_3\,\theta_{123}}$$

eine ungerade Function; folglich hat θ_{123} den entgegengesetzten Charakter wie θ_1, θ_2, θ_3 etc. Alle Functionen, die durch dreigliedrige Indices bezeichnet sind, haben demnach unter einander denselben, aber zu denen der Hauptreihe entgegengesetzten Charakter. Ebenso schliesst man, dass die Theta mit fünfgliedrigem Index wieder denselben Charakter haben, wie die der Hauptreihe, u. s. f. Am grössten ist die Anzahl der Combinationen von der mittleren Ordnung: ρ oder $\rho + 1$. Diese müssen gerade Functionen bezeichnen, da die Anzahl der geraden überwiegt; demnach sind gerade alle Functionen θ_m, bei denen die Ordnung der Combination m congruent ρ oder $\rho + 1$ mod. 4 ist, ungerade die übrigen.

Die Functionen der Hauptreihe sind gerade, wenn $1 \equiv \rho$ oder $\equiv \rho + 1$ mod. 4 ist, d. h. für $\rho \equiv 0$ und $\equiv 1$ mod. 4; in den andern Fällen sind sie ungerade.

Statt der nicht geschlossenen azygetischen Reihe kann man auch die geschlossene Reihe der Bezeichnung zu Grunde legen, die man erhält, wenn man der Hauptreihe noch als letztes Glied die Function

$$\theta_{2\rho+2} = \theta_{123\ldots 2\rho+1}$$

hinzufügt. Jedes Theta wird dann durch zwei complementäre Combinationen der Zahlen $1, 2, \ldots, 2\rho + 2$ bezeichnet. Indess kann hier insofern eine Unregelmässigkeit eintreten, als $\theta_{2\rho+2}$ nicht nothwendig von derselben Art ist, wie θ_1, θ_2, $\ldots$, $\theta_{2\rho+1}$. Wenn ρ gerade ist, so haben alle $2\rho + 2$ denselben Charakter, weil dann $2\rho + 1 \equiv 1$ mod. 4 ist; wenn aber ρ ungerade ist, so ist $\theta_{2\rho+2}$ von entgegengesetzter Art.

Es kann allerdings auch in diesem letzteren Falle die volle Symmetrie in Bezug auf die Indices $1, 2, \ldots, 2\rho + 2$ gewahrt werden, wenn man eine leichte Modification der Bezeichnung eintreten lässt. Durch die Reihe θ_1, θ_2, $\ldots$, $\theta_{2\rho+2}$ ist die Bezeichnung der Permutationen festgelegt; jeder Permutation entsprechen zwei complementäre Combinationen gerader Ordnung der Zahlen $1, 2, \ldots, 2\rho + 2$. Nun bevorzugen wir die Function $\theta_{2\rho+2}$, indem wir sie ohne Index lassen, und allen übrigen geben wir den Index derjenigen Permutation, durch die sie aus θ hervorgehen. Dann ist leicht zu sehen, dass Combinationen derselben Ordnung auch wieder Functionen von gleichem Charakter bezeichnen. Nehmen wir z. B. $\rho = 1$. Die geraden elliptischen Theta würden bei dieser Festsetzung zu bezeichnen sein als θ_{12} oder θ_{34}, θ_{13} oder θ_{24}, etc., während $\theta = \theta_{1234}$ das ungerade Theta ist. Für $\rho = 3$ würden

$$\theta_{12}\,,\ \theta_{12}\,,\ \ldots,\ \theta_{78}$$

die 28 ungeraden, θ und $\theta_{1234} = \theta_{5678}$ etc. die geraden Functionen sein.

Die Existenz der gleichartigen azygetischen Reihen war schon RIEMANN bekannt. Es ist noch ein Punkt zu besprechen, der für unsere algebraische Untersuchung von grosser Wichtigkeit ist, und auf den NOETHER und FROBENIUS aufmerksam gemacht haben. Nehmen wir eine GÖPEL'sche Gruppe G, und bilden die Produkte

$$P_\alpha = \prod_{\varkappa} (\theta_{\alpha\varkappa}),$$

jedes dieser Produkte erstreckt über die 2^n Elemente von G. Die Mehrzahl dieser Produkte enthält gerade und ungerade Faktoren gemischt, und zwar sind dann jedesmal soviel gerade wie ungerade Faktoren vorhanden. Denn nehmen wir an, dass ein Faktor $\theta_{\alpha\varkappa'}$ existirt, der von entgegengesetzter Art ist wie θ_α, dann müssen, wenn $\theta_{\alpha\varkappa}$ irgend einen andern Faktor bedeutet, auch $\theta_{\alpha\varkappa}$ und $\theta_{\alpha\varkappa\varkappa'}$ von entgegengesetzter Art sein, weil der Quotient

$$\frac{\theta_{\alpha\varkappa}\,\theta_{\alpha\varkappa'}}{\theta_\alpha\,\theta_{\alpha\varkappa\varkappa'}}$$

eine gerade Function ist. Die Faktoren von P_α lassen sich also paarweise zusammenfassen, sodass immer der eine gerade, der andere ungerade ist.

Wären nur solche Produkte vorhanden, so wäre die Anzahl der geraden Theta gleich der der ungeraden, was nicht der Fall ist.

Beschränken wir uns jetzt auf diejenigen P_α, welche nur gleichartige Faktoren enthalten, so haben wir ein System, das, was die Gruppierung anbetrifft, genau analog ist dem System der Thetafunctionen von $\rho - n = \sigma$ Variabeln.

Gehört $\varkappa$ der Gruppe G an, so ist $P_{\alpha\varkappa} = P_\alpha$. Eine solche Permutation ist demnach für unser System als identische anzusehen.

Damit $P_{\alpha\lambda}$, ebenso wie P_α, ein Produkt gleichartiger Faktoren sei, ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass λ sich zur ganzen Gruppe G syzygetisch verhält. Dieser Bedingung genügt eine Gruppe von $2^{2\rho - n}$ Permutationen, unter denen aber die der Gruppe G mit enthalten sind. Wir können also eine zweite Gruppe g' definiren, von der Ordnung $2\rho - 2n = 2\sigma$, in der Weise, dass jede zur Gruppe G syzygetische Permutation sich darstellt in der Form $\varkappa\lambda$, wo $\varkappa$ der Gruppe G, λ der Gruppe G' angehört.

Die Permutationen der Gruppe G sind dann die einzigen, welche syzygetisch sind zu beiden Gruppen G und G'. Folglich giebt es in der Gruppe G' ausser der Permutation o keine andere, die zu allen Elementen von G' syzygetisch wäre.

Damit sind für das System derjenigen P_α, die Produkte von lauter gleichartigen Theta sind, dieselben Grundlagen aufgestellt, von denen wir ausgegangen sind bei der Gruppierung der 4^ρ Functionen Theta. Die Anzahl der P_α beträgt 4^σ, und es giebt zwei Arten der P_α: Produkte gerader, und Produkte ungerader Theta. Wir können sagen, dass drei Produkte P_α, P_β, P_γ sich syzygetisch oder azygetisch verhalten, jenachdem der Quotient

$$\frac{\theta_\alpha \theta_\beta}{\theta_\gamma \theta_{\alpha\beta\gamma}}$$

gerade oder ungerade ist. Wir können dann geschlossene azygetische Reihen der P aufstellen, die immer aus einer geraden Anzahl von Gliedern bestehen, und speziell für die Bezeichnung der P eine Hauptreihe

$$P_1, P_2, \ldots, P_{2\sigma+1}$$

zu Grunde legen, die aus P-Functionen der gleichen Art besteht, während

$$P_{123}, P_{124} \text{ etc.}$$

von der entgegengesetzten Art sind wie die Functionen der Hauptreihe.

Nehmen wir z. B. $n = \rho - 1$, also $\sigma = 1$, so besteht das System der P aus vier Grössen: P_1, P_2, P_3 und P_{123}; die drei ersten sind Produkte gerader, das letzte ein Produkt ungerader Theta.

Für $n = \rho - 2$ existiren 16 Functionen P. Die sechs Produkte ungerader Theta bilden eine geschlossene azygetische Reihe:

$$P_1, P_2, \ldots, P_6;$$

die Produkte gerader sind dann:

$$P_{123} = P_{456}, \qquad P_{124} = P_{356}, \quad \text{etc.}$$

Für $n = \rho$ reduzirt sich das System der P auf eine einzige Function, und diese ist ein Produkt gerader Theta.

§ 3.

Die Aufstellung der quadratischen Relationen unter den Thetafunctionen beruht auf sehr einfachen Sätzen.

Erstens: Von den Quadraten der Theta sind nur 2^ρ linear-unabhängig.

Zweitens: Auch von den Produkten

$$P_\alpha = \theta_\alpha \theta_{\alpha\varkappa},$$

die zu einer bestimmten Permutation oder halben Periode $\varkappa$ gehören, sind nur 2^ρ linear-unabhängig. Diese Produkte sind aber theils gerade, theils ungerade Functionen. Beschränkt man sich auf die geraden, so sind nur $2^{\rho-1}$ unabhängig; dasselbe gilt von den ungeraden.

Drittens: Jede der Gleichungen, die sich hiernach zwischen den Thetafunctionen ergiebt, bleibt richtig, abgesehen von den Vorzeichen der einzelnen Glieder, bei sämmtlichen 4^ρ Permutationen des Systems. Aus

$$\Sigma(A_\alpha \theta_\alpha^2) = 0$$

folgt demnach

$$\Sigma(\pm A_\alpha \theta_{\alpha\lambda}^2) = 0,$$

und aus

$$\Sigma(A_\alpha P_\alpha) = 0,$$

$$\Sigma(\pm A_\alpha P_{\alpha\lambda}) = 0.$$

Auf die Vorzeichen wollen wir im folgenden wenig Rücksicht nehmen, um die Untersuchung nicht zu complicieren.

Wir bezeichnen durchweg mit c_α den constanten Werth, den eine gerade Function θ_α für $u = 0$ annimmt, und wenn θ_α ungerade ist, mit u_α ihr lineares Anfangsglied.

Fangen wir an mit dem Falle $\rho = 1$. Hier existieren drei gerade Theta: $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Sie bilden eine azygetische Reihe, die geschlossen wird durch Hinzufügung des ungeraden Theta. Letzteres kann ohne Index bleiben.

Zwischen den Quadraten von je drei der Theta besteht eine lineare Relation, deren Coefficienten sicht leicht bestimmen lassen. Nehmen wir z. B.:

$$A_1\theta_1^2 + A_2\theta_2^2 + A_3\theta_3^2 = 0.$$

Dies wird durch die Permutation 12 übergeführt in:

$$A_1\theta_2^2 \pm A_2\theta_1^2 \pm A_3\theta^2 = 0.$$

Daraus folgt, wenn man $u = 0$ setzt:

$$A_1 c_2^2 = \pm A_2 c_1^2.$$

Hiernach erhält die Gleichung zwischen $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ die Form

$$\sum_{\alpha=1}^{3}(\pm c_\alpha^2\theta_\alpha^2) = 0, \tag{1}$$

und daraus wiederum ergiebt sich für $u = 0$ die bekannte Constantenrelation:

$$\sum_{\alpha=1}^{3}(\pm c_\alpha^4) = 0. \tag{2}$$

Für $\rho = 2$ haben wir 6 ungerade und 10 gerade Theta. In den 6 ungeraden:

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_6$$

liegt eine geschlossene azygetische Reihe vor. $\theta_{123} = \theta_{456}$, etc. sind die 10 geraden Functionen.

Die übrigen sechsgliedrigen azygetischen Reihen gehen aus der Reihe der ungeraden hervor durch die 15 Permutationen $12, 13, \ldots, 56$. Sie enthalten jedesmal vier gerade und zwei ungerade Functionen; z. B.:

$$\theta_{156}, \theta_{256}, \theta_{356}, \theta_{456}; \; \theta_5, \theta_6.$$

Aus den geraden Theta allein lassen sich demnach 15 verschiedene viergliedrige azygetische Reihen bilden.

Zwischen den Quadraten von je fünf Thetafunctionen besteht eine lineare Gleichung. Ist aber eins dieser fünf Theta gerade, die übrigen ungerade, so muss offenbar der Coefficient des geraden Theta gleich 0 sein. Es besteht also z. B. eine Gleichung:

$$\sum_{\alpha=1}^{4}(A_\alpha\theta_\alpha^2) = 0.$$

Wendet man hier die Permutation $34 = 1256$ an, und setzt dann $u = 0$, so folgt:

$$A_1 c_{256}^2 = \pm A_2 c_{156}^2.$$

Hiernach bestimmen sich die Coefficienten A_a; es ergiebt sich:

$$\sum_{a=1}^{4} (\pm c_{a56}^2 \theta_a^2) = 0.$$

Wir können sagen, dass hiermit die Relation gegeben ist, die zwischen vier ungeraden Theta besteht, oder auch, allgemeiner, zwischen irgend vier Theta, die eine azygetische Reihe bilden; sie hat die Form

$$\sum (\pm c_{ax}^2 \theta_a^2) = 0,$$

wo x diejenige Permutation bedeutet, durch die alle vier Theta in gerade übergeführt werden.

