SUR LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE D'UNE SÉRIE DE TAYLOR

PAR

HELGE VON KOCH

À STOCKHOLM.

La question de trouver une expression générale pour le prolongement analytique d'une série de TAYLOR en dehors de son cercle de convergence, abordée en 1896 par M. BOREL à l'aide de sa méthode de sommation exponentielle, a fait dans les dernières années des progrès considérables[1], grâce surtout aux recherches de M. MITTAG-LEFFLER[2].

Le théorème fondamental démontré par M. MITTAG-LEFFLER, qui est le résultat le plus complet obtenu jusqu' à présent sur ce sujet, peut s'énoncer de la manière suivante.

Soit

$$\mathfrak{P}(z \mid a) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

une série de TAYLOR convergente dans le voisinage de $z=a$; on peut former avec les coefficients c — et cela de plusieurs manières différentes — une série de polynômes $S(z)$ qui à l'intérieur de l'étoile principale A appartenant aux coefficients c[3] converge et représente la branche uniforme

[1] On trouve un exposé des principaux travaux se rapportant à ce sujet dans les livres suivants:

BOREL, *Leçons sur les séries divergentes;* Paris, Gauthier-Villars, 1901;

HADAMARD, *La série de Taylor et son prolongement analytique;* Paris, C. Naud, 1901.

[2] *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène:* Acta Mathem.; t. 23, p. 43; t. 24, p. 183 et 205.

[3] Pour la définition de *l'étoile*, voir le mém. cité de M. MITTAG-LEFFLER (voir notamment Acta Math. t. 23, p. 47 ou t. 24, p. 183 et t. 24, p. 200).

Un point z est, par définition, situé à *l'intérieur* de A si le prolongement analytique de $\mathfrak{P}(z \mid a)$ obtenu en suivant le chemin rectiligne entre les points a et z est *holomorphe* tout le long de ce chemin.

$f(z)$ de fonction analytique définie par l'élément $\mathfrak{P}(z\,|\,a)$ et par son prolongement analytique à l'intérieur de A.

L'étoile principale étant un continuum *limité* (sauf dans le cas particulier où la série $\mathfrak{P}(z\,|\,a)$ converge pour toute valeur de l'argument) et les expressions $S(z)$ de M. MITTAG-LEFFLER cessant, en général, de converger ou de représenter $f(z)$ sur la limite de A, on doit se proposer, pour les points appartenant à cette limite, une question analogue à celle qu'a proposé ABEL (Journal de Crelle, t. 2; Oeuvres complètes, Edition Sylow-Lie, t. 1, p. 618), concernant la valeur que prend $f(z)$ en un point appartenant au cercle de convergence de la série $\mathfrak{P}(z\,|\,a)$.

La question que nous avons en vue peut se formuler de la manière suivante:

Quelle valeur prend la branche $f(z)$ en un point appartenant à la limite de l'étoile principale?

L'objet du présent travail est de résoudre cette question pour une partie L de cette limite qui sera définie au § 3.

Le résultat final auquel nous arrivons au § 3 peut s'énoncer ainsi:

On peut former avec les coefficients c une expression qui converge et représente $f(z)$ non seulement à l'intérieur de l'étoile principale, mais aussi en tout point de L où $f(x)$ est holomorphe.

Pour éclaircir dès maintenant cet énoncé par un exemple, considérons le cas où $f(z)$ est méromorphe dans tout le plan; dans ce cas L n'est autre que la limite complète de A, et notre expression fournit la valeur de $f(z)$ *dans toute l'étendue du plan* (les pôles étant seuls exclus).

Dans le dernier paragraphe, nous montrons comment les expressions obtenues s'appliquent à la recherche des points singuliers situés dans le domaine considéré.

§ 1. *Démonstration d'une formule fondamentale.*

1. La méthode que nous allons employer repose sur la propriété suivante de la fonction exponentielle: si x et s sont des nombres réels et positifs on a

$$(1) \qquad \lim_{s=\infty} x^s e^{-x^s} = \begin{cases} 0 \\ e^{-1} \end{cases}$$

selon que x est *différent* de *un* ou *égal* à *un;* plus généralement, si σ et τ désignent des polynômes en s prenant des valeurs positives dès que s est suffisamment grand, la fonction

$$E(x, s) = x^\sigma e^{-x^\tau}$$

jouit de la propriété

$$(2) \qquad \lim_{s=\infty} E(x, s) = \begin{cases} 0 \\ e^{-1} \end{cases}$$

selon que

$$x \begin{matrix} \neq 1 \\ = 1 \end{matrix}$$

et pour les dérivées de cette fonction par rapport à x on a aussi

$$(3) \qquad \lim_{s=\infty} \frac{d^k}{dx^k} E(x, s) = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1,2,3,\ldots)}$$

pourvu que

$$x \neq 1;$$

quant aux valeurs que prennent ces dérivées pour $x = 1$ nous n'en aurons besoin que dans un cas particulier qui sera étudié plus tard.

A côté de ces propriétés, nous aurons besoin de la remarque suivante: si s est réel et positif et que z désigne une variable complexe, on a

$$\lim_{s=\infty} z^s e^{-z^s} = 0$$

et plus généralement

$$\lim_{s=\infty} E(z, s) = 0$$

tant que

$$|z| < 1.$$

Dans tout ce qui va suivre, la lettre s désignera un nombre *entier* et *positif.* Si u est une fonction de s, le symbole

$$\lim_{s=\infty} u$$

désignera toujours la limite vers laquelle tend u quand s augmente indéfiniment en parcourant la suite des nombres entiers et positifs. Enfin,

σ et τ désigneront deux polynômes donnés en s assujettis à la seule condition d'être égaux à des nombres positifs entiers quand s est positif et entier.

2. Considérons une série de TAYLOR

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \tag{4}$$

convergente dans le voisinage de l'origine; il existe toujours un nombre positif R tel que la fonction $f(z)$ définie dans le cercle $|z| = R$ par prolongement analytique de la série proposée, jouisse des deux propriétés suivantes:

1° $f(z)$ est *méromorphe* à l'intérieur du domaine

$$|z| < R; \tag{5}$$

2° tous les points singuliers de $f(z)$ dans ce domaine sont situés sur la partie positive de l'axe réel.

