QUELQUES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES ET LEURS APPLICATIONS A LA THÉORIE DES FONCTIONS ENTIÈRES TRANSCENDANTES

PAR

CARL STÖRMER

à CHRISTIANIA.

Dans plusieurs recherches des mathématiques modernes concernant la théorie des fonctions, la théorie des équations différentielles, même la géométrie et la mécanique on est souvent arrêté par des difficultés considérables provenant de questions d'une nature purement arithmétique qui paraissent au premier abord tout-à-fait étrangères au sujet.

Il est aisé d'en donner des exemples. Le plus célèbre est ce problème géométrique de la quadrature du cercle dont la solution définitive fut donnée en 1882 par la démonstration de la transcendance du nombre π, question d'une nature exclusivement arithmétique.

Pour en rappeler d'autres, citons le problème de la réduction des intégrales abéliennes, problème abordé par ABEL[1] et traité depuis par plusieurs des mathématiciens les plus célèbres, et dont l'importance est bien mise en évidence p. ex. dans les recherches modernes sur les équations différentielles. Ainsi on y revient[2] quand on cherche la condition pour que l'intégrale d'une équation différentielle algébrique du premier ordre

$$F(y', y) = 0$$

[1] Journal de Crelle, T. I., 1826.

[2] Voir PAINLEVÉ: *Cours professé à Stockholm,* p. 138—141.

où la variable x ne figure pas explicitement, soit une fonction de x à un nombre fini, *non donné* de déterminations. D'après M. PAINLEVÉ[1], ce problème est bien loin d'être résolu; on est arrêté ici par des obstacles insurmontables, dus à des questions d'une nature arithmétique et c'est seulement dans les cas très particuliers traités par TCHÉBYCHEFF[2] et ZOLOTAREFF[3], qu'on a réussi à en triompher.

De même la question de décider si une équation différentielle admet des solutions périodiques, question qui se pose p. ex. dans les recherches de la mécanique céleste (Problèmes des trois corps etc.) revient à des considérations analogues. Pour voir comment s'introduisent ici des recherches arithmétiques il suffit de renvoyer au mémoire de M. IVAR BENDIXSON: *Sur les équations différentielles à solutions périodiques*[4].

On doit à M. BOREL plusieurs exemples qui mettent en évidence le rôle que peuvent jouer les constantes d'une nature arithmétique particulière. Ainsi, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{d^2u}{dx^2} - a^4 \frac{d^2u}{dy^2} = f(x, y)$$

où $f(x, y)$ est une certaine fonction *analytique* de x et de y et où a est un nombre transcendant convenablement choisi, peut avoir cette propriété remarquable, qu'elle n'admet qu'une seule solution périodique u et cette solution est une fonction *non analytique*[5] de x et de y.

La théorie de la convergence des séries, p. ex. la théorie du développement des fonctions méromorphes en série de fonctions rationnelles, donne naissance à des considérations analogues[6].

En tout cas, l'étude des nombres incommensurables surtout au point de vue de leur transcendance forme une des branches les plus difficiles mais

---

[1] Voir l. c. p. 11 et 141.

[2] Journal de Liouville 1884.

[3] Bulletin des Sciences mathématiques 1879, p. 475—478.

[4] Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akad. Förhandlingar 1896. Stockholm.

[5] Voir diverses notes de M. BOREL dans les *Comptes Rendus* 1895 et 1899, et aussi E. PICARD: *Sur le développement depuis un siècle de quelques théories fondamentales dans l'analyse mathématique* Paris 1900, p. 22.

[6] Voir HADAMARD: *L'intermédiaire des mathématiciens* 1900, p. 32, et BOREL: *Contribution à l'étude des fonctions méromorphes,* Annales de l'École Normale 1901, p. 234 etc.

aussi des plus attrayantes de l'arithmétique moderne. Dans ce qui suit nous allons donner une petite contribution à cette théorie en développant quelques propriétés arithmétiques des fonctions et des intégrales elliptiques.

1. Limite supérieure de l'expression $|\psi_n|$ dans la théorie de la fonction elliptique $\wp(u)$ de Weierstrass.

Considérons la fonction $\wp(u) = y$ de *Weierstrass*, définie par l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3 \tag{1}$$

avec la condition initiale $y = \infty$ pour $u = 0$.

Comme on le sait, la formule de multiplication de l'argument donne, pour n entier, $\wp(nu)$ comme fonction rationnelle aux coefficients commensurables de $\wp(u)$, g_2 et g_3. En effet, on a[1]

$$\wp(nu) - \wp(u) = -\frac{\psi_{n+1} \cdot \psi_{n-1}}{\psi_n^2} \tag{2}$$

où les expressions ψ sont définies par les relations récurrentes

$$\psi_{2n} = -\frac{\psi_n}{p'}[\psi_{n+2}\psi_{n-1}^2 - \psi_{n-2}\psi_{n+1}^2]$$

$$\psi_{2n+1} = \psi_{n+2}\psi_n^3 - \psi_{n-1}\psi_{n+1}^3 \tag{3}$$

jointes aux relations initiales

$$\psi_1 = 1\,,\ \psi_2 = -p'$$

$$\psi_3 = 3p^4 - 6g_2'p^2 - 3g_3 p - g_2'^2$$

$$\psi_4 = -p'[2p^6 - 10g_2'p^4 - 10g_3p^3 - 10g_2'^2p^2 - 2g_2g_3p - g_3^2 - 2g_2'^3]$$

où nous avons mis pour abréger:

$$\wp(u) = p, \qquad \frac{d\wp(u)}{du} = p', \qquad \frac{g_2}{4} = g_2'.$$

On voit par ces formules que $\frac{\psi_{2n}}{p'}$ et ψ_{2n+1} sont des polynômes à coefficients *entiers* de p, g_2' et g_3.

[1] Voir p. ex. Halphen: *Traité des fonctions elliptiques* I, chapitre IV.

Supposons que $\wp$, g_2 et g_3 aient des valeurs finies données et cherchons une limite *supérieure* pour le module $|\psi_n|$ de ψ_n.

