ÜBER DIE ANALYTISCHE DARSTELLUNG DER AUTOMORPHEN FUNKTIONEN BEI HYPERELLIPTISCHEN RIEMANNSCHEN FLÄCHEN.

VON

P. J. MYRBERG

in HELSINGFORS.

Inhalt:

Seite

Einleitung 196

A. *Geometrisch-gruppentheoretischer Teil:*

1 §. Definition der Gruppe Γ_u 199
2 §. Konstruktion des Fundamentalbereichs von Γ_u 204
3 §. Approximation von Γ_u durch fuchssche Gruppen 209
4 §. Aufbau und Abschätzung des Polygonnetzes von $\Gamma_{n,m}$ 211
5 §. Darstellung der Gruppe Γ_u durch Grenzübergang aus Γ_n 220
6 §. Konstruktion der geschlossenen Linien L_n 221

B. *Funktionentheoretischer Teil:*

7 §. Darstellung der Hauptfunktionen von Γ_u durch unendliche Reihen . 226
8 §. Produktdarstellung der Hauptfunktionen von Γ_u 232
9 §. Direkte Darstellung der Funktion $u(z)$ 233
10 §. Darstellung der automorphen Funktionen von Γ_{xy} durch elliptische Thetafunktionen 235
11 §. Charakterisierung der Thetafunktionen durch ihre Eigenschaften . . 241
12 §. Darstellung der Funktionen $x(z)$ und $y(z)$ durch unendliche Produkte 244
13 §. Reihendarstellung der automorphen Funktionen von Γ_{xy} 251
14 §. Darstellung der hyperelliptischen Integrale 255
15 §. Verallgemeinerungen 258

Einleitung.

Wir haben in einer früheren Arbeit[1] gezeigt, wie bei denjenigen fuchsschen Gruppen vom Geschlecht Null, deren Fundamentalbereich lauter verschwindende Winkel besitzt, die automorphen Funktionen direkt durch bedingt konvergente Reihen und Produkte dargestellt werden können, welche von den Elementen der Funktion in einfachster Weise abhängen und welche zugleich eine formale Invarianz den Substitutionen der Gruppe gegenüber aufweisen. Zweck der folgenden Betrachtungen ist, unsere Methode auf Gruppen höheren Geschlechtes zu übertragen. Wir werden der Kürze halber uns hauptsächlich auf die Gruppe der Hauptuniformisierenden der hyperelliptischen Riemannschen Fläche vom Geschlecht zwei

$$y^2 = \prod_{\nu=1}^{6} (x - e_\nu) \qquad : \mathrm{R}$$

beschränken, unsere Ergebnisse können aber ungeändert auf alle hyperelliptischen Riemannschen Flächen und in etwas modifizierter Form sogar auf alle algebraischen Riemannschen Flächen übertragen werden, wie im letzten Kapitel gezeigt wird.[2]

Zur Herleitung der analytischen Ausdrücke für die betreffenden automorphen Funktionen werden wir uns zweier verschiedenen Methoden bedienen, welche zu einander jedoch in enger Beziehung stehen.

Die erste Methode, deren geometrisch-gruppentheoretische Grundlagen in den §§ 1—5 entwickelt werden, beruht auf einer Anwendung der Untergruppen und der zugehörigen Transformationsgleichungen, d. h. derjenigen Gleichungen, welche zwischen den automorphen Funktionen der verschiedenen Gruppen herrschen. Während aber bisher hauptsächlich nur Untergruppen von endlichem Index und algebraische Transformationsgleichungen betrachtet worden sind, haben wir in unseren Untersuchungen mit Untergruppen eines unendlichen Index zu tun, deren Transformationsgleichungen somit transzendent sind. Den Übergang zu den fraglichen Untergruppen vermittelt ein elliptisches Integral der Form

[1] P. J. Myrberg: *Über die analytische Darstellung der automorphen Funktionen durch bedingt konvergente Reihen und Produkte* (Acta mathematica, Bd. 59 (1932)).

[2] Eine vorläufige Mitteilung der Resultate der vorliegenden Arbeit findet man in unserer Note: *Sur une représentation nouvelle des fonctions automorphes* (Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris, t. 197 (1933)).

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-e_\alpha)(x-e_\beta)(x-e_\gamma)(x-e_\delta)}},$$

welches somit in unserer gegenwärtigen Arbeit dieselbe Rolle spielen wird, wie der Logarithmus bei den mit der Modulfunktion verwandten automorphen Funktionen.

Wir gehen zu diesem Zweck von derjenigen Gruppe Γ_x vom Geschlecht Null aus, welche der polymorphen Funktion $z(x)$ der in den Punkten e_ν markierten und mit der Verweigungszahl zwei versehenen schlichten x-Ebene entspricht. Offenbar ist $z(x)$ identisch mit der Hauptuniformisierenden von R, und est ist somit jede relativ zur Fläche R unverzweigte Funktion eine eindeutige Funktion von z. Dies ist u. a. mit jedem elliptischen Integral u der Fall. Diejenigen Substitutionen von Γ_x, welche u ungeändert lassen, bilden eine ausgezeichnete Untergruppe Γ_u, welche eine fuchsoide Gruppe vom Geschlecht Null ist. Sie besitzt in der Funktion $u(z)$ eine Hauptfunktion, d. h. eine automorphe Funktion, welche den Fundamentalbereich von Γ_u schlicht abbildet. Es ist leicht, die Gruppe Γ_u durch Grenzübergang aus einer unendlichen Folge fuchsscher Gruppen vom Geschlecht Null zu gewinnen. Diese Gruppen sind noch auf gewissen Teilen des Hauptkreises diskontinuierlich, woraus folgt, dass ihre Hauptfunktionen durch absolut konvergente Reihen und Produkte der einfachen Form

$$\sum \frac{A_\nu}{z-a_\nu} \quad \text{bzw.} \quad \prod \frac{z-b_\nu}{z-a_\nu}$$

dargestellt werden können. Durch Grenzübergang gewinnt man hieraus für die Hauptfunktionen von Γ_u Ausdrücke der nämlichen Form, die aber jetzt bedingt konvergent sind.

Die Transformationsgleichung für die Gruppen Γ_u und Γ_x wird jetzt von der durch Inversion des Integrals u erhaltenen doppeltperiodischen Funktion

$$x = x(u)$$

dargestellt. Die automorphen Funktionen von Γ_x können demnach aus doppeltperiodischen Funktionen von u und der fuchsoiden Funktion $u(z)$ zusammengesetzt werden. Um eine analoge Darstellung für die automorphen Funktionen der zu R gehörigen Gruppe Γ_{xy} zu gewinnen, bedarf man noch eines zweiten elliptischen Integrals der obigen Form, so dass alle Verzweigungspunkte von R unter den Verzweigungspunkten der elliptischen Integrale vorkommen werden. Es wird nämlich bewiesen, dass jede automorphe Funktion von Γ_{xy} in der Form

$$F(z) = E(u(z),\ v(z))$$

darstellbar ist, wo E eine eindeutige Funktion ihrer Argumente bezeichnet. Durch Heranziehung bekannter Ausdrücke aus der Theorie der elliptischen Funktionen gewinnt man hieraus bemerkenswerte Darstellungen für die automorphen Funktionen von Γ_{xy}.

Indem man z. B. die Jacobische elliptische Thetafunktion $H(u)$ einführt, bekommt man für die automorphen Funktionen den Ausdruck

$$F(z) = \frac{f_1(z)}{f(z)}$$

als Quotient zweier ganzen, d. h. für $|z| < 1$ regulären Funktionen, welche aus den oben genannten Thetafunktionen und den fuchsoiden Funktionen

$$u(z), \quad v(z)$$

zusammengesetzt sind und welche für eine willkürliche Substitution $S(z)$ von Γ_{xy} einer Gleichung der Form

$$f(S(z)) = e^{\alpha_S u(z) + \beta_S} f(z)$$

genügen. Wir haben damit zu einer von den Poincaréschen Thetafunktionen wesentlich verschiedenen Klasse automorpher Thetafunktionen gelangt, die als eine natürliche Verallgemeinerung der elliptischen Thetafunktionen angesehen werden können. Es wird sich zeigen, dass Gleichungen der Form

$$f(S(z)) = e^{g_S(z)} f(z)$$

unter sehr allgemeinen Voraussetzungen betreffs der ganzen Funktionen $g_S(z)$ unsere Thetafunktionen vollkommen charakterisieren.

Unsere Betrachtungen führen ferner zu einer direkten Produktdarstellung der Funktionen $x(z)$ und $y(z)$, welche von den Nullpunkten und Polen in sehr einfacher Weise abhängt und welche zugleich eine formale Invarianz den Substitutionen der Gruppe gegenüber aufweist.

Die zweite der oben erwähnten Methoden, die erst in 12 § angewandt wird, geht von der Tatsache aus, dass es möglich ist, eine unendliche Folge geschlossener, ausserhalb einander liegender und gegen den Hauptkreis konvergierender Kurven

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ \ldots,\ L_n,\ \ldots$$

zu konstruieren, welche die Eigenschaft haben, dass

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{L_n}\left|\frac{dz}{u(z)}\right| = 0.$$

Ist nun $F(z)$ eine beliebige auf den Polygonseiten beschränkte Funktion, so ergibt sich aus der Cauchyschen Integralformel im Falle einfacher Pole eine Darstellung der Form

$$\frac{F(z)}{u(z)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{L_n}\frac{C_\nu}{z-a_\nu}.$$

Insbesondere gewinnt man daraus für die automorphen Funktionen von Γ_{xy} den Ausdruck

$$F(z) = \lim_{n\to\infty}\sum_{L_n}\left[\frac{A_\nu}{z-a_\nu} + C_\nu\Delta(z,\ a_\nu)\right],$$

wo die Zusatzglieder

$$\Delta(z,\ a) = \frac{u(z)-u(a)}{z-a},$$

welche hier die nämliche Rolle spielen wie die Polynome in der Mittag-Lefflerschen Darstellung, für $|z| < 1$, $|a| < 1$ reguläre analytische Funktionen sind. Für die Funktion Δ, welche eine hyperabelsche Funktion der Variablen $(z,\ a)$ ist, wird sich ein expliziter Ausdruck von höchst einfacher Form ergeben.

Unsere zweite Methode wird in 14 § zur Herleitung expliziter Ausdrücke für die Integrale hyperelliptischer Riemannschen Flächen angewandt.

Zum Abschluss wird im letzten Paragraphen gezeigt, wie unsere Betrachtungen auf Riemannsche Flächen höheren Geschlechtes übertragen werden können.

A. Geometrisch-gruppentheoretischer Teil.

Definition der Gruppe Γ_u.

1. Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildet die in den Punkten

$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6 \qquad (1)$$

markierte komplexe x-Ebene (Fig. 1). Es sei $z(x)$ diejenige bis auf eine lineare Transformation bestimmte polymorphe Funktion, welche in den Punkten (1) Windungspunkte zweiter Ordnung besitzt. Die genannte Funktion ist dann offenbar identisch mit der Hauptuniformisierenden der hyperelliptischen Riemannschen Fläche

$$y^2 = \prod_{\nu=1}^{6} (x - e_\nu), \tag{2}$$

also mit derjenigen Funktion, welche die einfach zusammenhängende, relativ unverzweigte Überlagerungsfläche von (2) auf eine schlichte Kreisfläche, welche wir mit dem Inneren des Einheitskreises

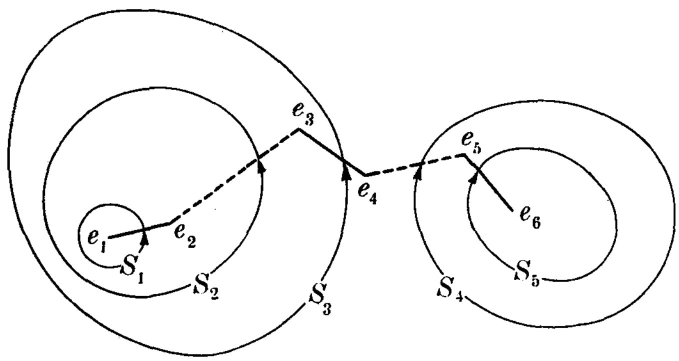

Fig. 1.

$$|z| = 1 \qquad :H$$

identifizieren wollen, konform abbildet. Die verschiedenen Zweige der Funktion $z(x)$ hängen von einander durch lineare Substitutionen

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) \tag{3}$$

ab, die eine fuchssche Gruppe Γ_x vom Geschlecht Null bilden, für welche H ein Haupt- und Grenzkreis ist.

Wir schneiden nun die x-Ebene längs einer einfachen, durch die Punkte (1) gehenden Linie C. Die so geschnittene x-Ebene wird durch einen Zweig von $z(x)$ auf ein krummliniges (in Fig. 2 mit B_0 bezeichnetes) Polygon B_x abgebildet, welches einen Fundamentalbereich für Γ_x bildet. Wir wollen, was stets möglich ist, die Linie C so wählen, dass die Begrenzung von B_x aus Kreisbogen besteht, welche zum Hauptkreis orthogonal sind. Ferner soll die Funktion $z(x)$ so normiert werden, dass der Nullpunkt O zu B_x gehören wird.

Das Polygon B_x hat insgesamt 10 Seiten, die paarweise

$$(k,\ k+1) \to (k',\ k+1') \qquad (k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

den beiden Ufern eines Bogens $(e_k,\ e_{k+1})$ von C entsprechen, und die durch die Erzeugenden

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_5 \tag{4}$$

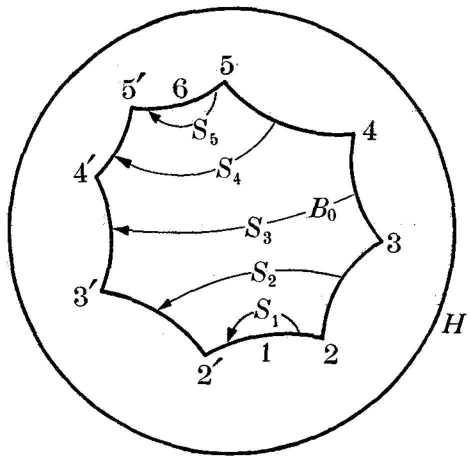

Fig. 2.

von Γ_x einander paarweise in der in Fig. 2 angegebenen Weise zugeordnet sind. Die Eckpunkte von B_x bilden sechs Zyklen

$$(1),\ (2, 2'),\ (3, 3'),\ (4, 4'),\ (5, 5'),\ (6)$$

und sie sind Fixpunkte der involutorischen Substitutionen

$$(S_1),\ (S_1 S_2^{-1},\ S_2 S_1^{-1}),\quad (S_2 S_3^{-1},\ S_3 S_2^{-1}),\quad (S_3 S_4^{-1},\ S_4 S_3^{-1}),$$
$$(S_4 S_5^{-1},\ S_5 S_4^{-1}),\quad (S_5),$$

welche einem Umkreis um den betreffenden e_ν-Punkt entsprechen. Die Erzeugenden (4) genügen somit den Relationen

$$S_1^2 = 1,\quad (S_1 S_2^{-1})^2 = 1,\quad (S_2 S_3^{-1})^2 = 1,\quad (S_3 S_4^{-1})^2 = 1,\quad (S_4 S_5^{-1})^2 = 1,\quad S_5^2 = 1. \tag{4'}$$

In der Funktion $x(z)$ besitzt Γ_x eine Hauptfunktion, welche jeden Wert in B_x genau einmal annimmt. Diejenigen Substitutionen von Γ_x, welche auch $y(z)$ ungeändert lassen, bilden eine ausgezeichnete Untergruppe Γ_{xy} von Γ_x, deren Index zwei ist. Man bekommt einen Fundamentalbereich von Γ_{xy}, wenn man zu B_x z. B. den Bildbereich $S_1(B_x)$ hinfügt. Der so entstandene Bereich B_{xy} besitzt insgesamt 12 Seiten, welche durch die Substitutionen

$$T_1 = S_2,\quad T_2 = S_4,\quad T_3 = S_5 S_1,\quad T_4 = S_3 S_1,\quad T_5 = S_1 S_4^{-1} S_1,\quad T_6 = S_3^{-1} S_1, \tag{4''}$$

in der in Fig. 3 angegebenen Weise auf einander bezogen sind. Wegen der für die Substitutionen (4)″ aus (4)′ gewonnenen Relationen

$$T_5 = T_3^{-1} T_2 T_3, \quad T_6 = T_1^{-1} T_4 T_1$$

kann man die beiden letzteren Substitutionen $(4)''$ eliminieren, wodurch für die Gruppe Γ_{xy} das System von Erzeugenden

$$T_1, \quad T_2, \quad T_3, \quad T_4 \tag{4'''}$$

erhalten wird, welches dem Schnittsystem der Fig. 4 auf der Riemannschen Fläche (2) entspricht. Wir nennen die Substitutionen $(4)'''$ die kanonischen Erzeugenden von Γ_{xy}.

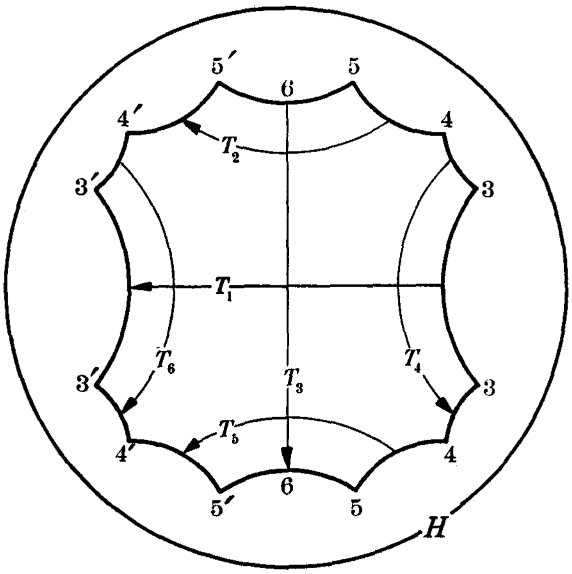

Fig. 3.

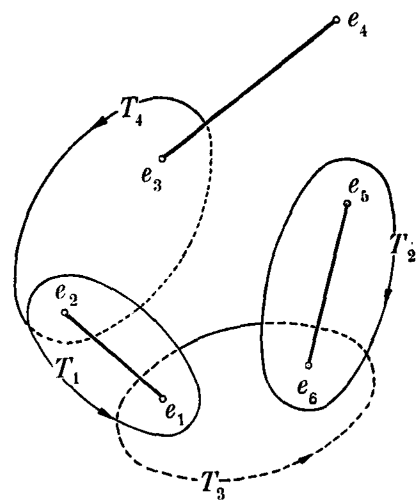

Fig. 4.

2. Aus der Definition der Hauptuniformisierenden geht hervor, dass jede relativ zur Fläche (2) unverzweigte Funktion eine eindeutige Funktion von z wird. Dies ist u. a. mit jedem elliptischen Integral der Fall, welches irgend vier von den Punkten (1) als Windungspunkte besitzt. Wir wählen im folgenden stets $e_4 = \infty$, wodurch die Gleichung (2) die Form

$$y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)(x - e_5)(x - e_6) \tag{5}$$

und ein von den zugehörigen elliptischen Integralen den Ausdruck

$$u = \frac{1}{2} \int_{e_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}} \tag{6}$$

annehmen wird.