Dans certains cas, la valeur maximum qu'on peut donner à R coïncide avec la valeur du rayon de convergence de la série donnée; c'est ainsi, par exemple, de la fonction $\log(1 - z)$ qui cesse d'être uniforme dans le voisinage de $z = 1$. Dans d'autres cas, au contraire, R peut avoir des valeurs plus grandes; par exemple, si la fonction définie par la série (4) n'a d'autres singularités que des pôles situés sur la partie positive de l'axe réel, le nombre R peut être pris aussi grand que l'on veut.

Quoiqu'il en soit, il résulte des hypothèses faites que si $f(z)$ a des points singuliers à l'intérieur du cercle (5) et qu'on désigne ces points par

$$a_1, a_2, \dots, a_m$$

on a

$$0 < a_k < R \qquad (k=1,2,\dots,m)$$

et $f(z)$ peut, dans le voisinage de $z = a_k$, être représenté par une expression de la forme suivante:

$$f(z) = G_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) + \mathfrak{P}_k(z - a_k),$$

$G_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right)$ désignant un polynôme en $\frac{1}{x - a_k}$ et $\mathfrak{P}_k(z - a_k)$ étant une série de TAYLOR en $z - a_k$, convergente dans le voisinage de $z = a_k$.

3. Soit maintenant x un point régulier de $f(z)$ situé sur l'axe réel entre o et R; désignons par R_1 un nombre plus petit que R mais plus grand que x et les a_k:

$$0 \leqq x < R_1 < R; \qquad 0 < a_k < R_1 < R;$$

décrivons de l'origine comme centre avec le rayon R_1 un cercle C_1 et considérons l'intégrale suivante, prise dans le sens positif le long de C_1:

$$I = \int\limits_{C_1} \frac{f(z)}{z-x} E\left(\frac{x}{z}, s\right) dz$$

E désignant la fonction définie plus haut.

Comme on a, pour tout point z de C_1:

$$\left| E\left(\frac{x}{z}, s\right) \right| < e \,.\left(\frac{x}{R_1}\right)^\sigma$$

et que

$$\lim_{s=\infty} \sigma = +\infty$$

il en résulte que

$$\lim_{s=\infty} I = 0.$$

D'autre part, comme la fonction sous le signe d'intégration est uniforme et n'admet à l'intérieur de C_1 qu'un nombre fini de points singuliers, savoir les points

$$0, x, a_k \qquad (k=1, 2, \ldots, m)$$

le théorème de Cauchy est applicable et l'on peut écrire, en abrégé:

$$\int\limits_{C_1} = \int\limits_{(0)} + \int\limits_{(x)} + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{(a_k)}$$

$(0), (x), (a_k)$ désignant des petits cercles décrits respectivement des points $0, x, a_k$ comme centres et tels que, à l'intérieur de chacun d'eux, le centre soit le seul point singulier de la fonction

$$\frac{f(z)}{z-x} E\left(\frac{x}{z}, s\right). \tag{6}$$

Le résidu de cette fonction pour $z = x$ étant égal à $e^{-1}f(x)$ on a

$$\int\limits_{(x)} = 2\pi i \,. e^{-1} f(x).$$

Pour calculer le résidu correspondant à un pôle quelconque $z = a_k$, désignons pour abréger ce pôle par a et remarquons q'on peut écrire, dans un certain voisinage de $z = a_k$:

$$\frac{f(z)}{z - x} = \frac{A_1}{z - a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(z - a)^\alpha} + \mathfrak{P}(z - a)$$

α étant l'ordre du pôle considéré, les A étant indépendants de z et $\mathfrak{P}$ étant holomorphe pour $z = a$. Le résidu cherché est donc égal à

$$A_1 E\left(\frac{x}{a}, s\right) + A_2 \frac{d}{da} E\left(\frac{x}{a}, s\right) + \ldots + A_\alpha \frac{1}{\underline{\alpha - 1}} \frac{d^{\alpha-1}}{da^{\alpha-1}} E\left(\frac{x}{a}, s\right)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\int_{(a)} = 2\pi i \, . \sum_{\nu=1}^{\alpha} A_\nu \frac{1}{\underline{\nu - 1}} \frac{d^{\nu-1}}{da^{\nu-1}} E\left(\frac{x}{a}, s\right).$$

Or comme $\frac{x}{a}$ peut être, selon les cas, soit inférieur à 1, soit supérieur à 1 mais n'est égal à 1 pour aucun des pôles a, il résulte de ce qui a été dit plus haut concernant la fonction E et ses dérivées, que l'expression obtenue tend vers *zéro* quand s croît indéfiniment. Nous avons donc:

$$\lim_{s=\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{(a_k)} = 0.$$

Il reste à considérer l'intégrale $\int_{(0)}$. En convenant de désigner généralement par $[F(z)]z^{-1}$ le coefficient de z^{-1} dans le développement d'une fonction F en série de LAURENT dans le voisinage de $z = 0$, nous avons

$$\int_{(0)} = 2\pi i \left[\frac{f(z)}{z - x} E\left(\frac{x}{z}, s\right)\right]_{z^{-1}}.$$

Combinant les résultats obtenus nous obtenons donc enfin

$$e^{-1} f(x) = -\lim_{s=\infty} \left[\frac{f(z)}{z - x} E\left(\frac{x}{z}, s\right)\right]_{z^{-1}}$$

Pour calculer cette expression, remarquons que l'on a, dans le voisinage de $z = 0$:

$$\frac{f(z)}{z - x} = -\left(\frac{c_0}{x} + \frac{c_0 + c_1 x}{x^2} z + \ldots + \frac{c_0 + c_1 x + \ldots + c_\nu x^\nu}{x^{\nu+1}} z^\nu + \ldots\right)$$

$$E\left(\frac{x}{z}, s\right) = \left(\frac{x}{z}\right)^\sigma - \frac{1}{\underline{|1}}\left(\frac{x}{z}\right)^{\sigma+\tau} + \frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{x}{z}\right)^{\sigma+2\tau} - \ldots$$

Le coefficient de z^{-1} dans le développement dont il s'agit est donc égal à

(7) $$-\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{\sigma+\nu\tau-1} x^{\sigma+\nu\tau-1}).$$

4. Il est facile de voir que, quel que soit s, cette série converge pour toute valeur de x et représente une fonction *entière* de cette variable. En effet, désignons par ρ un nombre positif inférieur au rayon de convergence de la série (4). Pour toute valeur (réelle ou complexe) de x remplissant la condition

(8) $$|x| \leqq \rho$$

l'expression

(9) $$c_0 + c_1 x + \ldots + c_{\sigma+\nu\tau-1} x^{\sigma+\nu\tau-1}$$

est, en valeur absolue, moindre qu'une certaine constante g ce qui montre que la série (7) converge *uniformément* dans le domaine (8). D'ailleurs on a, d'après un théorème bien connu

$$|c_\nu| < g\rho^{-\nu}$$

g désignant la valeur maximum de $|f(x)|$ pour tous des points du domaine (8). Par là il résulte facilement que, pour toute valeur de x du domaine suivant

(10) $$|x| \geqq \rho$$

l'expression (9) est inférieure en valeur absolue à l'expression

$$(\sigma + \nu\tau) \cdot g \cdot \left|\frac{x}{\rho}\right|^{\sigma+\nu\tau}$$

ce qui prouve que la série (7) converge uniformément dans le domaine

$$K \geqq |x| \geqq \rho$$

K étant aussi grand qu'on le veut.