Appelons τ_n le plus grand des nombres

$$|\psi_1|, |\psi_2|, \ldots, |\psi_n|$$

et soit d'abord p' différent de zéro. Alors les formules (3) donnent immédiatement

$$\begin{aligned} |\psi_{2n+1}| &< 2 \cdot \tau_{n+2}^4 && < \lambda \tau_{n+2}^4 \\ |\psi_{2n}| &< \frac{2}{|p'|} \cdot \tau_{n+2}^4 && < \lambda \tau_{n+2}^4 \\ |\psi_{2n-1}| &< 2 \tau_{n+1}^4 && < \lambda \tau_{n+2}^4 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

où λ est une constante indépendante de n. On en tire que $\tau_{2n+1} < \lambda \tau_{n+2}^4$, d'où en remplaçant n par $n + 1$ et en prenant les logarithmes népériens

$$\log \tau_{2n+3} < \log \lambda + 4 \log \tau_{n+3}. \tag{4}$$

Dans le cas où $p' = 0$, tous les ψ_{2n} seront nuls et l'inégalité $|\psi_{2n+1}| < 2 \tau_{n+2}^4$ conduit au même résultat.

Cela posé, soit

$$2^{m-1} + 3 < n \overline{\overline{<}} 2^m + 3,$$

m étant entier positif. L'inégalité (4) donne successivement

$$\begin{aligned} \log \tau_{2^m+3} &< \log \lambda + 4 \log \tau_{2^{m-1}+3} \\ \log \tau_{2^{m-1}+3} &< \log \lambda + 4 \log \tau_{2^{m-2}+3} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \log \tau_5 &< \log \lambda + 4 \log \tau_4 . \end{aligned}$$

En multipliant ces inégalités respectivement par $1, 4, 4^2, \ldots, 4^{m-1}$ et en ajoutant on obtient

$$\log \tau_{2^m+3} < \frac{4^m - 1}{3} \log \lambda + 4^m \log \tau_4 < K \cdot 2^{2m},$$

K étant indépendant de n.

Mais

$$\tau_n \overline{\overline{<}} \tau_{2m+3}$$

et

$$2^{2m} < 4n^2$$

ce qui donne l'inégalité cherchée

$$|\psi_n| \overline{\overline{<}} \tau_n < e^{an^2}, \tag{5}$$

a étant une constante qui ne dépend que des valeurs données à p, g_2 et g_3 et non de n.

2. Limites supérieures et inférieures de $|p(nu)|$, quand g_2, g_3 et $p(u)$ sont des nombres algébriques donnés.

Supposons que g_2, g_3 et $\wp(u)$ soient des nombres algébriques donnés, racines d'équations algébriques à coefficients entiers. Comme on le sait[1], il est toujours possible d'assigner un nombre algébrique auxiliaire V tel que g_2, g_3 et $\wp(u)$ soient des fonctions rationnelles à coefficients entiers de V. Comme d'ailleurs tout nombre algébrique devient un nombre entier algébrique en le multipliant par un nombre entier convenable[2], on voit facilement qu'on peut supposer:

$$\left\{\begin{aligned} g_2' = \frac{g_2}{4} &= \frac{1}{M}(M_0 + M_1\rho + M_2\rho^2 + \ldots + M_{r-1}\rho^{r-1}) \\ g_3 &= \frac{1}{M}(M_0' + M_1'\rho + M_2'\rho^2 + \ldots + M_{r-1}'\rho^{r-1}) \\ \wp(u) &= \frac{1}{M}(N_0 + N_1\rho + N_2\rho^2 + \ldots + N_{r-1}\rho^{r-1}) \end{aligned}\right. \tag{6}$$

où les $M_0, M_1 \ldots N_{r-1}$ sont des nombres entiers ou nuls, où M est un nombre entier positif et où ρ est un nombre entier algébrique racine d'une équation irréductible à coefficients entiers

$$x^r + a_1x^{r-1} + a_2x^{r-2} + \ldots + a_{r-1}x + a_r = 0. \tag{7}$$

[1] Voir p. ex.: PICARD: *Traité d'Analyse* III, p. 436.

[2] Voir p. ex.: LEJEUNE-DIRICHLET: *Zahlentheorie* (1894), p. 525.

Reprenons la formule (2):

$$\wp(nu) = \frac{p\psi_n^2 - \psi_{n+1}\psi_{n-1}}{\psi_n^2}.$$

D'après les propriétés connues des ψ_n, les fonctions $p\psi_n^2 - \psi_{n+1}\psi_{n-1}$ et ψ_n^2 sont des polynômes à coefficients *entiers* de p, g_2' et g_3, homogènes et de degré n^2 et $n^2 - 1$ respectivement en $p, g_2'^{\frac{1}{2}}$ et $g_3^{\frac{1}{3}}$. Par conséquent, si l'on introduit pour g_2', g_3 et p les expressions (6), les nombres

$$M^{n^2}[p\psi_n^2 - \psi_{n+1}\psi_{n-1}] = U_n$$

et

$$M^{n^2}\cdot\psi_n^2 = V_n$$

seront des *nombres entiers algébriques* appartenant au corps algébrique construit sur la racine ρ de l'équation (7).

Cherchons des limites *supérieures* de $|U_n|$ et $|V_n|$. En appliquant l'inégalité (5) on voit tout de suite qu'on peut assigner un nombre positif λ indépendant de n et tel que

$$(8) \qquad \begin{cases} |U_n| < e^{\lambda n^2} \\ |V_n| < e^{\lambda n^2} \end{cases}$$

et cela quelqu'une des r racines ρ qu'on choisisse dans les expressions (6).

Il est facile d'en tirer des limites *inférieures* de $|U_n|$ et de $|V_n|$ dans les cas où ils ne sont pas nuls. En effet, supposons que U_n ne soit pas nul et désignons par $U_n^{(1)}, U_n^{(2)}, \ldots U_n^{(r-1)}$ ses r expressions conjuguées obtenues en substituant dans les expressions (6) pour ρ les $r-1$ autres racines de l'équation (7). On aura

$$\frac{1}{U_n} = \frac{U_n^{(1)}.\, U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r-1)}}{U_n\, .\, U_n^{(1)} \ldots U_n^{(r-1)}}.$$

Mais le dénominateur est la norme de U_n et comme U_n est un nombre entier algébrique différent de zéro, le module de ce norme sera $\overline{\overline{>}}\ 1$[1]. En appliquant les inégalités (8) on aura donc

$$\left|\frac{1}{U_n}\right| < e^{(r-1)\lambda n^2}$$

[1] Voir p. ex. DIRICHLET, *Zahlentheorie* (1894), p. 535.

c'est à dire

$$(9)\begin{cases} & |U_n| > e^{-\lambda' n^2} \\ \text{et de même, si } V_n \text{ n'est pas nul} & \\ & |V_n| > e^{-x' n^2} \end{cases}$$

λ' étant un nombre positif indépendant de n.