Das Verhalten der Funktion $u(z)$ den Erzeugenden von Γ_x gegenüber wird durch die Gleichungen

$$\begin{gathered} u(S_1) = -u(z), \qquad u(S_2) = u(z) + \omega_1, \qquad u(S_3) = -u(z) + \omega_2, \\ u(S_4) = u(z), \qquad u(S_5) = u(z) \end{gathered} \tag{7}$$

dargestellt, wo ω_1, ω_2 ein System primitiver Perioden von (6) bezeichnet. Aus (7) folgt für eine beliebige Substitution von Γ_x die Gleichung

$$u(S(z)) = (-1)^\varepsilon u(z) + \mu\omega_1 + \nu\omega_2, \tag{8}$$

wo $\varepsilon = 0, 1$; $\mu, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Wir wollen ε die (zu u gehörige) *Charakteristik* und μ, ν den *ersten* bzw. *zweiten Index* von S nennen. Die Gesamtheit der Substitutionen der Charakteristik und der Indizes Null, also für welche $u(z)$ invariant ist, bildet eine ausgezeichnete Untergruppe Γ_u von Γ_x, deren Index unendlich ist. Sie ist offenbar eine fuchsoide Gruppe, also eine Gruppe mit unendlich vielen Erzeugenden, deren Fundamentalbereich aus unendlich vielen Polygonen von Γ_x zusammengesetzt werden kann.

Die Substitutionen von Γ_x können in wohlbekannter Weise in ein unendliches Schema der Form

$$\begin{array}{cccc} \bar{S}_0 & \bar{S}_1 & \bar{S}_2 & \ldots \\ \Sigma_1 \bar{S}_0 & \Sigma_1 \bar{S}_1 & \Sigma_1 \bar{S}_2 & \ldots \\ \Sigma_2 \bar{S}_0 & \Sigma_2 \bar{S}_1 & \Sigma_2 \bar{S}_2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \tag{9}$$

geschrieben werden, deren erste Horizontalreihe (Zeile) die Substitutionen von Γ_u enthält und deren erste Vertikalreihe (Kolonne) ein vollständiges Repräsentantensystem von Γ_x (Faktorgruppe) bildet, welches System mit der Gruppe der Substitutionen

$$u' = \pm u + \mu\omega_1 + \nu\omega_2 \qquad (\mu, \nu \text{ ganz}) \tag{10}$$

isomorph ist. Aus

$$u(S_1) = -u(z), \quad u(S_2) = u(z) + \omega_1, \quad u(S_0) = u(z) + \omega_2, \tag{11}$$

wo

$$S_0 = S_1 S_3,$$

geht hervor, dass die erste Vertikalreihe aus den Substitutionen

$$\Sigma^{\varepsilon}_{\mu,\nu} = \Sigma^{\varepsilon}_{\omega} = S_1^{\varepsilon} S_2^{\mu} S_0^{\nu} \qquad \begin{pmatrix}\varepsilon = 0,\ 1\\ \mu,\ \nu \text{ ganz}\end{pmatrix} \tag{12}$$

aufgebaut werden kann und dass somit jede Substitution S von Γ_x in der Form

$$S = \Sigma^{\varepsilon}_{\mu,\nu} \bar{S} \tag{13}$$

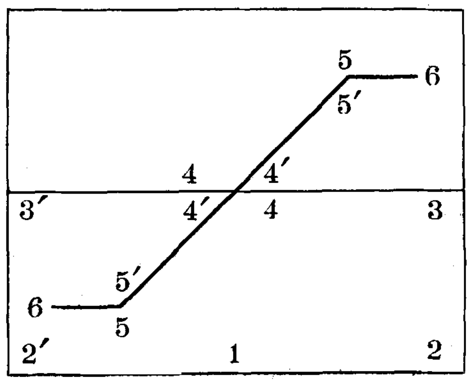

Fig. 5.

darstellbar ist, wo ε ihr Charakteristik, μ, ν ihre Indizes sind und wo $\bar{S}$ eine Substitution von Γ_u bezeichnet.

2 §. Konstruktion des Fundamentalbereichs von Γ_u.

3. Durch einen Zweig der Funktion $u(x)$ wird die geschnittene x-Ebene auf ein krummliniges Parallelogramm der u-Ebene abgebildet, welches mit einem Haken versehen ist, der dem Teil $e_4 e_5 e_6$ von C entspricht. Die den verschiedenen Zweigen von $u(x)$ entsprechenden u-Parallelogramme bedecken einfach und lückenlos die ganze u-Ebene, wobei die Haken sich paarweise in neue Haken der in Fig. 5 angegebenen Form vereinigen. Wir haben in den Figuren sämtliche Randkurven der Parallelogramme schematisch durch Geraden ersetzt und wir werden im folgenden die entsprechende Terminologie anwenden.

Wir betrachten nun die polymorphe Funktion z als Funktion $z = z(u)$ in der u-Ebene.[1]) Offenbar hat sie in den Eckpunkten

$$u(e_i) \qquad (i = 5, 6) \tag{14}$$

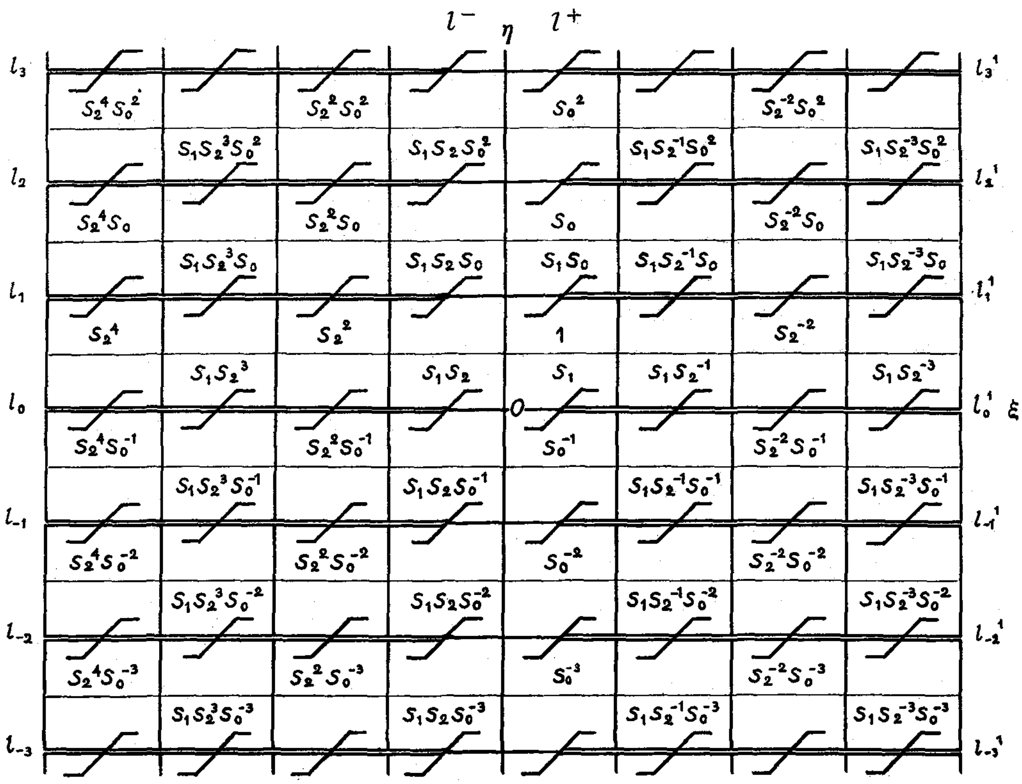

Fig. 6. $\Pi_{3,4}$.

der Haken Windungspunkte zweiter Ordnung, ist aber sonst regulär. Um die Zweige von $z(u)$ eindeutig zu machen, ziehen wir von jedem auf der vertikalen Geraden l^- liegenden 4-Punkt aus eine Halbgerade l_ν nach links und ferner von jedem auf der vertikalen Geraden l^+ liegenden solchen Punkt aus eine Halbgerade l_ν^1 nach rechts. Indem wir zu den Halbgeraden die Gesamtheit der zugehörigen Haken hinzufügen, bekommen wir zwei unendliche Scharen von Linien

$$l_\nu,\ l_\nu^1 \quad \text{oder kürzer} \quad l_\nu^\varepsilon \qquad (\varepsilon = 0, 1) \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{15}$$

---

[1]) Der Punkt $u = 0$ fällt in Fig. 6 mit dem Mittelpunkt der unteren Seite von 1 zusammen.

welche zusammen eine durch den unendlich fernen Punkt unendlich oft gehende geschlossene Linie bilden. Die längs (15) geschnittene u-Ebene ist ein einfach zusammenhängender Bereich, wo alle Zweige der Funktion $z(u)$ eindeutig sind. (Fig. 6.)

4. Um einen Zweig dieser Funktion zu fixieren, ordnen wir dem Anfangsparallelogramm 1 den Fundamentalbereich B_x von Γ_x zu. Man findet leicht, dass dann den übrigen u-Parallelogrammen diejenigen Polygone von Γ_x zugeordnet werden, die den Substitutionen (12) entsprechen. Die fraglichen Polygone bilden zusammen ein unendlichvielseitiges Polygon B_u, wo die Funktion $u(z)$ jeden endlichen Wert genau einmal annimmt und welches offenbar ein Fundamentalbereich der fuchsoiden Gruppe Γ_u ist. Zweck der folgenden Betrachtungen ist, das Polygon B_u näher zu untersuchen.

Wir betrachten zu diesem Zweck das Bild

$$k_\nu^\varepsilon \qquad (\varepsilon = 0,\ 1;\ \nu = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots) \tag{16}$$

einer einzelnen Linie l_ν^ε. Derselbe ist eine aus unendlich vielen zu H orthogonalen Kreisbogen zusammengesetzte Linie, deren beide Endpunkte auf H liegen. Im Sinne der nichteuklidischen (hyperbolischen) Geometrie, wo die Orthogonalkreise von H die Rolle der Geraden spielen, sind die Linien (16) konvexe Polygonzüge und zwar in dem Sinne, dass sie *ausserhalb* jedes Orthogonalkreises von H liegen, mit dem sie einen gemeinsamen Bogen besitzen. Diese Eigenschaft kommt allen im folgenden Betrachteten konvexen Zügen zu, wenn das Gegenteil nicht ausdrücklich hervorgeboben wird, was wir hier ein für allemal bemerken.

Wir bemerken ferner, dass zwei benachbarte Züge

$$k_\nu^\varepsilon, \quad k_{\nu+1}^\varepsilon$$

einen gemeinsamen Endpunkt P_ν^ε besitzen. In der Tat können die einander gegenüberliegenden Ufer der entsprechenden Linien l_ν^ε, $l_{\nu+1}^\varepsilon$ durch ein unendliches System von äquidistanten und aus zwei vertikalen Seiten der u-Parallelogramme gebildeten Linien mit einander verbunden werden. Diesen Linien entsprechen aber im Bereich B_u gewisse die fraglichen Züge verbindende zu H orthogonale Kreisbogen, deren n. e. Länge[1] beschränkt, nämlich höchstens gleich

[1] d. h. im hyperbolischen Sinne gemessene Länge.

dem doppelten n. e. Diameter von B_x ist, woraus folgt, dass ihre euklidische Länge den Grenzwert Null hat. In gleicher Weise ist einzusehen, dass der gegenseitige Abstand der einander gegenüberliegenden Züge k_ν und k_ν^1 für $\nu \rightarrow \pm \infty$ gegen Null konvergiert, und dass somit die Züge (16) für $\nu \rightarrow \pm \infty$ resp. gegen zwei bestimmte Punkte P_∞ und $P_{-\infty}$ von H konvergieren, welche Endpunkte des Bildes der Linie η sind. (Fig. 8.)

Sämtliche Seiten von B_u liegen somit innerhalb H. Die Eckpunkte von B_u sind dreierlei Art: 1) Die unendlich vielen innerhalb H liegenden Eckpunkte der Züge (16), 2) die unendlich vielen auf H liegenden Endpunkte der Züge (16), welche zugleich Häufungspunkte für die Eckpunkte erster Art sind und

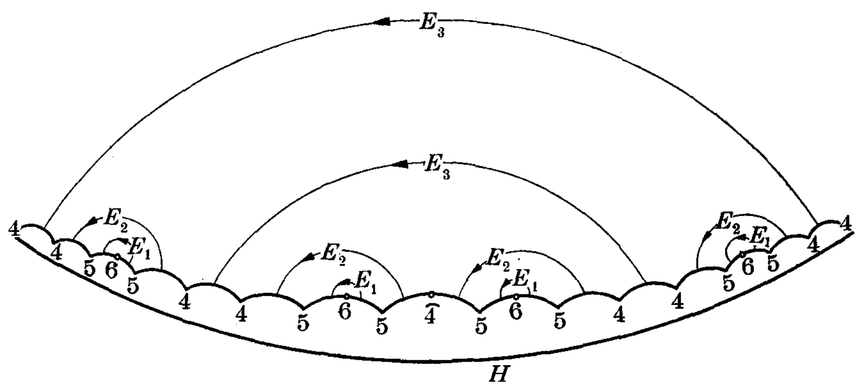

Fig. 7.

3) die zwei Häufungspunkte P_∞, $P_{-\infty}$ der Eckpunkte zweiter Art. Aus dem Obigen geht hervor, dass die Funktion $u(z)$ in den Eckpunkten zweiter und dritter Art den Grenzwert ∞ besitzt.

5. Um die Erzeugenden von Γ_u zu bestimmen, betrachten wir etwas näher einen einzelnen Zug (16), z. B. k_0. Die Reihe ihrer Eckpunkte hat die unendliche symmetrische Darstellung (Fig. 7)

$$\ldots 445654456\overset{\frown}{5}456544565 44 \ldots \qquad (17)$$

Die zugehörigen unendlich vielen Seiten sind einander paarweise durch gewisse Substitutionen von Γ_u zugeordnet, die wir in drei Typen zerlegen.

Erster Typus: Substitutionen, die zwei benachbarte Seiten 56 und 65 einander zuordnen. Jede derselben entspricht einem Umkreis um einen 6-Punkt eines zu l_0 gehörigen Hakens. Die betreffenden Substitutionen, welche aus S_5

durch »Transformation» erhalten werden können, haben den allgemeinen Ausdruck:

$$\left.\begin{array}{l} E_1(\mu,\,0,\,0) = S_2^{-\mu}\,S_1\,S_5\,S_1\,S_2^{\mu} \text{ bzw.} \\ E_1(\mu,\,0,\,1) = S_0\,S_2^{-\mu}\,S_5\,S_2^{\mu}\,S_0^{-1} \end{array}\right\} \qquad (\mu > 0). \tag{18}$$

Zweiter Typus: Substitutionen, welche zwei Seiten 45 und 54, die durch ein Seitenpaar 565 getrennt werden, einander zuordnen. Jede derselben entspricht einem geschlossenen Weg der u-Ebene, welcher die beiden Ufer eines Teiles 45 eines zu l_0 gehörigen Hakens mit einander verbindet. Die betreffen-

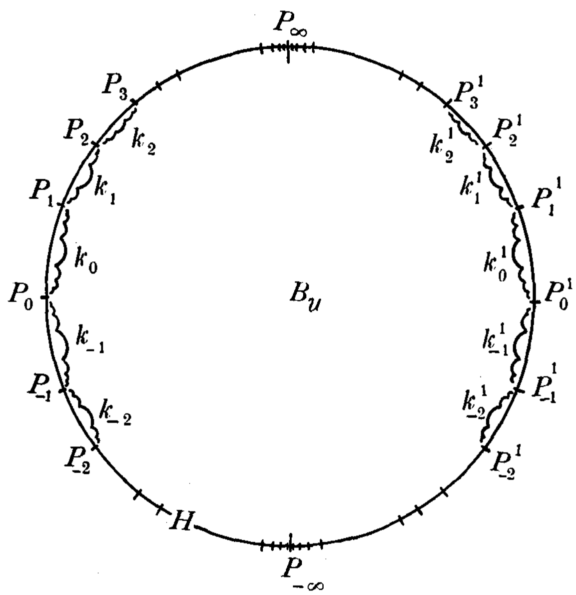

Fig. 8.

den Substitutionen, welche aus S_4 durch »Transformation» erhalten werden können, haben den allgemeinen Ausdruck

$$\left.\begin{array}{l} E_2(\mu,\,0,\,0) = S_2^{-\mu}\,S_1\,S_4\,S_1\,S_2^{\mu} \text{ bzw.} \\ E_2(\mu,\,0,\,1) = S_0\,S_2^{-\mu}\,S_4\,S_2^{\mu}\,S_0^{-1} \end{array}\right\} \qquad (\mu > 0). \tag{18'}$$

Dritter Typus: Substitutionen, welche zwei in bezug auf den Mittelpunkt $\widehat{4}$ von (17) symmetrisch liegende Seiten 44 einander zuordnen. Jede derselben entspricht einem geschlossenen Weg der u-Ebene, welcher die beiden Ufer eines Teiles (44) der Linie l_0 miteinander verbindet. Der allgemeine Ausdruck der betreffenden Substitionen ist

$$E_3(\mu, 0) = S_0 S_2^{-\mu} (S_3^{-2} S_2)^{\mu} S_0^{-1} \qquad (\mu > 0). \qquad (18)''$$

Zur Auffindung der zu den übrigen Zügen gehörigen Substitutionen bemerken wir, dass allgemein der Zug k_ν aus k_0 durch die Substitution S_0^ν, der Zug k_ν^1 durch die Substitution $\overline{S}_\nu = S_0^{1-\nu} S_1 S_2$ erhalten wird. Indem man die oben gefundenen Substitutionen den betreffenden »Transformationen» unterwirft, bekommt man für die drei Typen von Erzeugenden, welche irgend zwei zu k_ν bzw. k_ν^1 gehörige Seiten paarweise aufeinander abbilden, die allgemeinen Ausdrücke

$$\begin{aligned} E_1(\mu, \nu, \eta) &= S_0^{-\nu} E_1(\mu, 0, \eta) S_0^\nu \\ E_2(\mu, \nu, \eta) &= S_0^{-\nu} E_2(\mu, 0, \eta) S_0^\nu \\ E_3(\mu, \nu) \quad &= S_0^{-\nu} E_3(\mu, 0) S_0^\nu \end{aligned}$$

und $\qquad (19)$

$$\begin{aligned} E_1^1(\mu, \nu, \eta) &= \overline{S}_\nu^{-1} E_1(\mu, \nu, \eta) \overline{S}_\nu \\ E_2^1(\mu, \nu, \eta) &= \overline{S}_\nu^{-1} E_2(\mu, \nu, \eta) \overline{S}_\nu \\ E_3^1(\mu, \nu) \quad &= \overline{S}_\nu^{-1} E_3(\mu, \nu) \overline{S}_\nu. \end{aligned}$$

In den Substitutionen (19) für

$$\eta = 0, 1; \quad \mu > 0, \quad \nu \gtreqless 0$$

besitzt man offenbar ein vollständiges System von Erzeugenden für unsere Gruppe Γ_u.

Wir bemerken noch, dass der Fundamentalbereich B_u keine Bogen von H enhält, woraus folgt, dass der Hauptkreis H für die fuchsoide Gruppe Γ_u zugleich Grenzkreis ist.

3 §. Approximation von Γ_u durch fuchssche Gruppen.

6. Weil die einander konjugierten Seiten von B_u stets einem und demselben Zug angehören, kann die Gruppe Γ_u durch Komposition aus den unendlich vielen Gruppen

$$G_\nu^\varepsilon \qquad (20)$$

erhalten werden, wo G_ν^ε die von den zu k_ν^ε gehörigen Substitutionen (19) erzeugte Gruppe bezeichnet. Jede unter den Gruppen (20) ist eine fuchsoide

Gruppe vom Geschlecht Null, deren Fundamentalbereich von dem betreffenden Zug und dem gegenüberliegenden Bogen von H begrenzt ist. Der Fundamentalbereich B_u von Γ_u kann durch Ineinanderschiebung der Fundamentalbereiche der Gruppen (20) gewonnen werden.

Wir wollen jetzt die Gruppen (20) durch Grenzübergang aus einer unendlichen Folge von fuchsschen Gruppen herleiten.