Nehmen wir speciell die vier Functionen als gerade an, so haben wir:

$$\sum (\pm c_a^2 \theta_a^2) = 0, \tag{3}$$

und für $u = 0$:

$$\sum (\pm c_a^4) = 0. \tag{4}$$

Diese viergliedrige Gleichung stellt ein System von 15 verschiedenen Relationen zwischen den Anfangsgliedern der 10 geraden Theta dar, da sich aus den geraden Theta 15 verschiedene viergliedrige azygetische Reihen bilden lassen.

Gehen wir jetzt über zu den Produkten

$$P_a = \theta_a \theta_{ax},$$

die zu einer der 15 halben Perioden gehören. Unter diesen acht Produkten giebt es vier, deren Faktoren gleichartig sind, und zwar drei Produkte gerader, ein Produkt ungerader Theta. Zwischen je drei dieser vier Functionen besteht eine lineare Gleichung; alle vier bilden eine geschlossene azygetische Reihe. Nennen wir, allerdings abweichend von der zuerst gewählten Bezeichnung der Theta, P_1, P_2, P_3 die drei Produkte erster Art, so können wir, da die Verhältnisse genau so liegen, wie bei den

Quadraten der Thetafunctionen von einer Variabeln, die beiden Formeln aufstellen:

$$(5) \qquad \sum_{a=1}^{3}(\pm p_a P_a) = 0,$$

$$(6) \qquad \sum_{a=1}^{3}(\pm p_a^2) = 0,$$

wo p_a den Werth von P_a für $u = 0$ bedeutet.

Kehren wir zurück zur ursprünglichen Bezeichnung und wählen etwa für $\varkappa$ die Permutation 56. Es sind dann

$$\theta_{145}\,\theta_{146}\,,\ \theta_{245}\,\theta_{246}\,,\ \theta_{345}\,\theta_{346}$$

die drei zugehörigen Produkte gerader Theta. Somit bestehen die Relationen:

$$\sum_{a=1}^{3}(\pm c_{a45}c_{a46}\,\theta_{a45}\,\theta_{a46}) = 0,$$

$$\sum_{a=1}^{3}(\pm c_{a45}^2 c_{a46}^2) \qquad = 0.$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen ziehn wir eine weitere Folgerung. Wir wenden die Permutation 46 an, wodurch θ_{a46} in θ_a, θ_{a45} in θ_{a56} übergeführt wird, und beschränken uns auf die Anfangsglieder. So ergiebt sich:

$$(7) \qquad \sum_{a=1}^{3}(\pm c_{a45}c_{a46}c_{a56}u_a) = 0.$$

Wir können dieser Gleichung auch die Form geben:

$$\sum_{a=1}^{3}(\pm c_{a\varkappa}c_{a\lambda}c_{a\varkappa\lambda}u_a) = 0;$$

$\varkappa$, λ und $\varkappa\lambda$ bedeuten hier diejenigen drei Permutationen, die gleichzeitig θ_1, θ_2, θ_3 in gerade Functionen überführen. Da θ_1, θ_2 und θ_3 irgend drei der sechs ungeraden Functionen sein können, so ist hiermit allgemein die Beziehung zwischen den Anfangsgliedern dreier ungeraden Theta dargestellt.

Bilden wir jetzt die entsprechenden Gleichungen für $\rho = 3$. Zunächst kann man sagen, dass zwischen den Quadraten von neun Thetafunctionen immer eine lineare Gleichung bestehen muss. Es gilt aber der Satz, dass schon sechs Theta durch eine solche Gleichung verbunden sind, falls sie eine geschlossene azygetische Reihe bilden. Wenn dies zugleich lauter gerade Functionen sind, so hat die Relation die einfache Form:

$$\sum_{\alpha=1}^{6} (\pm\, c_\alpha^2\, \theta_\alpha^2) = 0. \tag{8}$$

Um dies zu beweisen, denken wir uns zunächst für die Bezeichnung der 64 Theta eine azygetische Reihe θ_1, θ_2, ... θ_7 von lauter ungeraden Theta zu Grunde gelegt. Die Functionen $\theta_{\alpha\beta\gamma}$ sind dann gerade, $\theta_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$ wiederum ungerade, der Combination $12\ldots7$ entspricht eine gerade Function. Wir fügen diese letztere, als θ_8, der Hauptreihe hinzu. Eine dreigliedrige Combination, die das Element 8 enthält, bezeichnet dann nicht eine gerade, sondern eine ungerade Function.

Nehmen wir nun die acht Functionen der Hauptreihe und ausserdem irgend eine andere Function, etwa θ_{678}. Wir können dann die Gleichung aufstellen:

$$A\,\theta_{678}^2 = \sum_{\alpha=1}^{8} (A_\alpha\, \theta_\alpha^2).$$

Da θ_8 die einzige gerade Function ist, die in dieser Gleichung vorkommt, so muss der Coefficient A_8 gleich 0 sein. Dasselbe gilt von A_6 und A_7; denn durch die Permutationen 68, 78 gehen alle Functionen in ungerade über, ausgenommen das eine Mal θ_6, das andre Mal θ_7. Demnach lautet die Gleichung so:

$$A\,\theta_{678}^2 = \sum_{\alpha=1}^{5} (A_\alpha\, \theta_\alpha^2).$$

Wendet man die Permutation 18 an, und setzt dann $u = 0$, so ergiebt sich:

$$A c_{167}^2 = \pm\, A_1 c_8^2.$$

Hiernach bestimmen sich die Coefficienten folgendermassen:

$$c_8^2\, \theta_{678}^2 = \sum_{\alpha=1}^{5} (\pm\, c_{\alpha 67}^2\, \theta_\alpha^2),$$

und dies ist in Übereinstimmung mit dem aufgestellten Satze. Denn θ_1, θ_2, ..., θ_5 und $\theta_{678} = \theta_{12345}$ bilden eine geschlossene azygetische Reihe, und 67 ist diejenigen Permutation, die alle sechs Functionen in gerade überführt.

Der Satz ist damit auch allgemein bewiesen. Denn nehmen wir an, es liege eine geschlossene azygetische Reihe von sechs Theta vor. Wenn wir das letzte Glied fortlassen, so können die fünf übrigen zu einer siebengliedrigen azygetischen Reihe ergänzt werden, und es giebt eine Permutation, die diese sieben Theta in lauter ungerade überführt.

Gehen wir zu den Produkten

$$P_a = \theta_a \theta_{a\varkappa}$$

über, die einem bestimmten $\varkappa$ entsprechen. Unter diesen sind 16 gerade Functionen, davon 6 Produkte ungerader Theta. Die letzteren bilden wieder eine geschlossene azygetische Reihe. Ausserdem sind von den 16 P_a nur $2^{\rho-1} = 4$ linear-unabhängig. Hiernach ist klar, dass zwischen ihnen genau dieselben Relationen bestehen wie zwischen den Quadraten der 16 Thetafunctionen von zwei Variabeln. Sind speciell P_1, P_2, P_3, P_4 vier der 16 Functionen, die eine nicht geschlossene azygetische Reihe bilden, so muss

$$\sum_{a=1}^{4} (\pm\, p_{a\lambda} P_a) = 0 \tag{9}$$

sein, wobei λ diejenige Permutation bedeutet, die alle vier Functionen in Produkte gerader Theta überführt. $p_{a\lambda}$ bedeutet, wie früher, den Werth von $P_{a\lambda}$ für $u = 0$.

Nehmen wir jetzt eine GÖPEL'sche Gruppe zweiter Ordnung: $(0, \varkappa, \lambda, \varkappa\lambda)$, und bilden die Produkte

$$Q_a = \theta_a \theta_{a\varkappa} \theta_{a\lambda} \theta_{a\varkappa\lambda}.$$

Es existieren drei solche Produkte — nennen wir sie Q_1, Q_2, Q_3 —, die aus lauter geraden Faktoren bestehen, und ein Produkt ungerader Faktoren, Q_{123}. Die Werthe der drei ersteren für $u = 0$ bezeichnen wir mit q_1, q_2, q_3.

So gehört zu jeder GÖPEL'schen Gruppe zweiter Ordnung ein System von drei Constanten. Diese sind jedesmal durch eine Gleichung

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm\, q_a) = 0 \tag{10}$$

verbunden, welche entspricht der Gleichung

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm\, p_a^2) = 0$$

für $\rho = 2$, und der Gleichung

$$\sum_{\alpha=1}^{3} (\pm c_\alpha^4) = 0$$

für $\rho = 1$. Die Formel ist leicht zu beweisen, wenn man die Produkte Q_α auflöst in $P_\alpha P_{\alpha\lambda}$. P_1, P_2, P_3 sind dann drei Produkte gerader Theta, und sie verhalten sich azygetisch; man kann noch ein viertes Produkt gerader Theta P_4 hinzufügen, sodass P_1, P_2, P_3, P_4 eine nicht geschlossene azygetische Reihe bilden. Alsdann besteht die Gleichung:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\pm p_\alpha P_\alpha) = 0,$$

und aus ihr folgt:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\pm p_\alpha P_{\alpha\lambda}) = 0.$$

Nun kann Q_4 nicht aus lauter geraden Faktoren bestehen; $P_{4\lambda}$ verschwindet demnach für $u = 0$, und wir erhalten:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} (\pm p_\alpha p_{\alpha\lambda}) = 0,$$

oder:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} (\pm q_\alpha) = 0.$$

Die Anfangsglieder u_α der ungeraden Theta sind homogene lineare Functionen von drei unabhängigen Veränderlichen und es muss deshalb zwischen je vier dieser Grössen u_α eine lineare Gleichung bestehen. In einfacher Form lassen sich diese linearen Gleichungen nur dann darstellen, wenn die vier entsprechenden Functionen eine azygetische Reihe bilden. Aber diese speciellen linearen Relationen, die man azygetische nennen könnte, genügen vollständig, um sämmtliche 28 u_α durch drei unter ihnen auszudrücken.

Nehmen wir demnach irgend vier ungerade Theta an: $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, die sich gegenseitig azygetisch verhalten. Wir können dann diese Reihe durch Hinzufügung dreier neuen ungeraden Functionen: $\theta_5, \theta_6, \theta_7$ zu einer Hauptreihe ergänzen.

Stellen wir die Ausdrücke auf

$$\vartheta_{\alpha 56}\,\vartheta_{\alpha 57}. \qquad (\alpha=1,2,3,4)$$

Dies sind Produkte gerader Theta, gehörig zur Permutation $\varkappa = 67$. Es besteht also zwischen ihnen die Gleichung:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\pm\, c_{\alpha 56} c_{\alpha 57}\, \vartheta_{\alpha 56}\, \vartheta_{\alpha 57}) = 0,$$

welche durch die Permutation 56 übergeführt wird in:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\pm\, c_{\alpha 56} c_{\alpha 57}\, \vartheta_{\alpha}\, \vartheta_{\alpha 67}) = 0,$$

und hieraus folgt, wenn wir uns auf die Anfangsglieder beschränken:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\pm\, c_{\alpha 56} c_{\alpha 57} c_{\alpha 67}\, u_{\alpha}) = 0.$$

Die Gleichung hat die Form:

$$(11) \qquad \sum_{\alpha=1}^{4} (\pm\, c_{\alpha\varkappa} c_{\alpha\lambda} c_{\alpha\varkappa\lambda}\, u_{\alpha}) = 0,$$

wo $\varkappa$, λ und $\varkappa\lambda$ die Permutationen 56, 57, 67 bedeuten, die gleichzeitig alle vier ungeraden Functionen ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 und ϑ_4 in gerade überführen. Es sind dies nicht die einzigen Permutationen welche diese Eigenschaft haben; es gehört dazu auch noch die Permutation 1234. Wir müssen daher sagen: Zwischen den Anfangsgliedern von vier ungeraden Theta, die sich zu einander azygetisch verhalten, besteht die Gleichung (11), in der $\varkappa$, λ und $\varkappa\lambda$ die drei von 1234 verschiedenen Permutationen bedeuten, die ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 und ϑ_4 in gerade Functionen überführen.

Alles dies sind Identitäten. Es giebt aber, schon für $\rho = 3$, Systeme von nicht-identischen Gleichungen, die auf der Riemann'schen Theorie beruhn und doch in sehr enger Beziehung zu den hier entwickelten Identitäten stehn.

Betrachten wir einen Augenblick die Abel'schen Functionen von ρ Variabeln in der Riemann'schen Theorie. Sie werden ausgedrückt als rationale symmetrische Functionen von ρ Werthepaaren

$$(x_\alpha\,, y_\alpha), \qquad (\alpha=1,2,\ldots,\rho)$$

die alle derselben Gleichung $G(x, y) = 0$ vom Range oder Geschlechte ρ genügen; ihre Klasse ist identisch mit der Gesammtheit dieser rationalen Functionen. Die Variabeln und damit auch die Anfangsglieder u_α der ungeraden Theta werden, gleichfalls symmetrisch, ausgedrückt durch Integrale erster Gattung, und zwar in der Form:

$$u_\alpha = \sum_{\nu=1}^{\rho} \int^{x_\nu, y_\nu} H_\alpha(x, y)\,dx.$$

Offenbar müssen die H_α denselben linearen Gleichungen genügen wie die u_α, ausserdem aber einer Anzahl nicht-linearer Gleichungen, da sie algebraische Functionen einer Variabeln sind.