Comme

$$\wp(nu) = \frac{U_n}{V_n} \tag{10}$$

on en tire immédiatement le résultat suivant:

Supposons que $\wp(u)$, g_2 et g_3 sont des nombres algébriques donnés. Alors, si $\wp(nu)$ n'est pas infini on aura

$$|\wp(nu)| < e^{\lambda n^2}$$

et si $\wp(nu)$ n'est pas nul, on aura

$$|p(nu)| > e^{-\lambda' n^2}$$

où λ et λ' *sont des constantes positives indépendantes de* n.

3. **Limites supérieures et inférieures du module d'une fonction algébrique de $\wp(n_1u_1 + n_2u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu)$.**

Le résultat trouvé dans la section précédente est susceptible d'une généralisation très étendue, que nous allons développer rapidement.

Soit $A(u)$ une fonction algébrique de $\wp(u)$, définie par une relation algébrique

$$F_1(A(u), \wp(u)) = 0 \tag{11}$$

où F_1 est un polynôme de $A(u)$ et de $p(u)$, dont les coefficients sont des nombres algébriques données. En éliminant ces coefficients entre l'équation (11) et les équations qui les définissent comme des nombres algébriques on en déduit une relation algébrique

$$F_2(A(u), \wp(u)) = 0 \tag{12}$$

où F_2 est un polynôme de $A(u)$ et de $\wp(u)$, dont les coefficients sont *des nombres entiers.*

Posons

$$u = n_1 u_1 + n_2 u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ sont des variables indépendantes, et où $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ sont entiers ou nuls (non nuls tous à la fois).

D'après le théorème d'addition de $\wp(u)$, il existe une relation algébrique à coefficients entiers entre $\wp(u)$, $\wp(n_1 u_1), \ldots, \wp(n_\nu u_\nu)$, g_2 et g_3. Supposons que g_2 et g_3 soient des nombres algébriques donnés. En éliminant g_2 et g_3 entre la relation ci-dessus et les équations qui les définissent comme nombres algébriques on obtient une relation algébrique

$$F_3(\wp(u), \wp(n_1 u_1), \ldots, \wp(n_\nu u_\nu)) = 0 \tag{13}$$

où F_3 est un polynôme à coefficients entiers de $\wp(u)$, $\wp(n_1 u_1), \ldots, \wp(n_\nu u_\nu)$.

Enfin, l'élimination de $\wp(u)$ entre les équations (12) et (13) donne

$$F(A(u), \wp(n_1 u_1), \ldots, \wp(n_\nu u_\nu)) = 0 \tag{14}$$

où F est un polynôme *à coefficients entiers* de $A(u)$, $\wp(n_1 u_1), \ldots, \wp(n_\nu u_\nu)$, et où

$$u = n_1 u_1 + n_2 u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu .$$

Les coefficients de F et son degré en chacune des variables $A(u)$, $\wp(n_1 u_1), \ldots, \wp(n_\nu u_\nu)$ sont naturellement indépendants de $n_1, n_2, \ldots n_\nu$.

Cela posé, appliquons la formule de multiplication (2) et posons:

$$\wp(n_i u_i) = \frac{P_{n_i}(u_i)}{Q_{n_i}(u_i)}$$

où

$$\left.\begin{aligned} P_{n_i}(u_i) &= p\psi_{n_i}^2 - \psi_{n_i+1} \cdot \psi_{n_i-1} \\ Q_{n_i}(u_i) &= \psi_{n_i}^2 \end{aligned}\right\} \text{ pour } u = u_i .$$

En substituant ces valeurs et en chassant les dénominateurs $Q_{n_i}(u_i)$ l'équation (14) peut s'écrire:

$$R_0 A(u)^q + R_1 A(u)^{q-1} + \ldots + R_q = 0 \tag{15}$$

où les R sont des polynômes à coefficients entiers des quantités $P_{n_1}(u_1)$, $Q_{n_1}(u_1), \ldots, P_{n_\nu}(u_\nu)$, $Q_{n_\nu}(u_\nu)$.

Supposons maintenant qu'on donne aux variables $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ de telles valeurs que $\wp(u_1), \ldots, \wp(u_\nu)$ soient égaux à des nombres algébriques donnés. Comme il en est de même de g_2 et g_3 d'après l'hypothèse faite plus haut, on comprend qu'on peut supposer comme auparavant:

$$(16)\left\{\begin{aligned} g_2' = \frac{g_2}{4} &= \frac{1}{M}(M_0 + M_1\rho + \ldots + M_{r-1}\rho^{r-1}) \\ g_3 &= \frac{1}{M}(M_0' + M_1'\rho + \ldots + M_{r-1}'\rho^{r-1}) \\ \text{et} \qquad & \\ \wp(u_i) &= \frac{1}{M}(N^{(i)} + N_1^{(i)}\rho + \ldots + N_{r-1}^{(i)}\rho^{r-1}) \\ & (i = 1, 2, 3, \ldots, \nu) \end{aligned}\right.$$

où les $M_0, M_1, \ldots, N_{r-1}^{(\nu)}$ sont des nombres entiers ou nuls, où M est entier positif et où ρ est un nombre entier algébrique racine d'une équation irréductible à coefficients entiers

$$x^r + a_1x^{r-1} + \ldots + a_{r-1}x + a_r = 0.$$

Considérons une des branches de la fonction algébrique $A(u)$ et supposons qu'elle prend une valeur *finie* A, pour les valeurs de $g_2, g_3, \wp(u_1), \ldots, \wp(u_\nu)$ données plus haut. Cette valeur A sera racine de l'équation (15), quand on substitue pour $g_2, g_3, \wp(u_1)$ etc. les valeurs en question. Cherchons d'abord des limites supérieures et inférieures du module d'un coefficient quelconque R_s de cette équation.