Wir unterwerfen zu diesem Zweck die Linien l_ϱ^ε einer Reduktion, indem wir von ihren Haken nur die m ersten behalten und die Linie selbst dann geradlinig fortsetzen. Dies bedeutet offenbar dass die unendliche Reihe (17) durch die endliche

$$\overbrace{45654}^{-m}\ldots\;\overbrace{45654}^{-2}\;\overbrace{4565}^{-1}\widehat{4}\overbrace{5654}^{1}\;\overbrace{45654}^{2}\ldots\;\overbrace{45654}^{m} \tag{21}$$

ersetzt wird, welche nur die mittleren $2m$ symmetrisch liegenden Zahlengruppen enthält und dass somit der betreffende Zug k_ϱ^ε über die letzten 4-Punkte hinaus (im hyperbolischen Sinne) geradlinig bis zum Hauptkreis fortgesetzt wird. Der so erhaltene endlichvielseitige Zug soll im folgenden als der *mod. m reduzierte Zug* $k_{\varrho, m}^\varepsilon$ bezeichnet werden. Ihre Seiten sind paarweise durch diejenigen unter den Substitutionen (19) einander bezogen, die den Bedingungen

$$\nu = \varrho, \quad 0 < \mu \leqq m \tag{22}$$

genügen. Diese Substitutionen erzeugen eine Untergruppe $G_{\varrho, m}^\varepsilon$ von G_ϱ^ε, welche eine fuchssche Gruppe vom Geschlecht Null ist, deren Fundamentalbereich von $k_{\varrho, m}^\varepsilon$ und dem gegenüberliegenden Bogen von H begrenzt ist. Die Gruppe G_ϱ^ε selbst kann aus $G_{\varrho, m}^\varepsilon$ durch den Grenzübergang $m \to \infty$ gewonnen werden. Wir komponieren jetzt eine endliche Anzahl der Gruppen $G_{\nu, m}$, z. B.

$$G_{\nu, m}^\varepsilon \qquad (\varepsilon = 0, 1; \; -n \leqq \nu \leqq n) \tag{23}$$

und wir erhalten eine fuchssche Gruppe vom Geschlecht Null

$$\Gamma_{n, m},$$

deren Fundamentalbereich $B_{n, m}$ durch Ineinanderschiebung der Fundamentalbereiche der Gruppen (23) erhalten wird. Der Übergang von Γ_u zu $\Gamma_{n, m}$ hat in der u-Ebene eine sehr anschauliche Deutung: Man hat nur die zum Parallelogramm

$$|\xi| \leqq m\,|\omega_1|, \quad |\eta| \leqq n\,|\omega_2| \qquad : \Pi_{m,n} \tag{24}$$

ganz oder teilweise gehörigen Haken und Linien l_ν^ε zu berücksichtigen und ferner die ausserhalb $\Pi_{m,n}$ liegenden Teile der Linien l_ν^ε ($|\nu| \leqq n$) durch Geraden zu ersetzen. Wir werden (24) das zu $\Gamma_{n,m}$ gehörige *Π-Parallelogramm* nennen.

Jede von unseren Gruppen $\Gamma_{n,m}$ ist noch auf gewissen Teilen von H diskontinuierlich. Durch den doppelten Grenzübergang $m \to \infty$, $n \to \infty$ gelangt man aus ihnen zu unserer Gruppe Γ_u, für welche wie bemerkt der Hauptkreis zugleich Grenzkreis ist.

4 §. Aufbau und Abschätzung des Polygonnetzes von $\Gamma_{n,m}$.

7. Nach der Definition hat $\Gamma_{n,m}$ als Erzeugende diejenigen unter den Substitutionen (19), deren Indizes den Bedingungen

$$0 < \mu \leqq m, \quad -n \leqq \nu \leqq n \tag{25}$$

genügen. Der Rand des Fundamentalbereichs $B_{n,m}$ von $\Gamma_{n,m}$ besteht aus den $4n + 2$ mod. m reduzierten Zügen

$$k_{\nu,m}^\varepsilon \qquad (\varepsilon = 0,\ 1;\ -n \leqq \nu \leqq n) \tag{26}$$

und den zwischen denselben liegenden Bogen von H. Um jeden Eckpunkt 6 liegen zwei Polygone, um jeden Eckpunkt 5 vier Polygone, um jeden Eckpunkt 4 ebenfalls vier Polygone, ausser wenn es sich um den Mittelpunkt $\widehat{4}$ und die beiden benachbarten 4-Punkte handelt, indem dann nur drei Polygone vorliegen. Die betreffenden Polygone entsprechen der Identität und gewissen Substitutionen:

$$(E)_1, \tag{27}$$

die entweder Erzeugende oder Produkte zweier Erzeugenden sind.

Wir werden den Polygonen (27) die Stufe Eins beilegen. Jedes Polygon erster Stufe hat eine mit dem umschliessenden Zug äquivalente obere Randkurve und endlich viele untere Randkurven, die wechselweise Bogen von H und konvexe, gebrochene, mit den übrigen Randzügen von $B_{n,m}$ äquivalente Linien sind. Wir werden diese Züge erster Stufe nennen. An jedes Polygon erster Stufe schliessen sich endlich viele Polygone zweiter Stufe, deren untere, innerhalb H liegenden Randkurven Züge zweiter Stufe genannt werden, usw. Allgemein hat ein *Polygon p:ter Stufe* die charakteristische Eigenschaft, dass p die kleinste Anzahl verschiedener Punkte angibt, wo das Polygonnetz von $\Gamma_{n,m}$ von einer vom betreffenden Polygon zum Fundamentalbereich führenden Linie geschnitten wird. Der Rand eines Polygones p:ter Stufe besteht aus einer oberen Randkurve $C^{(p-1)}$, welche mit dem umschliessenden Zug $(p-1)$:ter Stufe entweder eine gemeinsame Seite oder einen gemeinsamen Punkt hat[1] und aus endlich vielen unteren Randkurven, die wechselweise Bogen $\varDelta^{(p)}$ von H *(Bogen p:ter Stufe)*, teils konvexe gebrochene Linien $k^{(p)}$ *(Züge p:ter Stufe)* sind. (Fig. 10).

Aus dem Obigen folgt, dass jede Substitution von $\Gamma_{n,m}$ *(Substitution p:ter Stufe)*, die $B_{n,m}$ auf ein Polygon p:ter Stufe abbildet, in der Form

$$\prod_{k=1}^{\nu} E_{i_k} \tag{28}$$

geschrieben werden kann, wo die Faktoren Substitutionen (27) bezeichnen.

8. Wir beginnen jetzt die Abschätzung des Polygonnetzes von $\Gamma_{n,m}$, indem wir für die Länge der zu $B_{n,m}$ gehörigen Bogen von H eine untere Grenze bestimmen.

Nach Nr. 6 gehören die Bildpunkte der innerhalb H liegenden Ecken von $B_{n,m}$ zum Parallelogramm $\Pi_{n+1,m}$. Diese Bildpunkte können offenbar mit dem Nullpunkt vermittels einer gebrochenen, die Linien (15) vermeidenden Linie verbunden werden, welche höchstens $m+2n+1$ u-Parallelogramme durchschneidet. Die n. e. Länge ihrer Bildlinie in der z-Ebene ist aber dann, wenigstens nach einer geeigneten Abänderung der Linie, höchstens gleich

$$(m+2n+1)\,d, \tag{29}$$

wo d den n. e. Diameter von B_x bezeichnet. Somit gibt (29) eine obere Grenze

[1] Auch diese Linie ist n. e. konvex, aber nicht in dem in N:o 4 definierten Sinne, indem sie innerhalb des durch die oberste Seite definierten Orthogonalkreises von H liegt.

für den n. e. Abstand $\hat{a}$ der fraglichen Ecken von $B_{n,m}$ vom Nullpunkt. Für den euklidischen Abstand a berechnet sich aus

$$\hat{a} = \frac{1}{2} \log \frac{1+a}{1-a}$$

die Ungleichung

$$a = \frac{e^{2\hat{a}} - 1}{e^{2\hat{a}} + 1} < \frac{e^{2(m+2n+1)d} - 1}{e^{2(m+2n+1)d} + 1}\,. \tag{30}$$

Wir betrachten nun einen Randzug von $B_{n,m}$, z. B. den aus k_0 durch Reduktion mod. m erhaltenen Zug $k_{0,m}$. Es sei (Fig. 9) $[k_{0,m}]$ der gemeinsame

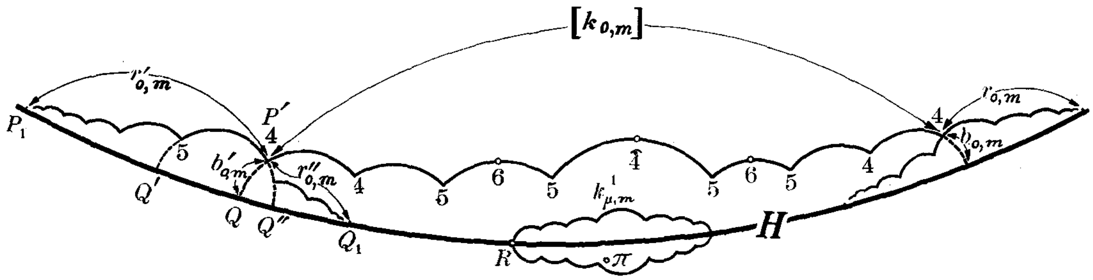

Fig. 9.

Teil von k_0 und $k_{0,m}$ und

$$r_{0,m},\quad r'_{0,m} \tag{31}$$

die beiden Teile des Restes $k_0 - [k_{0,m}]$, ferner

$$b_{0,m},\quad b'_{0,m} \tag{31$'$}$$

die beiden Teile des Restes $k_{0,m} - [k_{0,m}]$, also die beiden extremen Seiten von $k_{0,m}$. Durch die Erzeugende $E_3(m, 0)$ von $G_{0,m}$, welche $b_{0,m}$ auf $b'_{0,m}$ abbildet, wird $r_{0,m}$ auf eine unterhalb $k_{0,m}$ liegende Linie $r''_{0,m}$ abgebildet, welche mit $r'_{0,m}$ zusammen eine konvexe gebrochene Linie

$$h_{0,m} = r'_{0,m} + r''_{0,m} \tag{32}$$

bildet, deren Endpunkte auf H liegen. Wir werden diese Linie und die andere durch Vertauschung der Rolle der Linien $b_{0,m}$, $b'_{0,m}$ erhaltene Linie $h'_{0,m}$ die mod. m *genommenen Restzüge von* k_0 nennen. Sie werden offenbar aus dem Randzug k_0 durch die Substitution

$$S_2^m \text{ bzw. } S_0^{-1} S_2^m S_0$$

erhalten, welche der Verschiebung $\eta - m\omega_1$ der Linie l_0, oder, was damit äquivalent ist, der Ausschneidung der m ersten Äste aus l_0 entsprechen. Solche Restzüge, welche für alle Randzüge von $B_{n,m}$ und allgemein für alle Randlinien der Polygone von $\Gamma_{n,m}$ konstruiert werden können, werden später eine wichtige Rolle spielen.

Wir betrachten nun das Dreieck $P'Q'Q$ der Fig. 9, dessen Seiten aus $b'_{0,m}$, der bis zu H verlängerten, auf P' folgenden Seite von k_0 und dem Bogen $Q'Q$ von H bestehen. Von den Winkeln des Dreiecks sind zwei rechte, während der dritte Winkel P' gleich einem zu B_x gehörigen Winkel ist. Durch eine elementare Betrachtung findet man, dass

$$\widehat{QQ'} > c\, b'_{0,m} \tag{33}$$

wo c eine gewisse durch den letztgenannten Winkel bestimmte positive Konstante ist. Aus dem benachbarten Dreieck $P'QQ''$ ergibt sich eine ähnliche Ungleichung für den Bogen QQ''. Nun sind die Bogen QQ' und QQ'' Teile der von $b'_{0,m}$ und $r'_{0,m}$ bzw. $b'_{0,m}$ und $r''_{0,m}$ aus H geschnittenen Bogen QP_1 und QQ_1, welche ihrerseits Teile des im Punkte Q beginnenden Randbogens Δ (Bogen nullter Stufe) von $B_{n,m}$ bzw. des angrenzenden Bogens Δ^1 erster Stufe sind. Ferner ist nach (30)

$$b'_{0,m} \geqq 1 - |a| > \frac{2}{e^{2(m+2n+1)d} + 1} > e^{-\lambda_0(m+2n)} \tag{34}$$

wo λ_0 eine endliche Konstante ist. Aus (33) und (34) folgt aber dann für die Bogen Δ und Δ^1 die Ungleichung

$$\Delta^i > \frac{2c}{e^{2(m+2n+1)d} + 1} > e^{-\lambda_1(m+2n)} \qquad (i = 0, 1) \tag{34$'$}$$

wo λ_1 eine endliche Konstante ist. Weil das Obige unverändert gilt, wenn $k_{0,m}$ durch einen beliebigen Randzug von $B_{n,m}$ ersetzt wird, muss für alle Bogen nullter Stufe und für die angrenzenden Bogen erster Stufe eine Ungleichung der Form (34)' gelten, wo λ_1 eine durch B_x bestimmte endliche Konstante ist.

9. Es sei jetzt (Fig. 10)

$$S = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{35}$$

der gemeinsame Ausdruck für ein Polygon p:ter Stufe von $\Gamma_{n,m}$ und die entsprechende Substitution. Ferner sei $C^{(p-1)}$ die obere Randkurve von S und $\Delta^{(p)}$ ein zu S gehöriger Bogen H (Bogen p:ter Stufe). Durch die inverse Substitution S^{-1} wird S auf $B_{n,m}$, ferner $C^{(p-1)}$ auf einen Randzug $k^{\varepsilon}_{\nu,m}$ und $\Delta^{(p)}$ auf

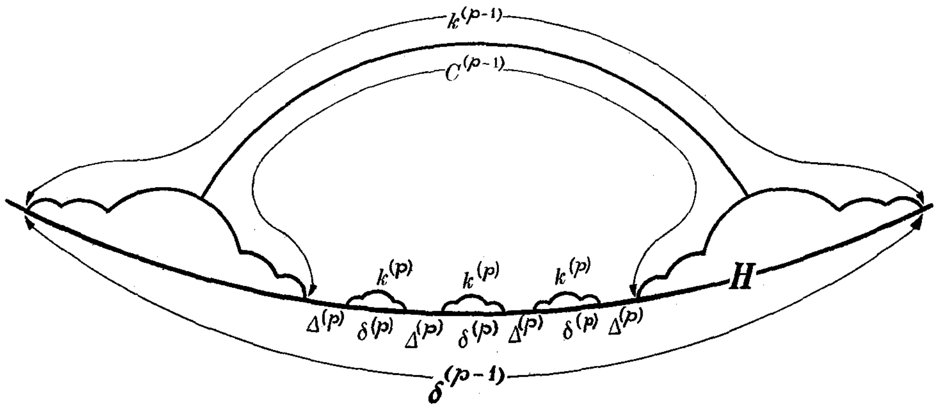

Fig. 10.

einen zu $B_{n,m}$ gehörigen Bogen Δ von H abgebildet. Wir betrachten nun neben $k^{\varepsilon}_{\nu,m}$ den zugehörigen *geschlossenen Zug*

$$\hat{k}^{\varepsilon}_{\nu,m} = k^{\varepsilon}_{\nu,m} + \bar{k}^{\varepsilon}_{\nu,m}\,, \tag{36}$$

welcher aus $k^{\varepsilon}_{\nu,m}$ und dem bezüglich H genommenen Spiegelbild $\bar{k}^{\varepsilon}_{\nu,m}$ besteht. Wir werden hinsichtlich der Lage des Poles

$$S^{-1}(\infty) = -\frac{\delta}{\gamma} \qquad : \pi \tag{37}$$

der Funktion (35) zwischen folgenden Fällen unterscheiden.

Erster Fall. Der Punkt π liegt ausserhalb des geschlossenen Zuges (36) und somit innerhalb eines davon verschiedenen geschlossenen Randzuges von $B_{n,m}$. Wir führen eine lineare Transformation aus, wodurch der Hauptkreis auf die reelle Achse der neuen z'-Ebene abgebildet wird. Dann ist der kürzeste Abstand zweier Randzüge von $B_{n,m}$ mindestens gleich dem kürzesten Randbogen von $B_{n,m}$, für dessen Länge eine Ungleichung der Form (34)′ gilt. Durch Zurückgang zur z-Ebene gewinnt man wegen der beschränkten Verzerrung der linearen Transformation für den kürzesten Abstand des Punktes π von $k^{\varepsilon}_{\nu, m}$ wieder eine Ungleichung der Form $(34)'$, wo λ_1 einen etwas grösseren Wert λ'_1 hat.

Zweiter Fall. Der Punkt π liegt innerhalb (36), zugleich aber ausserhalb der dort liegenden geschlossenen Züge erster Stufe. Jetzt hat das Polygon S^{-1} mit $B_{n,m}$ wenigstens einen gemeinsamen Punkt und es ist somit möglich, den im Polygon S^{-1} liegenden bezüglich H genommenen Spiegelbild $S^{-1}(0)$ von π mit 0 durch eine Linie zu verbinden, die höchstens $2(m+2n+1)$ Polygone von Γ_x durchschneidet. Für den Abstand des Punktes $S^{-1}(0)$ von H und somit a fortiori für den Abstand des Punktes π von $k^{\varepsilon}_{\nu, m}$ gilt somit wegen (34) die Ungleichung

$$t > \frac{2}{e^{4(m+2n+1)d}+1} > e^{-\lambda_2(m+2n)}.$$

Dritter Fall. Der Punkt π liegt innerhalb (36) und zugleich innerhalb eines gewissen dort liegenden geschlossenen Zuges erster Stufe. Wir machen jetzt Gebrauch von der Fig. 9, wo $k_{0,m}$ durch $k^{\varepsilon}_{\nu, m}$ zu ersetzen ist und wo $k^{1}_{\mu, m}$ den betreffenden, den Punkt π enthaltenden geschlossenen Zug erster Stufe repräsentiert. Weil die Punkte von $[k_{0,m}]$ mit 0 durch eine höchstens $m+2n+1$ Polygone von Γ_x durchschneidenden Linie verbunden werden können, genügt der Abstand jener Punkte von H und somit a fortiori von π der Ungleichung (34). Betrachten wir nun die Punkte der Reste, z. B. von $b'_{0,m}$. Durch Übergang zur z'-Ebene werden $b'_{0,m}$ und (36) in zwei Linien überführt, deren kürzeste Entfernung voneinander durch die Länge der transformierten Strecke QR oder $P'R$ gegeben wird. Nun ist die Länge der ersten Strecke wenigstens gleich dem Bild des in Q beginnenden Bogens erster Stufe, deren Länge der $(34)'$ entsprechenden Ungleichung genügt. Ferner genügt der kürzeste Abstand des Punktes P' von H und somit auch von R in der z-Ebene der Ungleichung (34). Aus dem Obigen folgt wieder wegen der beschränkten Verzerrung der linearen Transformation für den Abstand des Punktes π von $k^{\varepsilon}_{\nu, m}$ im vorliegenden Falle die Ungleichung

$$t > e^{-\lambda_3(m+2n)},$$

wo λ_3 die grössere der Konstanten λ_0 und λ'_1 bezeichnet.

Mithin gilt in jedem Falle die Ungleichung

$$t > e^{-\lambda_4(m+2n)} = \varrho'_{n,m}, \tag{38}$$

wo λ_4 eine endliche Konstante, nämlich gleich der grösseren Konstanten λ_2 und λ_3 ist.