Setzt man specieller:

$$u_\alpha = \int_{x', y'}^{x, y} H_\alpha(x, y)\,dx,$$

indem man beide Grenzen als variabel ansieht, so gehen die Abel'schen Functionen über in rationale Functionen von (x, y) und (x', y'), die geraden in symmetrische, die ungeraden in alternirende. Der Quotient zweier ungeraden Theta aber wird ein Produkt zweier Faktoren, von denen der eine nur von (x, y) abhängt, der andere dieselbe Function von (x', y') ist. Die Faktoren bestimmen sich, indem man beide Punkte zusammenfallen lässt; man findet leicht:

$$\frac{\theta_\alpha(u)}{\theta_\beta(u)} = \frac{\sqrt{H_\alpha(x, y)}\sqrt{H_\alpha(x', y')}}{\sqrt{H_\beta(x, y)}\sqrt{H_\beta(x', y')}}.$$

Daraus geht hervor, dass man im Geltungsbereich der Riemann'schen Theorie — die aber, wenn $\rho > 3$ ist, nicht die allgemeinen Abel'schen Functionen umfasst — den Thetarelationen genügen kann, indem man für jedes ungerade Theta setzt:

$$\theta_\alpha = \varphi \cdot \sqrt{H_\alpha(x, y)}\sqrt{H_\alpha(x', y')},$$

oder, wenn wir die H_α mit u_α und u'_α bezeichnen:

$$\theta_\alpha = \varphi \cdot \sqrt{u_\alpha}\sqrt{u'_\alpha}.$$

Zwischen diesen u_α bestehen dieselben linearen Relationen wie zwischen den Anfangsgliedern der ungeraden Theta. Die Aufgabe ist jetzt, die nicht-linearen homogenen Gleichungen zwischen den u_a zu finden.

Für $\rho = 3$ existirt im Wesentlichen nur eine solche Gleichung, die vom vierten Grade ist. Wenn wir sie in einer grossen Anzahl verschiedener Formen aufstellen, so müssen aus einer alle übrigen folgen, indem man die linearen Gleichungen zwischen den u_a und den c_a zu Hülfe nimmt.

Wir stützen uns auf einen bekannten algebraischen Satz. Sind x_1, $x_2, \ldots, x_{2n}$ lineare homogene Functionen von n Veränderlichen, welche identisch einer Gleichung

$$\sum_{a=1}^{2n} (g_a x_a^2) = 0$$

genügen, und ist

$$\sum_{a=1}^{n+1} (A_a x_a) = 0$$

die Gleichung, durch die $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ verbunden sind, so ist nothwendig:

$$\sum_{a=1}^{n+1} \left(\frac{A_a^2}{g_a}\right) = 0.$$

Ist ferner

$$\Sigma (B_a x_a) = 0$$

die Gleichung, welche $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und x_{n+2} verbindet, so ist auch

$$\sum_{a=1}^{n} \left(\frac{A_a B_a}{g_a}\right) = 0.$$

Diesen Satz können wir anwenden auf die Relationen zwischen den Produkten $P_a = \theta_a \theta_{ax}$. Es giebt sechs P_a, die Produkte ungerader Theta sind; nennen wir sie $P_1, P_2, \ldots, P_6$. Durch die Permutation 56 werden die ersten vier in Produkte gerader Theta übergeführt. Es besteht also die Gleichung

$$\sum_{a=1}^{4} (\pm p_{a56} P_a) = 0.$$

Den Gleichungen wird genügt, wenn wir θ_a durch $\sqrt{u_a}\sqrt{u'_a}$, also P_a durch $\sqrt{\mathrm{w}_a}\sqrt{\mathrm{w}'_a}$ ersetzen, wo

$$\mathrm{w}_a = u_a u_{ax}$$

ist, und w'_a dieselbe Function von x', y' bedeutet. Dies giebt:

$$\sum_{a=1}^{4} \pm p_{a56} \sqrt{w_a} \sqrt{w'_a}) = 0.$$

Hieraus folgt, dass die vier Grössen $\sqrt{w_1}$, $\sqrt{w_2}$, $\sqrt{w_3}$, $\sqrt{w_4}$ durch zwei lineare Gleichungen verbunden sind, und dass, wenn wir

$$\sum_{a=1}^{3} (A_a \sqrt{w_a}) = 0$$

setzen, nothwendig

$$\sum_{a=1}^{3} \left(\pm \frac{A_a^2}{p_{a56}} \right) = 0.$$

sein muss.

Wir sind offenbar berechtigt, in dieser Gleichung die Combination 56 auch durch 45 oder 46 zu ersetzen. Somit haben wir drei Gleichungen, die mehr als ausreichen, um die Verhältnisse von A_1^2, A_2^2 und A_3^2 zu bestimmen. Sie werden erfüllt, wenn man A_a^2 proportional

$$p_{a45}\, p_{a46}\, p_{a56} \qquad (a=1,2,3)$$

annimmt;[1] denn es besteht die Gleichung:

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm\, p_{a45}\, p_{a46}) = 0,$$

die zur Kategorie der Formeln $\Sigma(\pm\, q_a) = 0$ gehört. Wir erhalten demnach:

$$(12) \qquad \sum_{a=1}^{3} (\pm \sqrt{p_{a45}\, p_{a46}\, p_{a56}\, w_a}) = 0.$$

[1] Eigentlich folgt aus unsern Formeln nur, dass diese Produkte proportional $\pm A_a^2$ sind. Dass $A_a^2 = +\, p_{a45}\, p_{a46}\, p_{a56}$ gesetzt werden darf, ergiebt sich daraus, dass die Vorzeichen in der Gleichung

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm\, p_{a45}\, p_{a46}) = 0$$

übereinstimmen mit den drei ersten Vorzeichen der Gleichung

$$\sum_{a=1}^{4} (\pm\, p_{a56}\, P_a) = 0,$$

was leicht zu beweisen ist.

Vergleichen wir dies mit Formel (7). Wir sehen dann, dass die Relationen zwischen den sechs Wurzelfunctionen

$$\sqrt{w_\alpha} = \sqrt{u_\alpha u_{\alpha\varkappa}}$$

genau dieselben sind wie die, welche für $\rho = 2$ zwischen den Anfangsgliedern der ungeraden Theta bestehen, nur dass an die Stelle der c_α die Quadratwurzeln

$$\sqrt{p_\alpha} = \sqrt{c_\alpha c_{\alpha\varkappa}}$$

treten. Aber diese Grössen $\sqrt{p_\alpha}$ sind auch ihrerseits durch dieselben Gleichungen verbunden, wie die 10 Grössen c_α im Falle $\rho = 2$.

Da die u_α lineare Functionen von drei Variabeln sind, so haben wir hier, in verschiedenen irrationalen Formen, die Gleichung einer Curve vierten Grades. Die Anzahl der verschiedenen Formen beträgt 63 . 20, als Coefficienten treten auf die Werthe, welche die geraden Theta und die Ableitungen der ungeraden für $u = 0$ annehmen.

§ 4.

Für die Abel'schen Functionen von vier Variabeln besteht unsre Aufgabe vorläufig nur darin, diejenigen Gleichungssysteme aufzustellen, die den für $\rho \neq 3$ gefundenen genau analog sind.

Die Relationen zwischen den Quadraten der Theta übergehen wir und gehen bald zu den Produkten

$$P_\alpha = \theta_\alpha \theta_{\alpha\varkappa}$$

über. Halten wir $\varkappa$ fest; dann existiren 64 solche Produkte, welche gerade Functionen sind, und von diesen sind nur $2^{\rho-1} = 8$ linear unabhängig. Hieraus allein folgt schon, dass zwischen den P_α genau dieselben Relationen bestehen, wie zwischen den Quadraten der Thetafunctionen von drei Variabeln. Speciell gilt also der Satz:

Zwischen je sechs Functionen P_α die eine geschlossene azygetische Reihe bilden, besteht die Gleichung

$$\sum_{\alpha=1}^{6} (\pm p_{\alpha\lambda} P_\alpha) = 0, \tag{13}$$

wo λ diejenige Permutation bedeutet, die alle 6 Functionen in Produkte gerader Theta überführt.

Die Beziehungen zwischen den 136 Constanten c lassen sich in folgender Weise zusammenfassen. Wir nehmen eine GÖPEL'sche Gruppe $(0, \varkappa, \lambda, \varkappa\lambda)$ und denken uns die Produkte gebildet:

$$Q_a = \theta_a \theta_{a\varkappa} \theta_{a\lambda} \theta_{a\varkappa\lambda}.$$

Es giebt 16 solche Produkte, die lauter gleichartige Faktoren enthalten, davon 10 Produkte gerader Theta. Die Werthe, welche diese letzteren annehmen für $u = 0$, bezeichnen wir mit q_a.

Aus diesen 10 Grössen q_a lassen sich auf 15 verschiedene Arten vier auswählen, die eine azygetische Reihe bilden; diese vier sind jedesmal durch eine Gleichung

$$\Sigma(\pm q_a) = 0 \tag{14}$$

verbunden. Es ist dies dasselbe Gleichungssystem welches besteht zwischen den 10 Grössen p_a^2 für $\rho = 3$, und den c_a^4 für $\rho = 2$.

Der Beweis ist leicht zu führen. Sei q_1, q_2, q_3, q_4 eine der 15 azygetischen Reihen. Wir können

$$Q_a = P_a P_{a\lambda} \qquad (a = 1, 2, 3, 4)$$

setzen. P_1, P_2, P_3, P_4 sind dann Produkte gerader Theta, die ebenfalls eine azygetische Reihe bilden. Ergänzen wir diese zu einer geschlossenen durch Hinzufügung zweier Glieder P_5, P_6, die auch Produkte gerader Theta sein sollen. Dann besteht die Gleichung:

$$\sum_{a=1}^{6} (\pm p_a P_a) = 0,$$

und daraus folgt:

$$\sum_{a=1}^{6} (\pm p_a P_{a\lambda}) = 0.$$

Dies giebt für $u = 0$:

$$\sum_{a=1}^{4} (\pm p_a p_{a\lambda}) = 0,$$

oder:

$$\sum_{a=1}^{4}(\pm q_a) = 0;$$

denn Q_5 und Q_6 können nicht Produkte von 4 geraden Theta sein.

Von jetzt ab machen wir die Voraussetzung, dass es sich nicht um die allgemeinen ABEL'schen Functionen von vier Variabeln handle, sondern um die, welche der RIEMANN'schen Theorie entsprechen. Wir können dann, genau wie im Falle $\rho = 3$, sagen: Es muss möglich sein, den sämmtlichen Thetarelationen zu genügen, indem man für jedes ungerade Theta den Ausdruck

$$\theta_a = \varphi \cdot \sqrt{u_a}\sqrt{u'_a}$$

substituirt. Dabei bedeuten die u_a lineare Functionen von vier Variabeln, die, was ihre Coefficienten anbetrifft, übereinstimmen mit den Anfangsgliedern der entsprechenden Theta. Aber die Variabeln sind nicht unabhängig, sondern proportional algebraischen Functionen einer Veränderlichen x, sodass zwei verschiedene homogene aber nicht lineare Gleichungen zwischen den u_a bestehn. Die u'_a sind dieselben Functionen von einer zweiten Variabeln x'.

An die Stelle von P_a tritt, wenn P_a das Produkt zweier ungeraden Theta ist:

$$P_a = \varphi^2 \cdot \sqrt{w_a}\sqrt{w'_a},$$

wo

$$w_a = u_a u_{a\varkappa}$$

ist. Nun nehmen wir an, wir hätten eine sechsgliedrige geschlossene azygetische Reihe von Produkten ungerader Theta:

$$P_1, P_2, \ldots, P_6.$$

λ sei diejenige Permutation, die alle sechs Grössen in Produkte gerader Theta verwandelt. Aus der Gleichung

$$\sum_{a=1}^{6}(\pm p_{a\lambda} P_a) = 0$$

folgt dann:

$$\sum_{a=1}^{6}(\pm p_{a\lambda}\sqrt{w_a}\sqrt{w'_a}) = 0.$$

Da die w'_α von einer andern Variabeln abhängen, als die w_α, so müssen wir hieraus schliessen, dass je vier der sechs Grössen $\sqrt{w_\alpha}$ durch eine lineare Gleichung verbunden sind. Setzen wir demnach an:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (A_\alpha \sqrt{w_\alpha}) = 0,$$

so folgt aus dem algebraischen Hülfssatz den wir im vorigen Paragraph aufgestellt haben, dass die Coefficienten A_α die Bedingung erfüllen müssen

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \left(\pm \frac{A_\alpha^2}{p_{\alpha\lambda}}\right) = 0.$$

Wenn ferner B_1, B_2, B_3, B_5 die Coefficienten derjenigen Gleichung sind, die zwischen $\sqrt{w_1}, \sqrt{w_2}, \sqrt{w_3}$ und $\sqrt{w_5}$ besteht, so muss

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \left(\pm \frac{A_\alpha B_\alpha}{p_{\alpha\lambda}}\right) = 0$$

sein.