En se rappelant la définition des R_s et en appliquant les résultats de la section précédente, on voit que

$$M^{\lambda_1 n_1^2 + \lambda_2 n_2^2 + \ldots + \lambda_\nu n_\nu^2} . R_s$$

sera un nombre *entier* algébrique appartenant au corps algébrique construit sur la racine ρ, pourvu qu'on choisisse les nombres entiers λ, qui sont indépendants de $n_1, \ldots, n_\nu$, assez grands. En désignant par n^2 le plus grand des nombres $n_1^2, n_2^2, \ldots, n_\nu^2$ on voit que

$$R_s' = M^{\lambda' n^2} . R_s \qquad (s=0, 1, 2, \ldots, g)$$

sera entier algébrique, λ' étant un nombre entier indépendant de n et de s.

Cela posé, en appliquant les inégalités (8), on aura d'abord

$$(17) \qquad |R_s| < e^{\lambda n^2},$$

λ étant indépendant de n et de s, et si R_s n'est pas nul, on trouve comme auparavant pour le nombre entier algébrique R'_s que

$$|R'_s| > e^{-\mu' n^2}$$

c'est à dire

$$(18) \qquad |R_s| > e^{-\mu n^2},$$

μ étant indépendant de n et de s.

Cela fait, il est facile de trouver une limite supérieure de $|A|$. En effet, comme A, qui est supposé fini, est racine de l'équation (15), il faut que l'un des coefficients $R_0, R_1, \ldots, R_{q-1}$ soit différent de zero; soit R_μ le premier de ces coefficients qui n'est pas nul.

Alors une formule connue[1] donne

$$|A| < 1 + \frac{R}{|R_\mu|}$$

où R est le plus grand des nombres $|R_0|, \ldots, |R_q|$. En appliquant les inégalités (17) et (18) on en déduit

$$|A| < e^{Kn^2},$$

K étant indépendant de n.

Dans le cas où A n'est pas nul, on trouve de la même manière pour $|A|$ une limite inférieure de la forme $e^{-K'n^2}$, K' étant indépendant de n.

Nous avons ainsi le théorème:

Théorème 1.

*Soit $\wp(u)$ la fonction elliptique de **Weierstrass** construite avec des invariants g_2 et g_3 qui sont des nombres algébriques donnés, et soit $A(u)$ une fonction algébrique de $\wp(u)$, liée à celle-là par une équation algébrique*

$$F(A(u), \wp(u)) = 0,$$

dont les coefficients sont des nombres algébriques.

[1] Voir p. ex. SERRET: *Cours d'Algèbre supérieure* I, chapitre III.

Enfin soient $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ *des valeurs de* u *telles que* $\wp(u_1), \wp(u_2), \ldots, \wp(u_\nu)$ *ont des valeurs algébriques (finies) données, et soient* $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ *des nombres entiers, qui ne sont pas tous nuls; désignons enfin par* n^2 *le plus grand des nombres* $n_1^2, n_2^2, \ldots, n_\nu^2$.

Cela posé, si $A(n_1u_1 + \ldots + n_\nu u_\nu)$ *n'est pas infini on aura*

$$|A(n_1u_1 + n_2u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu)| < e^{\lambda n^2} \tag{19}$$

et si cette quantité n'est pas nulle, on aura

$$|A(n_1u_1 + n_2u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu)| > e^{-\lambda' n^2} \tag{20}$$

où λ *et* λ' *sont des constantes positives indépendantes de* n [1].

Comme on le sait, *toute fonction analytique qui possède un théorème d'addition algébrique, est une fonction algébrique de la fonction* $\wp(u)$, *correspondant à des invariants* g_2, g_3 *convenablement choisis.* On conçoit alors comment le théorème I peut être appliqué à de telles fonctions.

Dans le cas beaucoup plus simple où $A(u)$ est une fonction algébrique de $\sin u$, cas qui peut être regardé comme cas particulier du cas général, la même méthode donne aisément le résultat plus simple:

Soit $A(u)$ *une fonction algébrique de* $\sin u$, *liée à cette fonction par une équation algébrique dont les coefficients sont des nombres algébriques donnés. Soient de plus* $u_1, \ldots, u_\nu$ *des valeurs de* u, *telles que* $\sin u_1, \sin u_2, \ldots, \sin u_\nu$ *sont égaux à des nombres algébriques donnés. Enfin, soient* $n_1, \ldots, n_\nu$ *des nombres entiers non tous nuls et désignons par* n *le plus grand des nombres* $|n_1|, |n_2|, \ldots, |n_\nu|$.

Alors, si $A(n_1u_1 + n_2u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu)$ *n'est pas infini, on aura*

$$|A(n_1u_1 + n_2u_2 + \ldots n_\nu u_\nu)| < e^{\lambda n} \tag{21}$$

---

[1] On pourrait sans doute appliquer ce théorème aux recherches arithmétiques des courbes algébriques, commencées par M. Poincaré. (Journal des Mathématiques pures et appliquées, 1901).

et si cette quantité n'est pas nulle, on aura

(22) $$|A(n_1 u_1 + n_2 u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu)| > e^{-\lambda' n}$$

où λ *et* λ' *sont des constantes indépendantes de* n.

4. Application aux intégrales elliptiques et abéliennes.

Considérons l'intégrale elliptique correspondant à $z = \wp(u)$:

$$u = \int_z^\infty \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}},$$

l'intégrale étant prise le long d'un chemin d'intégration allant du point z a l'infini et évitant les points critiques, racines de l'équation $4y^3 - g_2 y - g_3 = 0$. Supposons de plus que le chemin d'intégration n'entoure ces points critiques qu'un nombre fini de fois.

Alors, comme on le sait, l'intégrale sera *finie* pour toutes les valeurs de z.

D'un autre côté, $u = 0$ est un pôle de second ordre pour la fonction $\wp(u)$, et dans le voisinage de $u = 0$, on aura

$$z = \frac{1}{u^2} + E_u,$$

E_u tendant vers zéro avec u. On en tire

(23) $$u = \frac{1}{\sqrt{z}}(1 + E_u') = \frac{1}{\sqrt{\wp(u)}}(1 + E_u')$$

où E_u' tend vers zéro avec u, et où la racine carrée est choisie avec une détermination convenable.

Cela posé, supposons que g_2 et g_3 soient des nombres algébriques donnés ainsi que $z_1, z_1', z_2, z_2', \ldots, z_\nu, z_\nu'$, et considérons la somme

$$U = n_1 \cdot \int_{z_1}^{z_1'} \frac{dz}{\sqrt{R}} + n_2 \int_{z_2}^{z_2'} \frac{dz}{\sqrt{R}} + \ldots + n_\nu \int_{z_\nu}^{z_\nu'} \frac{dz}{\sqrt{R}}$$

où $R = 4z^3 - g_2 z - g_3$.