10. Wir lassen nun z_1 den Zug $k^{\varepsilon}_{\nu, m}$ und z_2 den Bogen Δ durchlaufen. Nach (38) ist

$$\left| z_1 + \frac{\delta}{\gamma} \right| > \varrho'_{n, m}.$$

Weil ferner die Punkte $-\frac{\delta}{\gamma}$ gegen H konvergieren, hat der Ausdruck

$$\left| z_2 + \frac{\delta}{\gamma} \right|$$

für die von der Identität verschiedenen Substitutionen von $\Gamma_{n, m}$ ein endliches Maximum M. Wegen

$$\left| \frac{S'(z_2)}{S'(z_1)} \right| = \left| \frac{z_1 + \frac{\delta}{\gamma}}{z_2 + \frac{\delta}{\gamma}} \right|^2$$

ergibt sich aus dem Obigen die Ungleichung

$$\frac{\Delta^{(p)}}{C^{(p-1)}} > \frac{\Delta}{k^{\varepsilon}_{\nu, m}} \left(\frac{\varrho'_{n, m}}{M} \right)^2, \tag{39}$$

wo also $C^{(p-1)}$ die Länge des oberen Randes des willkürlichen Polygones (35) und $\Delta^{(p)}$ die Länge irgend eines zu demselben gehörigen Bogens von H bezeichnet. Wegen der Konvexität des Zuges $k^{\varepsilon}_{\nu, m}$ ist

$$k^{\varepsilon}_{\nu, m} < 2\pi\tau, \tag{40}$$

wo τ eine numerische Grösse bezeichnet. Hieraus und aus der für Δ geltenden Ungleichung (34)' folgt

$$\frac{\Delta^{(p)}}{C^{(p-1)}} > \frac{1}{2\pi\tau M^2} e^{-(\lambda_1 + 2\lambda_4)(m + 2n)} = \varrho''_{n, m}. \tag{41}$$

Wir leiten nun aus (41) durch Summierung über die $4n + 2$ zu (35) gehörigen Bogen von H die Ungleichung

$$\frac{\sum\limits_{(C^{(p-1)})} \Delta^{(p)}}{C^{(p-1)}} > (4n+2)\varrho''_{n,m} = \varrho'''_{n,m} \tag{42}$$

her. Wir schreiben ferner diese Ungleichung für alle diejenigen endlich vielen Polygone p:ter Stufe, die mit S unterhalb eines und desselben konvexen mod. m reduzierten Zuges $(p-1)$:ter Stufe $k^{(p-1)}$ liegen.[1] Weil $k^{(p-1)}$ einen Teil des oberen Randes der fraglichen Polygone bildet, so ergibt sich aus den zugehörigen Ungleichungen (42) die neue Ungleichung

$$\frac{\sum\limits_{(k^{(p-1)})} \Delta^{(p)}}{k^{(p-1)}} > \varrho'''_{n,m}, \tag{43}$$

wo die Summierung jetzt über sämtliche unterhalb $k^{(p-1)}$ liegenden Bogen p:ter Stufe zu erstrecken ist.

11. Es ist ferner zweckmässig, jedem Zug p:ter Stufe $k^{(p)}$ denjenigen Bogen $\delta^{(p)}$ von H zuzuordnen, dessen Endpunkte mit denjenigen von $k^{(p)}$ zusammenfallen (Fig. 10). Einen solchen Bogen, dem wir die nämliche Stufe wie dem entsprechenden Zug zuordnen, wollen wir kurz einen *δ-Bogen* nennen, zum Unterschied von den früheren Bogen, für welche wir beiläufig die Benennung *Δ-Bogen* anwenden werden. Aus der Definition der beiden Bogenarten geht hervor, dass allgemein jeder δ-Bogen $(p-1)$:ter Stufe aus der Summe von endlich vielen δ- und Δ-Bogen p:ter Stufe besteht, also

$$\delta^{(p-1)} = \Sigma\delta^{(p)} + \Sigma\Delta^{(p)}. \tag{44}$$

Nun gilt wegen der Konvexität von $k^{(p-1)}$ die Ungleichung

$$\tau_1\,\delta^{(p-1)} < k^{(p-1)} < \tau\,\delta^{(p-1)} \tag{45}$$

wo τ_1 eine positive numerische Konstante ist. Aus (43) und (45) folgt

$$\frac{\sum\limits_{(k^{(p-1)})} \Delta^{(p)}}{\delta^{(p-1)}} > \frac{1}{\tau_1}\varrho'''_{n,m},$$

und dann aus (44)

[1] Wir haben hier und im folgenden die Indizes ε, μ, ν aus den Zügen, welche zum Polygonnetz von $\Gamma_{n,m}$ gehörige mod. m reduzierte Züge sind, der Kürze halber fortgelassen.

$$\frac{\sum\limits_{(\delta^{(p-1)})} \delta^{(p)}}{\delta^{(p-1)}} < 1 - \frac{1}{\tau_1} \varrho'''_{n,m} = \omega_{n,m}, \tag{46}$$

wo die Summierung sich über sämtliche auf $\delta^{(p-1)}$ liegenden δ-Bogen p:ter Stufe erstreckt. Hier ist

$$\begin{aligned} \omega_{n,m} &= 1 - \frac{2n+1}{\pi\tau\tau_1 M^2} e^{-(\lambda_1+2\lambda_2)(m+2n)} \\ &< 1 - e^{-\lambda'(m+2n)}, \end{aligned} \tag{47}$$

wo λ' eine endliche Konstante ist. Durch Summierung der für sämtliche δ-Bogen $(p-1)$:ter Stufe geschriebenen Ungleichungen (46) gelangt man zur Ungleichung

$$\frac{\Sigma \delta^{(p)}}{\Sigma \delta^{(p-1)}} < \omega_{n,m},$$

wo die Summierung im Zähler über alle δ-Bogen p:ter Stufe und im Nenner über alle δ-Bogen $(p-1)$:ter Stufe zu erstrecken ist. Wegen

$$\Sigma \delta^{(0)} < 2\pi$$

folgt hieraus

$$\Sigma \delta^{(p)} < 2\pi \omega_{n,m}^{p} \tag{48}$$

und dann, wegen (45), die fundamentale Ungleichung

$$\Sigma k^{(p)} < 2\pi\tau \omega_{n,m}^{p} \tag{48'}$$

für die Summe sämtlicher zum Polygonnetz von $\Gamma_{n,m}$ gehöriger mod. m reduzierten Züge p:ter Stufe.

Für die Summe der zugehörigen geschlossenen Züge p:ter Stufe ergibt sich hieraus unmittelbar

$$\Sigma \hat{k}^{(p)} < 2\pi\tau' \omega_{n,m}^{p}, \tag{48''}$$

wo τ' eine endliche numerische Grösse ist. Schliesslich folgt aus (44) die Ungleichung

$$\sum_{q=0}^{p} \varDelta^{(q)} > 2\pi(1 - \omega_{n,m}^{p}) \tag{49}$$

für die Summe sämtlicher zu $\Gamma_{n,m}$ gehörigen $\varDelta$-Bogen der Stufe $\leqq p$.

Wegen

$$\lim_{p \to \infty} \omega_{n,m}^{p} = 0$$

ergibt sich aus (49) für $p \to \infty$

$$\sum_{q=0}^{\infty} \Delta^{(q)} = 2\pi.$$

Die komplementare Menge der Summe der Δ-Bogen, welche mit der Menge der singulären Punkte von $\Gamma_{n,m}$, d. h. der Häufungspunkte ihrer Polygone identisch ist, hat somit das lineare Mass Null — ein Satz, der für alle fuchssche Gruppen ohne Grenzkreis richtig ist.

5 §. Darstellung der Gruppe Γ_u durch Grenzübergang aus Γ_n.

12. Wir wählen für die Anwendungen $m = n$, wodurch die fuchsoide Gruppe Γ_u aus den fuchsschen Gruppen

$$\Gamma_{n,n} = \Gamma_n$$

durch den einfachen Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten wird. Indem wir überall die doppelten Indizes (n, n) zu n vereinfachen, können wir (47) durch

$$\omega_n < 1 - e^{-\lambda n} \qquad (\lambda = 3\lambda') \tag{50}$$

ersetzen.

Wir gehen nun von einer beliebigen monotonen, gegen Null konvergierenden Folge positiver Grössen

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots \tag{51}$$

aus und wir bestimmen für jedes n die kleinste der Ungleichung

$$\omega_n^{\,q_n} < \varepsilon_n \tag{52}$$

genügende ganze Zahl q_n. Offenbar ist

$$q_n < e^{\lambda n} |\log \varepsilon_n| + 1. \tag{53}$$

Wir bestimmen ferner für jedes n die Gesamtheit der endlich vielen Substitutionen von Γ_n der Stufe $\leqq q_n$, also die Gesamtheit

$$(\bar{S})_n \tag{54}$$

der in der Form

$$E_{i_1} E_{i_2} \ldots E_{i_k} \qquad (1 \leqq k \leqq q_n) \qquad (55)$$

darstellbaren Substitutionen, wo die Faktoren E_{i_ν} von einander unabhängig sämtliche den Bedingungen

$$0 < \mu \leqq n, \quad -n \leqq \nu \leqq n$$

genügenden Substitutionen (27) durchlaufen. Offenbar ist allgemein $(\bar{S})_n$ eine Teilmenge von $(\bar{S})_{n+1}$ und ferner gehört jede Substitution von Γ_u für hinreichend grosse n zu $(\bar{S})_n$. Indem wir Differenzen

$$[\bar{S}]_n = (\bar{S})_n - (\bar{S})_{n-1}$$

der Mengen (54) einführen, können wir somit die Gesamtheit der Substitutionen von Γ_u in die unendliche Folge

$$[\bar{S}]_0 \equiv 1\,, \; [\bar{S}]_1, \; [\bar{S}]_2, \ldots \qquad (56)$$

ordnen, wo jede Klammer eine Menge von endlich vielen Substitutionen darstellt. Nach dem Obigen hängt die Folge (56) von der Zahlenfolge (51) ab. Von besonderer Wichtigkeit für die Anwendungen ist diejenige spezielle Folge (56), die der Annahme $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ entspricht. Die Folgen (56) dienen als Grundlage für die funktionentheoretischen Betrachtungen der §§ 7—9, indem sie die Reihenfolge der Glieder der betreffenden bedingt konvergenten Reihen und Produkte repräsentieren.

6 §. Konstruktion der geschlossenen Linien L_n.

13. Wir werden in diesem § die Existenz einer unendlichen Folge einander umschliessender und gegen H konvergierender, geschlossener Linien

$$L_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (57)$$

nachweisen, für welche bei beliebigem Werte der Konstanten a die Gleichung

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{L_n} \frac{|dz|}{|u(z) - u(a)|} = 0 \qquad (58)$$

gleichmässig in jedem Bereich innerhalb H gilt.

Wir gehen zu diesem Zweck wieder von der Folge (51) aus und bestimmen die ganze Zahl q_n aus (52). Indem wir auf den Fundamentalbereich B_n von Γ_n die Gesamtheit der Substitutionen (54), also die Substitutionen der Stufe $\leqq q_n$ von Γ_n anwenden, bekommen wir einen Bereich A'_n, dessen Rand aus der Gesamtheit der mod. n reduzierten Züge q_n:ter Stufe von Γ_n und der $\varDelta$-Bogen der Stufe $\leqq q_n$ besteht. Wir ersetzen ferner jedes in A'_n enthaltene Polygon von Γ_n durch das entsprechende Polygon von Γ_u, indem wir alle mod. n reduzierten Züge durch die zugehörigen nichtreduzierten Züge ersetzen und ferner die Bildkurven der bei B_n fehlenden Züge

$$k_\nu^\varepsilon \qquad |\nu| > n \tag{59}$$

einführen. Dadurch geht A'_n in einen Teilbereich A_n über, der identisch mit der Summe der aus dem Fundamentalbereich B_u von Γ_u durch die Substitutionen (54) erhaltenen Polygone ist. Dem Bereich A_n entspricht in der u-Ebene eine endlich vielblättrige, berandete Riemannsche Fläche R'_n, deren Blätter den verschiedenen zu A_n gehörigen Polygonen von Γ_u entsprechen und mit der geschnittenen u-Ebene identisch sind. Die fraglichen Blätter sind mit einander längs den zu Π_n gehörigen Teilen der Linien

$$l_\nu^\varepsilon \qquad (|\nu| \leqq n) \tag{59$'$}$$

zusammengeheftet, wobei wie in Nr. 6 die obersten und die untersten Haken, die nur teilweise innerhalb Π_n liegen, als Ganzes mitzunehmen sind.

Der Rand von R'_n und A_n besteht aus dreierlei Linien:

1) Die Schnitte

$$l_\nu^\varepsilon \qquad (|\nu| > n) \tag{59$''$}$$

gehören in jedem Blatt von R'_n zum Rand. Ihnen entsprechen die Züge (59) und ihre Transformierten vermittels der Substitutionen (54).

2) Die Ufer der zu Π_n nichtgehörigen Schnitte (59)′ bilden je zwei eine in zwei verschiedenen Blättern laufende Linie. Diesen Linien entsprechen konvexe, in zwei benachbarten Polygonen verlaufende Linien, für welche wir schon früher (Nr. 8) die Benennung mod. n *genommener Restzug* angewandt haben. Sie werden aus den in Nr. 8 betrachteten Restzügen durch die verschiedenen Substitutionen von (54) erhalten.

3) Die freien Ufer der ganzen Schnitte (59)′ in den am tiefsten liegenden Blätter der Fläche R'_n gehören als Ganzes zum Rand von R'_n. Ihnen entsprechen

diejenigen nichtreduzierten Züge q_n:ter Stufe, welche den unteren Rand der zu A_n gehörigen innersten Polygone, der Polygone q_n:ter Stufe, ausmachen.

Die Linien der obigen drei Arten bilden zusammen eine den Nullpunkt enthaltende konvexe, geschlossene Linie L'_n, deren Länge somit beschränkt, nämlich $< 2\pi\tau$ ist.

Wir bemerken ferner, dass nur die Linien der dritten Art solche Seiten des Polygonnetzes von Γ_x enthalten, deren Bild in der u-Ebene zum Inneren von Π_n gehört. Die betreffenden endlich vielen Seiten gehören offenbar schon zum Rand von A'_n, nämlich zu den mod. n reduzierten Zügen q_n:ter Stufe, deren Gesamtlänge der Ungleichung (48)' mit $p = q_n$ genügt. Aus (52) folgt, dass die Länge des betreffenden Teiles $\overline{L}''_n$ von $\overline{L}_n$ der Ungleichung

$$\overline{L}''_n < 2\pi\tau\varepsilon_n$$

genügt. Der komplementare, der Hauptteil $\overline{L}'_n$ des Randes besteht somit aus Seiten, deren Bild in der u-Ebene zu Π_n nicht gehört.

14. Der Bereich A_n besteht offenbar aus unendlich vielen Polygonen von Γ_x. Wir wollen jetzt A_n durch einen Teilbereich D_n ersetzen, der aus endlich vielen Γ_x-Polygonen zusammengesetzt ist und dessen Rand alle obigen Eigenschaften hat.

Wir wollen zuerst die Häufungsecken höherer Art ausschneiden, die Transformierten der Häufungspunkte $P_{\pm\infty}$ der Ecken P_ν^ε sind. Wir ziehen zu diesem Zweck in jedem zu A_n gehörigen Polygon von Γ_u diejenige konvexe Linie, deren Bild in der u-Ebene entweder aus den unteren Ufern der Linien l_n, l_n^1 und dem ihre Endpunkte verbindenden Teil der oberen Seite von Π_n, oder aus den oberen Ufern der Linien l_{-n}, l_{-n}^1 und dem ihre Endpunkte verbindenden Teil der unteren Seite von Π_n besteht. Die betreffenden Linien bestehen offenbar aus den Transformierten der aus den halben Zügen k_n, k_n^1 bzw. k_{-n}, k_{-n}^1 und dem ihre Mittelpunkte verbindenden zu H orthogonalen Kreisbogen. Nach dieser Operation, welche die Konvexität unserer Linie $\overline{L}_n$ nicht zerstört, wird diese Linie nur endlich viele auf H liegende Ecken besitzen.

Es sei Q eine solche Ecke. Sie ist der gemeinsame Endpunkt für zwei Restzüge, die Bilder der gegenüberliegenden Ufer zweier benachbarter Linien l_ν^ε, $l_{\nu+1}^\varepsilon$ sind. Wir schneiden nun die fragliche Ecke längs diejenige Polygonseite von Γ_x aus, deren Bild in der u-Ebene aus der zwischen den obigen l-Linien begrenzten Teil der vertikalen Seite von Π_n besteht. Indem man in dieser Weise mit sämtlichen Ecken Q verfährt, geht $\overline{L}_n$ in eine geschlossene, konvexe und aus endlich vielen Polygonseiten von Γ_x zusammengesetzte und als Ganzes innerhalb H liegende Linie L_n über, welche folgende Eigenschaften besitzt:

1) Der Hauptteil L'_n der Linie L_n besteht aus Seiten, deren Gesamtlänge wie der ganzen Linie beschränkt:

$$L'_n < 2\pi\tau \tag{60}$$

ist und deren Bildlinien in der u-Ebene auf dem Rand des Parallelogrammes Π_n liegen. Auf ihnen ist somit

$$|u| > cn \quad (c = \text{eine endliche Konstante}). \tag{61}$$

2) Der übrige Teil $L''_n = \overline{L}''_n$ von L_n besteht aus Seiten, deren Gesamtlänge

$$L''_n < 2\pi\tau\varepsilon_n$$

ist und deren Bildlinien in der u-Ebene mit den innerhalb Π_n liegenden Teilen der Linien (59)' zusammenfallen.

Aus der Konstruktion der Linien L_n geht hervor, dass allgemein L_n ganz innerhalb L_{n+1} liegt und ferner, dass L_n für $n \to \infty$ gegen die Peripherie des Hauptkreises konvergiert, d. h. jedes Polygon von Γ_x liegt von einer gewissen Stelle ab innerhalb der Linien (57).

Um das obige Resultat in einer für Anwendungen geeigneten Form auszudrücken, bilden wir das Integral

$$\int\limits_{L_n} \frac{|dz|}{|u(z) - u(a)|} = \int\limits_{L'_n} \frac{|dz|}{|u(z) - u(a)|} + \int\limits_{L''_n} \frac{|dz|}{|u(z) - u(a)|}. \tag{62}$$

Wegen (61) ist für hinreichend grosses n

$$|u(z) - u(a)| > c'n, \quad \int\limits_{L'_n} \frac{|dz|}{|u(z) - u(a)|} < \frac{2\pi\tau}{c'n}. \tag{62'}$$

Ist ferner m das Minimum von $|u(z) - u(a)|$ auf den Seiten der u-Parallelogramme, so ist

$$\int\limits_{L''_n} \frac{|dz|}{|u(z) - u(a)|} < \frac{2\pi\tau\varepsilon_n}{m}. \tag{62''}$$

Aus (62), (62)' und (62)'' folgt für $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$

$$\int\limits_{L_n} \frac{|dz|}{|u(z) - u(a)|} < \frac{\lambda_a}{n}, \tag{63}$$

wo λ_a eine endliche Konstante ist, wenn $m > 0$, also wenn der Punkt $u(a)$ zu keiner Seite der u-Parallelogramme gehört. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so muss man die Linie L_n vermittels äquivalenter Schnitte abändern. Für $n \to \infty$ ergibt sich aus (63) die Gleichung

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{L_n} \frac{|dz|}{|u(z) - u(a)|} = 0. \tag{63'}$$

15. Die Zusammensetzung des von L_n begrenzten Bereichs D_n hat eine sehr anschauliche Deutung in der u-Ebene: wenn man aus jedem Blatt der Riemannschen Fläche R'_n das ganze Äussere des Parallelogrammes Π_n ausschneidet, bekommt man eine neue berandete Riemannsche Fläche R_n, die gerade mit dem Bild des Bereichs D_n identisch ist. Wir erhalten somit eine unendliche Folge Riemannscher Flächen

$$R_n \qquad\qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei allgemein alle inneren und Randpunkte von R_n innere Punkte von R_{n+1} sind und ferner R_n für $n \to \infty$ in die Überlagerungsfläche der Funktion $z(u)$ übergeht. Zugleich ist es möglich, unmittelbar die Gesamtheit der zu D_n gehörigen Polygone von Γ_x zu bestimmen. Bemerkt man, dass nach Nr. 2 das zum Fundamentalbereich B_u gehörige Blatt aus denjenigen u-Polygonen zusammengesetzt ist, die nach (12) den Substitutionen

$$\Sigma^{\varepsilon}_{\mu,\nu} = S_1^{\varepsilon} S_2^{\mu} S_0^{\nu} \qquad \left(\varepsilon = 0, 1; \quad \begin{matrix} -n < \mu \leqq n \\ -n + 1 - \varepsilon \leqq \nu \leqq n - \varepsilon \end{matrix}\right) \tag{64}$$

entsprechen, so sieht man, dass die fraglichen Polygone aus

$$(\Sigma)_n (\bar{S})_n \tag{64'}$$

bestehen, wo $(\Sigma)_n$ die Substitutionen (64) und $(\bar{S})_n$ die Substitutionen (54) durchläuft.