Par conséquent, la série étant uniformément convergente à l'intérieur de tout domaine fini, représente nécessairement, comme nous l'avons dit, une fonction entière de x.

Le résultat auquel nous sommes ainsi conduits peut s'énoncer de la manière suivante:

Théorème I. *Soit*

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \tag{4}$$

une série de Taylor *convergente dans le voisinage de* $z = 0$; *soient* σ *et* τ *deux polynômes en* s *prenant des valeurs entières et positives toutes les fois que* s *est égal à un entier positif et formons la fonction entière*

$$F(x, s) = e \,.\, \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} (c_0 + c_1 x + \dots + c_{\sigma+\nu\tau-1} x^{\sigma+\nu\tau-1}). \tag{11}$$

Pour toute valeur réelle et positive x *telle que la fonction* $f(z)$, *définie par prolongement analytique de la série* (4) *à l'intérieur du cercle*

$$|z| \leqq x, \tag{12}$$

n'admet en dedans ou sur la limite de ce cercle d'autres singularités que des pôles réels, positifs et inférieurs à x *on aura*

$$f(x) = \lim_{s=\infty} F(x, s). \tag{13}$$

5. Parmi les diverses valeurs qu'on peut choisir pour σ et τ, les plus simples sont

$$\sigma = s \text{ et } \tau = s; \tag{14}$$

pour ces valeurs la formule obtenue prend la forme suivante:

$$f(x) = e \lim_{s=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} (c_0 + c_1 x + \dots + c_{s+\nu s-1} x^{s+\nu s-1}). \tag{15}$$

Mais nous verrons plus tard[1] qu'il y a avantage à remplacer les valeurs (14) par les suivantes

$$\sigma = s^2, \; \tau = s \tag{16}$$

ce qui fournit la formule

$$f(x) = e \lim_{s=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{ss+\nu s-1} x^{ss+\nu s-1}) \tag{17}$$

valable, comme les précédentes, pour les valeurs positives de x définies dans le théorème I.

Pour abréger, nous désignerons la série figurant au second membre de (17) par le nom de fonction *associée* de la série de TAYLOR (4) et nous emploierons la notation

$$Ass. \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu = e \, . \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} (c_0 + c_1 z + \ldots + c_{ss+\nu s-1} z^{ss+\nu s-1}).$$

6. La fonction associée jouit de quelques propriétés simples qu'on vérifie immédiatement et dont nous aurons besoin dans la suite. Nous nous bornerons à les énoncer:

Si $f(z)$ est une série de TAYLOR donnée et K une constante quelconque on a

$$Ass. \, Kf(z) = K \, Ass. \, f(z);$$

si $f_1(z)$, $f_2(z)$, .., $f_m(z)$ sont des séries de TAYLOR données et K_1, K_2, .., K_m des constantes quelconques on a

$$Ass. \, \big(K_1 f_1(z) + \ldots + K_m f_m(z)\big) = \sum_{\nu=1}^{m} K_\nu \, Ass. \, f_\nu(z).$$

Pour

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \ldots = \frac{1}{1-z}$$

on a

$$Ass. \frac{1}{1-z} = \frac{1 - e z^{s^2} e^{-z^s}}{1-z};$$

[1] Voir la note à la fin du n:o 16.

si k est un entier positif on a

$$Ass.\ \frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \frac{1}{\underline{|k}} \frac{d^k}{dx^k} \frac{1 - e z^{k+s^2} e^{-z^s}}{1-z};$$

plus généralement, si a est une constante on a

$$Ass.\ \frac{1}{a-z} = \frac{1 - e\left(\frac{z}{a}\right)^{s^2} e^{-\left(\frac{z}{a}\right)^s}}{a-z}$$

$$Ass.\ \frac{1}{(a-z)^{k+1}} = \frac{1}{\underline{|k}} \frac{d^k}{dx^k} \frac{1 - e\left(\frac{z}{a}\right)^{k+s^2} e^{-\left(\frac{z}{a}\right)^s}}{a-z}.$$

§ 2. *Remarques diverses.*

7. Il est facile de transformer les expressions obtenues en des séries de polynômes. Nous nous bornerons à le montrer pour le cas de l'expression (17).

Remarquons à cet effet que l'on a, d'après ce qui a été dit plus haut concernant l'expression (9)

$$|c_0 + c_1 x + \ldots c_{ss+\nu s-1} x^{ss+\nu s-1}| < g + g(s^2 + \nu s)\left(\frac{x}{\rho}\right)^{ss+\nu s}$$

x désignant un nombre positif quelconque et g et ρ ayant la même signification que plus haut. Par là s'obtient facilement, m désignant un entier positif quelconque,

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\nu}} |c_0 + c_1 x + \ldots + c_{ss+\nu s-1} x^{ss+\nu s-1}|$$

$$(18) \qquad < \frac{ge}{\underline{|m}} + \frac{gs}{\underline{|m-1}} \left(\frac{x}{\rho}\right)^{ss+ms} . e^{\left(\frac{x}{\rho}\right)^s} . \left(1 + \frac{s}{m}\right).$$

Or, $\underline{|m}$ étant d'un ordre de grandeur supérieur à celui de $m^m e^{-m}$, on voit que, si l'on prend $m > s^s$, le second membre de (18) tend certainement vers zéro quand s augmente indéfiniment. Il en résulte que si l'on pose

$$F(x, s) = e \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{ss+\nu s-1} x^{ss+\nu s-1}) \tag{19}$$

$$P(x, s) = e \cdot \sum_{\nu=0}^{s^2} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{ss+\nu s-1} x^{ss+\nu s-1}) \tag{20}$$

on aura, quel que soit x:

$$\lim_{s=\infty} F(x, s) = \lim_{s=\infty} P(x, s).$$

Nous obtenons donc le théorème suivant:

Théorème II. *Si l'on forme le polynôme $P(x, s)$ défini par la formule* (20) *la fonction $f(x)$ est représentée par l'expression*

$$f(x) = \lim_{s=\infty} P(x, s) \tag{21}$$

pour toute valeur réelle et positive x telle que $f(z)$ soit méromorphe en dedans et sur la limite du cercle

$$|z| = x$$

et que cette fonction n'admet dans ce cercle que des pôles réels situés entre o *et x.*

Comme on peut écrire

$$\lim_{s=\infty} P(x, s) = P(x, 1) + \sum_{\nu=2}^{\infty} \big(P(x, \nu) - P(x, \nu-1)\big)$$

on obtient par là un développement de $f(x)$ en série de polynômes, valable pour les valeurs réelles et positives de x qui viennent d'être définies.

8. Nous nous sommes borné, dans ce qui précède, à considérer des valeurs réelles et *positives* de la variable x. Pour trouver des formules valables aussi pour des valeurs *négatives*, on n'a qu'à remplacer, dans les formules (13), (15), (17), (21), le nombre s par $2s$, s étant toujours

un nombre entier et positif. Pour le voir, il suffit de remarquer que la fonction $E(x, s)$ introduite plus haut satisfait aux conditions

$$\lim_{s=\infty} E(x, 2s) = \begin{cases} 0 \\ e^{-1} \end{cases}$$

selon que le nombre *réel* (positif ou négatif) x est différent de 1 ou égal à 1 et que l'on a

$$\lim_{s=\infty} \frac{d^k}{dx^k} E(x, 2s) = 0 \qquad (k=1,2,\ldots)$$

pourvu que le nombre réel x soit distinct de 1.

Les développements ainsi obtenus convergent et représentent $f(x)$ en tout point réel x tel que $f(z)$ est holomorphe dans le voisinage de $z = x$ et n'admet, à l'intérieur ou sur la limite du cercle

$$|z| = |x|$$

d'autres singularités que des pôles réels.

Plus généralement, on parvient par un raisonnement analogue à l'énoncé suivant:

Théorème III. Si dans les formules (13), (15), (17), (21) on remplace s par ns, n désignant un entier positif quelconque, ces formules seront valables pour toute valeur de x de la forme

$$x = re^{\frac{2k\pi i}{n}}$$

k étant un nombre quelconque de la suite

$$0, 1, 2, \ldots, n-1$$

et r étant un nombre positif et réel satisfaisant à la condition suivante: $f(z)$ est holomorphe dans le voisinage de $z = x$ et n'admet à l'intérieur ou sur la limite du cercle

$$|z| = |x|$$

d'autres singularités que des pôles

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

tels que

$$|a_\nu| < |x|, \qquad a_\nu^n = |a_\nu|^n.$$

Supposons, par exemple, que la série proposée (4) représente une fonction $f(z)$ méromorphe dans tout le plan et que tous les pôles a_ν de cette fonction satisfassent à la condition

$$a_\nu^n = |a_\nu|^n$$

n étant un entier positif donné.

Les coupures définissant dans ce cas l'étoile principale de M. Mittag-Leffler sont des demi-droites issues des pôles les plus voisins de l'origine et faisant avec l'axe réel des angles respectivement egaux à

$$0, \frac{2\pi}{n}, 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \ldots, (n-1)\frac{2\pi}{n}.$$

Les expressions de M. Mittag-Leffler fournissent la valeur de $f(z)$ dans tout le plan, *sauf* sur les coupures.

L'expression au contraire que l'on obtient en remplaçant s par ns dans la formule (21), représente (en dehors du cercle de convergence de la série (4)) la fonction $f(z)$ *seulement* sur les coupures dont il s'agit.

§ 3. *Prolongement analytique à l'intérieur de l'étoile méromorphe.*

9. Soit

$$\mathfrak{P}(z|a) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots \tag{22}$$

une série de Taylor convergente dans le voisinage de $z = a$. Rappelons comment on définit, d'après M. Mittag-Leffler, *l'étoile principale* correspondant aux constantes c.

Considérons une ligne droite l_θ issue du point $z = a$ et faisant un angle θ avec l'axe réel; formons le prolongement analytique de la série $\mathfrak{P}(z|a)$ en suivant cette droite. Il pourra se faire qu'on arrive à un point au delà duquel le prolongement analytique est impossible; si un tel point existe nous le désignerons par P_θ et nous désignerons par l'_θ la demi-droite obtenue en prolongeant indéfiniment l_θ au delà du point P_θ.

Enfin, θ variant depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 2\pi$, nous ferons correspondre à chaque valeur de θ une *coupure* savoir la demi-droite l'_θ qui vient d'être définie (dans le cas où P_θ est infiniment éloigné de $z = a$, il n'y aura pas de coupure correspondante).

Ce qui reste du plan après qu'on a fait toutes ces coupures est l'étoile principale introduite par M. MITTAG-LEFFLER.

C'est un domaine simplement connexe A, à l'intérieur duquel la série $\mathfrak{P}(z \mid a)$ et son prolongement analytique définissent une branche uniforme d'une fonction analytique.

Dans ce qui suit nous désignerons cette branche par $f(z)$.

Les points P_θ sont appelés par M. MITTAG-LEFFLER des *sommets* de l'étoile A. Le *sommet* correspondant à une valeur déterminé θ n'est donc autre chose que le premier point singulier de la branche $f(z)$ qu'on rencontre en parcourant la demi-droite l_θ.

Les expressions découvertes par M. MITTAG-LEFFLER fournissent, comme on sait, la valeur de $f(z)$ dans tout le plan sauf sur les coupures l'_θ. Ce qui reste à faire, c'est de chercher la valeur de $f(z)$ quand la variable z, en suivant un chemin intérieur à l'étoile A, se rapproche d'un point appartenant à une coupure.