En posant

$$u_i = \int_{z_i}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{R}}, \qquad u_i' = \int_{z_i'}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{R}}$$

on aura

$$U = n_1 u_1 - n_1 u_1' + \ldots + n_\nu u_\nu - n_\nu u_\nu'.$$

Supposons que $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ soient des nombres entiers, non tous nuls, et soit n^2 la plus grande des quantités $n_1^2, n_2^2, \ldots, n_\nu^2$. Cherchons une limite inférieure de $|U|$ dans le cas où U n'est pas nul. Alors pour U assez petit, on aura d'après l'équation (23):

$$|U| > \frac{K}{|\wp(U)|^{\frac{1}{2}}},$$

K étant une constante finie > 0.

Mais en choisissant dans le théorème 1, $A(u) = \wp(u)$ on a

$$|\wp(n_1 u_1 - n_1 u_1' + \ldots + n_\nu u_\nu - n_\nu u_\nu')| < e^{\lambda n^2}$$

ce qui donne

$$|U| > K e^{-\frac{\lambda}{2} n^2}$$

et nous avons ainsi démontré le théorème:

Théorème 2.

Soient $g_2, g_3, z_1, z_1', z_2, z_2', \ldots, z_\nu, z_\nu'$ des nombres algébriques donnés, parmi lesquels un ou plusieurs des nombres $z_1', z_2', \ldots, z_\nu'$ peuvent être infinis, et soit

$$R = 4z^3 - g_2 z - g_3.$$

Considérons la somme

$$n_1 \int_{z_1}^{z_1'} \frac{dz}{\sqrt{R}} + n_2 \int_{z_2}^{z_2'} \frac{dz}{\sqrt{R}} + \ldots + n_\nu \int_{z_\nu}^{z_\nu'} \frac{dz}{\sqrt{R}}$$

où $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ *sont des nombres entiers. Si cette somme n'est pas nulle, on aura*

$$(24) \qquad \left| n_1 \int_{z_1}^{z_1'} \frac{dz}{\sqrt{R}} + n_2 \int_{z_2}^{z_2'} \frac{dz}{\sqrt{R}} + \ldots + n_\nu \int_{z_\nu}^{z_\nu'} \frac{dz}{\sqrt{R}} \right| > e^{-\lambda n^2}$$

où n^2 *désigne le plus grand des nombres* $n_1^2, n_2^2, \ldots, n_\nu^2$ *et où* λ *est indépendant de* n.

En appliquant le théorème correspondant sur la fonction sin u, on obtient de même le

Théorème 3.

Soient $z_1, z_1', z_2, z_2', \ldots, z_\nu, z_\nu'$ *des nombres algébriques, et soient* $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ *des nombres entiers. Alors*

$$(25) \qquad \left| n_1 \int_{z_1}^{z_1'} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} + n_2 \int_{z_2}^{z_2'} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} + \ldots + n_\nu \int_{z_\nu}^{z_\nu'} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \right| > e^{-\lambda n}$$

s'il n'est pas nul; n *désigne le plus grand des nombres* $|n_1|, |n_2|, \ldots, |n_\nu|$ *et* λ *est indépendant de* n.

En appliquant le théorème général I on pourrait étendre ces théorèmes aux *intégrales abéliennes dont la fonction inverse admet un théorème d'addition algébrique.* Comme une fonction analytique admettant un théorème d'addition algébrique n'aura qu'un nombre fini de déterminations dans tout le plan et comme elle est liée avec sa dérivée par une équation algébrique à coefficients constants, on voit quelle liaison intéressante il y a entre ces questions et le problème sur l'équation différentielle algébrique

$$F(y', y) = 0$$

dont nous avons parlé dans l'introduction.

Cependant, nous omettons ici ces recherches, qui nous entraîneraient trop loin.

Des théorèmes 2 et 3 on peut tirer des conséquences intéressantes pour de grandes classes de nombres incommensurables.

On en tire en effet:

Corollaire 1:

Soit α un nombre réel et incommensurable défini comme rapport de deux intégrales elliptiques:

$$\alpha = \frac{\int_{z_1}^{z_1'} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}}{\int_{z_2}^{z_2'} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}}$$

où $g_2, g_3, z_1, z_1', z_2, z_2'$ sont des nombres algébriques donnés, $z_1' = \infty$ et $z_2' = \infty$ y compris. Soient de plus n_1 et n_2 deux nombres entiers qui ne sont pas nuls tous les deux et désignons par n^2 le plus grand de leurs carrés n_1^2 et n_2^2.

Alors on aura

(26) $$|n_1 \alpha - n_2| > e^{-\lambda n^2}$$

λ étant une constante indépendante de n.

La même inégalité subsiste si

$$\alpha = \frac{\int_{z_1}^{z_1'} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}}{\int_{z_2}^{z_2'} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}}$$

z_1, z_1', z_2, z_2' et k étant des nombres algébriques.

Du théorème 3 on tire de la même manière:

Corollaire 2:

Si α est un nombre réel et incommensurable défini comme le rapport entre deux arcs dont les sinus sont des nombres algébriques donnés, on a,

n_1 et n_2 étant des nombres entiers non nuls tous les deux et n désignant le plus grand des modules $|n_1|$ et $|n_2|$, que

$$(27) \qquad |n_1\alpha - n_2| > e^{-\lambda n},$$

λ étant une constante indépendante de n.

On en tire aisément que la même inégalité subsiste quand α est le rapport entre deux logarithmes de nombres algébriques, en particulier si α est le logarithme vulgaire d'un nombre algébrique[1].

En général, on pourrait étendre les résultats des deux corollaires à toutes les intégrales *abéliennes* définies plus haut.

Dans cet ordre d'idées, rappelons le résultat dû à LIOUVILLE[2], que si α est un nombre réel racine d'une équation irréductible de degré r ($r > 1$) à coefficients entiers, on a l'inégalité

$$(28) \qquad |n_1\alpha - n_2| > \frac{\lambda}{n^{r-1}},$$

$n(> 0)$ désignant le plus grand des modules des nombres entiers n_1 et n_2 et λ étant indépendant de n.