Die 64 Grössen P_α verhalten sich so, wie die Thetafunctionen von drei Argumenten. Denken wir uns nur P_1, P_2, P_3, P_4 gegeben, so können wir diese Reihe durch Hinzufügung von drei neuen Produkten ungerader Theta: P_μ, P_ν und P_ρ, zu einer Hauptreihe ergänzen. Verstehen wir dann unter P_5 die Function P_μ, so ist $\lambda = \nu\rho$ diejenige Permutation, die alle sechs Functionen $P_1, P_2, \ldots, P_6$ in Produkte gerader Theta überführt. Ebenso können wir aber P_ν und P_ρ für P_5 nehmen. Zur Bestimmung der Coefficienten in der Relation

$$A_1\sqrt{w_1} + \ldots + A_4\sqrt{w_4} = 0$$

haben wir demnach die drei Gleichungen:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \left(\pm \frac{A_\alpha^2}{p_{\alpha\lambda}}\right) = 0. \qquad (\lambda = \mu\nu, \mu\rho, \nu\rho)$$

Diese Gleichungen werden erfüllt, indem man

$$A_\alpha^2 = p_{\alpha\mu\nu} p_{\alpha\mu\rho} p_{\alpha\nu\rho} \text{ [1]}$$

[1] In Bezug auf die Vorzeichen gilt hier dasselbe wie in der entsprechenden Betrachtung für $\rho = 3$.

setzt; denn die Formel

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\pm\, p_{\alpha\mu\rho}\, p_{\alpha\nu\rho}) = 0$$

gehört in die Kategorie der Gleichungen

$$\Sigma(\pm\, q_\alpha) = 0.$$

Die Gleichung zwischen den vier Wurzelgrössen lautet demnach:

$$(15) \qquad \sum_{\alpha=1}^{4} (\pm \sqrt{p_{\alpha\mu\nu}\, p_{\alpha\mu\rho}\, p_{\alpha\nu\rho}\, \mathrm{w}_\alpha}) = 0.$$

Es sind dabei $\mu\nu$, $\mu\rho$ und $\nu\rho$ diejenigen drei von 1234 verschiedenen Permutationen, die gleichzeitig P_1, P_2, P_3 und P_4 in Produkte gerader Theta überführen. Vergleicht man dies mit der Formel (11) im vorigen Paragraphen, so sieht man:

Zwischen den 28 Wurzelgrössen $\sqrt{\mathrm{w}_\alpha} = \sqrt{u_\alpha\, u_{\alpha x}}$, die zu einer halben Periode x gehören, bestehn genau dieselben linearen Relationen, wie zwischen den Anfangsgliedern der 28 ungeraden Thetafunctionen von drei Variabeln; allerdings mit der Modification, dass an Stelle von c_α überall $\sqrt{p_\alpha}$ zu setzen ist.

Die Frage ist jetzt: Sind die 36 Grössen $\sqrt{p_\alpha}$ auch genau durch dieselben Gleichungen verbunden, wie die c_α für $\rho = 3$? Dass dies der Fall ist, geht ebenfalls aus unsern Betrachtungen hervor.

Denken wir uns eine Hauptreihe gewählt:

$$P_1, P_2, \ldots, P_7$$

und bezeichnen mit A die Coefficienten der Gleichung, die zwischen $\sqrt{\mathrm{w}_1}$, $\sqrt{\mathrm{w}_2}$, $\sqrt{\mathrm{w}_3}$ und $\sqrt{\mathrm{w}_4}$ besteht, mit B die der Gleichung, die besteht zwischen den drei ersten Grössen und $\sqrt{\mathrm{w}_5}$. Diese Coefficienten sind uns bekannt:

$$A_\alpha = \pm \sqrt{p_{\alpha 56}\, p_{\alpha 57}\, p_{\alpha 67}}, \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

$$B_\alpha = \pm \sqrt{p_{\alpha 46}\, p_{\alpha 47}\, p_{\alpha 67}}. \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 5)$$

Nun ist aber:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \left(\pm \frac{A_\alpha B_\alpha}{p_{\alpha 67}}\right) = 0;$$

denn 67 ist diejenige Permutation, welche die geschlossene Reihe

$$P_1, P_2, \ldots, P_5, P_{12345}$$

in Produkte gerader Theta überführt. Daher folgt:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} (\pm \sqrt{p_{\alpha 46} p_{\alpha 47} p_{\alpha 56} p_{\alpha 57}}) = 0.$$

Wenn man hier die Grössen $\sqrt{p}$ durch c ersetzt, so bekommt man eine der Relationen $\Sigma(\pm q_\alpha) = 0$, die für $\rho = 3$ bestehen. Dass hier die q_α zu der speciellen syzygetischen Gruppe $(0, 45, 67, 4567)$ gehören, ist unwesentlich; denn man kann für $\rho = 3$ die Hauptreihe $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_7$ so wählen, dass θ_4 in θ_5, und ebenso θ_6 in θ_7 durch vorgeschriebene Permutationen λ, μ übergehn, vorausgesetzt nur, dass λ, μ sich syzygetisch verhalten. Demnach können wir sagen dass für $\rho = 4$ im Riemann'schen Falle zwischen den Grössen $\sqrt{p}$ genau dieselben Relationen bestehen, wie im Falle $\rho = 3$ zwischen den c.

Lösen wir jetzt die Produkte p_α auf in $c_\alpha c_{\alpha\varkappa}$, so haben wir folgenden Satz:

Wenn G irgend eine Göpel'sche Gruppe dritter Ordnung ist, so existiren drei zugehörige Produkte

$$R_\alpha = \prod_\varkappa (\theta_{\alpha\varkappa}) \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

(erstreckt über die 8 Elemente $\varkappa$ von G), die lauter gerade Faktoren enthalten, und somit drei Constanten r_1, r_2, r_3, die Werthe der R_α für $u = 0$. Diese drei Constanten sind stets durch eine Gleichung

$$(16) \qquad \sqrt{r_1} \pm \sqrt{r_2} \pm \sqrt{r_3} = 0$$

verbunden.

Wir haben demnach ein System von so vielen Gleichungen, als verschiedene Göpel'sche Gruppen dritter Ordnung existiren, d. h.

$$(4^4 - 1)(4^3 - 1)(4^2 - 1) = 240975.$$

Sie sind nicht erfüllt bei willkürlichen Werthen der 10 Periodicitätsmoduln, stellen aber nur eine Beziehung zwischen ihnen dar, sodass eine einzige solche Gleichung mit Nothwendigkeit alle übrigen nach sich zieht.

Diese Gleichung

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm \sqrt{r_a}) = 0$$

entspricht den Gleichungen

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm q_a) = 0 \quad \text{für} \quad \rho = 3,$$

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm p_a^2) = 0 \quad \text{für} \quad \rho = 2,$$

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm c_a^4) = 0 \quad \text{für} \quad \rho = 1.$$

Wir wollen die vier Gleichungen zusammenfassen. Bezeichnen wir die vierten Potenzen der Moduln durchweg mit C_a. Es sei jetzt, bei beliebigem ρ, eine GÖPEL'sche Gruppe von der Ordnung $\rho - 1$ gegeben. Wenn wir uns dann die Produkte gebildet denken

$$\prod_{\varkappa} (\theta_{a\lambda})$$

erstreckt über die $2^{\rho-1}$ Elemente von G, so giebt es darunter genau drei, die aus lauter geraden Faktoren bestehn. Diesen entsprechen drei Constanten:

$$\pi_a = \prod (C_{a\varkappa}) \qquad (a=1,2,3)$$

und zwischen diesen drei Constanten besteht, für $\rho = 1$, $\rho = 2$, $\rho = 3$, und für $\rho = 4$ im RIEMANN'schen Falle, die Gleichung:

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm \sqrt[2^{\rho-1}]{\pi_a}) = 0.$$

Wir haben gesehen, dass zwischen den 28 Wurzelfunctionen $\sqrt{w_a}$, die zu einem bestimmten $\varkappa$ gehören, genau dieselben Relationen bestehen, wie zwischen den Anfangsgliedern der 28 ungeraden Thetafunctionen von drei Variabeln, mit dem Unterschied, dass an die Stelle von c_a überall $\sqrt{p_a}$ tritt. Aber diese 36 Grössen $\sqrt{p_a}$ genügen ebenfalls genau denselben Gleichungen wie die c_a.

Nun hatten wir für $\rho = 3$ ein System nicht linearer Gleichungen aufgestellt, repräsentirt durch die Formel

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm \sqrt{p_{a45}\, p_{a46}\, p_{a56}\, w_a}) = 0.$$

Dies sind $20 . 63$ Gleichungen, da wir einerseits die Indices $1, 2, \ldots, 6$ beliebig vertauschen können, andrerseits $\varkappa$ eine beliebige von 63 Permutationen bedeutet. Aber alle diesen Formeln stellen, wenn wir uns die linearen Beziehungen zwischen den u_a gegeben denken, im Wesentlichen nur eine hinzutretende neue Beziehung dar; eine einzige zieht alle übrigen mit Nothwendigkeit nach sich.

Stellen wir nun die entsprechende Formel auf für $\rho = 4$. Wir wählen eine Permutation λ, die zu $\varkappa$ syzygetisch ist, und setzen

$$p_a = c_a c_{a\varkappa},$$

$$q_a = p_a p_{a\lambda} = c_a c_{a\varkappa} c_{a\lambda} c_{a\varkappa\lambda}.$$

Entsprechend:

$$\mathrm{w}_a = u_a u_{a\varkappa},$$

$$x_a = \mathrm{w}_a \mathrm{w}_{a\lambda} = u_a u_{a\varkappa} u_{a\lambda} u_{a\varkappa\lambda}.$$

Zur Gruppe $(0, \varkappa, \lambda, \varkappa\lambda)$ gehören 16 Produkte gleichartiger Theta, wovon 6 lauter ungerade, 10 lauter gerade Theta enthalten. Die 6 ersteren mögen durch $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6$ bezeichnet werden. Wenn wir dann die Gleichung aufstellen:

$$(17) \qquad \sum_{a=1}^{3} \left(\pm \sqrt[4]{q_{a45}\, q_{a46}\, q_{a56}\, x_a}\right) = 0,$$

und damit zugleich alle die ins Auge fassen, die aus ihr entstehen ein mal durch Vertauschung der Indices $1, 2, \ldots, 6$, zweitens dadurch, dass wir zwar $\varkappa$ festhalten, aber λ variiren, dann können wir sagen, dass eine dieser Gleichungen alle übrigen nach sich zieht. Da nun der Ausdruck links völlig symmetrisch von $\varkappa$ und λ abhängt, so muss für die Variation von $\varkappa$ dasselbe gelten. Wenn wir demnach das Gleichungssystem (17) gelten lassen für jede Göpel'sche Gruppe $(0, \varkappa, \lambda, \varkappa\lambda)$, so tritt damit zu den beiden Gleichungen zwischen den Variabeln u, u', u'', u''', die durch die Relationen zwischen den Wurzelfunctionen definirt werden, nur eine neue Gleichung hinzu. Allerdings sind die u_a dann nicht mehr lineare Functionen von vier unabhängigen Grössen, und auch nicht mehr algebraische Functionen einer Veränderlichen, sondern Constanten. Wir haben damit auch jedem ungeraden Theta eine bestimmte Constante, u_a, zugeordnet.

Bezeichnen wir diese constanten Grössen der Gleichmässigkeit wegen ebenfalls mit c_a, so nimmt die Gleichung (17) die Form an:

$$\sum_{a=1}^{3} \left(\pm \sqrt[4]{q_a\, q_{a45}\, q_{a46}\, q_{a56}}\right) = 0.$$

Da jedes q ein Produkt von vier Grössen c ist, so haben wir hier eine Relation von der Gestalt

$$\sqrt[4]{s_1} \pm \sqrt[4]{s_2} \pm \sqrt[4]{s_3} = 0.$$

Die drei s sind Produkte von je 16 Faktoren, die zu einer und derselben Gruppe mit der Basis

$$(\varkappa\,, \lambda\,, 45\,, 46)$$

gehören. Diese Gruppe ist nicht rein syzygetisch, da die Permutationen 45, 46 sich azygetisch verhalten.

Die Anzahl dieser Gleichungen beträgt:

$$(4^4 - 1)(4^3 - 1)\,.\,20 = 321300.$$

§ 5.

Ehe wir zur Auflösung der Modulgleichungen übergehen, wollen wir einen Satz aufstellen, aus dem sich die Möglichkeit einer vereinfachenden Transformation ergiebt.

Wenn wir irgend eine der Thetafunctionen ins Auge fassen, so lassen sich die Permutationen scheiden in solche, die den Charakter der Function ändern, und solche, die ihn nicht ändern; von den ersteren sagen wir, dass sie kritisch sind für das betreffende Theta. Hiernach giebt es für jede ungerade Thetafunction von ρ Argumenten

$$\frac{1}{2}(4^\rho + 2^\rho),$$

für jede gerade

$$\frac{1}{2}(4^\rho - 2^\rho)$$

kritische Permutationen.

Es sei nun G eine beliebige Gruppe. Wir bilden das Produkt

$$P_a = \prod_\varkappa (\theta_{a\varkappa})$$

erstreckt über alle Elemente von G. Durch eine Permutation ω geht P_a über in

$$P_{a\omega} = \prod_\varkappa (\theta_{a\varkappa\omega}).$$

Wenn ω sich syzygetisch verhält zur ganzen Gruppe G, so ist ω kritisch für alle Faktoren von P_a oder für keinen. Denn der Quotient

$$\frac{\theta_{a\varkappa}\theta_{a\omega}}{\theta_a\theta_{a\varkappa\omega}} = \varphi$$

ist dann eine gerade Function; wenn also θ_a und $\theta_{a\omega}$ entgegengesetzten Charakter haben, so muss von $\theta_{a\varkappa}$ und $\theta_{a\varkappa\omega}$ dasselbe gelten.