Considérons un sommet quelconque P_θ; si ce sommet n'est qu'un *pôle* de $f(z)$ il pourra arriver qu'en partant de P_θ et parcourant la coupure l'_θ, on ne rencontre jamais d'autres singularités de $f(z)$ que des *pôles;* dans ce cas nous désignerons la coupure l'_θ par l''_θ. Dans le cas contraire, on rencontre, en parcourant l'_θ, un premier point singulier de $f(z)$ qui ne soit pas un pôle. Nous désignerons le segment entre ce point et le point P_θ par l''_θ.

L'ensemble des segments l''_θ qu'on obtient ainsi en faisant varier θ de 0 jusqu'à 2π, sera désigné par L.

Nous nous proposons de former des expressions qui représentent $f(z)$ non seulement à l'intérieur de A mais aussi pour les points appartenant à L.

Si à l'ensemble des points intérieurs à l'étoile A on joint l'ensemble L, on obtient une étoile nouvelle M qui pourra s'appeler *l'étoile méromorphe* appartenant aux constantes c puisque c'est l'étoile la plus étendue à l'intérieur de laquelle $f(z)$ est méromorphe[1]. Pour en distinguer l'étoile A, on pourrait appeler celle-ci *l'étoile holomorphe* appartenant aux constantes c.

En adoptant cette terminologie, le problème que nous nous proposons à résoudre peut se formuler ainsi:

Former une expression de $f(z)$ valable en tout point régulier z à l'intérieur de l'étoile méromorphe M.

10. Pour ramener ce problème au cas étudié au § 1, nous allons nous servir de la méthode de représentation conforme employée par M. Mittag-Leffler dans la troisième note (Acta mathematica, t. 24, p. 205). Cette méthode dépend d'une fonction dite »fonction génératrice» qui peut être définie d'une infinité de manières différentes. Pour notre but, la fonction génératrice la plus commode paraît être celle introduite et employée par M. Fredholm[2]. Cette fonction est définie par l'égalité

$$\varphi(u, \beta) = \frac{\log(1 - \beta u)}{\log(1 - \beta)} \tag{23}$$

où β est un nombre réel assujetti aux conditions

$$0 \leqq \beta < 1, \tag{24}$$

et jouit des propriétés suivantes:

Quand u décrit la circonférence

$$|u| = 1 \tag{25}$$

dans le sens positif, φ décrit dans le même sens un contour fermé S_β comprenant dans son intérieur le segment $0 - 1$ de l'axe réel; aux valeurs

$$u = 0, u = 1$$

[1] Un point z est à considérer comme intérieur à l'étoile M si on peut décrire autour du segment rectiligne joignant les points a et z un contour fermé T tel que $f(z)$ soit *méromorphe* à l'intérieur de T.

[2] Öfversigt af Kongl. Vet. Ak. Förh. 1901, p. 203. Voir aussi une note de M. Mittag-Leffler: *Sur une formule de M. Fredholm,* Comptes rendus (Paris), le 25 Mars 1901.

correspondent respectivement les valeurs

$$\varphi = 0, \varphi = 1$$

et à une valeur réelle u entre 0 et 1 correspond une valeur de φ entre 0 et 1; pour $\beta = 0$ le contour S se réduit à une circonférence décrite de l'origine comme centre avec un rayon égal à un; enfin, quand β tend vers la valeur *un*, le contour S_β devient de plus en plus mince et se confond, à la limite, avec le segment $0 - 1$.

Ceci rappelé, désignons par x un point à l'intérieur de l'étoile méromorphe M dans le voisinage duquel $f(z)$ est holomorphe. Posons

$$\frac{z-a}{x-a} = \varphi(u, \beta); \tag{26}$$

la fonction z de u définie par cette formule réalise la représentation conforme du cercle (25) sur un contour S'_β semblable à S_β et jouissant des propriétés suivantes: aux valeurs

$$u = 0, u = 1$$

correspondent les valeurs

$$z = a, z = x;$$

quand u décrit le segment $0 - 1$, z décrit le segment $a - x$; pour $\beta = 0$ S'_β se réduit à la circonférence

$$|z - a| = |x - a|$$

et quand β tend vers l'unité, S'_β s'aplatit et se raccourcit indéfiniment et se confond, à la limite, avec le segment $a - x$.

Or $f(z)$ étant méromorphe tout le long du segment $a - x$ et holomorphe aux extrémités $z = a$ et $z = x$, on en conclut qu'il existe un nombre positif $B < 1$ tel que, pour toute valeur de β satisfaisant aux conditions

$$B \leqq \beta < 1, \tag{27}$$

$f(z)$ soit méromorphe à l'intérieur du contour S'_β et sur ce contour et que, en outre, tous les pôles de $f(z)$ appartenant à ce domaine soient situés sur le segment rectiligne joignant les points a et x.

Donc, par le changement de variable (26) (où β est assujetti aux conditions (27)), $f(z)$ se transforme en une fonction $f_1(u)$ méromorphe à l'intérieur et sur la limite du cercle

$$|u| = 1$$

et n'admettant dans ce domaine que des pôles réels situés entre $u = 0$ et $u = 1$.

11. Les résultats obtenus au § 1 sont donc applicables à cette fonction $f_1(u)$.

D'après la formule de M. Fredholm (loc. cit. p. 205), le développement de $f_1(u)$ en série de Taylor dans le voisinage de $u = 0$ peut s'écrire sous la forme symbolique très simple

$$f_1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n u^n}{\underline{|n}} \frac{x-a}{H} \frac{d}{da} \left(\frac{x-a}{H} \frac{d}{da} + 1 \right) \cdot\cdot \left(\frac{x-a}{H} \frac{d}{da} + n - 1 \right) f(a)$$

où l'on a posé

$$H = -\log(1-\beta);$$

les coefficients

$$\frac{1}{\underline{|\nu}} \frac{d^\nu}{da^\nu} f(a) = c_\nu$$

qui y figurent sont identiques aux coefficients définissant la série donnée (22)[1].

Comme z se réduit à x pour $u = 1$ on a

$$f(x) = f_1(1)$$

---

[1] En posant

$$\lambda(\lambda+1) \cdot\cdot (\lambda+n-1) = \lambda^n + E_1^{(n)} \lambda^{n-1} + \cdot\cdot + E_{n-1}^{(n)} \lambda$$

le produit symbolique

$$\frac{x-a}{H} \frac{d}{da} \left(\frac{x-a}{H} \frac{d}{da} + 1 \right) \cdots \left(\frac{x-a}{H} \frac{d}{da} + n - 1 \right) f(a)$$

peut être remplacé par le polynôme

$$E_{n-1}^{(n)} c_1 \frac{x-a}{H} + \cdot\cdot + E_1^{(n)} \underline{|n-1} \cdot c_{n-1} \left(\frac{x-a}{H} \right)^{n-1} + \underline{|n} \cdot c_n \cdot \left(\frac{x-a}{H} \right)^n$$

et il suffit donc à appliquer à $f_1(1)$ les développements des paragraphes précédents pour avoir l'expression cherchée de $f(x)$ dans toute l'étoile méromorphe.