Wir schreiben nun das Schema (9) in der Form

$$\begin{array}{llll}
[\Sigma]_0 & [\Sigma]_0[\bar{S}]_1 & [\Sigma]_0[\bar{S}]_2 & \ldots \\
[\Sigma]_1 & [\Sigma]_1[\bar{S}]_1 & [\Sigma]_1[\bar{S}]_2 & \ldots \\
[\Sigma]_2 & [\Sigma]_2[\bar{S}]_1 & [\Sigma]_2[\bar{S}]_2 & \ldots \\
[\Sigma]_3 & [\Sigma]_3[\bar{S}]_1 & [\Sigma]_3[\bar{S}]_2 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array} \tag{65}$$

indem wir die Elemente durch Mengen ersetzen, die endlich viele Elemente enthalten, wobei $[\Sigma]_n$ die Differenz

$$[\Sigma]_n = (\Sigma)_n - (\Sigma)_{n-1}$$

bezeichnet. Dann werden die zum Inneren von L_n gehörigen Γ_x-Polygone offenbar durch die Menge $(S)_n$ derjenigen Substitutionen von Γ_x dargestellt, die den n ersten Zeilen und Kolonnen von (65) angehören.

Indem wir Differenzen

$$[S]_n = (S)_n - (S)_{n-1}$$

einführen, welche die Gesamtheit der zur n:ten Zeile und n:ten Kolonne gehörigen Substitutionen repräsentieren, können wir die Gesamtheit der Substitutionen der Gruppe Γ_x in die unendliche Folge

$$[S]_0, \ [S]_1, \ [S]_2, \ [S]_3, \ldots \tag{66}$$

schreiben. Wir wählen gewöhnlich $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, wodurch eine ganz bestimmte Folge (66) erhalten wird. Die fundamentale Bedeutung der Folgen (66) besteht darin, dass sie die Reihenfolge der Glieder der bedingt konvergenten Reihen der 12—14 §§ ausdrücken.

B. Funktionentheoretischer Teil.

7 §. Darstellung der Hauptfunktionen von Γ_u durch unendliche Reihen.

16. Wir gehen von der in 5 § gegebenen Darstellung unserer fuchsschen Gruppe Γ_u durch Grenzübergang aus den fuchsschen Gruppen

$$\Gamma_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{67}$$

aus, welche Untergruppen von Γ_u sind und alle das Geschlecht Null haben. Nach der allgemeinen Theorie besitzt jede Gruppe Γ_n eine bis auf eine lineare Transformation bestimmte Hauptfunktion. Zweck der folgenden Betrachtungen ist, die genannten Hauptfunktionen analytisch darzustellen, um daraus durch Grenzübergang einen Ausdruck für die Hauptfunktionen von Γ_u zu gewinnen.

Weil jede Gruppe (67) noch auf gewissen Teilen des Hauptkreises diskontinuirlich ist, wollen wir statt des Inneren des Hauptkreises die ganze z-Ebene in Betracht ziehen. Als Fundamentalbereich von Γ_n kann dann dasjenige Polygon

$$\widehat{B}_n = B_n + \overline{B}_n$$

angewandt werden, welches erhalten wird, wenn dem Polygon B_n sein bezüglich H genommenes Spiegelbild addiert wird.

Es sei nun

$$g_n(z) = g_n(z, a) \tag{68}$$

diejenige Hauptfunktion, also im Bereich $\widehat{B}_n$ einwertige automorphe Funktion von Γ_n, die ihren in B_n gelegenen Pol im Punkte $z = a$ von B_x mit der Entwicklung

$$g_n(z, a) = \frac{1}{z - a} + c_1^{(n)}(z - a) + c_2^{(n)}(z - a)^2 + \cdots \tag{69}$$

besitzt. Dann ist das zum Pol

$$a_k = S_k(a) \tag{70}$$

gehörige Residuum gleich

$$A_n = S_k'(a). \tag{71}$$

Wir wenden nun die Cauchysche Integralformel auf die Funktion (68) in demjenigen Bereich $\widehat{D}_n^{(p)}$ an, der von der Gesamtheit der zu Γ_n gehörigen geschlossenen Züge p:ter Stufe begrenzt ist. Wir bekommen

$$g_n(z) = g_n(\infty) + \sum_{\widehat{D}_n^{(p)}} \frac{S_k'(a)}{z - S_k(a)} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{d_n^{(p)}} \frac{g_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \tag{72}$$

wo die Summierung also über die Gesamtheit der Substitutionen von Γ_n der

Stufe $\leqq p$ zu erstrecken ist. Zur Abschätzung des über den Rand $d_n^{(p)}$ von $\widehat{D}_n^{(p)}$ erstreckten Integrals bemerken wir, dass nach $(48)''$

$$d_n^{(p)} < 2\pi\tau'\omega_n^p \tag{73}$$

ist. Wir konstruieren ferner im Innern[1] von B_x den Kreis

$$|z - a| = \varrho, \tag{74}$$

dessen Innere durch die Funktion (68) von n unabhängig schlicht abgebildet wird, weil B_x ein Teilbereich von $\widehat{D}_n^{(p)}$ ist. Nach einem bekannten Satz von Koebe ist auf der Kreislinie (74) und somit auch auf dem Rand von $\widehat{D}_n^{(p)}$

$$|g_n(\zeta)| < M, \tag{75}$$

wo M eine endliche, von n unabhängige Konstante ist. Somit gilt in jedem innerhalb $d_n^{(p)}$ liegenden Bereich gleichmässig die Ungleichung

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{d_n^{(p)}} \frac{g_n(\zeta)}{\zeta - z} dz \right| < \frac{M}{2\pi d} d_n^{(p)} < \frac{M\tau'}{d} \omega_n^p, \tag{76}$$

wo d die kürzeste Entfernung des Randes des genannten Bereiches und $d_n^{(p)}$ bezeichnet. Aus (72) und (76) folgt

$$g_n(z) = g_n(\infty) + \sum_{\widehat{D}_n^{(p)}} \frac{S_k'(a)}{z - S_k(a)} + \varepsilon_n', \tag{77}$$

wo

$$|\varepsilon_n'| < \frac{M\tau'}{d} \omega_n^p.$$

Nach (52) ist speziell für $p \geqq q_n$

$$|\varepsilon_n'| < \frac{M\tau'}{d} \varepsilon_n. \tag{77'}$$

[1] Man kann durch eine erlaubte Abänderung von B_x stets erreichen, dass a im Innern von B_x liegen wird.

Durch Grenzübergang $p \to \infty$ ergibt sich aus (77) wegen (77)' für die Funktion (68) die Reihe[1]

$$g_n(z, a) = g_n(\infty, a) + \sum_{\Gamma_n} \frac{S_k'(a)}{z - S_k(a)}, \tag{78}$$

welche in jedem Bereich der z-Ebene, der keine singulären Punkte der Gruppe Γ_n enthält, wenigstens nach Fortlassen einer endlichen Anzahl von Gliedern gleichmässig konvergiert.

Die rechts in (78) auftretende Reihe ist in ihrer Abhängigkeit von a eine Poincarésche Reihe (-2):ter Dimension, die bekanntlich sogar absolut konvergent ist.

17. Wir bilden jetzt die Funktion

$$g(z, a) = g(z) = \frac{u'(a)}{u(z) - u(a)} + \frac{u''(a)}{2u'(a)}, \tag{79}$$

welche diejenige Hauptfunktion von Γ_u ist, die im Punkt a einen Pol mit der Entwicklung

$$g(z, a) = \frac{1}{z - a} + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \cdots \tag{80}$$

besitzt. Es soll die Abhängigkeit der Funktionen

$$U_n = g_n(z, a), \quad U = g(z, a) \tag{81}$$

voneinander untersucht werden.

Weil (79) automorph bezüglich jede Gruppe Γ_n ist, indem diese Gruppen Untergruppen von Γ_u sind, so ist

$$U = U(U_n) \tag{82}$$

eine für alle Werte von U_n eindeutige Funktion. Betrachten wir jetzt die inverse Funktion

$$U_n = U_n(U). \tag{83}$$

Diese Funktion kann offenbar nur in den Windungspunkten von $z(u)$, also in den Punkten

[1] Wegen eines Versehens fehlt das konstante Glied $g_n(\infty, a)$ in der Formel (12), S. 366 und den daraus abgeleiteten Formeln in unserer S. 196 zitierten Arbeit[1], was doch auf die Schlussformel (22) keinen Einfluss hat.

$$U = \frac{u'(a)}{u(c_i) - u(a) + \mu\,\omega_1 + \nu\,\omega_2} + \frac{u''(a)}{2\,u'(a)}, \tag{84}$$

wo

$$\mu, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad c_i = z(e_i) \qquad (i = 5, 6),$$

Windungspunkte besitzen und auch in diesen nur, wenn es sich um den Bildpunkt eines zu Π_n nichtgehörigen Punktes handelt.

Nach dem Obigen bildet die Funktion (83) das Äussere eines Kreises

$$|U - C| = \frac{\varrho}{n} \quad \left(\begin{array}{l}\varrho = \text{endliche Konstante}\\ C = \dfrac{u''(a)}{2\,u'(a)}\end{array}\right) \tag{85}$$

auf einen schlichten unendlichen Bereich V derart ab, dass im Unendlichen eine Entwicklung der Form

$$U_n = U + \frac{c_1^*}{U} + \frac{c_2^*}{U^2} + \cdots \tag{86}$$

gilt. Nach Koebe gilt dann überall ausserhalb (85) die Ungleichung

$$|U_n - U| < \frac{\varrho'}{n} \quad (\varrho' = \text{endliche Konstante}). \tag{87}$$

Der Rand von V liegt somit ganz innerhalb des Kreises

$$|U_n - C| = \frac{\varrho + \varrho'}{n}. \tag{88}$$

Es sei nun W ein beliebiger innerhalb H liegender Bereich und m das leicht zu bestimmende positive Minimum von $|U - C|$ in W. Wir wählen $n > \frac{\varrho}{m}$ und haben in W

$$|U - C| > \frac{\varrho}{n}$$

und somit, nach (87)

$$|g_n(z) - g(z)| < \frac{\varrho'}{n}. \tag{89}$$

Mithin gilt in W gleichmässig

$$\lim_{n\to\infty} g_n(z) = g(z). \tag{90}$$

Weil nach dem Obigen der Bildbereich von W in der U_n-Ebene das ganze Äussere von (88) enthält und weil ferner die Werte der Funktionen $g_n(z)$ ausserhalb H von ihren Werten innerhalb H verschieden sind, so muss der Bildbereich des Äusseren des Hauptkreises vermöge $U_n = g_n(z)$ ganz innerhalb des Kreises (88) liegen. Mithin ist für $|z| > 1$ gleichmässig

$$|g_n(z) - C| < \frac{\varrho + \varrho'}{n} \tag{91}$$

und also

$$\lim_{n\to\infty} g_n(z) = C.$$

Speziell für $z = \infty$ ergibt sich hieraus

$$|g_n(\infty) - C| < \frac{\varrho + \varrho'}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} g_n(\infty) = C. \tag{92}$$

Nun folgt aus (79), (89) und (92) gleichmässig in W

$$\left|\frac{u'(a)}{u(z) - u(a)} - [g_n(z, a) - g_n(\infty, a)]\right| < \frac{c'}{n}, \tag{93}$$

wo $c' = 2\varrho' + \varrho$. Für $n \to \infty$ ergibt sich hieraus

$$\frac{u'(a)}{u(z) - u(a)} = \lim_{n\to\infty} [g_n(z, a) - g_n(\infty, a)]. \tag{94}$$

Wir wählen nun in der Folge (51): $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ und wir bestimmen dann die ganze Zahl q_n aus (52). Nach (77), (77)' und (93) ist dann im Bereich W

$$\left|\frac{u'(a)}{u(z) - u(a)} - \sum_{\overline{D}_n^{(q_n)}} \frac{S_k'(a)}{z - S_k(a)}\right| < \frac{c}{n}, \tag{95}$$

wo $c = c' + \frac{M\tau'}{d}$. Es gilt mithin in jedem innerhalb des Hauptkreises liegenden Bereich gleichmässig die Darstellung

$$\frac{u'(a)}{u(z) - u(a)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{\overline{D}_n^{(q_n)}} \frac{S_k'(a)}{z - S_k(a)} \tag{96}$$

wo die Summierung sich auf die Gesamtheit der Substitutionen von Γ_u in der durch (56) dargestellten, der Annahme $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ entsprechende Reihenfolge bezieht. Wir schreiben (96) kurz

$$\frac{u'(a)}{u(z) - u(a)} = \sum_{\Gamma_u} \frac{S'(a)}{z - S(a)}. \tag{97}$$

Wegen der Identität

$$\frac{S'(a)}{z - S(a)} - \frac{S'(a)}{z_0 - S(a)} = \frac{1}{S^{-1}(z) - a} - \frac{1}{S^{-1}(z_0) - a} \tag{97'}$$

ergibt sich hieraus für $z_0 = \infty$

$$\frac{u'(a)}{u(z) - u(a)} = \sum_{\Gamma_u} \left(\frac{1}{S(z) - a} - \frac{1}{S(\infty) - a} \right) \tag{97''}$$

und für allgemeines z_0 der Ausdruck[1]

$$\int_{z_0}^{z} \frac{u'(a)}{u(z) - u(a)} = \sum_{\Gamma_u} \int_{z_0}^{z} \frac{S'(a)}{z - S(a)} = \sum_{\Gamma_u} \int_{z_0}^{z} \frac{1}{S(z) - a} \tag{97'''}$$

für diejenige Hauptfunktion von Γ_u, die im Punkte $z = a$ einen Pol mit dem Residuum 1 und im Punkte $z = z_0$ eine Nullstelle besitzt.

Wir bemerken noch, dass die Reihe (97) in ihrer Abhängigkeit vom Parameter a eine Poincarésche Reihe (-2):ter Dimension ist, die nicht mehr absolut konvergiert.

Wir haben in (97) und (97)'' für die betreffende Hauptfunktion Ausdrücke einfachster Form, welche die Pole der Funktion mit den Residuen in Evidenz bringen und eine formale Invarianz den Substitutionen der Gruppe Γ_u gegenüber aufweisen.

8 §. Produktdarstellung der Hauptfunktionen von Γ_u.

18. Durch Integration der beiden Seiten von (97) in bezug auf den Parameter a zwischen den irgendwie innerhalb H gewählten Grenzen a und b ergibt sich zunächst

$$\log \frac{u(z) - u(a)}{u(z) - u(b)} = \sum_{\Gamma_u} \log \frac{z - S(a)}{z - S(b)}$$

[1] Zu bemerken ist, dass mit S auch S^{-1} zu $[\bar{S}]_n$ gehört.

und hieraus, durch Übergang zur Exponentialfunktion

$$\frac{u(z)-u(a)}{u(z)-u(b)}=\prod_{\Gamma_u}\frac{z-S(a)}{z-S(b)}. \tag{98}$$

Hieraus ergibt sich der Ausdruck

$$\frac{u(z)-u(a)}{u(z)-u(b)}:\frac{u(z_0)-u(a)}{u(z_0)-u(b)}=\prod_{\Gamma_u}\left[\frac{z-S(a)}{z-S(b)}:\frac{z_0-S(a)}{z_0-S(b)}\right] \tag{99}$$

für diejenige Hauptfunktion von Γ_u, welche in den resp. mit

$$z=a,\ z_0,\ b$$

äquivalenten Stellen Null, Eins und unendlich wird. Wegen der für Doppelverhältnisse geltenden Identität

$$\frac{z-S(a)}{z-S(b)}:\frac{z_0-S(a)}{z_0-S(b)}=\frac{S^{-1}(z)-a}{S^{-1}(z)-b}:\frac{S^{-1}(z_0)-a}{S^{-1}(z_0)-b} \tag{99'}$$

kann (99) auch in der Form

$$\frac{u(z)-u(a)}{u(z)-u(b)}:\frac{u(z_0)-u(a)}{u(z_0)-u(b)}=\prod_{\Gamma_u}\left[\frac{S(z)-a}{S(z)-b}:\frac{S(z_0)-a}{S(z_0)-b}\right] \tag{100}$$

geschrieben werden, woraus die formale Invarianz unseres Ausdruckes besser hervorgeht.

9 §. Direkte Darstellung der Funktion $u(z)$.

19. Unsere Darstellung (97) verliert ihre Gültigkeit, wenn es um eine Hauptfunktion der Form

$$Au(z)+B$$

handelt, die innerhalb des Hauptkreises überall regulär ist. Um eine für diesen speziellen Fall gültige Reihe zu gewinnen, gehen wir von derjenigen Hauptfunktion

$$g_n(z,\ \infty) \tag{101}$$

von Γ_n aus, welche im Unendlichen einen Pol mit einer Entwicklung der Form

$$g_n(z,\ \infty) = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots \tag{102}$$

besitzt. Weil allgemein das Residuum im Pole $z = -\frac{\delta}{\gamma}$ von (35) gleich $-\frac{1}{\gamma^2}$ ist, so gilt nach (78) für (101) die absolut konvergente Reihe

$$g_n(z,\ \infty) = z + \sum_{\Gamma_n}{}' - \frac{1}{\gamma^2\left(z + \frac{\delta}{\gamma}\right)} = z + \sum_{\Gamma_n}{}' (S(z) - S(\infty)). \tag{103}$$

Wie früher beweist man, dass die Funktionen (101) für $n \to \infty$ in jedem ausserhalb des Hauptkreises liegenden Bereich gleichmässig gegen diejenige Hauptfunktion $g(z,\ \infty)$ von Γ_n konvergiert, die im Unendlichen einen Pol mit einer Entwicklung der Form (102) besitzt. Daraus ergibt sich für die fragliche Funktion *ausserhalb* H die bedingt konvergente Darstellung

$$g(z,\ \infty) = z + \sum_{\Gamma_n}{}' (S(z) - S(\infty)). \tag{104}$$

Dagegen reduziert sich die Grenzfunktion innerhalb des Hauptkreises auf eine Konstante. (Vgl. N:o 17).

Wir bilden nun aus (103) die neue Hauptfunktion der Form (97)

$$\frac{g_n'(0,\ \infty)}{g_n(z,\ \infty) - g_n(0,\ \infty)},$$

welche in $z = 0$ einen einfachen Pol mit dem Residuum 1 besitzt und welche für $z = \infty$ verschwindet. Aus (94) ergibt sich gleichmässig in jedem Bereich innerhalb H

$$\frac{u'(0)}{u(z) - u(0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{g_n'(0,\ \infty)}{g_n(z,\ \infty) - g_n(0,\ \infty)}, \tag{105}$$

woraus für $u(0) = 0,\ u'(0) = 1$ der Ausdruck

$$u(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{g_n(z,\ \infty) - g_n(0,\ \infty)}{g_n'(0,\ \infty)} \tag{106}$$

erhalten wird, wobei die Schnelligkeit der Konvergenz in der in N:o 17 angegebenen Weise abgeschätzt werden kann. Nach dem Obigen sind die Grenzwerte des Zählers und Nenners für sich gleich Null. Aus (103) folgt

$$g_n(z, \infty) - g_n(0, \infty) = \sum_{\Gamma_n} [S(z) - S(0)],$$
$$g'_n(0, \infty) = \sum_{\Gamma_n} S'(0), \tag{107}$$

und somit

$$u(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{\Gamma_n} [S(z) - S(0)]}{\sum\limits_{\Gamma_n} S'(0)}, \tag{108}$$

wo die Reihenfolge der Glieder wieder durch (56) gegeben ist.