D'après les indications de M. BOREL[3], il sera possible d'établir des inégalités analogues quand α est racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont des polynômes à coefficients entiers en e ou bien en e^ρ, ρ étant algébrique. De même, si α est le logarithme népérien d'un nombre algébrique p. ex. si $\alpha = \pi$ etc.[4]

Les inégalités (26) et (27) donnent tout de suite des théorèmes analogues sur le développement de α en fraction continue

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}}$$

---

[1] Voir mon mémoire: *Sur une propriété arithmétique des logarithmes des nombres algébriques.* Bulletin de la Société Mathématique de France 1900.

[2] Voir p. ex. BOREL: *Leçons sur la Théorie des Fonctions.* p. 27.

[3] Voir les Comptes Rendus, 6 mars 1899 et le mémoire précédemment cité, dans les Annales de l'École Normale 1901, p. 236.

[4] Voir aussi diverses notes de M. E. MAILLET dans les Comptes Rendus, 1900—1901.

En effet, en posant

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1}} + \ldots$$

et

$$P_1 = a_0\,, \qquad P_2 = a_1 a_0 + 1\,, \quad \ldots, \quad P_n = a_{n-1} P_{n-1} + P_{n-2}\,, \ldots$$
$$Q_1 = 1\,, \qquad Q_2 = a_1\,, \qquad \ldots, \quad Q_n = a_{n-1} Q_{n-1} + Q_{n-2}\,, \ldots$$

on a comme on le sait:

$$a_n < \alpha_n + \frac{Q_{n-1}}{Q_n} = \frac{1}{Q_n \,|\, Q_n \alpha - P_n \,|}.$$

On en déduit que si le nombre incommensurable α est 1° *racine d'une équation irréductible de degré r à coefficients entiers,* ou 2° *défini par le corollaire* 2 ou bien 3° *défini par le corollaire* 1, on a respectivement les inégalités suivantes, dont la première est due à LIOUVILLE[1]:

$$a_n < \lambda Q_n^{r-2}\,, \qquad a_n < e^{\lambda' Q_n} \quad \text{et} \quad a_n < e^{\lambda'' Q_n^2}$$

λ, λ' et λ'' étant des constantes indépendantes de n. On en tire pour les nombres transcendants des conséquences analogues à celles dans mon mémoire précédemment cité[2].

5. **Application à la théorie des fonctions entières transcendantes à distribution ordinaire des zéros.**

Dans un mémoire récent[3], M. BOREL a introduit pour les fonctions entières transcendantes une notation importante. Soit $F(z)$ une telle fonction, de genre fini, et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ses zéros, pour plus de simplicité supposés simples et rangés dans l'ordre des modules croissants.

Soit ρ *l'ordre réel* de la fonction $F(z)$, c'est à dire un nombre positif tel que la série

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}}$$

[1] Journal de Liouville t. XVI.

[2] Voir l. c. p. 156.

[3] *Contribution à l'étude des fonctions méromorphes.* Annales de l'École Normale 1901, p. 221 etc.

est convergente, tandis que la série

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho-\varepsilon}}$$

est divergente quelque petit que soit ε.

Posons pour abréger $|a_n| = r_n$. Alors M. Borel dit, par définition, que la distribution des zéros est *ordinaire,* si l'on a

$$|F'(a_n)| > e^{-r_n^{\rho+\varepsilon}} \tag{29}$$

quelque petit que soit le nombre positif ε, à partir du moins d'une certaine valeur de n[1]. Dans le cas où une telle inégalité n'aura pas lieu, la distribution est dite *extraordinaire.*

D'après M. Borel la distribution des zéros est ordinaire pour toutes les fonctions entières usuelles. Cependant la fonction très simple $\sin \pi z \,.\, \sin \alpha\pi z$ aura une distribution ordinaire ou extraordinaire selon *la nature arithmétique de la constante* α, comme il le fait voir par des exemples.

Nous nous permettons de citer les passages suivants qui terminent le mémoire de M. Borel et qui mettent en évidence l'utilité des recherches arithmétiques pour ce genre de questions:

»Parmi les sujets de recherches suggérés naturellement par ce qui précède il en est un sur lequel je n'insisterai pas, à cause de sa difficulté: la distribution des zéros est-elle ordinaire pour le produit de fonctions usuelles, par exemple pour le produit de deux fonctions σ correspondant toutes les deux à des invariantes g_2 et g_3 qui soient des nombres rationnels ou algébriques?»

Nous allons appliquer les résultats précédents pour aborder du moins des cas assez généraux de ce dernier problème.

Considérons en effet la fonction

$$F(z) = \sigma_{(1)}(z) \,.\, \sigma_{(2)}(z)$$

où nous avons posé:

$$\sigma_{(1)}(z) = \sigma(z \,|\, \omega_1, \omega_1')$$

$$\sigma_{(2)}(z) = \sigma(z \,|\, \omega_2, \omega_2')$$

[1] Dans le cas, où a_n est un zéro de multiplicité m, on aura seulement à remplacer dans l'inégalité $F'(a_n)$ par $F^{(m)}(a_n)$. (Borel).

la fonction entière transcendante σ de M. WEIERSTRASS étant définie comme d'ordinaire[1].

Pour plus de simplicité supposons que

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \alpha \text{ et } \frac{\omega_2'}{\omega_1'} = \beta$$

soient réels.

Nous allons trouver des conditions suffisantes pour que la distribution des zéros de la fonction $F(z)$ soit *ordinaire.* Comme nous allons le voir, ces conditions s'expriment exclusivement par *des propriétés arithmétiques des nombres α et β.*

Comme tous les zéros de la fonction σ sont simples, les zéros de $F(z)$ seront simples s'ils ne sont pas communs à $\sigma_{(1)}(z)$ et $\sigma_{(2)}(z)$ et doubles dans le cas contraire. Par conséquent, on aura pour un zéro simple $z = a$:

$$(30,1) \qquad F'(a) = \sigma'_{(1)}(a) \,.\, \sigma_{(2)}(a) \text{ ou bien } = \sigma_{(1)}(a)\sigma'_{(2)}(a)$$

et pour un zéro double

$$(30,2) \qquad F''(a) = 2\sigma'_{(1)}(a) \,.\, \sigma'_{(2)}(a).$$

Considérons d'abord la fonction $\sigma_{(1)}(z)$. On a comme on le sait:

$$(31) \qquad \sigma_{(1)}(z + 2\tilde{\omega}_1) = \pm e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1 + 2\tilde{\eta}_1 z} \,.\, \sigma_{(1)}(z)$$

en posant

$$(32) \qquad \begin{cases} \tilde{\omega}_1 = m_1\omega_1 + n_1\omega_1' \\ \tilde{\eta}_1 = m_1\eta_1 + n_1\eta_1' \end{cases}$$

où η_1 et η_1' sont les valeurs de la dérivée logarithmique de $\sigma_{(1)}(z)$ pour $z = \omega_1$ et $z = \omega_1'$ respectivement, et où m_1 et n_1 sont entiers ou nuls. Comme on le sait tous les zéros de $\sigma_{(1)}(z)$ s'obtiennent en donnant à m_1 et n_1 toutes les valeurs entières ou nulles. On en tire, puisque $\sigma'_{(1)}(0) = 1$, que

$$\sigma'_{(1)}(2\tilde{\omega}_1) = \pm e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1}.$$