En posant pour abréger:

$$(28)\quad \begin{cases} C_0(x,\beta) = f(a), \\ C_n(x,\beta) = \dfrac{\beta^n}{|\underline{n}} \dfrac{x-a}{H}\dfrac{d}{da}\left(\dfrac{x-a}{H}\dfrac{d}{da}+1\right)\cdot\cdot\left(\dfrac{x-a}{H}\dfrac{d}{da}+n-1\right)f(a) \end{cases}$$

on a, en employant la notation introduite au n:o 6,

$$Ass.\ f_1(u) = e \, . \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{|\underline{\nu}} (C_0 + C_1 u + \cdot\cdot + C_{ss+\nu s-1} u^{ss+\nu s-1}) \, .$$

Mettant $u = 1$ et appliquant le théorème I nous obtenons donc le théorème suivant:

Théorème IV. *Si l'on choisit un nombre positif β d'après les conditions* (27) *et qu'on forme la fonction suivante:*

$$(29)\qquad F(x,\beta,s) = e \, . \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{|\underline{\nu}} (C_0 + C_1 + \cdot\cdot + C_{ss+\nu s-1})$$

où les C sont des polynômes en x définis par les formules (28), *on aura*

$$(30)\qquad f(x) = \lim_{s=\infty} F(x,\beta,s)$$

x étant un point régulier de $f(z)$ à l'intérieur de l'étoile méromorphe M.

Le point x étant fixé, le nombre β doit être supérieur à un certain nombre B qui dépend, en général, de x; si l'on fixe la valeur de β, la formule (30) n'est valable que dans un certain domaine M' intérieur à M. Mais nous savons d'après ce qui précède que, quand β croît indéfiniment vers la valeur *un*, le domaine M' s'étend de plus en plus et se confond, à la limite, avec M. Il en résulte que l'expression

$$\lim_{\beta=1} \lim_{s=\infty} F(x,\beta,s)$$

converge et représente la valeur de $f(x)$ en tout point régulier x à l'intérieur de l'étoile méromorphe.

12. On peut simplifier la formule ainsi obtenue:

$$f(x) = \lim_{\beta=1} \lim_{s=\infty} F(x, \beta, s) \tag{31}$$

de la manière suivante.

Soit x en point régulier fixe de $f(z)$ à l'intérieur de l'étoile méromorphe et soit E un nombre positif aussi petit qu'on le veut; d'après ce que nous avons vu, on peut faire correspondre à tout nombre β remplissant (27) un nombre positif s' tel que l'on ait

$$|f(x) - F(x, \beta, s)| < \frac{E}{2} \tag{32}$$

dès que:

$$s > s'.$$

Soit ρ_1 un nombre positif inférieur au rayon de convergence de la série (22) et désignons par G le maximum du module de cette série à l'intérieur du domaine

$$|z - a| \leqq \rho_1. \tag{33}$$

Soit ρ un nombre positif tel que, pour toute valeur de u du domaine

$$|u| \leqq \rho \tag{34}$$

la valeur correspondante de z, définie par l'égalité (26), satisfasse à la condition

$$|z - a| \leqq \rho_1.$$

Comme on a

$$|f(z)| \leqq G$$

quand z appartient au domaine (33), on a

$$|f_1(u)| \leqq G$$

tant que u reste dans le domaine (34).

Il en résulte que les coefficients $C_\nu(x, \beta)$ figurant dans le développement

$$f_1(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu(x, \beta) u^\nu$$

satisfont à la condition suivante:

$$|C_\nu(x, \beta)| \leqq G \rho^{-\nu}$$

d'où résulte, par le même raisonnement qui nous a conduit à l'inégalité (18), que l'on a

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\nu}} |C_0 + C_1 + \ldots + C_{ss+\nu s-1}|$$
$$< \frac{Ge}{\underline{|m}} + \frac{Gs}{\underline{|m-1}} \left(\frac{1}{\rho}\right)^{ss+ms} e^{\left(\frac{1}{\rho}\right)^s} \left(1 + \frac{s}{m}\right)$$

m étant un entier positif quelconque.

Or, le second membre dans cette formule tendant vers zéro avec $\frac{1}{s}$ si l'on prend

$$m > s',$$

on aura, en posant

(35) $$P(x, \beta, s) = e \,.\, \sum_{\nu=0}^{s'} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} \{ C_0(x, \beta) + C_1(x, \beta) + \ldots + C_{ss+\nu s-1}(x, \beta) \}$$

l'inégalité suivante:

(36) $$|F(x, \beta, s) - P(x, \beta, s)| < \frac{E}{2}$$

dès que

$$s > s''$$

où s'' est un nombre positif suffisamment grand.

Il résulte alors des formules (32) et (35) que l'on a

$$|f(x) - P(x, \beta, s)| < E$$

tant que l'entier positif s est supérieur à s' et à s''.

Nous pouvons, par conséquent, énoncer le théorème suivant:

Théorème V. *Soit*

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

une série de TAYLOR *convergente dans le voisinage de $z = a$ et désignons par $f(z)$ la branche uniforme de fonction analytique définie par cette série et son prolongement analytique à l'intérieur de l'étoile méromorphe M appartenant aux constantes c. Si l'on définit les polynômes C_n par la formule* (28) *et le polynôme $P(x, \beta, s)$ par l'égalité* (35) *on aura*

(37) $$f(x) = \lim_{\beta=1} \lim_{s=\infty} P(x, \beta, s)$$

en tout point régulier de $f(x)$ à l'interieur de l'étoile M.

On peut en déduire facilement que $f(x)$ est représentable à l'intérieur de M par une *série de polynômes.*

13. Par définition, l'étoile M est un domaine continu comprenant d'une part tous les points appartenant à l'étoile holomorphe (ou principale) A, d'autre part la partie des coupures l_0' que nous avons désignée par L.

Soit X un domaine compris tout entier en dedans de A; il résulte facilement des formules précédentes que le développement (37) converge *uniformément* dans X.