In gleicher Weise erhält man Ausdrücke für die anderen automorphen Funktionen von Γ_u. Wir schreiben hier nur den Ausdruck

$$u^2(z) = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{\Gamma_n} [S(z)^2 - S(0)^2]}{\sum\limits_{\Gamma_n} S(0) S'(0)}, \tag{109}$$

von dem wir später Gebrauch machen werden.

10 §. Darstellung der automorphen Funktionen von Γ_{xy} durch elliptische Thetafunktionen.

20. Wir beginnen mit einer Hauptfunktion unserer Gruppe Γ_x, mit der automorphen Funktion $x(z)$, welche aus den Funktionen

$$x = \wp(u), \quad u = u(z) \tag{110}$$

also der Weierstrassischen $\wp$-Funktion und der fuchsoiden Funktion $u(z)$ zusammengesetzt werden kann, vorausgesetzt, dass die untere Grenze des Integrals (6) durch $e_4 = \infty$ ersetzt wird. Hieraus folgt, dass in den Gleichungen (7) S_1 und S_3 miteinander vertauscht werden und ω_2 in $-\omega_2$ übergeht.

Wir drücken zuerst die $\wp$-Funktionen vermittels der bekannten Formel

$$\wp(u) - \wp(u_0) = C \frac{H(u + u_0) H(u - u_0)}{H^2(u)} \tag{111}$$

durch die Jacobische Thetafunktion

$$H(u) \tag{112}$$

aus, die den Gleichungen

$$\begin{gathered} H(u+\omega_1) = -H(u), \quad H(u+\omega_2) = -e^{\varrho u+\beta} H(u), \\ H(-u) = -H(u); \quad \left[\varrho = -\frac{2\pi i}{\omega_1}, \quad \beta = -\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}\right] \end{gathered} \tag{113}$$

genügt.

Wir führen statt u die neue Variable $\frac{2\pi i u}{\omega_1}$ ein, wodurch die Perioden ω_1, ω_2 in $2\pi i$ und $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} 2\pi i$ übergehen und ϱ, β die Werte $\varrho = -1$, $\beta = -\frac{\tau}{2}$ besitzen werden. Durch Einführung der fuchsoiden Funktion $u(z)$ in (112) bekommt man für die Funktion (111) den Ausdruck

$$x(z) - x(z_0) = C \frac{\varphi(z, z_0)}{\varphi(z, 0)}, \qquad (u_0 = u(z_0)) \tag{114}$$

wo

$$\varphi(z, z_0) = H(u(z) + u(z_0)) \cdot H(u(z) - u(z_0)); \quad \varphi(z, 0) = H^2(u(z)) \tag{115}$$

ganze, d. h. für $|z| < 1$ reguläre Funktionen sind, deren Verhalten den Erzeugenden von Γ_x gegenüber durch

$$\varphi(S_2) = \varphi(S_3) = \varphi(S_4) = \varphi(S_5) = \varphi(z), \quad \varphi(S_1) = e^{-2u(z)-\tau} \varphi(z) \tag{116}$$

dargestellt wird. Hieraus folgt für eine willkürliche Substitution von Γ_x die Gleichung

$$\varphi(S) = e^{2gu(z)-g'\tau} \varphi(z), \tag{117}$$

wo g und g' ganze Zahlen sind.

Weil jede automorphe Funktion von Γ_x eine rationale Funktion von x ist, kann man eine solche Funktion in der Form

$$F(z) = K \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{N} \varphi(z, b_\nu)}{\prod\limits_{\nu=1}^{N} \varphi(z, a_\nu)} = K \frac{\varphi_b(z)}{\varphi_a(z)} \tag{118}$$

darstellen, wo

$$z = b_\nu, \quad z = a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

ihre in B_x liegenden Nullpunkte bzw. Pole bezeichnen. Die Gleichungen (116) für die ganzen Funktionen

$$\varphi_b(z) = \prod_{\nu=1}^{N} \varphi(z, b_\nu), \quad \varphi_a(z) = \prod_{\nu=1}^{N} \varphi(z, a_\nu) \tag{119}$$

lauten:

$$\begin{gathered} \varphi_a(S_2) = \varphi_a(S_3) = \varphi_a(S_4) = \varphi_a(S_5) = \varphi_a(z), \\ \varphi_a(S_1) = e^{-2Nu(z) - N\tau}\, \varphi_a(z). \end{gathered} \tag{120}$$

Für eine willkürliche Substitution von Γ_x folgt aus ihnen wieder eine Gleichung der Form (117), wo g und g' resp. durch Ng und Ng' zu ersetzen sind.

21. Indem wir jetzt zur Herleitung des entsprechenden Ausdruckes für die Funktion $y(z)$ übergehen, führen wir neben u das neue elliptische Integral

$$v = \frac{1}{2} \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x-e_3)(x-e_4)(x-e_5)}} \tag{121}$$

ein, das wir mittels eines konstanten Faktors derart normieren wollen, dass seine Perioden die Form

$$\omega_1' = 2\pi i, \quad \omega_2' = \tau'$$

annehmen werden. Wir schreiben nun

$$y = \prod_{i=1}^{3} \sqrt{x - e_i} \prod_{j=5}^{6} \sqrt{x - e_j}$$

und setzen, indem wir die entsprechende zu v gehörige Thetafunktion $\overline{H}(v)$ einführen,

$$\sqrt{x - e_i} = \varkappa_i \frac{H(u - \alpha_i)}{H(u)}, \quad \sqrt{x - e_j} = \varkappa_j \frac{\overline{H}(v - \alpha_j)}{\overline{H}(v)},$$

wodurch y den Ausdruck

$$y = \varkappa \frac{\prod_{i=1}^{3} H(u - \alpha_i) \prod_{j=5}^{6} \overline{H}(v - \alpha_j)}{H^3(u) \overline{H}^2(v)} \tag{122}$$

annehmen wird. Durch Einführung der Funktion $v(z)$, welche eine Hauptfunktion einer gewissen fuchsoiden Gruppe Γ_v ist, ergibt sich aus (122) für unsere Funktion $y(z)$ der Ausdruck

$$y(z) = \varkappa \frac{\psi_1(z)}{\psi(z)}, \tag{122$'$}$$

wo

$$\psi_1(z) = \prod_{i=1}^{3} H(u(z) - \alpha_i) \prod_{j=5}^{6} \overline{H}(v(z) - \alpha_j), \quad \psi(z) = H^3(u(z))\overline{H}^2(v(z)) \tag{123}$$

ganze Funktionen sind. Nun ist

$$\begin{aligned} &v(S_1) = v(S_2) = v(z), \quad v(S_3) = -v(z), \\ &v(S_4) = v(z) + \omega_1', \qquad v(S_5) = -v(z) - \omega_2' \end{aligned} \tag{124}$$

und

$$\begin{gathered} \overline{H}(v + \omega_1') = -\overline{H}(v), \quad \overline{H}(v + \omega_2') = -e^{-\varrho' v + \beta'}\overline{H}(v), \\ \overline{H}(-v) = -\overline{H}(v), \qquad \left[\varrho' = -\frac{2\pi i}{\omega_1'} = -1, \quad \beta' = -\pi i \frac{\omega_2'}{\omega_1'} = -\frac{\tau'}{2}\right]. \end{gathered} \tag{125}$$

Hieraus und aus den entsprechenden Gleichungen für u, nämlich (7) und (113) findet man für die Funktionen (123) die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\psi(S_2) = \psi(S_3) = -\psi(z), \quad \psi(S_4) = \psi(z), \\ &\psi(S_1) = -e^{-3\left(u(z) + \frac{\tau}{2}\right)}\psi(z), \quad \psi(S_5) = e^{-2\left(v(z) + \frac{\tau'}{2}\right)}\psi_1(z) \end{aligned} \tag{126}$$

und

$$\begin{aligned} &\psi_1(S_1) = \psi_1(S_4) = \psi_1(z), \quad \psi_1(S_2) = -\psi_1(z), \\ &\psi_1(S_1) = e^{-3\left(u(z) + \frac{\tau}{2}\right)}\psi_1(z), \quad \psi(S_5) = -e^{-2\left(v(z) + \frac{\tau'}{2}\right)}\psi_1(z). \end{aligned} \tag{127}$$

Für eine willkürliche Substitution von Γ_x ergibt sich aus ihnen für $\psi(z)$ und $\psi_1(z)$ die Gleichung

$$\psi(S) = e^{a_S u(z) + b_S v(z) + c_S}\psi(z), \tag{128}$$

wo

$$a_S = 3g_1, \quad b_S = 2g_2, \quad c_S = \frac{3}{2}g_1'\tau + g_2'\tau' + g\pi i,$$
$$(g_1,\ g_2,\ g_1',\ g_2',\ g \text{ ganze Zahlen}).$$

22. Es sei jetzt $F(z)$ eine beliebige automorphe Funktion von Γ_{xy}. Wir drücken dieselbe als rationale Funktion

$$F(z) = R_1(x) + R_2(x)y \tag{129}$$

von x und y aus und setzen in (129) die Ausdrücke (114) und (122)' der Funktionen $x(z)$ und $y(z)$ ein. Wir erhalten dadurch

$$F(z) = C\frac{\varphi_\alpha(z)\psi(z) + \varphi_\beta(z)\psi_1(z)}{\varphi_\gamma(z)\psi(z)} = C\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)}, \tag{130}$$

wo die Koeffizienten

$$\varphi_\alpha(z),\ \varphi_\beta(z),\ \varphi_\gamma(z) \tag{131}$$

durch Produkte der Form (119) darstellbare Funktionen sind, die von einer und derselben Ordnung N sind. Dabei sind

$$\vartheta_1(z) = \varphi_\alpha(z)\psi(z) + \varphi_\beta(z)\psi_1(z), \quad \vartheta(z) = \varphi_\gamma(z)\psi(z) \tag{132}$$

ganze Funktionen, deren Verhalten den kanonischen Erzeugenden von Γ_{xy} gegenüber durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\vartheta(T_1) = -\vartheta(z), \quad \vartheta(T_2) = \vartheta(z), \\ &\vartheta(T_0) = -e^{-2\left(v(z)+\frac{\tau'}{2}\right)}\vartheta(z), \\ &\vartheta(T_4^{-1}) = e^{-(2N+3)\left(u(z)+\frac{\tau}{2}\right)}\vartheta(z) \end{aligned} \tag{133}$$

wo $T_0 = T_3 T_4^{-1}$, dargestellt wird. Für eine willkürliche Substitution von Γ_{xy} ergibt sich hieraus für ϑ_1 und ϑ

$$\vartheta(S) = e^{A_S u(z) + B_S v(z) + C_S}\vartheta(z), \tag{134}$$

wo

$$A = \pm(2N+3), \quad B = \pm 2, \quad C = g_1\frac{\tau}{2} + g_2\tau + g_3 i\pi$$

$$(g_1,\ g_2,\ g_3 \text{ ganz}).$$

Die Funktionen (132) haben insgesamt $2N+5$ bezüglich Γ_{xy} nicht äquivalente Nullstellen. Auf der Riemannschen Fläche (5) fallen von den Nullstellen von $\vartheta(z)$ N mit den Polen von $F(z)$, ferner N andere mit den entsprechenden Punkten des zweiten Blattes zusammen, wozu der Punkt $x = \infty$ noch eine fünffache Nullstelle ist. Von den Nullstellen von $\vartheta_1(z)$ fallen N mit den Nullstellen von $F(z)$ und die übrigen mit denjenigen Nullstellen des Nenners zusammen, die keine Pole von $F(z)$ sind.

23. Wir wollen zum Abschluss zeigen, dass es möglich ist, die Darstellung (130) derart zu modifizieren, dass die Exponenten der Gleichungen (134) linear durch eine einzige Funktion ausgedrückt werden können.

Wir bilden zu diesem Zweck die Funktion

$$\varepsilon(z)=\frac{H(u(z))}{\overline{H}(v(z))}, \tag{135}$$

welche eine ganze, nichtverschwindende Funktion ist, weil der Zähler und Nenner in genau denselben Punkten, nämlich in

$$z=S(0) \qquad\qquad (S\subset \Gamma_x),$$

und dazu einfach, verschwinden. Durch Multiplikation des Zählers und Nenners von (130) mit $\varepsilon^2(z)$ gelangt man zum Ausdruck

$$F(z)=\frac{f_1(z)}{f(z)}, \tag{136}$$

wo

$$f_1(z)=\vartheta_1(z)\varepsilon^2(z),\quad f(z)=\vartheta(z)\varepsilon^2(z)=\varphi_7(z)H^5(u(z)) \tag{137}$$

wieder ganze Funktionen sind, deren Nullstellen resp. mit denjenigen von (132) zusammenfallen, wozu die letztere Funktion eine elliptische Thetafunktion von u ist. Das Verhalten der Funktionen (137) den kanonischen Erzeugenden von Γ_{xy} gegenüber wird jetzt durch die Gleichungen

$$f(T_2)=f(T_0)=f(z),\quad f(T_1)=-f(z),\quad f(T_4^{-1})=e^{-(2N+5)\left(u+\frac{\tau}{2}\right)}f(z) \tag{138}$$

dargestellt, woraus für eine willkürliche Substitution von Γ_{xy} die Gleichung

$$f(S)=e^{A'_S u(z)+B'_S}f(z), \tag{139}$$

wo

$$A'_S=\pm(2N+5),\quad B'_S=\frac{g'\tau}{2}+gi\pi$$
$$(g',\ g \text{ ganz})$$

erhalten wird.

Damit ist gezeigt worden, dass *jede automorphe Funktion von Γ_{xy} als Quotient zweier ganzer Funktionen dargestellt werden kann, die aus elliptischen Thetafunktionen und ganzen fuchsoiden Funktionen zusammengesetzt werden können und deren Verhalten den Substitutionen der Gruppe gegenüber durch die bei den elliptischen Thetafunktionen geltenden Gleichungen dargestellt wird.*

11 §. Charakterisierung der Thetafunktionen durch ihre Eigenschaften.

24. Die im Nenner von (136) stehende ganze Funktion $f(z)$ hat die Eigenschaft, für jede Substitution der Gruppe Γ_x einer Gleichung der Form

$$f(S(z)) = e^{g_S(z)} f(z) \tag{140}$$

zu genügen, wo die Exponenten von der ganzen Funktion $g(z) = u(z)$ linear abhängige Funktionen

$$g_S(z) = \alpha_S g(z) + \beta_S \tag{141}$$

sind. Es soll im folgenden untersucht werden, in welchem Masse unsere Funktion $f(z)$ durch die genannte Eigenschaft bestimmt ist und zu diesem Zweck soll die folgende allgemeinere Aufgabe gelöst werden:

Alle ganzen Funktionen $f(z)$ zu finden, die für jede Substitution von Γ_x einer Gleichung der Form (140) *genügen, wo die Exponenten $g_S(z)$ ganze Funktionen irgend einer linearen Schaar* (141) *sind.*

Wir können annehmen, dass nicht alle Koeffizienten α_S verschwinden, weil dann die Funktion $f(z)$ sich auf eine Konstante reduziert, wie leicht bewiesen werden kann.

Es seien nun S, S' zwei beliebige Substitutionen von Γ_x. Aus den Gleichungen (140) und

$$f(S'(z)) = e^{g_{S'}(z)} f(z)$$

folgt zunächst

$$f(SS') = e^{g_{S'}(S)} f(S) = e^{g_{S'}(S)} e^{g_S(z)} f(z).$$

Weil anderseits

$$f(SS') = e^{g_{SS'}(z)} f(z),$$

so erhält man

$$g_{SS'}(z) = g_{S'}(S) + g_S(z) + k_S \cdot 2\pi i,$$

wo k_S eine ganze Zahl ist. Mithin ist wegen (141)

$$\alpha_{SS'} g(z) + \beta_{SS'} \equiv \alpha_{S'} g(S) + \beta_{S'} + \alpha_S g(z) + \beta_S + k_S \cdot 2\pi i. \tag{142}$$

Wir wählen nun S' so, dass $\alpha_{S'} \neq 0$ und erhalten aus (142) für die willkürlich gewählte Substitution S von Γ_x eine Gleichung der Form

$$g(S(z)) = a_S g(z) + b_S. \tag{143}$$

Es seien nun

$$g(S_\nu(z)) = a_\nu g(z) + b_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{144}$$

die den Erzeugenden von Γ_x entsprechenden Gleichungen (143). Aus

$$S_1^2 = 1$$

ergibt sich dann

$$a_1(a_1 g(z) + b_1) + b_1 \equiv g(z)$$

und hieraus

$$a_1^2 = 1, \quad (a_1 + 1)b_1 = 0.$$

In gleicher Weise bekommt man aus

$$(S_1^{-1}S_2)^2 = 1, \quad (S_2^{-1}S_3)^2 = 1, \quad (S_3^{-1}S_4)^2 = 1, \quad S_5^2 = 1$$

die übrigen von den Gleichungen

$$a_\nu^2 = 1, \quad (a_\nu + 1)b_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{145}$$

Mithin hat jede der Gleichungen (144) die Form

$$g(S_\nu(z)) = g(z), \text{ oder } g(S_\nu(z)) = -g(z) + b_\nu,$$

woraus die Gleichung

$$g(S(z)) = \pm g(z) + b_S \tag{146}$$

für eine willkürliche Substitution von Γ_x erhalten wird.

25. Betrachten wir jetzt die Funktion $g(z)$ in ihrer Abhängigkeit von x:

$$g(z(x)) = \bar{g}(x). \tag{147}$$

Bei einem geschlossenen Umlauf in der x-Ebene geht $z(x)$ in $S(z)$ über und (147) transformiert sich somit gemäss der Gleichung

$$\bar{g}(x') = \pm \bar{g}(x) + b. \tag{148}$$

Es ist somit das Quadrat ihrer Ableitung $\bar{g}'^2(x)$ eindeutig und zwar eine rationale Funktion von x

$$\bar{g}'^2(x) = r(x), \tag{149}$$

weil (147) als reguläre Funktion von z in der x-Ebene nur algebraische Singularitäten aufweisen kann. Ferner kann (147) offenbar im Endlichen Windungspunkte nur in den Punkten e_ν besitzen, woraus für $r(x)$ der Ausdruck

$$r(x) = \frac{P_p^2(x)}{\Pi(x-e_\nu)^{\lambda_\nu}} \tag{150}$$

erhalten wird, wo

$$0 \leqq \lambda_\nu \leqq 1$$

und wo der Grad p des Polynomes P_p der Ungleichung

$$2p + 3 \leqq \Sigma\lambda_\nu \leqq 5 \tag{151}$$

genügen muss, damit (147) auch im Unendlichen endlich bleibe. Hieraus folgt

$$0 \leqq p \leqq 1, \quad 3 \leqq \Sigma\lambda_\nu \leqq 5.$$

In den Fällen

$$\Sigma\lambda_\nu = 3 \text{ und } \Sigma\lambda_\nu = 4$$

ergibt sich aus (151)

$$p = 0,$$

im Falle

$$\Sigma\lambda_\nu = 5$$

$$p = 0 \text{ oder } p = 1.$$

In den ersten Fällen ist $g(x)$ bis auf einen konstanten Faktor gleich einem elliptischen Integral, welches wie

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

vier von den Punkten e_ν als Windungspunkte hat, im zweiten Falle gleich einem hyperelliptischen Integral erster Gattung

$$\int \frac{(c_0 x + c_1)\,dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)(x-e_5)(x-e_6)}}$$

von (5).