Wenn sich aber ω nicht zu allen Elementen von G syzygetisch verhält, so ist ω kritisch genau für die Hälfte der Faktoren von P_a. Denn angenommen, $\varkappa$ sei ein Element von G, das sich zu ω azygetisch verhält. Alsdann ist der Quotient φ eine ungerade Function. Daraus folgt, dass ω kritisch ist für einen der beiden Faktoren θ_a, $\theta_{a\varkappa}$, für den andern nicht, und dasselbe gilt offenbar für je zwei Faktoren von P_a, die durch die Permutation $\varkappa$ in einander übergeführt werden.

Davon machen wir folgende Anwendung. Es sei ein System von 4^ρ Grössen C gegeben, die den einzelnen Thetafunctionen zugeordnet sind. Mit diesen setzen wir in Verbindung ein zweites System von $4^\rho - 1$ Grössen e, die den einzelnen Permutationen entsprechen, und einen Faktor r, indem wir setzen

$$C_m = r \prod_\mu (e_\mu).$$

Das Produkt soll erstreckt werden über alle Permutationen μ, die für θ_m kritisch sind. Wir haben so ein System von 4^ρ Gleichungen; die Faktoren e sind nicht rational durch die C bestimmt. Wenn wir uns aber nicht nur die C, sondern auch die Werthe ihrer Logarithmen gegeben denken, so können wir das Gleichungssystem durch ein lineares zwischen den Logarithmen ersetzen und auf diese Weise die e eindeutig bestimmen.

Bilden wir jetzt das Produkt

$$\pi_m = \prod_\varkappa (C_{m\varkappa})$$

erstreckt über die Elemente x einer Gruppe n^{ter} Ordnung, und denken uns für jedes C_{mx} seinen Ausdruck eingesetzt. π_m wird dann zunächst den Faktor r in der 2^nten Potenz enthalten. Wenn ferner μ eine Permutation ist, die nicht zur ganzen Gruppe syzygetisch ist, so ist μ genau für die Hälfte der 2^n Functionen θ_{mx} kritisch; infolge dessen wird der Faktor e_μ 2^{n-1} mal in π_m vorkommen. Ist endlich μ syzygetisch für die ganze Gruppe, so ist μ kritisch für alle Functionen θ_{mx} oder für keine: im ersten Fall kommt e_μ vor in der Potenz 2^n, im zweiten gar nicht. Das Resultat ist demnach:

$$\pi_m = r^{2^n}\left[\Pi(e_\nu)\right]^{2^{n-1}}\left[\Pi(e_\mu)\right]^{2^n},$$

wo das eine Produkt sich erstreckt über alle Permutationen ν, die nicht zur ganzen Gruppe syzygetisch sind, das andre über die Permutationen μ, die zu allen 2^n Functionen θ_{mx} kritisch sind.

Indem wir

$$r\sqrt{\Pi(e)} = R$$

setzen, können wir das Resultat so darstellen:

$$\sqrt[2^n]{\pi_m} = R\,\Pi(e_\mu).$$

Der Faktor R hängt zwar ab von der Wahl der Gruppe, aber nicht von dem speciellen Index m; er fällt also fort bei homogenen Relationen zwischen den π_m, die zu derselben Gruppe gehört. Das Produkt $\Pi(e_\mu)$ enthält um so weniger Faktoren, je grösser die Ordnung der Gruppe ist.

Damit ist zugleich die Auflösung des Gleichungssystems gewonnen. Es sei e_μ irgend einer der Faktoren e. Wir wählen zunächst zwei Functionen θ_m, θ_n in der Weise, dass μ kritisch ist für θ_m, nicht kritisch für θ_n. Dann bilden wir die Produkte:

$$\pi_m = \Pi(C_{mx}), \qquad \pi_n = \Pi(C_{nx}),$$

erstreckt über die Gruppe derjenigen Permutationen x, die zu μ syzygetisch sind. Diese Gruppe ist von der Ordnung $2\rho - 1$. Kritisch für sämmtliche Functionen θ_{mx} oder sämmtliche θ_{nx} kann nur eine Permutation sein, die zur ganzen Gruppe syzygetisch ist, also nur μ; nun ist μ kritisch für θ_m, aber nicht für θ_n; folglich erhalten wir:

$$\sqrt[2^{2\rho-1}]{\pi_m} = \rho e_\mu, \qquad \sqrt[2^{2\rho-1}]{\pi_n} = \rho,$$

oder:

$$e_\mu = \sqrt[2^{2p-1}]{\frac{\pi_m}{\pi_n}}.$$

§ 6.

Wir wollen die elliptischen Functionen nicht übergehen. Unter c_1, c_2, c_3 verstehen wir wie früher die Anfangswerthe der geraden Theta; der ungeraden Function θ ordnen wir gleichfalls eine Constante c zu, die willkürlich gewählt sein kann. Die Faktoren e_a definiren wir dann durch die Gleichungen:

$$c_1^4 = re_{23}, \qquad c_2^4 = re_{31}, \qquad c_3^4 = re_{12},$$
$$c^4 = re_{12}\, e_{13}\, e_{23}.$$

In der letzten Formel kommen drei Faktoren e vor, weil für das ungerade Theta alle drei Permutationen kritisch sind.

Die Gleichung $c_1^4 \pm c_2^4 \pm c_3^4 = 0$ geht dadurch über in

$$e_{23} \pm e_{31} \pm e_{12} = 0.$$

Dies zeigt, dass man für die e_μ substituiren kann die Differenzen dreier Werthe e_1, e_2, e_3:

$$e_{12} = \pm (e_1 - e_2), \quad \text{etc.}$$

e_1, e_2, e_3 selbst dürfen als unabhängige Werthe angesehen werden.

Sondert man von den Thetafunctionen die Constanten c ab, indem man

$$\theta_a = c_a \cdot \sigma_a, \qquad \theta = c \,.\, \sigma$$

setzt, so nehmen die Relationen zwischen den Quadraten der σ die einfache Form an:

$$(e_2 - e_3)\sigma_1^2 + (e_3 - e_1)\sigma_2^2 + (e_1 - e_2)\sigma_3^2 = 0,$$
$$\sigma_a^2 - \sigma_\beta^2 + (e_a - e_\beta)\sigma^2 = 0.$$

Schärfer treten diese Verhältnisse hervor im Falle $p = 2$. Zehn Constanten, die Anfangswerthe der geraden Theta, sind unmittelbar gegeben; den sechs ungeraden Functionen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_6$ ordnen wir ebenfalls bestimmte Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_6$ zu, und zwar sollen dies die Werthe der linearen Anfangsglieder sein für irgend welche beliebig gewählte constante Werthe u_0, u'_0 der beiden Variabeln u, u'.

Wir haben dann ein System von 16 Constanten c; diese sind durch ein System von 20 Gleichungen verbunden, das repräsentirt wird durch die Formel:

$$\sum_{\alpha=1}^{3}(\pm\, c_\alpha c_{\alpha 45} c_{\alpha 46} c_{\alpha 56}) = 0.$$

Diesen 16 Constanten c stellen wir 15 Faktoren e_μ gegenüber, die den 15 Permutationen 12, 13, ..., 56 entsprechen, indem wir allgemein setzen:

$$c_m^4 = r\Pi(e_\mu),$$

wobei das Produkt zu erstrecken ist über die für θ_m kritischen Permutationen. Danach ist z. B.

$$c_1^4 = re_{23} e_{24} \ldots e_{56},$$

$$c_{123}^4 = c_{456}^4 = re_{12} e_{13} e_{23} e_{45} e_{46} e_{56}.$$

Dadurch verwandelt sich die Gleichung zwischen den c in die viel einfachere:

$$e_{23} \pm e_{31} \pm e_{12} = 0.$$

Denn 23 ist offenbar die einzige Permutation, welche für die vier Faktoren des Produkts

$$\theta_1 \theta_{145} \theta_{146} \theta_{156}$$

kritisch ist.

Die Bedeutung der Relation zwischen den $e_{\alpha\beta}$ ist ohne weiteres klar: sie sagt aus, dass die $e_{\alpha\beta}$ nichts andres sind als die 15 Differenzen von sechs Grössen $e_1, e_2, \ldots, e_6$:

$$e_{\alpha\beta} = \pm(e_\alpha - e_\beta).$$

Es ist bekannt dass sich auch hier die Thetarelationen sehr vereinfachen, wenn man von den einzelnen Functionen die entsprechenden Faktoren c absondert. Setzen wir allgemein

$$\theta_m = c_m \,.\, \sigma_m.$$

Die Gleichung zwischen vier ungeraden Theta:

$$\sum_{\alpha=1}^{4}(\pm\, c_{\alpha 56}^2 \theta_\alpha^2) = 0$$

geht über in

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\pm c_{\alpha 56}^2 c_\alpha^2 \sigma_\alpha^2) = 0$$

oder:

$$e_{23} e_{24} e_{34} \sigma_1^2 \pm \ldots \pm e_{12} e_{13} e_{23} \sigma_4^2 = 0,$$

da $23, 24, 34$ und 56 die einzigen Permutationen sind, die gleichzeitig für θ_{156} und θ_1 kritisch sind.

In ähnlicher Weise geht die Gleichung:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} (\pm c_{\alpha 45} c_{\alpha 46} \theta_{\alpha 56} \theta_\alpha) = 0$$

über in:

$$e_{23} \sigma_1 \sigma_{156} \pm e_{31} \sigma_2 \sigma_{256} \pm e_{12} \sigma_3 \sigma_{356} = 0;$$

denn kritisch für die vier Functionen

$$\theta_{145}, \theta_{146}, \theta_{156}, \theta_1$$

ist nur die Permutation 23.

Endlich geht die Gleichung zwischen vier geraden und zwei ungeraden Functionen:

$$c_{145} c_{146} \theta_{245} \theta_{246} - c_{245} c_{246} \theta_{145} \theta_{146} = \pm c_{345} c_{346} \theta_5 \theta_6$$

über in:

$$\sigma_{245} \sigma_{246} - \sigma_{145} \sigma_{146} = \pm e_{12} e_{34} \sigma_5 \sigma_6,$$

wie ebenfalls ohne jede Rechnung zu erkennen ist.

Für $\rho = 3$ tritt die Schwierigkeit ein, dass man zunächst im Zweifel ist, welches System von Constanten man den ungeraden Theta zuordnen soll. Wir beschränken uns zunächst auf die Relationen zwischen den Anfangswerthen der geraden Theta.

Legen wir eine Hauptreihe

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_7$$

der Bezeichnung zu Grunde. Wir müssen dann eigentlich die übrigen Theta bezeichnen durch die Combinationen dritter, fünfter und siebenter Ordnung der Zahlen $1, 2, \ldots, 7$. Statt dessen lassen wir die Thetafunction, die eigentlich der Combination aller sieben Zahlen entspricht, ohne

Index und ersetzen jede Combination von höherer als der dritten Ordnung durch die complementäre. Es sind dann $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_7, \theta_{12} \ldots \theta_{67}$ die 28 ungeraden Functionen; die übrigen: $\theta_{123} \ldots \theta_{567}$ und θ sind gerade. Die Indices der Theta können wir auch zur Bezeichnung der Permutationen verwenden; die Permutation m ist diejenige, welche θ in θ_m überführt.

Die Relationen zwischen den 36 Grössen c sind gegeben durch den Satz: Zu jeder Göpel'schen Gruppe $(0, \varkappa, \lambda, \varkappa\lambda)$ gehören drei Produkte

$$\theta_a \theta_{a\varkappa} \theta_{a\lambda} \theta_{a\varkappa\lambda},$$

die aus lauter geraden Faktoren bestehen; die Werthe dieser Produkte für $u = 0$ genügen der Gleichung:

$$\Sigma(\pm q_a) = 0.$$

Nehmen wir speciell die Gruppe $(0, 56, 7, 567)$. Die drei Constanten q sind hier:

$$c_{145}\, c_{146}\, c_{235}\, c_{236},$$

$$c_{245}\, c_{246}\, c_{315} c_{316},$$

$$c_{345}\, c_{346}\, c_{125}\, c_{126}.$$

Die Summe dieser Produkte ist also gleich 0. Wir können der Gleichung eine einfachere Form geben, nämlich:

$$D_{237} D_{147} \pm D_{317} D_{247} \pm D_{127} D_{347} = 0,$$

wenn wir die Bezeichnung:

$$C_{\alpha\beta\gamma} C_{\alpha\beta\delta} C_{\alpha\gamma\delta} C_{\beta\gamma\delta} = D_{\varkappa\lambda\mu}$$

einführen; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sollen hierbei irgend vier der Zahlen $1, 2, \ldots, 7$ bedeuten, $\varkappa, \lambda, \mu$ die drei übrigen.