Soit d'autre part L_1 un segment d'une coupure quelconque appartenant à L tel qu'il n'y a sur ce segment (y compris les points qui le limitent) aucun point singulier de $f(x)$. La formule (37) non seulement a lieu le long de L_1, mais le second membre converge *uniformément* sur ce segment.

Au contraire, dans une aire embrassant un tel segment L_1, l'expression ne converge pas uniformément puisque le nombre B (n:o 10) tend vers *l'unité* quand x se rapproche de L[1].

14. Dans le cas particulier où tous les pôles de $f(x)$ à l'intérieur de l'étoile méromorphe sont situés sur une ligne droite l issue du point a, il suffit, pour avoir une expression de $f(x)$ valable sur l, de mettre dans les formules précédentes $\beta = 0$ ce qui donne

$$H = 0$$

$$C_n(x, \beta) = \frac{(x-a)^n}{\lfloor n} \frac{d^n}{da^n} f(a) = c_n (x-a)^n$$

$$P(x, \beta, s) = e \, . \sum_{\nu=0}^{s^s} \frac{(-1)^\nu}{\lfloor \nu} (c_0 + c_1(x-a) + \,.\,.\, + c_{ss+\nu s-1}(x-a)^{ss+\nu s-1})$$

et enfin

$$f(x) = e \, . \lim_{s=\infty} \sum_{\nu=0}^{s^s} \frac{(-1)^\nu}{\lfloor \nu} (c_0 + c_1(x-a) + \,.\,.\, + c_{ss+\nu s-1}(x-a)^{ss+\nu s-1})$$

pour tout point régulier situé sur l.

La formule générale (37) se réduit donc, dans le cas envisagé, à celle que nous avons obtenu au § 2.

[1] D'ailleurs, d'après une remarque que je dois à M. PHRAGMÉN, *aucune* série de polynômes représentant $f(x)$ dans M ne saurait converger uniformément dans une telle aire.

15. Comme application du résultat obtenu, considérons le cas où la série (22) définit une fonction $f(z)$ méromorphe dans tout domaine fini. Dans ce cas, l'étoile méromorphe M embrasse tout le plan et nous avons le résultat suivant: *l'expression:*

$$\lim_{\beta=1}\lim_{s=\infty} P(x, \beta, s)$$

définie plus haut converge et représente $f(x)$ en tout point régulier du plan.

§ 4. *Recherche des points singuliers. — Conclusion.*

16. Dans ce qui précède nous avons formé des expressions de $f(x)$ valables en tout point régulier de $f(x)$ à l'intérieur de l'étoile méromorphe M.

Une question qui se pose nécessairement est donc la suivante: étant donné un point ξ à l'intérieur de l'étoile M, décider si ξ est un point *régulier* ou un point *singulier* pour $f(x)$.

Pour étudier cette question, il convient d'employer les notations introduites au n:o 6.

Supposons qu'un point donné ξ à l'intérieur de l'étoile M soit un point singulier de $f(z)$; comme $f(z)$ est méromorphe dans le voisinage de $z = \xi$ nous pouvons écrire

$$f(z) = \frac{A_1}{\xi - z} + \frac{A_2}{(\xi - z)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(\xi - z)^\alpha} + \mathfrak{P}(z - \xi) \tag{38}$$

en désignant par α l'ordre du pôle ξ, par A certaines constantes et par $\mathfrak{P}$ une fonction holomorphe au point $z = \xi$.

Par la transformation

$$z - a = (\xi - a)\frac{\log(1 - \beta u)}{\log(1 - \beta)} \tag{39}$$

employée plus haut $f(z)$ se transforme en une fonction $f_1(u)$; d'après ce qui précède, il y a un nombre positif $B < 1$ tel que, pour toute valeur de β remplissant les conditions

$$B \leqq \beta < 1, \tag{40}$$

cette fonction $f_1(u)$ soit méromorphe à l'intèrieur et sur le contour du cercle

$$(41) \qquad |u| = 1$$

et que tous les pôles de $f_1(u)$ dans ce domaine soient réels et positifs. Comme les points $z = \xi$, $u = 1$ se correspondent, le point $u = 1$ est un pôle de $f_1(u)$ et l'on peut écrire

$$(42) \qquad f_1(u) = \frac{B_1}{1-u} + \frac{B_2}{(1-u)^2} + \ldots + \frac{B_\alpha}{(1-u)^\alpha} + \mathfrak{P}_1(u-1)$$

les B étant des constantes qui s'expriment linéairement par rapport aux A et $\mathfrak{P}_1$ étant holomorphe pour $u = 1$.

Il nous faut maintenant calculer la valeur de la fonction *associée* de $f_1(u)$ pour $u = 1$ c'est-à-dire la valeur de la fonction $F(x, \beta, s)$, définie par la formule (29), au point correspondant $x = \xi$.

En vertu des propriétés de la fonction associée (n:o 6) on a

$$(43) \qquad Ass.\ f_1(u) = Ass.\ \mathfrak{P}_1(u-1) + \sum_{k=0}^{\alpha-1} B_{k+1}\ Ass.\ \frac{1}{(1-u)^{k+1}}$$

$$= Ass.\ \mathfrak{P}_1(u-1) + \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{B_{k+1}}{\underline{|k}} \frac{d^k}{du^k} \frac{1 - e\,u^{k+\sigma} e^{-u^s}}{1-u}$$

où l'on a posé $s^2 = \sigma$ pour abréger.

Or comme

$$\frac{1 - e\,u^{k+\sigma} e^{-u^s}}{1-u} = e \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} (1 + u + u^2 + \ldots + u^{\sigma+\nu s+k-1})$$

on peut écrire

$$\frac{d^k}{du^k} \frac{1 - e\,u^{k+\sigma} e^{-u^s}}{1-u} = e \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}} \frac{d^k}{du^k} \frac{1 - u^{k+\sigma+\nu s}}{1-u}$$

et il suffit donc de calculer la valeur de la fonction

$$\frac{d^k}{du^k} \frac{1 - u^{k+\sigma+\nu s}}{1-u}$$

pour $u = 1$. A cet effet, remarquons que l'on a, m désignant un entier positif quelconque,

$$\left(\frac{d^k}{du^k}\frac{1-u^{k+m}}{1-u}\right)_{u=1} = \sum_{\nu=k}^{m+k-1} \nu(\nu-1)\,.\,.(\nu-k+1) = \frac{m(m+1)\,.\,.(m+k)}{k+1}.$$

Il en résulte

$$\left(\frac{d^k}{du^k}\frac{1-eu^{k+\sigma}e^{-u^s}}{1-u}\right)_{u=1} = e\,.\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}}\frac{(\sigma+\nu s)(\sigma+\nu s+1)\,.\,.(\sigma+\nu s+k)}{k+1}$$

$$= \frac{e}{k+1}\left(\frac{d^{k+1}}{du^{k+1}}u^{k+\sigma}e^{-u^s}\right)_{u=1}$$

quel que soit l'entier positif k. (Pour $k = 0$, il faut supprimer l'opération $\frac{d^k}{du^k}$ devant la fraction dans le premier membre.)