26. Indem wir den zweiten Fall beiseite lassen, betrachten wir im ersten Falle die Funktion $f(z)$ als Funktion von x:

$$f(z(x)) = \bar{f}(x),$$

deren Zweige von einander gemäss der Gleichung

$$\bar{f}(x') = e^{\alpha u + \beta} f(x)$$

abhängen. Hieraus folgt, dass die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{d^2 \log f(x)}{du^2}$$

eine eindeutige und zwar offenbar eine rationale Funktion von x ist, weil $f(z)$ als ganze Funktion von z in der x-Ebene überall einen algebraischen Charakter hat. Es ist somit $\varphi(x)$ eine doppeltperiodische Funktion von u mit den Perioden (ω_1, ω_2) und dazu eine gerade Funktion:

$$\varphi(x) = E(u).$$

Ferner ist

$$f(x(u)) = e^{\int du \int E(u)\, du}. \tag{152}$$

Es sei nun $u = a$ ein Pol n:ter Ordnung von $E(u)$. Damit (152) für $u = a$ endlich bleibe, muss offenbar $n = 2$ sein und ferner soll die zugehörige Entwicklung von $E(u)$ die Form

$$E(u) = -\frac{k}{(u-a)^2} + c_0 + c_1(u-a) + \cdots$$

haben, wo k eine positive ganze Zahl ist. Die einfachste Funktion fraglicher Art ist

$$E(u) = -[\wp(u-a) + \wp(u+a)]$$

und es ist dann

$$f(x(u)) = \sigma(u-a)\sigma(u+a),$$

woraus durch Multiplikation mit einem Faktor der Form e^{Au^2+B} unsere Funktion $H(u(z))$ erhalten wird.

Die allgemeinste Funktion der gesuchten Art wird durch Multiplikation aus den speziellen Funktionen erhalten.

Wir haben damit die in der Darstellung (136) auftretenden ganzen Funktionen (137) durch die allgemeinen Gleichungen (140) vollkommen charakterisiert. Sie können als Analogon der elliptischen Funktionen dritter Art angesehen werden.

12 §. Darstellung der Funktionen $x(z)$ und $y(z)$ durch unendliche Produkte.

27. Wir gehen von der bekannten Darstellung der $\wp$-Funktion durch die ζ-Funktion

$$\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-\wp(v)}=\zeta(u+v)+\zeta(u-v)-2\zeta(u) \tag{153}$$

aus, und erhalten durch Anwendung der ζ-Reihe

$$\zeta(u)=\frac{1}{u}+\sum_{\omega}{}'\left[\frac{1}{u-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{u}{\omega^2}\right]$$

die Darstellung

$$\frac{\wp'(\alpha)}{\wp(u)-\wp(\alpha)}-\frac{\wp'(\alpha)}{\wp(u_0)-\wp(\alpha)}=$$

$$=\sum_{\omega}\left[\frac{1}{u-\alpha-\omega}-\frac{1}{u+\alpha-\omega}-\frac{1}{u_0-\alpha-\omega}+\frac{1}{u_0+\alpha-\omega}\right] \tag{153$'$}$$

für die links stehende Funktion, welche mit der Ableitung $u'(a)$ der Funktion $\alpha=u(a)$ multipliziert in die Funktion

$$\frac{x'(a)}{x(z)-x(a)}-\frac{x'(a)}{x(z_0)-x(a)}, \tag{154}$$

also diejenige Hauptfunktion der Gruppe Γ_x übergeht, die im Punkt $z=a$ einen einfachen Pol mit dem Residuum 1 und im Punkt z_0 eine Nullstelle besitzt. Betrachten wir nun den im allgemeinen Glied der multiplizierten Reihe (153)$'$ enthaltenen Ausdruck

$$\frac{u'(a)}{u(z)-u(a)-\omega}-\frac{u'(a)}{u(z)+u(a)-\omega}. \tag{155}$$

Es sei

$$\omega=\mu\omega_1+\nu\omega_2$$

die Darstellung von ω durch die primitiven Perioden. Ist dann Σ_ω bzw. Σ_ω^1 die zur ersten Kolonne von (9) gehörige Substitution mit der Charakteristik $\varepsilon=0$ bzw. 1 und den Indizes μ und ν, so ist

$$u(a)+\omega=u(\Sigma_\omega(a))=u(a_\omega),\quad -u(a)+\omega=u(\Sigma_\omega^1(a))=u(a_\omega^1).$$

Weil ferner

$$u'(a)=u'(a_\omega)\Sigma_\omega'(a),\quad -u'(a)=u'(a_\omega^1)\Sigma_\omega^{1\prime}(a),$$

so kann (153)$'$ auch in der Form

$$\Sigma'_\omega(a)\frac{u'(a_\omega)}{u(z)-u(a_\omega)}+\Sigma_\omega^{1\prime}(a)\frac{u'(a^1_\omega)}{u(z)-u(a^1_\omega)} \tag{155'}$$

geschrieben werden.

Man kann nun auf den Ausdruck (155)', deren Bestandteile die Form (97) besitzen, die Entwicklung (97) anwenden, wodurch unsere Funktion (154) in eine Reihe derselben Form entwickelt wird. Die Abschätzung des Restgliedes der betreffenden Reihe geschieht am einfachsten durch Anwendung der Ergebnisse des 6 §.

28. Wegen der Automorphie der Funktion (154) kann man ohne Einschränkung annehmen, dass der Punkt $z=a$ im Fundamentalbereich B_x von Γ_x, und somit $u(z)$ im Anfangsparallelogramm 1 liegt. Wenn in der Reihe (153)' nur diejenigen Glieder berücksichtigt werden, die den Bedingungen

$$|\mu|\leqq m, \qquad |\nu|\leqq m$$

genügen, ist der Fehler absolut kleiner als

$$\frac{c_0}{m} \qquad (c_0 = \text{endliche Konstante}).$$

Wir ziehen nun eine geschlossene Linie L_n, für welche $n\geqq 2m$ und betrachten das Verhalten der Funktion

$$\Sigma'_\omega(a)\frac{u'(a_\omega)}{u(z)-u(a_\omega)}=\frac{u'(a)}{u(z)-u(a_\omega)} \tag{156}$$

in dem von L_n begrenzten Bereich D_n. Nach 6 § besteht der Bereich D_n aus endlich vielen bezüglich Γ_n äquivalenten Teilen, die Bildbereiche des Parallelogrammes Π_n sind und die aus dem zum Fundamentalbereich von Γ_u gehörigen Teilbereich durch die Substitutionen (54):

$$(\bar{S})_n$$

erhalten werden. In jedem solchen Teilbereich besitzt die Funktion (156) einen einzigen Pol, nämlich im Punkte

$$z=\bar{S}(a_\omega)=S(a)$$

mit dem Residuum

$$\Sigma'_\omega(a)\,\bar{S}'(a_\omega)=S'(a), \tag{157}$$

wo

$$S = \Sigma_\omega \overline{S} \tag{158}$$

die zu den n ersten Zeilen und Kolonnen von (65) gehörigen Substitutionen der Charakteristik $\varepsilon = 0$ von Γ_x zu durchlaufen hat. Durch Anwendung der Cauchyschen Integralformel im Bereich D_n auf die Funktion (156) ergibt sich

$$\Sigma'_\omega(a) \frac{u'(a_\omega)}{u(z) - u(a_\omega)} = \sum_{D_n} \frac{S'(a)}{z - S(a)} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_n} \frac{u'(a)}{u(\zeta) - u(a_\omega)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{159}$$

Weil nun offenbar auf dem Hauptteil (vgl. Nr. 13) der Linie L_n

$$|u(z) - u(a_\omega)| > c' n \quad (c' = \text{eine endliche Konstante}) \tag{160}$$

und weil ferner der Integrand in (159) wenigstens nach Ausführung einer erlaubten Abänderung auf der ganzen Linie L_n beschränkt bleibt, so ist nach Nr. 14 in dem innerhalb H beliebig gewählten Bereich

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_n} \frac{u'(a)}{u(\zeta) - u(a_\omega)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right| < \frac{c}{n}, \tag{161}$$

wo c eine endliche Konstante ist.

Die entsprechende Entwicklung des zweiten Teiles von (155)′ lautet

$$\Sigma_\omega^{1\prime}(a) \frac{u'(a_\omega^1)}{u(z) - u(a_\omega^1)} = \sum_{D_n} \frac{S'(a)}{z - S(a)} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_n} \frac{u'(a)}{u(\zeta) - u(a_\omega^1)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \tag{159$'$}$$

wo S alle betreffenden Substitutionen der Charakteristik $\varepsilon = 1$ durchläuft.

Durch Addition der zu den verschiedenen in (153)′ mitgenommenen Gliedern gehörigen Entwicklungen (159) und (159)′ gelangt man zur Gleichung

$$u'(a) \sum_{(|\mu|, |\nu| \leqq m)} \left[\frac{1}{u - a - \omega} - \frac{1}{u + a - \omega} - \frac{1}{u_0 - a - \omega} - \frac{1}{u_0 + a - \omega} \right] =$$

$$= \sum_{D_n} \left[\frac{S'(a)}{z - S(a)} - \frac{S'(a)}{z_0 - S(a)} \right] + \varepsilon'_m,$$

wo das Restglied ε'_m für $m > 0$ der Ungleichung

$$|\varepsilon'_m| < \frac{9cm^2}{n}$$

genügt.

29. Wir wählen nun

$$n = m^3,$$

wodurch

$$|\varepsilon'_m| < \frac{9c}{m}$$

wird. Aus (153)' und (162) folgt dann

$$\frac{x'(a)}{x(z)-x(a)} - \frac{x'(a)}{x(z_0)-x(a)} = \sum_{D_n}\left[\frac{S'(a)}{z-S(a)} - \frac{S'(a)}{z_0-S(a)}\right] + \varepsilon''_m, \tag{162}$$

wo

$$|\varepsilon''_m| < \frac{c_0+9c}{m} = \frac{c_0+9c}{\sqrt[3]{n}}.$$

Nach dem Obigen bezieht sich die Summierung in (162) auf die Gesamtheit der Substitutionen S von Γ_x, die den m^3 ersten Zeilen und m^3 ersten Kolonnen des Schemas (65) angehören. Durch den Grenzübergang $m \to \infty$ gewinnt man hieraus für die Funktion (154) die Darstellung

$$\frac{x'(a)}{x(z)-x(a)} - \frac{x'(a)}{x(z_0)-x(a)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{D_n}\left[\frac{S'(a)}{z-S(a)} - \frac{S'(a)}{z_0-S(a)}\right],$$

die wir kurz

$$\int_{z_0}^{z}\frac{x'(a)}{x(z)-x(z_0)} = \sum_{\Gamma_x}\int_{z_0}^{z}\frac{S'(a)}{z-S(a)} \tag{163}$$

schreiben wollen, wo die Reihenfolge der Glieder durch (66) gegeben ist. In ihrer Abhängigkeit vom Parameter a ist die rechte Seite von (163) eine Poincarésche Reihe (-2):ter Dimension. Wegen der Identität (97)' kann sie auch

$$\int_{z_0}^{z}\frac{x'(a)}{x(z)-x(a)} = \sum_{\Gamma_x}\int_{z_0}^{z}\frac{1}{S(z)-a} \tag{163'}$$

geschrieben werden.

Speziell für $z_0=0$, $x(z_0)=\infty$ ergibt sich hieraus

$$\frac{x'(a)}{x(z)-x(a)}=\sum_{\Gamma_x}\left[\frac{1}{S(z)-a}-\frac{1}{S(0)-a}\right].$$

30. Durch Differentiation von $(163)'$ in bezug auf den Parameter a erhält man Reihen für automorphe Funktionen, die in den mit $z=a$ äquivalenten Punkten Pole höherer Ordnung besitzen. Wird ferner statt (153) die Funktion

$$\wp(u)-\wp(u_0)$$

in obiger Weise behandelt, so gelangt man zu einem Ausdruck der Funktion $x(z)-x(z_0)$. Indem man so erhaltene Reihen mit einander linear zusammensetzt, erhält man für eine willkürliche automorphe Funktion von Γ_x eine Reihe, welche dieselbe im ganzen Existenzbereich darstellt, woraus die Pole mit den zugehörigen Entwicklungen unmittelbar hervorgehen und welche eine formale Invarianz den Substitutionen der Gruppe gegenüber aufweist.

Durch Integration in bezug auf den Parameter und durch Übergang zur Exponentialfunktion erhält man den Ausdruck

$$\frac{x(z)-x(a)}{x(z)-x(b)}:\frac{x(z_0)-x(a)}{x(z_0)-x(b)}=\prod_{\Gamma_x}\left[\frac{z-S(a)}{z-S(b)}:\frac{z_0-S(a)}{z_0-S(b)}\right] \tag{164}$$

für diejenige Hauptfunktion von Γ_x, deren Nullpunkte, Pole und Eins-Punkte resp. mit den äquivalenten Punkten von $z=a$, b und z_0 zusammenfallen. Wegen der Identität $(99)'$ kann (164) auch

$$\frac{x(z)-x(a)}{x(z)-x(b)}:\frac{x(z_0)-x(a)}{x(z_0)-x(b)}=\prod_{\Gamma_x}\left[\frac{S(z)-a}{S(z)-b}:\frac{S(z_0)-a}{S(z_0)-b}\right] \tag{165}$$

geschrieben werden, woraus das Verhalten von (165) in bezug auf Γ_x besser einzusehen ist. Speziell für $b=0$, $x(b)=\infty$ ergibt sich aus (165)

$$\frac{x(z)-x(a)}{x(z_0)-x(b)}=\prod_{\Gamma_x}\left[\frac{S(z)-a}{S(z)}:\frac{S(z_0)-a}{S(z_0)}\right]. \tag{165'}$$

Durch Multiplikation der obigen Ausdrücke gewinnt man für eine willkürliche automorphe Funktion von Γ_x eine Produktdarstellung mit Hilfe ihrer Nullstellen und Pole.

Wir wollen hier noch ausdrücklich hervorheben, dass *in den verschiedenen oben gegebenen Darstellungen der automorphen Funktionen von Γ_x die Reihenfolge* *der Glieder von der Funktion selbst unabhängig ist, indem man sich in jedem Falle der Reihenfolge* (66) *bedienen kann.*

31. Wir gehen hiernach auf die Darstellung der Funktion $y(z)$ über. Wir führen zu diesem Zweck zuerst in

$$y = \prod_{i=1}^{3} \sqrt{x - e_i} \prod_{j=5}^{6} \sqrt{x - e_j} \tag{166}$$

die σ-Funktionen

$$\sqrt{x - e_i} = \frac{e^{\eta_i u}}{\sigma(\alpha_i)} \frac{\sigma(\alpha_i - u)}{\sigma(u)}, \quad \sqrt{x - e_j} = \frac{e^{\eta_j v}}{\bar{\sigma}(\alpha_j)} \frac{\bar{\sigma}(\alpha_j - v)}{\bar{\sigma}(v)} \tag{167}$$

ein, wodurch

$$y = e^{\alpha u + \beta v + \gamma} \frac{\sigma(\alpha_1 - u)\,\sigma(\alpha_2 - u)\,\sigma(\alpha_3 - u)\,\bar{\sigma}(\alpha_5 - v)\,\bar{\sigma}(\alpha_6 - v)}{\sigma^3(u)\,\bar{\sigma}^2(v)} \tag{168}$$

erhalten wird. Aus der Produktdarstellung

$$\sigma(u) = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) e^{\frac{u}{\omega} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{\omega^2}}$$

der σ-Funktion folgt[1]

$$\frac{\sigma(\alpha_i - u)}{\sigma(u)} : \frac{\sigma(\alpha_i - u_0)}{\sigma(u_0)} = \prod_{\omega} \left[\frac{u - \alpha_i - \omega}{u - \omega} : \frac{u_0 - \alpha_i - \omega}{u_0 - \omega}\right] e^{-\frac{\alpha_i}{\omega^2}(u - u_0)}. \tag{169}$$

Durch Einführung der Ausdrücke (99) für die Faktoren bekommt man

$$\frac{\sigma(\alpha_i - u)}{\sigma(u)} : \frac{\sigma(\alpha_i - u_0)}{\sigma(u_0)} = \prod_{\Gamma_x(u)} \left[\frac{S(z) - a_i}{S(z) - b_i} : \frac{S(z_0) - a_i}{S(z_0) - b_i}\right] e^{-\frac{\alpha_i}{\omega^2}(u(z) - u(z_0))}, \tag{170}$$

wo

$$S = \Sigma_\omega S$$

in der bezüglich Γ_u normierten Reihenfolge (66) alle Substitutionen von Γ_x der Charakteristik $\varepsilon = 0$ durchläuft, welche Substitutionen eine ausgezeichnete Untergruppe von Γ_x des Index zwei bilden. In gleicher Weise bekommt man für die zwei letzteren Funktionen (167) den Ausdruck

[1] Für $\omega = 0$ ist der Exponentialfaktor $= 1$ zu setzen.

$$\frac{\bar{\sigma}(\alpha_j - v)}{\bar{\sigma}(v)} : \frac{\bar{\sigma}(\alpha_j - v_0)}{\bar{\sigma}(v_0)} = \prod_{\Gamma_x(v)} \left[\frac{S(z) - a_j}{S(z) - b_j} : \frac{S(z_0) - a_j}{S(z_0) - b_j}\right] e^{-\frac{\alpha_j}{\omega'^2}(v(z) - v(z_0))}, \tag{170'}$$

wo die Reihenfolge der Substitutionen in entsprechender Weise in bezug auf Γ_v normiert ist. Durch Multiplikation erhält man aus (170) und (170)′ für die Funktion $y(z)$ eine Produktdarstellung, die wir in leicht verständlicher Weise kurz

$$y(z) = \prod_{\Gamma_x} \frac{S^{(k)}(z) - a_k}{S^{(k)}(z) - b_k} e^{A_S^{(k)} u(z) + B_S^{(k)} v(z) + C_S^{(k)}} \tag{171}$$

schreiben können.

Durch Aufstellung der Ausdrücke (165) und (171) haben wir die Uniformisierung der gegebenen hyperelliptischen Riemannschen Fläche (5) in einfachster Weise geleistet.

Es erübrigt noch, alle zu Γ_{xy} gehörigen automorphen Funktionen und hyperelliptischen Integrale durch die uniformisierende Variable z direkt darzustellen.

13 §. Reihendarstellung der automorphen Funktionen von Γ_{xy}.

32. Wir betrachten zuerst eine automorphe Funktion

$$F(z),$$

deren sämtliche Pole einfach sind. Es seien

$$a_1, a_2, \ldots, a_p \tag{172}$$

diejenigen von den Polen, welche im Fundamentalbereich liegen, und

$$A_1, A_2, \ldots, A_p$$

die zugehörigen Residuen. Dann wird die Gesamtheit der Pole von $F(z)$ aus

$$a_i^{(k)} = S_k(a_i) \tag{173}$$

erhalten, wo S_k die Substitutionen von Γ_{xy} zu durchlaufen hat. Das Residuum im Pole (173) hat den Ausdruck

$$A_i^{(k)} = A_i S_k'(a_i). \tag{174}$$

Wir bilden jetzt die Funktion

$$\frac{F(z) - F(e)}{u(z) - u(e)} \tag{175}$$

indem wir annehmen, dass die Funktion $F(z)$ in einem der Punkte (1), $z = e$, endlich ist. Dann bleibt die Funktion (175) in den Nullstellen des Nenners endlich und ihre Pole fallen somit mit denjenigen von $F(z)$ zusammen.

Man kann ferner durch eine Abänderung der Polygonseiten erreichen, dass die Funktion (175) auf denselben endlich bleibt:

$$\left|\frac{F(z) - F(e)}{u(z) - u(e)}\right| < M. \tag{176}$$

Wir wenden nun die Cauchysche Integralformel auf die Funktion (175) im Bereiche D_n an und bekommen

$$\frac{F(z) - F(e)}{u(z) - u(e)} = \sum_{D_n} \frac{A_i^{(k)}}{\bar{u}(a_i^{(k)})} \frac{1}{z - a_i^{(k)}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} \frac{F(\zeta) - F(e)}{u(\zeta) - u(e)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \tag{177}$$

wo $\bar{u}(z) = u(z) - u(e)$.