Die Gleichung zwischen den Grössen D sagt offenbar aus, dass sie sich als Determinanten darstellen lassen müssen. Wir können sieben Werthsysteme (A_a, B_a, C_a) aufstellen, sodass allgemein:

$$D_{\varkappa\lambda\mu} = \begin{vmatrix} A_\varkappa & B_\varkappa & C_\varkappa \\ A_\lambda & B_\lambda & C_\lambda \\ A_\mu & B_\mu & C_\mu \end{vmatrix}$$

ist. Damit wir es nur mit unabhängigen Grössen zu thun haben, sondern wir von jedem Werthsystem $(A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha)$ einen Faktor l_α ab und schreiben demnach:

$$D_{\varkappa\lambda\mu} = \pm l_\varkappa l_\lambda l_\lambda \begin{vmatrix} a_\varkappa & b_\varkappa & c_\varkappa \\ a_\lambda & b_\lambda & c_\lambda \\ a_\mu & b_\mu & c_\alpha \end{vmatrix}.$$

Wir stellen uns die Aufgabe, sämmtliche Grössen c auszudrücken als Functionen der Werthsysteme (a, b, c), die wir als homogene Coordinaten von sieben Punkten der Ebene auffassen können.

Die Determinante

$$\pm \begin{vmatrix} a_\varkappa & b_\varkappa & c_\varkappa \\ a_\lambda & b_\lambda & c_\lambda \\ a_\mu & b_\mu & c_\mu \end{vmatrix}$$

bezeichnen wir mit $f_{\varkappa\lambda\mu}$, sodass

$$c_{\alpha\beta\gamma} c_{\alpha\beta\delta} c_{\alpha\gamma\delta} c_{\beta\gamma\delta} = l_\varkappa l_\lambda l_\mu f_{\varkappa\lambda\mu}$$

ist. Wir stellen zunächst eine Gleichung auf, bei der die Faktoren l eliminirt sind:

$$\frac{c_{145} c_{146} c_{235} c_{236}}{c_{245} c_{246} c_{135} c_{136}} = \frac{f_{147} f_{237}}{f_{247} f_{137}}.$$

Berücksichtigt man, dass die Zahlen $1, 2, \ldots, 7$ beliebig unter einander vertauscht werden können, so ist damit ein Gleichungssystem gegeben zur Bestimmung der Grössen c. Allerdings sind die c dadurch allein noch nicht völlig bestimmt. Wenn wir allgemein

$$c_{\alpha\beta\gamma} \quad \text{durch} \quad r_\alpha r_\beta r_\gamma c_{\alpha\beta\gamma}$$

ersetzen, wo $r_1, r_2, \ldots, r_7$ beliebig gewählte Faktoren bedeuten, so bleiben die Gleichungen bestehn. Dies ist aber die einzige Unbestimmtheit, welche übrig bleibt.

Die Lösung des Gleichungssystems liegt nahe, wenn man die Indices der Grössen C und f berücksichtigt, die auf beiden Seiten vorkommen. 147 und 237 sind Permutationen, welche kritisch sind für die Faktoren des Produkts

$$\theta_{145} \theta_{146} \theta_{235} \theta_{236}.$$

Dasselbe kann man sagen von den Permutationen 14 und 23, aber von keiner andern. Daraus allein folgt, dass die Gleichungen erfüllt werden, wenn man setzt:

$$C_m^4 = r\Pi(e_\mu),$$

das Produkt erstreckt über die für θ_m kritischen Permutationen μ, und dabei unter e_μ den Ausdruck $f_{\alpha\beta\gamma}$ versteht wenn μ eine dreigliedrige Combination $\alpha\beta\gamma$ ist, dagegen den Werth 1, wenn μ ein zweigliedriger Index $\alpha\beta$ ist. Die Werthe der e mit eingliedrigem Index: $e_1, e_2, \ldots, e_7$, sind vorläufig willkürlich. Darin ist die allgemeine Lösung des Gleichungssystem enthalten, und es bleiben nur $e_1, e_2, \ldots, e_7$ als Functionen der Werthsysteme a, b, c zu bestimmen.

Wir können die Gleichung

$$c_m^4 = r\Pi(e_\mu)$$

auch gelten lassen für den Anfangswerth c der Function ohne Index, da wir die Grössen $e_1, e_2, \ldots, e_7$ noch mit einem Faktor multipliciren können. Sie lautet für diesen Fall offenbar:

$$c^4 = r \,.\, e_1 e_2 \ldots e_7 \,.$$

Fassen wir jetzt allgemein die Gleichung

$$\sum_{a=1}^{3} (\pm q_a) = 0$$

ins Auge, die zu einer beliebigen GÖPEL'schen Gruppe $(0, \varkappa, \lambda, \varkappa\lambda)$ gehört. Die drei Grössen q_1, q_2, q_3 entsprechen drei Produkten gerader Theta: Q_1, Q_2, Q_3. Zu derselben Gruppe gehört noch ein Produkt ungerader Theta: dieses ist Q_{123}. Kritisch für die Faktoren von Q_1 sind nur diejenigen Permutationen, die Q_1 in Q_{123}, oder, was dasselbe ist, die Q_2 in Q_3 überführen. Die Gleichung erhält demnach durch Einführung der Faktoren e die Gestalt:

$$A \pm B \pm C = 0,$$

wo A, B, C Produkte von je vier Grössen e sind. Eine Vereinfachung tritt insofern ein, als ein Theil der Faktoren e den Werth 1 hat.

Nehmen wir jetzt die specielle Gruppe:

$$(0, 45, 67, 123).$$

Die zugehörigen Produkte gerader Theta sind:

$$\theta_{\alpha 46}\,\theta_{\alpha 56}\,\theta_{\alpha 47}\,\theta_{\alpha 57}. \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

Die Permutationen die das zweite Produkt in das dritte überfahren sind:

$$23\,,\ 2345 = 167\,,\ 2367 = 145\,,\ 1.$$

Da $e_{23} = 1$ ist, so erhalten wir:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} (\pm\, e_\alpha f_{\alpha 45} f_{\alpha 67}) = 0.$$

Nehmen wir ferner die Gruppe:

$$(0\,,\ 127\,,\ 347\,,\ 567),$$

oder:

$$(0\,,\ 3456\,,\ 1256\,,\ 1234).$$

Die drei Functionen Q sind:

$$\theta_{135}\theta_{146}\theta_{236}\theta_{245},$$
$$\theta_{235}\theta_{246}\theta_{136}\theta_{145},$$
$$\theta\quad \theta_{127}\theta_{347}\theta_{567}.$$

Damit sind auch ohne weiteres die Permutationen gegeben, welche die drei Produkte in einander überführen. Wenn wir berücksichtigen, dass e_{12}, e_{34} und e_{56} gleich 1 sind, so können wir die Formel hinschreiben:

$$\pm\, f_{135}f_{146}f_{236}f_{245} \pm f_{235}f_{246}f_{136}f_{145} = e_7,$$

oder:

$$e_7 = \pm \begin{vmatrix} f_{135}f_{146} & f_{136}f_{145} \\ f_{235}f_{246} & f_{236}f_{245} \end{vmatrix}.$$

Diese Gleichung definirt die Faktoren $e_1, e_2, \ldots, e_7$ als Functionen der Werthsysteme (a, b, c); offenbar ist e_α diejenige quadratische Determinante, welche verschwindet, wenn die sechs von (α) verschiedenen Punkte auf einem Kegelschnitt liegen.

Damit sind jetzt die Grössen c und $c_{\alpha\beta\gamma}$ dargestellt als Functionen unabhängiger Parameter. Abgesehen vom Faktor r, sind die vierten Potenzen der c ganze homogene Functionen der sieben Werthsysteme a_α, b_α, c_α.

Ordnen wir jetzt auch jeder ungeraden Function θ_m eine Constante c_m zu, indem wir die Formel

$$c_m^4 = r\,\Pi(e_\mu)$$

auch für diesen Fall gelten lassen. Wenn wir an Stelle der Theta wieder σ-Functionen einführen, indem wir setzen

$$\theta_m = c_m \sigma_m,$$

so treten in den σ-Relationen nur die Faktoren $f_{\alpha\beta\gamma}$ und e_α als Coefficienten auf. Wir wollen uns aber darauf beschränken, die Relationen zwischen den Anfangsgliedern der ungeraden Sigma, und die zwischen den Wurzelfunctionen aufzustellen.

Zwischen den Anfangsgliedern von vier ungeraden Theta hatten wir die Gleichung aufgestellt:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\pm\, c_{\alpha 56}\, c_{\alpha 57}\, c_{\alpha 67}\, u_\alpha) = 0.$$

Voraussetzung war dabei, dass $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ eine azygetische Reihe bilden, und dass $\theta_5, \theta_6, \theta_7$ diese Reihe ergänzen. Wir setzen

$$u_\alpha = c_\alpha . v_\alpha,$$

sodass jetzt v_α das Anfangsglied einer Sigmafunction ist. Um die entsprechende Gleichung zwischen v_1, v_2, v_3, v_4 in ihrer reducirten Form darzustellen, handelt es sich nur darum, die kritischen Permutationen der Produkte

$$\theta_1 \theta_{156} \theta_{157} \theta_{167}, \quad \text{etc.}$$

festzustellen. Kritisch für das hingeschriebne Produkt sind nur diese:

$$1,\ 23,\ 24,\ 34,\ 234 \quad \text{und} \quad 567.$$

Da wir den Faktor e_{567} fortlassen können, so erhalten wir als Coefficienten von v_1:

$$e_1\, e_{23}\, e_{24}\, e_{34}\, e_{234}.$$

Entsprechende Werthe haben die Coefficienten von v_2, v_3, v_4. Es bleibt nur noch die Bedeutung der einzelnen Indices festzustellen.

23, 24 und 34 sind die Permutationen die die drei Functionen θ_2, θ_3, θ_4 in einander überführen. 1 und 234 sind diejenigen, welche θ_1 in

θ und in θ_{567} überführen. In welcher Beziehung stehen θ und θ_{567} zu der Reihe $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$? Es sind dies die einzigen geraden Functionen, die der Reihe hinzugefügt werden können, ohne dass sie ihren azygetischen Charakter verliert, und sie ergänzen die Reihe zu einer geschlossenen. Demnach können wir sagen:

Um die Relation zwischen den Anfangsgliedern von vier ungeraden Sigmafunctionen: $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma, \sigma_\delta$, die eine azygetische Reihe bilden, aufzustellen, ergänze man diese Reihe zu einer geschlossenen durch Hinzufügung zweier geraden Functionen $\sigma_\varkappa, \sigma_\lambda$. Die gesuchte Relation lautet alsdann:

$$e_{\beta\gamma} e_{\beta\delta} e_{\gamma\delta} e_{\alpha\varkappa} e_{\alpha\lambda} v_\alpha \pm \ldots \pm e_{\alpha\beta} e_{\alpha\gamma} e_{\beta\gamma} e_{\delta\varkappa} e_{\delta\lambda} v_\delta = 0.$$

Es ist bei dieser Formel durchaus nicht nöthig, dass die vier Functionen der Hauptreihe angehören. Wenn dies aber der Fall ist, so vereinfacht sie sich bedeutend. Die Faktoren $e_{\alpha\beta}, e_{\alpha\gamma}, \ldots, e_{\gamma\delta}$ erhalten den Werth 1. Ferner sind θ und $\theta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ die beiden Functionen $\theta_\varkappa$ und θ_λ. Wir erhalten daher in diesem Falle:

$$e_\alpha f_{\beta\gamma\delta} v_\alpha \pm \ldots \pm e_\delta f_{\alpha\beta\gamma} v_\delta = 0.$$

Diese Gleichung sagt folgendes aus:

Durch eine lineare Transformation der Variabeln u, u', u'' kann man bewirken, dass

$$e_\alpha v_\alpha = a_\alpha u + b_\alpha u' + c_\alpha u'' \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 7)$$

wird.

Nehmen wir statt $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ die folgende Reihe

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3 \quad \text{und} \quad \theta_{45}.$$

In diesem Falle sind θ_{456} und θ_{457} die beiden geraden Functionen, durch welche die Reihe ergänzt werden kann. Demnach ergiebt sich:

$$e_6 e_7 v_{45} = \pm f_{236} f_{237} f_{245} f_{345} v_1 \pm \ldots \pm f_{126} f_{127} f_{145} f_{245} v_3.$$

Aus diesen Formeln geht die Richtigkeit unsrer früheren Behauptung deutlich hervor, dass die azygetischen Relationen zwischen den 28 Anfangsgliedern ausreichen, um alle durch drei unter ihnen auszudrücken.

Viel einfacher gestalten sich die Relationen zwischen den Wurzelfunctionen. Wir hatten diese zunächst so dargestellt: Zu jedem $\varkappa$ gehören sechs Wurzelfunctionen $\sqrt{w_\alpha} = \sqrt{u_\alpha u_{\alpha x}}$; je drei unter ihnen sind durch eine Gleichung:

$$A_\alpha \sqrt{w_\alpha} + A_\beta \sqrt{w_\beta} + A_\gamma \sqrt{w_\gamma} = 0$$

verbunden, und die Coefficienten haben die Werthe:

$$A_\alpha = \pm \sqrt{p_{\alpha\lambda\mu}\, p_{\alpha\lambda\nu}\, p_{\alpha\mu\nu}}, \quad \text{etc.,}$$

wenn λ, μ, ν die Indices der drei übrigen Wurzelfunctionen sind.