Posons $2\tilde{\omega}_1 = \mu + i\nu$, μ et ν étant réels, d'où $|2\tilde{\omega}_1|^2 = \mu^2 + \nu^2$. En substituant pour $2\tilde{\omega}_1$, sa valeur tirée de (32) et en remarquant que $\frac{\omega_1'}{\omega_1}$ a

[1] Voir p. ex. HALPHEN: *Traité des fonctions elliptiques* I, p. 378.

sa partie purement imaginaire différente de zéro, on voit qu'on peut trouver pour m_1 et n_1 des expressions

$$(33)\qquad \begin{cases} m_1 = p\mu + q\nu, \\ n_1 = p'\mu + q'\nu \end{cases}$$

p, q, p' et q' étant finis.

Considérons maintenant $2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1$. En y substituant les valeurs de $\tilde{\eta}_1$ et $\tilde{\omega}_1$ tirées des équations (32) et en appliquant les relations (33) on voit que la partie réelle de $2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1$ aura la forme $A\mu^2 + B\mu\nu + C\nu^2$, A, B et C étant indépendants de μ et de ν et finis. Comme d'autre part le quotient:

$$\frac{|A\mu^2 + B\mu\nu + C\nu^2|}{|2\varpi_1|^2} = \left|\frac{A\mu^2 + B\mu\nu + C\nu^2}{\mu^2 + \nu^2}\right|$$

pour toutes les valeurs réelles de μ et ν ne surpasse pas une quantité fixe, on aura

$$(34)\qquad |\sigma'_{(1)}(2\tilde{\omega}_1)| = e^{A\mu^2 + B\mu\nu + C\nu^2} > e^{-K_1 \cdot |2\tilde{\omega}_1|^2},$$

K_1 désignant un nombre fixe indépendant du zéro $2\varpi_1$ choisi [1].

De la même manière on trouve, si $2\varpi_2$ désigne un zéro de $\sigma_{(2)}(z)$:

$$(35)\qquad |\sigma'_{(2)}(2\tilde{\omega}_2)| > e^{-K_2 \cdot |2\tilde{\omega}_2|^2},$$

K_2 étant indépendant du zéro $2\tilde{\omega}_2$ choisi.

On en tire immédiatement que *la distribution des zéros doubles de $F(z)$ est ordinaire.* En effet soit $a_n = 2\tilde{\omega}_1 = 2\tilde{\omega}_2$ un zéro double et posons $|a_n| = r_n$ alors la formule (30,2) donne

$$|F''(a_n)| > e^{-Kr_n^2} > e^{-r_n^{2+\varepsilon}}$$

quelque petit que soit ε, du moins à partir d'une certaine valeur de n. Comme d'autre part l'ordre réel de $F(z)$ est égal à l'ordre réel de σ, c'est à dire à 2, l'énoncé se trouve démontré.

Considérons maintenant les zéros simples et cherchons une limite inférieure des modules $|\sigma_{(1)}(2\tilde{\omega}_2)|$ et $|\sigma_{(2)}(2\tilde{\omega}_1)|$. Prenons la fonction $\sigma_{(1)}(z)$ et posons

$$2\tilde{\omega}_2 = 2m_2\omega_2 + 2n_2\omega'_2 = 2m_1\omega_1 + 2n_1\omega'_1 + \varepsilon$$

[1] On tire de l'inégalité (34) le résultat indiqué par M. Borel, que la distribution des zéros de la fonction σ est ordinaire.

où m_1, m_2, n_1 et n_2 sont entiers ou nuls et où ε est différent de zéro parceque $2\tilde{\omega}_2$ est supposé zéro simple de $F(z)$. Introduisons les notations

$$(36) \qquad \begin{cases} m_2 \dfrac{\omega_2}{\omega_1} - m_1 = m_2\alpha - m_1 = \varepsilon_m \\ n_2 \dfrac{\omega_2'}{\omega_1'} - n_1 = n_2\beta - n_1 = \varepsilon_n, \end{cases}$$

ce qui donne

$$\varepsilon = 2\omega_1\varepsilon_m + 2\omega_1'\varepsilon_n.$$

La formule (31) nous donne

$$\sigma_{(1)}(2\tilde{\omega}_2) = \pm e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1 + 2\tilde{\eta}_1\varepsilon} . \sigma_{(1)}(\varepsilon).$$

Or, α et β étant supposés réels, les nombres entiers m_1 et n_1 peuvent être choisis tels que $|\varepsilon_m|$ et $|\varepsilon_n|$ ne surpassent pas $\frac{1}{2}$. Par conséquent le point ε ne sortira pas du parallélogramme dont les sommets sont les points $\pm\omega_1 \pm \omega_1'$ et par suite on peut écrire:

$$\sigma_{(1)}(\varepsilon) > M . |\varepsilon|,$$

M étant une constante indépendante de ε.

D'un autre côté, $\frac{\omega_1'}{\omega}$ ayant sa partie purement imaginaire différente de zéro, on voit aisément que

$$|\varepsilon| > M' . \varepsilon',$$

où M' est indépendant de ε et où ε' désigne *la plus grande* des quantités $|\varepsilon_m|$ et $|\varepsilon_n|$.

Enfin en tenant compte des relations (33) et (36) on trouve comme auparavant

$$|e^{2\tilde{\eta}_1\tilde{\omega}_1 + 2\tilde{\eta}_1\varepsilon}| > e^{-K' . |2\tilde{\omega}_2|^2},$$

K' étant indépendant du zéro $2\tilde{\omega}_2$ choisi.