En formant, d'après la formule classique, la dérivée k^{me} du produit des deux fonctions

$$u^{k+\sigma} \text{ et } e^{-u^s}$$

on obtient, pour $u = 1$, une expression de la forme suivante:

$$\left(\frac{d^{k+1}}{du^{k+1}}u^{k+\sigma}e^{-u^s}\right)_{u=1} = \theta_k(\sigma, s)$$

où θ_k désigne un polynôme entier de degré $k+1$ en σ et s dans lequel le coefficient de σ^{k+1} est égal à e^{-1}. Pour $\sigma = s^2$, on obtient, donc un polynôme $\theta_k(s^2, s)$ dans lequel le coefficient de la plus haute puissance de s, savoir s^{2k+2}, est égal à e^{-1}.

Nous pouvons donc écrire

$$\left(\frac{d^k}{du^k}\frac{1-e\,u^{k+\sigma}e^{-u^s}}{1-u}\right)_{u=1} = \frac{s^{2k+2}}{k+1} + \cdots$$

les termes omis du second membre étant de degré inférieur à $2k+2$ par rapport à s.

Portant ces valeurs dans la formule (43) et mettant $u = 1$ on obtient, en se rappelant la relation

$$(Ass.\ f_1(u))_{u=1} = F(\xi, \beta, s),$$

la formule suivante

$$F(\xi, \beta, s) = K_s + \frac{B_\alpha}{\underline{|\alpha}} s^{2\alpha} + \ldots \tag{44}$$

les termes omis étant linéaires et homogènes par rapport à $B_{\alpha-1} \ldots B_1$ et de degré moindre que $2\alpha - 1$ par rapport à s; K_s désigne la valeur que prend la fonction

$$Ass.\ \mathfrak{P}_1(u-1)$$

pour $u = 1$.

Comme $\mathfrak{P}_1(u-1)$ est holomorphe au point $u = 1$ on a d'après le théorème I,

$$\lim_{s=\infty} K_s = \mathfrak{P}_1(0).$$

Le nombre β ayant une valeur fixe satisfaisant aux conditions (40) et A_α désignant par hypothèse le coefficient de la plus haute puissance négative de $\xi - z$ dans le développement de $f(z)$, on voit sans difficulté que B_α est une quantité différente de zéro.

La formule (44) montre, par suite, que le pôle ξ satisfait nécessairement à la condition[1]

$$\lim_{s=\infty} |F(\xi, \beta, s)| = \infty. \tag{45}$$

17. Ce résultat fournit déjà un critère pour décider si ξ est singulier ou régulier. Mais on peut le simplifier en remplaçant F par le polynôme P défini par la formule (35).

En effet, β étant un nombre satisfaisant aux conditions (40) et ξ étant un point quelconque à l'intérieur de l'étoile méromorphe, nous savons, d'après ce qui a été démontré au n:o 12 que l'on a

$$\lim_{s=\infty} (F(\xi, \beta, s) - P(\xi, \beta, s)) = 0 \tag{46}$$

d'où l'on voit que la condition

$$\lim_{s=\infty} |P(\xi, \beta, s)| = \infty$$

---

[1] Si au lieu des valeurs (16) de σ et τ nous avions choisi les valeurs plus simples (14), c'est-à-dire si nous nous étions servi de $x^s e^{-x^s}$ comme facteur de discontinuité au lieu de $x^{s^2} e^{-x^s}$, la formule (45) n'aurait pas eu lieu en général.

est ***nécessaire*** pour que ξ soit un pôle de $f(z)$. Cette condition est d'ailleurs ***suffisante*** aussi, car pour un point *régulier* ξ l'égalité (45) ne peut pas avoir lieu puisque nous savons que l'on a

$$\lim_{s=\infty} P(\xi, \beta, s) = f(\xi)$$

dans ce cas.

On peut ajouter que, une fois décidé si ξ est un pôle ou non, les formules précédentes permettent d'évaluer les valeurs des coefficients A figurant dans le développement (38).

Dans ce qui précède, je me suis borné à former et à étudier le prolongement analytique d'une série de TAYLOR à l'intérieur de son étoile *méromorphe.*[1] Mais par la considération de certains exemples, j'ai trouvé que les formules obtenues restent vraies dans des domaines encore plus étendus. Et il me paraît probable que les méthodes employées doivent pouvoir s'étendre à la solution de ce problème général:

Former le prolongement analytique de $f(z)$ à l'intérieur de son étoile ***uniforme,*** c'est-à-dire dans l'étoile la plus étendue de centre a à l'intérieur de laquelle $f(z)$ reste uniforme.

Mais cette nouvelle question m'entraînerait trop loin et je me borne à la signaler.[2]

---

[1] Un résumé de cette recherche a été publié précédemment dans ma note »*Applications nouvelles de la fonction exponentielle*» (Bih. till K. Svenska Vet.-Ak. Förh., 12 Février 1902).

[2] Pendant l'impression du présent travail j'ai eu connaissance d'une note très intéressante que vient de publier M. PAINLEVÉ sur le même sujet (*Comptes rendus,* 7 Juillet 1902). Par une méthode entièrement différente de la nôtre M. PAINLEVÉ arrive à des résultats qui ont beaucoup de rapport aux précédents et parvient même, dans certains cas, à une représentation de la fonction à l'extérieur de l'étoile uniforme. Cependant il me semble que les formules que j'ai obtenues présentent, dans leur domaine de validité, certains avantages. Dans la recherche des singularités, par exemple, elles ne sauraient être remplacées par les formules de M. PAINLEVÉ, car celles-ci n'indiquent pas, semble-t-il, si un point du domaine considéré est singulier ou non.