Ersetzt man u_α durch $c_\alpha v_\alpha$, so tritt zu A_α noch der Faktor $\sqrt{p_\alpha} = \sqrt{c_\alpha c_{\alpha x}}$ hinzu. Die Gleichung nimmt dann die Form an:

$$\sqrt{r_\alpha v_\alpha v_{\alpha x}} \pm \sqrt{r_\beta v_\beta v_{\beta x}} \pm \sqrt{r_\gamma v_\gamma v_{\gamma x}} = 0,$$

wo die r Produkte bedeuten aus je 8 Grössen c, gehörig zu der Gruppe mit der Basis $(x, \lambda\mu, \lambda\nu)$.

Jetzt ist es leicht, die Coefficienten durch die Grössen e auszudrücken. Kritisch für die Faktoren von r_α sind nur die Permutationen, die $\theta_\beta \theta_{\beta x}$ in $\theta_\gamma \theta_{\gamma x}$ überführen, also $\beta\gamma$ und $\beta\gamma x$. Daher ergiebt sich:

$$e_{\beta\gamma} e_{\beta\gamma x} \sqrt{v_\alpha v_{\alpha x}} \pm \ldots \pm e_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta x} \sqrt{v_\gamma v_{\gamma x}} = 0.$$

Speciell werden diese Relationen zum Theil äusserst einfach. Nehmen wir z. B. die drei Wurzelfunctionen

$$\sqrt{v_{14} v_{23}}, \quad \sqrt{v_{24} v_{31}}, \quad \sqrt{v_{34} v_{12}},$$

die zu $x = 1234$ gehören. Hier sind alle Coefficienten gleich ± 1. Denn es geht z. B. die zweite in die dritte über durch die Permutationen 23 und 14; es ist aber $e_{23} = e_{14} = 1$.

Ähnlich sind in der Gleichung zwischen

$$\sqrt{v_1 v_{23}}, \quad \sqrt{v_2 v_{31}}, \quad \sqrt{v_3 v_{12}}$$

die Coefficienten einfach: e_1, e_2 und e_3. Denn die zweite geht in die dritte über durch die Permutation 1 und 23.

Zwischen

$$\sqrt{v_1 v_{17}}, \quad \sqrt{v_2 v_{27}}, \quad \sqrt{v_3 v_{37}}$$

besteht die Gleichung:

$$f_{237} \sqrt{v_1 v_{17}} \pm f_{317} \sqrt{v_2 v_{27}} \pm f_{127} \sqrt{v_3 v_{37}} = 0.$$

Endlich: zwischen den Wurzelgrössen, die $\varkappa = 1234$ gehören:

$$\sqrt{v_{13}v_{24}}\,,\quad \sqrt{v_{23}v_{14}}\,,\quad \sqrt{v_5 v_{67}}$$

können wir die Relation aufstellen:

$$\pm f_{235} f_{145} \sqrt{v_{13} v_{24}} \pm f_{135} f_{245} \sqrt{v_{23} v_{14}} = \sqrt{v_5 v_{67}}\,.$$

Denn die zweite geht in die dritte über durch die Permutationen 235 und 145, die erste aber in die zweite durch die Permutationen 12 und 34; es sind aber e_{12} und e_{34} gleich 1.

An die beiden letzten Formeln knüpft sich die Bemerkung, dass man die Grössen $\sqrt{u_\alpha}$ oder $\sqrt{v_\alpha}$ selbst in ähnlicher Weise darstellen kann, wie die Constanten c_α. Indem man

$$v_1 v_2 \ldots v_7 = \pi,$$

$$\sqrt{v_\alpha v_\beta v_{\alpha\beta}} = F_{\alpha\beta},$$

$$\sqrt{\frac{\pi v_{\alpha\beta}}{v_\alpha v_\beta}} = G_{\alpha\beta},$$

$$\sqrt{\pi}\, v_\alpha = H_\alpha$$

setzt, kann man die erste Gleichung so schreiben:

$$f_{237} F_{17} \pm f_{317} F_{27} \pm f_{127} F_{37} = 0,$$

die zweite aber in die beiden Formen setzen:

$$G_{67} = \pm \begin{vmatrix} F_{13} F_{24} & F_{23} F_{14} \\ f_{135} f_{245} & f_{235} f_{145} \end{vmatrix},$$

$$H_5 F_{67} = \pm \begin{vmatrix} G_{13} G_{24} & G_{23} G_{14} \\ f_{135} f_{245} & f_{235} f_{145} \end{vmatrix}.$$

Die erste Gleichung zeigt, dass man:

$$F_{\alpha\beta} = \pm \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha \\ a_\beta & b_\beta & c_\beta \end{vmatrix}$$

setzen kann, wonach $F_{\alpha\beta}$ ausgedrückt ist als lineare Function von drei Grössen x, y, z. $F_{\alpha\beta} = 0$ ist die Bedingung, dass der Punkt x, y, z auf der Geraden liegt, die durch (α) und (β) hindurchgeht.

Die zweite sagt aus, dass $G_{\alpha\beta}$ diejenige quadratische Function von x, y, z ist, welche in allen sieben Punkten ausser (α) und (β) verschwindet. Die dritte endlich definirt H_α als kubische Function, die in allen sieben Punkten verschwindet, und zwar im Punkte (α) von der zweiten Ordnung.

x, y, z sind selbst durch eine Gleichung sechsten Grades $L = 0$ verbunden. Diese kann man in sehr vielen Formen darstellen, z. B.:

$$F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} G_{\alpha\gamma} G_{\beta\delta} - F_{\alpha\gamma} F_{\beta\delta} G_{\alpha\beta} G_{\gamma\delta} = 0.$$

Dies ergiebt sich unmittelbar, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{F_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}} = \frac{v_\alpha v_\beta}{\sqrt{\pi}}$$

ist. Es ist leicht zu sehen, dass diese verschiedenen Gleichungen auf die eine geometrische Bedingung hinaus kommen: Die Curve $L = 0$ ist der geometrische Ort der Doppelpunkte aller Curven dritten Grades, die durch sieben feste Punkte hindurchgehn und einen Doppelpunkt besitzen.

Für $\rho = 4$ sind analoge Resultate noch nicht bekannt, ausser in dem speciellen Falle, wo eins der c gleich 0 ist.

§ 7.

Wir versuchen jetzt auch bei den Abel'schen Functionen von vier Variabeln die 136 Constanten c in Beziehung zu setzen mit einem Punktsystem der Geometrie. Den allgemeinen Fall, wo 10 unabhängige Parameter vorhanden sind, müssen wir allerdings beiseite lassen; es handelt sich nur um den Riemann'schen Specialfall, der durch die Gleichung

$$\sqrt{r_1} \pm \sqrt{r_2} \pm \sqrt{r_3} = 0$$

charakterisirt ist. Wir gehen aber nicht von diesem Gleichungssystem aus, sondern von dem, das am Schluss von § 4 aufgestellt war:

$$\sqrt[4]{s_1} \pm \sqrt[4]{s_2} \pm \sqrt[4]{s_3} = 0.$$

Zu jeder GÖPEL'schen Gruppe zweiter Ordnung gehörten 20 solche Gleichungen. Wenn man zunächst die Reihe der Functionen Q aufstellt:

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_6,$$

die Produkte ungerader Theta sind, so sind

$$Q_{123} = Q_{456}, \qquad Q_{124} = Q_{356}, \quad \text{etc.}$$

die 10 Produkte gerader Theta, die zu der gegebenen Gruppe gehören. Jeder der 256 Functionen θ entspricht eine bestimmte Constante c, jeder Function Q somit ein constanter Werth q, und die 20 Gleichungen, welche zwischen den 16 Constanten

$$q_1, q_2, \ldots, q_6, q_{123} \quad \text{etc.}$$

bestehen, können durch die eine Formel

$$\sum_{\alpha=1}^{3} (\pm \sqrt[4]{q_\alpha q_{\alpha 45} q_{\alpha 46} q_{\alpha 56}}) = 0$$

repräsentirt werden.

Da hier jedem Theta eine bestimmte Constante zugeordnet ist, so können wir nach der Methode von § 5 verfahren. Den vierten Potenzen der c_m — als den Grössen C_m — stellen wir ein System von Faktoren e_μ gegenüber, die den Permutationen entsprechen und die mit den c verbunden sind durch die Gleichungen

$$c_m^4 = r\Pi(e_\mu),$$

wo sich das Produkt erstreckt über alle für θ_m kritischen Permutationen μ.

Alsdann geht unsre Gleichung über in:

$$E_1 \pm E_2 \pm E_3 = 0,$$

wo E_α wiederum ein Produkt $\Pi(e_\mu)$ bedeutet, aber nur erstreckt über diejenigen Permutationen μ, die für sämmtliche 16 Faktoren des Ausdrucks

$$Q_\alpha Q_{\alpha 45} Q_{\alpha 46} Q_{\alpha 56}$$

kritisch sind. Eine solche Permutation muss Q_α in ein Produkt gerader Theta, $Q_{\alpha 45}$, $Q_{\alpha 46}$ und $Q_{\alpha 56}$ in Produkte ungerader Theta überführen. Die einzigen Permutationen, welche diese Eigenschaft haben, sind $\beta\gamma$ und die welche aus $\beta\gamma$ entstehen durch Hinzufügung eines Elements der gegebenen GÖPEL'schen Gruppe. Das Resultat ist demnach

$$\pi_{\beta\gamma} \pm \pi_{\gamma\alpha} \pm \pi_{\alpha\beta} = 0,$$

wo

$$\pi_\mu = \prod_\varkappa (e_{\mu\varkappa})$$

ist, das Produkt erstreckt über die vier Elemente der gegebenen Gruppe.

Nachdem soweit die Untersuchung allgemein geführt ist, legen wir von jetzt ab für die Bezeichnung der Theta eine geschlossene azygetische Reihe von 10 gleichartigen Functionen:

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_9 \quad \text{und} \quad \theta_0$$

zu Grunde. Alle Combinationen ungerader Ordnung der Zahlen $1, 2, \ldots, 9, 0$ bezeichnen Functionen, die von gerader Ordnung dagegen Permutationen. Da zwei complementäre Combinationen jedesmal dasselbe Theta oder dieselbe Permutation bezeichnen, so können wir uns für die Theta auf die Combinationen erster, dritter und fünfter Ordnung beschränken, für die Permutationen auf die Combinationen zweiter und vierter Ordnung. Die Functionen θ_α der Hauptreihe sind gerade, $\theta_{\alpha\beta\gamma}$ ist eine ungerade, $\theta_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$ wiederum eine gerade Function. Das System der e_μ zerfällt in die Grössen $e_{\alpha\beta}$ und $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Wir haben hier nicht mehr die volle Symmetrie der Voraussetzungen, da 10 Functionen vor den übrigen bevorzugt sind. Aber es muss jede Gleichung die wir zwischen den $e_{\alpha\beta}$ und $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ aufstellen, richtig bleiben, wenn wir die Zahlen $1, 2, 3$ etc. beliebig unter einander vertauschen. Deshalb genügt es, einzelne Typen aufzustellen. Die Anzahl dieser Typen beträgt sechs, und da sie ohne Zweifel ein interessantes Gleichungssystem bilden, so wollen wir diese Typen vollständig angeben.

Zunächst ist leicht zu sehen, dass es nur drei Typen giebt für die GÖPEL'sche Gruppe zweiter Ordnung. Es dürfen nämlich zwei Combinationen, die in der Gruppe vorkommen, immer nur eine gerade Anzahl von Elementen gemeinsam haben. Diese drei Typen sind:

I. $(0, 78, 90, 7890)$,
II. $(0, 1234, 5678, 90)$,
III. $(0, 5678, 5690, 7890)$.

Für jede der definirten Gruppen haben wir eine Reihe von 6 Functionen Q aufzustellen, die Produkte ungerader Theta sind.

Dies sind für die erste Gruppe:

$$Q_{179}\,,\ Q_{279}\,,\ Q_{379}\,,\ Q_{479}\,,\ Q_{579}\,,\ Q_{679}\,;$$

für die zweite:

$$Q_{140}\,,\ Q_{240}\,,\ Q_{340}\,;\ Q_{580}\,,\ Q_{680}\,,\ Q_{780}\,;$$

für die dritte:

$$Q_{156}\,,\ Q_{256}\,,\ Q_{356}\,,\ Q_{456}\,;\ Q_{570}\,,\ Q_{670}\,.$$

Bei der ersten Gruppe ist es gleichgültig, welche der drei Glieder wir auswählen. Nehmen wir die drei ersten:

$$Q_{179}\,,\ Q_{279}\,,\ Q_{379}\,.$$

Q_{279} geht in Q_{379} über durch die Permutationen:

$$23\,,\ 2378\,,\ 2390\,,\ 237890 = 1456.$$

Wir haben demnach die Gleichung:

$$\text{(a)} \qquad \sum_{1,2,3} (\pm\, e_{23}\, e_{2378}\, e_{2390}\, e_{1456}) = 0.$$

Die Summe auf der linken Seite besteht aus drei Gliedern; das zweite und dritte entstehen aus dem hingeschriebenen durch Vertauschung der Zahlen 1, 2, 3.