En résumant ces résultats, il vient

$$(37) \qquad |\sigma_{(1)}(2\tilde{\omega}_2)| > e^{-H_1 . |2\tilde{\omega}_2|^2} . \varepsilon',$$

H_1 étant une constante indépendante du zéro $2\tilde{\omega}_2$ choisi.

Nous aurons à discuter trois cas différents:

1°. *α et β sont commensurables tous les deux.*

Alors $|\varepsilon_m|$ et $|\varepsilon_n|$ sont nuls ou plus grands qu'un nombre fixe. Comme $2\tilde{\omega}_2$ est supposé zéro simple de $F(z)$, ils ne sont pas nuls tous les deux et par conséquent ε' sera plus grand qu'un nombre fixe μ_1 et

$$|\sigma_{(1)}(2\tilde{\omega}_2)| > \mu_1 \cdot e^{-H_1 \cdot |2\tilde{\omega}_2|^2}$$

et de même on trouve

$$|\sigma_{(2)}(2\tilde{\omega}_1)| > \mu_2 \cdot e^{-H_2 \cdot |2\tilde{\omega}_1|^2}$$

si $2\tilde{\omega}_1$ est un zéro simple de $F(z)$ appartenant à $\sigma_{(2)}(z)$. En combinant ces inégalités avec les inégalités (34) et (35) on aura, si a_n est un zéro simple de $F(z)$ que

$$|F'(a_n)| > e^{-r_n^{2+\varepsilon}}$$

quelque petit que soit le nombre positif ε, du moins à partir d'une certaine valeur de n.

Dans ce cas, la distribution des zéros de $F(z)$ sera par conséquent ordinaire.

2°. *L'un des nombres α, β, p. ex. β est commensurable, l'autre incommensurable.*

Supposons que le nombre incommensurable α satisfasse à la condition

$$|m_2\alpha - m_1| > e^{-\theta(m)}$$

où m est le plus grand des nombres $|m_1|$ et $|m_2|$ et où $\theta(m)$ est une fonction positive non décroissante de $m (m > 0)$. Comme ε_n peut être nul on aura en tout cas

$$\varepsilon' > e^{-\theta(m)}.$$

D'un autre côté, les formules (32), (33) et (36) font voir que le rapport $\frac{m}{|2\tilde{\omega}_2|}$ ne surpasse pas une limite fixe λ de manière que

$$\theta(m) < \theta(\lambda r)$$

en désignant $|2\tilde{\omega}_2|$ par r. Cela donne

$$|\sigma_{(1)}(2\tilde{\omega}_2)| > e^{-H_1 r^2 - \theta(\lambda r)}$$

et pour $\sigma_{(2)}(2\tilde{\omega}_1)$ une inégalité pareille. Par conséquent si $\theta(m) < Am^2$ où A est une constante positive, on voit en combinant ces inégalités avec les inégalités (34) et (35) que la fonction $F(z)$ aura une distribution ordinaire de ses zéros.

3°. *Enfin soient α et β incommensurables tous les deux*, et soit $\theta_1(m)$ et $\theta_2(m)$ les fonctions correspondantes, de manière que

$$|m_2\alpha - m_1| > e^{-\theta_1(m)}$$
$$|m_2\beta - m_1| > e^{-\theta_2(m)}.$$

Alors on trouve sans difficulté que $F(z)$ aura une distribution ordinaire des zéros, si l'une des fonctions $\theta(m) < Am^2$, A étant une constante positive.

Par ces calculs, qui sont très simples en principe mais qui ont exigé des développements peut-être fatigants, nous sommes arrivés au théorème suivant:

Théorème 4.

Considérons le produit de deux fonctions σ *de* Weierstrass

$$F(z) = \sigma(z\,|\,\omega_1\,,\,\omega_1')\,.\,\sigma(z\,|\,\omega_2\,,\,\omega_2')$$

où les rapports

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \alpha \quad et \quad \frac{\omega_2'}{\omega_1'} = \beta$$

sont supposés réels et finis.

La distribution des zéros de $F(z)$ sera ordinaire:

A. *Si α et β sont commensurables.*

B. *Si l'un des nombres α, β, p. ex. β est commensurable et l'autre α incommensurable de manière que*

(38)
$$|n_1\alpha - n_2| > e^{-\lambda n^2}$$

pour toutes les valeurs entières n_1, n_2 qui ne sont pas nuls à la fois, n désignant le plus grand des nombres $|n_1|$ et $|n_2|$ et λ désignant un nombre indépendant de n.

C. *Si α et β sont incommensurables tous les deux et l'un d'eux, p. ex. α, satisfait à l'inégalité* (38).

En appliquant les résultats des sections précédentes on aura ainsi le

Corollaire 3:

La distribution des zéros de la fonction $F(z)$ sera ordinaire, si l'un des nombres α, β, p. ex. α est incommensurable et

1° *égal à un nombre algébrique,*

2° *égal au rapport de deux logarithmes de nombres algébriques, en particulier égal au logarithme vulgaire d'un nombre algébrique,*

3° *égal au rapport de deux arcs dont les sinus ou les tangentes sont algébriques,*

4° *égal au rapport de deux intégrales elliptiques*

$$\int_{z_1}^{z_1'} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}, \qquad \int_{z_2}^{z_2'} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

z_1, z_1', z_2, z_2', g_2 *et* g_3 *étant des nombres algébriques, parmi lesquels* z_1' *et* z_2' *peuvent aussi être infinis.*

Les cas 2° et 3° peuvent être regardés comme cas particuliers du cas 4°. En appliquant un résultat dû à HERMITE sur la fonction exponentielle[1], j'ai pu suppléer les cas précédents par les suivants

5° *égal au logarithme népérien d'un nombre commensurable,*

6° *égal à e^ρ, ρ étant commensurable;*

cependant, cela m'entraînerait trop loin d'en donner les démonstrations. En appliquant les recherches bien connues sur la fonction exponentielle de HERMITE, de LINDEMANN et d'autres et en suivant un procédé indiqué par M. BOREL[2] on arriverait sans doute à compléter les cas 5° et 6° par d'autres cas très généraux.

On voit nettement ici quel rôle joue la nature arithmétique des constantes α et β.

---

[1] *Cours lithographié,* IV[e] édition, p. 73.

[2] Comptes Rendus, 6 mars 1899.