Die den verschiedenen zu D_n gehörigen Polen (173) von (175) entsprechenden Substitutionen S_k sind hier offenbar identisch mit den in (54) enthaltenen Substitutionen von Γ_{xy}.

Nun ist auf dem Hauptteil L_n' des Randes L_n von D_n

$$|u(z) - u(e)| > cn, \tag{178}$$

während auf der ganzen Linie L_n die Ungleichungen (176), (178) gelten. Somit ist in einem innerhalb D_n liegenden Bereich

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} \frac{F(\zeta) - F(e)}{u(\zeta) - u(e)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}\right| < \frac{\bar{c}}{n},$$

wo $\bar{c}$ eine endliche Konstante ist.

Durch Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt sich somit aus (177)

$$\frac{F(z) - F(e)}{u(z) - u(e)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{D_n} \frac{A_i^{(k)}}{\bar{u}(a_i^{(k)})} \frac{1}{z - a_i^{(k)}},$$

was wir kurz

$$\frac{F(z) - F(e)}{u(z) - u(e)} = \sum_{\Gamma_{xy}} \frac{A_i^{(k)}}{\bar{u}(a_i^{(k)})} \frac{1}{z - a_i^{(k)}} \tag{179}$$

schreiben wollen. Unsere Reihe konvergiert offenbar gleichmässig in jedem innerhalb des Hauptkreises liegenden Bereich, wenn die zu den dort liegenden endlich vielen Polen zugehörigen Glieder fortgelassen werden.

33. Wir multiplizieren nun (179) mit $\bar{u}(z)$ und bekommen für unsere Funktion $F(z)$ den Ausdruck

$$F(z) - F(e) = \bar{u}(z) \sum_{\Gamma_{xy}} \frac{A_i^{(k)}}{\bar{u}(a_i^{(k)})} \frac{1}{z - a_i^{(k)}} \tag{180}$$

als Produkt der ganzen Funktion $\bar{u}(z)$ und der meromorphen Funktion (179). Wird ferner allgemein

$$\bar{u}(z) = \bar{u}(a_i^{(k)}) + (u(z) - u(a_i^{(k)}))$$

gesetzt, so ergibt sich hieraus der Ausdruck

$$F(z) - F(e) = \sum_{\Gamma_{xy}} \left[\frac{A_i^{(k)}}{z - a_i^{(k)}} + \frac{A_i^{(k)}}{\bar{u}(a_i^{(k)})} \Delta(z, a_i^{(k)}) \right], \tag{181}$$

wo

$$\Delta(z, a) = \frac{u(z) - u(a)}{z - a}. \tag{182}$$

Wir haben hier ein Analogon der Mittag-Lefflerschen Partialbruchreihe mit dem Unterschied, dass die Konvergenzerzeugenden Polynome durch gewisse aus (182) abgeleitete ganze Funktionen ersetzt worden sind.

Unsere Funktion (182) ist eine symmetrische Funktion von z und a, die für

$$|z| < 1, \qquad |a| < 1$$

regulär ist, und die für jede Substitution (35) von Γ_{xy} der Gleichung

$$\Delta(S(z), S(a)) = \Delta(z, a)(\gamma z + \delta)(\gamma a + \delta) \tag{183}$$

genügt. Aus (108) ergibt sich für dieselbe wegen

$$\frac{S(z) - S(a)}{z - a} = \frac{1}{\gamma z + \delta} \cdot \frac{1}{\gamma a + \delta}$$

die Darstellung

$$\varDelta(z, a) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{\Gamma_n} \frac{1}{\gamma z + \delta} \cdot \frac{1}{\gamma a + \delta}}{\sum\limits_{\Gamma_n} S'(0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{\Gamma_n} \sqrt{S'(z)\, S'(a)}}{\sum\limits_{\Gamma_n} S'(0)}. \tag{184}$$

Die Funktion $\varDelta(z, a)$ kann hiernach als eine automorphe Funktion der aus den Substitutionen $(S(z), S(a))$ der Variablen z und a gebildeten hyperabelschen Gruppe angesehen werden.

Wir haben oben den Fall ausgeschlossen, dass $F(z)$ in allen Punkten (1) unendlich wird. Man gelangt aber in jedem Falle zum Ziel durch Anwendung der Cauchyschen Integralformel auf die Funktion

$$\frac{F(z)}{u(z) - u(z_0)},$$

wo z_0 so gewählt wird, dass der Nenner in den Polen des Zählers nicht verschwindet. Man bekommt dann wieder einen Ausdruck der Form (181), der aber jetzt noch auf die scheinbaren Pole $z = S(z_0)$ bezogene $\varDelta$-Glieder enthält.

Wir betrachten hiernach den allgemeinen Fall, dass $F(z)$ auch mehrfache Pole enthalten kann. Es sei allgemein $z = a$ ein Pol mit der Entwicklung

$$\frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{A_p}{(z-a)^p}.$$

Durch Anwendung der obigen Methode gelangt man zu einem Ausdruck, der sich von (181) nur dadurch unterscheidet, dass allgemein

$$\frac{A_i^{(k)}}{z - a_i^{(k)}} \text{ durch } \sum_{\lambda=1}^{p} \frac{A_{i,\lambda}^{(k)}}{(z - a_i^{(k)})^{\lambda}}$$

und

$$\varDelta(z, a) \text{ durch } \sum_{\lambda=1}^{p} C_\lambda \varDelta_\lambda(z, a)$$

ersetzt worden sind, wo $C_1, C_2, \ldots, C_p$ Konstanten und

$$\varDelta_\lambda(z, a) = \frac{u(z) - u(a) - u'(a)(z-a) - \cdots - \frac{u^{(\lambda-1)}(a)}{(\lambda-1)!}(z-a)^{\lambda-1}}{(z-a)^{\lambda}} \tag{185}$$

für $|z| < 1$, $|a| < 1$ reguläre Funktionen von z, a sind.

14 §. Darstellung der hyperelliptischen Integrale.

34. Wir werden in diesem Kapitel die obige Methode zur analytischen Darstellung der zu (2) gehörigen Integrale anwenden, wodurch zugleich eine neue Darstellung der automorphen Funktionen von Γ_{xy} gewonnen wird.

Wir schreiben das betreffende Integral in der Form

$$I = \int R(x,\ y)\, dx, \tag{186}$$

wo $R(x, y)$ eine rationale Funktion von x und y bezeichnet. Als Funktion von z:

$$R(x(z),\ y(z)) = F(z)$$

ist R eine automorphe Funktion von Γ_{xy}. Wir setzen

$$F(z)\, x'(u) = B(z)$$

und können (186) als Funktion von z in der Form

$$I = \int B(z)\, u'(z)\, dz \tag{187}$$

darstellen. Die Funktion $B(z)$, welche eine automorphe Funktion derjenigen Untergruppe des Index zwei von Γ_{xy} ist, die von der Gesamtheit der Substitutionen der Charakteristik Null gebildet ist, wird im allgemeinen unendlich nicht nur in den Polen von $F(z)$, sondern auch in denjenigen von $x'(u)$, d. h. für $u=0$, also in den mit dem Nullpunkt bezüglich Γ_x äquivalenten Punkten.

Wie früher zeigt man, dass

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{L_n} \frac{B(\zeta)}{u(\zeta) - u(z_0)}\, \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0, \tag{188}$$

wenigstens nachdem die Polygonseiten geeignet abgeändert worden sind. Wir betrachten hier der Kürze halber nur den Fall, wo sämtliche Pole einfach sind und erhalten aus der Cauchyschen Integralformel

$$\frac{B(z)}{u(z) - u(z_0)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{D_n} \frac{B_k}{z - b_k}, \tag{189}$$

wo unter den Polen von (189) neben den Polen von $B(z)$ auch die Nullstellen $S(z_0)$ $(S \subset \Gamma_u)$ des Nenners auftreten können. Wir setzen jetzt

$$w(z) = u(z)\,u'(z) = \frac{1}{2}\frac{du^2}{dz}$$

und

$$w(z) = w(b_k) + (w(z) - w(b_k))$$

und können (187) kurz in der Form

$$I = \sum_{\Gamma_{xy}} \int \left[\frac{B'_k}{z - b_k} + B_k \Delta(z,\ b_k)\right] dz \tag{190}$$

schreiben, wo B'_k für die aus den Nullstellen des Nenners von (189) herrührenden Polen $= 0$ ist, und wo

$$\Delta(z,\ b) = \frac{w(z) - w(b)}{z - b}$$

eine für $|z| < 1$, $|b| < 1$ reguläre, symmetrische Funktion der Variablen z und b ist. Für diese Funktion, deren Integral hier die nämliche Rolle spielt, wie die Funktion (182) im vorigen §, bekommt man aus (109) den Ausdruck

$$\Delta(z,\ b) = \frac{1}{z - b} \lim_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{\Gamma_n} [S(z)\,S'(z) - S(b)\,S'(b)]}{\sum\limits_{\Gamma_n} S(0)\,S'(0)}. \tag{191}$$

35. Als Anwendung betrachten wir etwas näher die Integrale erster Gattung. Wir gehen von den Integralen

$$I_1 = \int \frac{dx}{y}, \qquad I_2 = \int \frac{x\,dx}{y}$$

aus und setzen

$$B_1(z) = \frac{x'(u)}{y} = \frac{2}{y_2}, \qquad B_2(z) = \frac{x(u)\,x'(u)}{y} = \frac{2\,x}{y_2}, \tag{192}$$

wo

$$x'(u) = p'(u) = 2\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}, \quad y_2 = \sqrt{(x - e_5)(x - e_6)},$$

wodurch wir erhalten

$$I_1 = 2\int \frac{du}{y_2}, \qquad I_2 = 2\int \frac{x\,du}{y_2}.$$

Weil die Funktionen (192) in den Ecken $a = z(e_5)$, $c = z(e_6)$ von B_x und den damit äquivalenten Punkten

$$a_k = S_k(a), \qquad c_k = S_k(c) \tag{193}$$

unendlich werden, muss man sich der abgeänderten Linien L_n bedienen.

In den Nullstellen von u wird x und somit auch y_2 unendlich wie $\frac{1}{u^2}$, woraus folgt, dass die Funktion $\frac{B_2(z)}{u}$ dort endlich bleibt. Diese Funktion hat somit Pole erster Ordnung in den Punkten (193). Weil

$$w(a_k) = w(c_k) = 0,$$

so hat man für I_1 nach (190) den Ausdruck

$$I_1 = \sum [A_k h(z, a_k) + C_k h(z, c_k)], \tag{194}$$

wo h die ganze Funktion

$$h(z, b) = \int \frac{u(z)}{z - b}\, du$$

bezeichnet. Die Koeffizienten sind dabei

$$A_k = A\frac{S_k'(a)}{u(S_k(a))} = A\frac{S_k'(a)}{(-1)^\varepsilon u(a) + \mu\omega_1 + \nu\omega_2},$$

$$C_k = C\frac{S_k'(c)}{u(S_k(c))} = C\frac{S_k'(c)}{(-1)^\varepsilon u(c) + \mu\omega_1 + \nu\omega_2},$$

wo ε die Charakteristik der Substitution S_k und μ, ν ihre Indizes sind.

Um einen analogen Ausdruck für das Integral I_2 zu gewinnen, gehen wir von der Funktion

$$\frac{B_2(z)}{u(z) - u(\tau)} \qquad\qquad x(\tau) = 0$$

aus, welche nur in den Punkten (193) einfach unendlich wird. Wir bekommen dann

$$I_2 = \sum [\bar{A}_k h_1(z, a_k) + \bar{C}_k h_1(z, c_k)], \tag{195}$$

wo h_1 die aus $\bar{u}(z) = u(z) - u(\tau)$ gebildete ganze Funktion

$$h_1(z, b) = \int \frac{\bar{u}(z)}{z-b} du$$

bezeichnet und die Koeffizienten die allgemeinen Ausdrücke

$$\bar{A}_k = \bar{A} \frac{S'_k(a)}{\bar{u}(S_k(a))}, \qquad \bar{C}_k = \bar{C} \frac{S'_k(c)}{\bar{u}(S_k(c))}$$

besitzen.

Betreffs der Reihenfolge der Glieder bei den bedingt konvergenten Reihen dieses und des vorigen Paragraphen bemerken wir noch folgendes. Wenn man von den zu den scheinbaren Polen gehörigen Gliedern absieht, wird die Reihenfolge der Substitutionen in jedem Falle und von der darzustellenden Funktion unabhängig durch (66) gegeben, wobei hier natürlich nur die zur Gruppe Γ_{xy} gehörigen Substitutionen berücksichtigt werden. Die Folge (66) ist aber in hohem Grade willkürlich. Denn erstens kann die Normierung in bezug auf ein beliebiges von den 15 zu (2) gehörigen elliptischen Integralen geschehen. Ferner ist die Folge (66) durch die Grössenfolge (51) bestimmt, welche eine beliebige gegen Null konvergierende monotone Folge sein kann. Und schliesslich kann man die zu einer gegebenen Folge (51) gehörige Substitutionenfolge (66) noch in hohem Grade variieren, weil die ganzen Zahlen q_n, welche die kleinsten Lösungen der Ungleichungen (52) waren, beliebig vergrössert werden können.

15 §. Verallgemeinerungen.

36. Wie schon in der Einleitung erwähnt, können alle vorhergehenden Resultate unmittelbar auf die hyperelliptischen Flächen beliebigen Geschlechtes übertragen werden. Es sei nämlich

$$y^2 = \prod_{\nu=1}^{2p+2} (x - e_\nu) \tag{196}$$

die Gleichung einer solchen Fläche vom Geschlecht p. Wir führen die $N = \left[\frac{p}{2} + 1\right]$ elliptischen Integrale

$$u_k = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-e_\alpha)(x-e_\beta)(x-e_\gamma)(x-e_\delta)}} \tag{197}$$

ein, wo die Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aus $1, 2, \ldots, 2p+2$ so gewählt werden können, dass jeder Windungspunkt

$$e_1, e_2, \ldots, e_{2p+2}$$

von (196) wenigstens in einem von den Integralen (197) vorkommt. Wir führen die Hauptuniformisierende z von (196) ein und besitzen dann in jeder Funktion

$$u_k(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{198}$$

eine eindeutige Funktion, welche eine Hauptfunktion für eine gewisse fuchsoide Gruppe Γ_{u_k} vom Geschlecht Null ist. Nun ist jedes von den Radikalen

$$\sqrt{x-e_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2p+2)$$

wie x eine eindeutige Funktion des zugehörigen elliptischen Integrales. Somit kann auch das Produkt

$$y = \prod_{\nu=1}^{2p+2} \sqrt{x-e_\nu}$$

eindeutig durch die Funktionen (198) dargestellt werden. Wir haben damit die Funktionen

$$x(z) \quad \text{und} \quad y(z)$$

aus gewissen elliptischen Funktionen und fuchsoiden Funktionen zusammengesetzt, für welche Funktionen Reihen- und Produktentwicklungen der früher betrachteten Art ohne weiteres aufgestellt werden können. Speziell führen die Betrachtungen des 10 § zur Darstellung jeder automorphen Funktion der zu (196) gehörigen Gruppe Γ_{xy} als Quotient zweier ganzen Funktionen

$$F(z) = \frac{f_1(z)}{f(z)}, \tag{199}$$

welche aus Jacobischen elliptischen Thetafunktionen und den fuchsoiden Funktionen (198) zusammengesetzt werden können, und welche für eine willkürliche Substitution von Γ_{xy} einer Gleichung der Form

$$f(S(z)) = e^{\Sigma\,(a_\nu(S)\,u_\nu(z) + b_\nu(S))} f(z)$$

genügen.

37. Gehen wir hiernach zur Betrachtung einer beliebigen algebraischen Riemannschen Fläche

$$P(x, y) = 0 \tag{200}$$

vom Geschlecht p über! Um die frühere Methode anwenden zu können, müssen wir hier polymorphe Funktionen einführen, die im allgemeinen relativ zur Fläche (200) verzweigt sind.

Wir denken also die endlich viele Windungspunkte von (200) auf die Punkte

$$e_1, e_2, \ldots, e_N \tag{201}$$

der x-Ebene projiziert. Wir führen dann diejenige polymorphe Funktion $z(x)$ ein, welche in den Punkten (201) Windungspunkte zweiter Ordnung besitzt. Wenn nun die Windungspunkte von (200) einfach sind — und dies kann man bekanntlich stets durch eine birationale Transformation erreichen —, so sind x und y eindeutige Funktionen von z. Sie sind automorph für eine Untergruppe der zu $z(x)$ gehörigen Gruppe Γ_x.

Wir betrachten nun ein zu (201) gehöriges elliptisches Integral, z. B.

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)(x-e_4)}}.$$

Dasselbe ist eine eindeutige Funktion von z und automorph in bezug auf eine gewisse fuchsoide Gruppe vom Geschlecht Null, die eine Untergruppe von Γ_x ist. Wie früher kann die Existenz einer unendlichen Folge von geschlossenen Linien L_n bewiesen werden derart, dass

$$\lim_{n \to \infty} \int_{L_n} \frac{dz}{|u(z) - u(a)|} = 0.$$

Durch Anwendung der Cauchyschen Integralformel kann man hieraus wieder Reihen der in den 13 und 14 §§ gegebenen Form für die automorphen Funktionen und Abelschen Integrale herleiten.

38. Wir bilden ferner mit der elliptischen Thetafunktion $H(u)$ die ganze Funktion $H(u(z))$. Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_q$ die im Fundamentalbereiche von Γ_x liegenden Pole der automorphen Funktion $F(z)$. Die Funktion

$$G_1(z) = F(z)\, G(z),$$

wo

$$G(z) = \prod_{\nu=1}^{q} [H(u(z)) - H(u(a_\nu))],$$

ist dann eine ganze Funktion und wir haben somit in

$$F(z) = \frac{G_1(z)}{G(z)} \tag{202}$$

für unsere automorphe Funktion eine Darstellung als Quotient zweier ganzen Funktionen, die bei Ausführung einer willkürlichen Substitution der zu (200) gehörigen Gruppe Γ einer Gleichung der Form (139) genügen. Leider können wir die Funktion $G_1(z)$ im allgemeinen durch keinen einfachen Ausdruck darstellen.

Zu einer mehr befriedigenden Darstellung gelangt man durch Einführung der allgemeinen Jacobischen Thetafunktion

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_p)$$

statt der elliptischen. Wir bilden hieraus die Funktion

$$\vartheta(z) = \vartheta(u_1(z) - C_1, u_2(z) - C_2, \ldots, u_p(z) - C_p) \tag{203}$$

wo

$$u_1, u_2, \ldots, u_p$$

ein System von Abelschen Normalintegralen erster Gattung sind, die wir durch die uniformisierende Variable z ausgedrückt haben. Wenn die Konstanten C_ν spezielle Wertsysteme vermeiden, ist (203) eine nicht identisch verschwindende ganze Funktion, welche im Fundamentalbereich von Γ genau p Nullpunkte besitzt, die willkürlich gewählt werden können. Sie transformiert sich ferner für eine willkürliche Substitution von Γ gemäss der Gleichung

$$\vartheta(S(z)) = e^{a_1 u(z) + a_2 u_2(z) + \cdots + a_p u_p(z)} \vartheta(z).$$

Durch Multiplikation solcher ϑ-Funktionen kann man zwei neue ϑ-Funktionen bilden, die resp. in den Nullpunkten und Polen der darzustellenden automorphen Funktion verschwinden, wozu sie im allgemeinen noch gewisse gemeinsame Nullpunkte besitzen können. Wegen der bekannten aus dem Abelschen Satz folgenden Relationen für die Nullstellen und Pole muss aber der Quotient beider Thetafunktionen bis auf einen konstanten Faktor mit der gegebenen automorphen Funktion zusammenfallen.