Bei der zweiten Gruppe sind zwei Typen aufzustellen. Wir können entweder auswählen:

$$Q_{140}\,,\ Q_{240}\,,\ Q_{340}\,.$$

Q_{240} geht in Q_{340} über durch die Permutationen:

$$23\,,\ 14\,,\ 2390\,,\ 1490.$$

Dies führt zu der Gleichung:

$$\text{(b)} \qquad \sum_{1,2,3} (\pm\, e_{23}\, e_{14}\, e_{2390}\, e_{1490}) = 0.$$

Oder wir können wählen:

$$Q_{140}\,,\ Q_{240}\,,\ Q_{780}\,.$$

Da Q_{240} in Q_{780} übergeht durch die Permutationen

$$2356\,,\ 2378\,,\ 1456\,,\ 1478,$$

so erhalten wir eine Gleichung, der wir die Form geben können:

$$\text{(c)}\qquad \begin{vmatrix} e_{1456}e_{1478} & e_{1356}e_{1378} \\ e_{2456}e_{2478} & e_{2356}e_{2378} \end{vmatrix} = \pm\, e_{12}e_{34}e_{1290}e_{3490}.$$

Die dritte Gruppe liefert drei verschiedne Typen, je nachdem wir aus der Reihe der sechs Functionen Q auswählen:

$$Q_{157}\,,\ Q_{256}\,,\ Q_{356},$$

oder:

$$Q_{156}\,,\ Q_{256}\,,\ Q_{570},$$

oder endlich:

$$Q_{156}\,,\ Q_{570}\,,\ Q_{670}.$$

Diese drei Gleichungen sind:

$$\text{(d)}\qquad \sum_{1,2,3}(\pm\, e_{23}e_{1456}e_{1478}e_{1490}) = 0,$$

$$\text{(e)}\qquad e_{12}e_{3456}e_{3478}e_{3490} = \sum_{1,2}(\pm\, e_{1679}e_{1589}e_{1570}e_{1680}),$$

$$\text{(f)}\qquad e_{56}e_{78}e_{90}e_{1234} = \pm \begin{vmatrix} e_{1579}e_{1580} & e_{1589}e_{1570} \\ e_{1679}e_{1680} & e_{1689}e_{1670} \end{vmatrix}.$$

Von den Formeln dieses Systems ist zunächst die zweite, (b), die wichtigste. Sie lässt sich noch vereinfachen. Wenn man statt der $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ einführt:

$$e_{\alpha\beta}\,e_{\alpha\gamma}\,e_{\alpha\delta}\,e_{\beta\gamma}\,e_{\beta\delta}\,e_{\gamma\delta}\,e_{\alpha\beta\gamma\delta} = D_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

so geht sie über in:

$$\sum_{1,2,3}(\pm D_{2390}\,D_{1490}) = 0,$$

und dies zeigt, dass die $D_{\alpha\beta\gamma\delta}$ Determinanten sind. Es müssen sich zehn Werthsysteme

$$(A_a\,,\ B_a\,,\ C_a\,,\ D_a) \qquad\qquad {\scriptstyle (a=1,2,\ldots,0)}$$

oder besser:

$$(l_a a_a\,,\ l_a b_a\,,\ l_a c_a\,,\ l_a d_a)$$

angeben lassen, sodass allgemein:

$$D_{\alpha\beta\gamma\delta} = \pm l_\alpha l_\beta l_\gamma l_\delta \begin{vmatrix} a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha & d_\alpha \\ a_\beta & b_\beta & c_\beta & d_\beta \\ a_\gamma & b_\gamma & c_\gamma & d_\gamma \\ a_\delta & b_\delta & c_\delta & d_\delta \end{vmatrix}$$

ist. Die 10 Werthsysteme $(a_\alpha, b_\alpha, e_\alpha, d_\alpha)$ fassen wir auf als die Coordinaten von 10 Punkten im Raume, und setzen jetzt:

$$e_{\alpha\beta}\, e_{\alpha\gamma} \dots e_{\gamma\delta}\, e_{\alpha\beta\gamma\delta} = l_\alpha l_\beta l_\gamma l_\delta f_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

$f_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ist dann diejenige lineare Determinante, deren Verschwinden ausdrückt, dass vier der 10 Punkte in einer Ebene liegen.

Man kann nun in sämmtlichen Gleichungen die Faktoren $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ durch die neu eingeführten Grössen $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ausdrücken. Die Gleichungen enthalten dann ausser den f noch die Grössen $e_{\alpha\beta}$ und l_α. Es ist vortheilhaft, auch diese durch andere zu ersetzen.

Wir führen zunächst folgende Abkürzungen ein:

Mit e soll das Produkt aller 45 Grössen $e_{\alpha\beta}$ bezeichnet werden;

mit e_α das Produkt derjenigen neun, deren Index die Zahl α enthält (sodass z. B. $e_0 = e_{01} e_{02} \dots e_{09}$ ist);

endlich mit l das Produkt der 10 Grössen $l_1, l_2, \dots, l_0$.

Wir setzen dann:

$$\xi_\alpha = \frac{l_\alpha^7}{e_\alpha^2}, \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, 9, 0)$$

$$f_{\alpha\beta} = \frac{l}{e} \frac{e_\alpha^3 e_\beta^3}{l_\alpha^7 l_\beta^7 l_{\alpha\beta}^2}. \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 9, 0;\ \alpha \lesseqgtr \beta)$$

Am leichtesten lassen sich diese Substitutionen durchführen bei den Gleichungen (a) und (d). Sie gehen über, wie man ohne Mühe erkennt, in:

(a′) $$\sum_{1,2,3} (\pm \xi_1^4 f_{14} f_{15} f_{16} f_{2378} f_{2390} f_{1456}) = 0$$

und:

(d′) $$\sum_{1,2,3} (\pm \xi_1^2 f_{14} f_{1456} f_{1478} f_{1490}) = 0.$$

Die letztere Gleichung ist leicht zu deuten. Wir können sie zunächst so schreiben:

$$\sum_{\alpha=1,2,\ldots,0} \left(\pm \xi_\alpha^2 f_{\alpha\varkappa} f_{\alpha\varkappa\lambda\mu} f_{\alpha\varkappa\nu\rho} f_{\alpha\varkappa\sigma\nu}\right) = 0,$$

indem wir berücksichtigen, dass $f_{\alpha\varkappa\lambda\mu}$ eine lineare Function der Coordinaten des Punktes (α) ist, welche verschwindet, wenn dieser Punkt mit $(\varkappa)$, (λ) oder (μ) zusammenfällt. Alle diese Gleichungen haben die Form:

$$\sum_\alpha \left(\pm \xi_\alpha^2 f_{\alpha\varkappa} H(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha)\right) = 0,$$

wo $H(x, y, z, t)$ eine Function dritten Grades bedeutet, die im Punkte $(\varkappa)$ von der dritten Ordnung verschwindet. Es ist leicht zu sehen, dass diese Formel gelten muss, welche besondere derartige Function wir auch für H nehmen mögen. Denken wir uns nun, $H = 0$ sei die Gleichung einer Kegelfläche dritten Grades, deren Spitze im Punkte $(\varkappa)$ liegt und die durch 8 der übrigen Grundpunkte hindurchgeht; dann zeigt die Formel, dass auch der letzte Punkt auf diesem Kegel liegt. Wir können daher unser System von 10 Punkten in folgender Weise geometrisch charakterisiren:

Zieht man von irgend einem der 10 Punkte aus Strahlen nach den neun übrigen, so bilden diese neun Geraden immer den vollständigen Durchschnitt zweier Kegel dritten Grades.

Es giebt auch eine geometrische Relation, welche die gegenseitige Lage von acht der zehn Punkte charakterisirt. Nehmen wir die Gleichung (f) unsres Systems und drücken auch in dieser die Grössen $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ und $e_{\alpha\beta}$ durch $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $f_{\alpha\beta}$ und die ξ_α aus. Nach einer kleiner Rechnung ergiebt sich:

$$\text{(f}'\text{)} \qquad \begin{vmatrix} f_{1579} f_{1580} & f_{1589} f_{1570} \\ f_{1679} f_{1680} & f_{1689} f_{1670} \end{vmatrix} = \frac{\xi_1^3 \xi_2 \xi_3 \xi_4}{\xi_5 \xi_6 \xi_7 \xi_8 \xi_9 \xi_0} f_{12} f_{13} f_{14} f_{1234}.$$

Der Ausdruck links ist hier nichts andres als diejenige aus den Werthsystemen (a, b, c, d) gebildete quadratische Determinante, deren Verschwinden anzeigt, dass ein Kegel zweiten Grades existirt, mit der Spitze im Punkt (1), der durch die Punkte 5, 6, 7, 8, 9, 0 hindurchgeht. Für diese Function wählen wir die Bezeichnung

$$g_{234,1}.$$

(2), (3) und (4) sind diejenigen Punkte, deren Coordinaten in dem

Ausdruck nicht vorkommen. Wir haben dann die eigenthümliche Relation:

$$g_{234,1} = \frac{\xi_1^3 \xi_2 \xi_3 \xi_4 f_{12} f_{13} f_{14} f_{1234}}{\xi_5 \xi_6 \xi_7 \xi_8 \xi_9 \xi_0},$$

welche natürlich bestehen bleibt bei jeder Vertauschung der 10 Zahlen.

Durch sie ist ein Mittel gegeben, auch die Faktoren $f_{\alpha\beta}$ und ξ_α auszudrücken als Functionen der Werthsysteme (a, b, c, d). Aber sie giebt zugleich die Möglichkeit, eine Relation zwischen je acht der 10 Punkte aufzustellen. Diese Relation ist:

$$g_{145,2} g_{245,3} g_{345,1} = g_{245,1} g_{345,2} g_{145,3}.$$

In ihr kommen die Coordinaten der Punkte (4) und (5) nicht vor, und man sieht ohne weiteres, dass sie richtig ist, wenn man vermöge der obigen Formel $g_{\alpha\beta\gamma,\delta}$ durch $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ausdrückt.

Es ist dies eine Relation zwischen acht Punkten, die ich schon in einer früheren Arbeit (CRELLE's Journal, Bd. 105, S. 273) besprochen habe; sie sagt aus, dass eine Fläche vierten Grades existirt, welche die acht Punkte zu Doppelpunkten hat. Eine solche Fläche kann noch zwei weitere Doppelpunkte besitzen; dies müssen offenbar die beiden übrigen Punkte sein. Daher lässt sich das System der zehn Punkte charakterisiren als das der zehn Doppelpunkte einer Fläche vierten Grades.

Es hat vielleicht noch ein gewisses Interesse, die Gleichungen

$$\sqrt{r_1} \pm \sqrt{r_2} \pm \sqrt{r_3} = 0$$

umzusetzen in Relationen zwischen den e oder den f.

Es ist klar, dass für die Faktoren von r_1 nur die Permutationen kritisch sind, die r_2 in r_3 überführen. Die Gleichung geht daher über in

$$\pi_{23} \pm \pi_{31} \pm \pi_{12} = 0,$$

wo $\pi_{\alpha\beta}$ ein Produkt von acht Faktoren e bedeutet, nämlich:

$$\pi_{\alpha\beta} = \prod_{(\varkappa)} (e_{\alpha\beta\varkappa});$$

es erstreckt sich über alle Elemente $\varkappa$ der GÖPEL'schen Gruppe dritter Ordnung, die der Gleichung zu Grunde liegt.

Demnach sind diese Gleichungen zwischen den e weniger einfach als die vorhin betrachteten. Erleichtert wird allerdings ihre Aufstellung dadurch, dass für die GÖPEL'sche Gruppe dritter Ordnung nur zwei Typen existieren, nämlich:

$$(0, 56, 78, 90, 5678, 5690, 7890, 1234),$$

und:

$$(0, 1234, 1256, 1278, 3456, 3478, 5678, 90).$$

Für die erste der beiden Gruppen sind

$$\theta_{14579}, \theta_{24579}, \theta_{34579}$$

drei gerade Theta, die gerade bleiben bei den sämmtlichen Permutationen der Gruppe; für die zweite haben

$$\theta_9, \theta_{13579}, \theta_{23579}$$

dieselbe Eigenschaft. Dies führt zu den beiden Gleichungen:

$$\sum_{1,2,3} (\pm e_{23} e_{14} e_{2356} e_{1456} e_{2378} e_{1478} e_{2390} e_{1490}) = 0,$$

und:

$$e_{12} e_{34} e_{56} e_{78} e_{1290} e_{3490} e_{5690} e_{7890} = \pm \begin{vmatrix} e_{1357} e_{\cdot 467} e_{1458} e_{1368} & e_{1457} e_{1367} e_{1358} e_{1468} \\ e_{2357} e_{2467} e_{2458} e_{2368} & e_{2457} e_{2367} e_{2358} e_{2468} \end{vmatrix}.$$

Wenn man nun in diesen beiden Gleichungen die Faktoren $e_{\alpha\beta}$ und $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ausdrückt durch die entsprechenden Grössen $f_{\alpha\beta}$ und $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$, so ergiebt sich das Resultat dass für die f genau dieselben Gleichungen bestehen, wie für die e.

Daraus ist der Schluss zu ziehen, dass die Ausdrücke für die Anfangswerthe der 136 geraden Theta

$$c_m^4 = r\Pi(e_\mu)$$

richtig bleiben, wenn man jeden Faktor e durch das entsprechende f ersetzt. Wir können die Gleichungen aufstellen:

$$c_m^4 = R\Pi(f_\mu);$$

das Produkt erstreckt sich jedesmal über alle 120 Permutationen μ, die θ_m in eine ungerade Function überführen. Damit sind die Grössen c_m^4 ausgedrückt durch Produkte von Faktoren, deren Hauptheil durch die linearen Determinanten $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$ gebildet wird.