SUR LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES POUR LES ÉQUATIONS AUX DERIVÉES PARTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE

PAR

U. DINI

À PISE.

(Extrait d'une lettre à M. Mittag-Leffler.)

Quand, le mois d'avril dernier, après tant d'années, j'ai eu le plaisir de vous revoir sur le lac de Como a Cadenabbia, je vous ai promis de vous faire connaître quelques remarques que je fais sur la belle méthode des approximations successives de M. PICARD pour les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre à deux variables du type elliptique. Je viens à la fin tenir ma promesse.

Vous vous rappelez certainement cette méthode que M. PICARD a publiée jadis en 1890 dans le tome 6 du Journal de math. pur. et appliq. de LIOUVILLE (4^e série).

Etant donnée une telle équation linéaire du deuxième ordre qu'on entend déja réduite à la forme

$$(1)\qquad \Delta u = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu + h, \quad \text{où} \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

on se propose de démontrer l'existence et parvenir à la détermination effective d'une intégrale de cette équation qui soit régulière dans un certain champ C, qu'il faut supposer pris suffisamment petit, et dont les valeurs au contour sont données d'avance arbitrairement.

On ne fait pas d'hypothèse sur ces valeurs au contour, hormis celle d'être finies et continues, ou du moins on n'en dit pas autre chose; et en abrégé la méthode de M. PICARD est la suivante.

On admet que pour le champ donné C il existe la fonction $G(x,y,x',y')$ que maintenant il est convenu d'appeler *fonction de Green* pour le point intérieur (x',y') de C, c'est-à-dire celle qui aussi par rapport à x et y que par rapport à x' et y' est harmonique partout en C, à l'exception du point (x',y') ou du point (x,y), selon que l'on considère comme variables x et y ou x' et y', et, en y considérant comme variables x et y, en chaque point (x,y) du contour, est toujours zéro, tandis que quand le point (x,y) est dans le point (x',y') elle devient infinie comme $\log\frac{1}{r}$, r étant la distance entre les deux points $(x,y),(x',y')$.[1] Et l'on admet aussi que pour le champ C il existe une fonction harmonique qui sur le bord de C prend les valeurs données, sans rien supposer pour les dérivées sur ce bord même. Tout cela, d'après les travaux de Schwarz, Neumann, Harnack, Poincaré et d'autres est assuré dans une foule de cas.

En supposant trouvée cette fonction u_0, et en se rappelant que, sous certaines conditions, l'intégrale double

$$-\frac{1}{2\pi}\iint_C F(x,y)\,G(x,y,x',y')\,dx\,dy \tag{2}$$

représente une fonction v pour le point (x',y') qui est toujours nulle sur le bord de C, est régulière en C et satisfait à l'équation

$$\Delta v = F(x,y), \tag{3}$$

on construit une fonction $u_1(x',y')$ par la formule

$$u_1(x',y') = -\frac{1}{2\pi}\iint_C F_0(x,y)\,G(x,y,x',y')\,dx\,dy,$$

où $F_0(x,y) = a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + cu_0 + h$; puis on construit l'autre

$$u_2(x',y') = -\frac{1}{2\pi}\iint_C F_1(x,y)\,G(x,y,x',y')\,dx\,dy,$$

dans laquelle $F_1(x,y) = a\frac{\partial u_1}{\partial x} + b\frac{\partial u_1}{\partial y} + cu_1$, et ensuite

$$u_3(x',y') = -\frac{1}{2\pi}\iint_C F_2(x,y)\,G(x,y,x',y')\,dx\,dy,$$

[1] Auparavant on appelait fonction de Green la fonction $g = -G - \log r$ qui est toujours harmonique en C, et sur le bord est égale à $-\log r$.

où $F_2(x, y) = a\frac{\partial u_2}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2, \ldots,$ et alors l'intégrale cherchée est donnée par la somme u de la série

$$(4) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

à l'égard de laquelle M. PICARD trouve qu'elle est convergente uniformément en C, et représente justement la fonction cherchée.

La démonstration de M. PICARD s'appuie entièrement sur les propriétés connues de l'intégrale (2) que j'ai indiquée par v, et sur quelques observations qu'il fait lui-même pour cette intégrale v et pour la fonction G, en se rapportant plusieurs fois au cas de cercle, et peut-être en admettant tacitement, par la théorie des représentations conformes, que ce que l'on reconnait tout de suite dans ce cas subsiste aussi pour les autres champs qu'il considère; ce qui pourtant exigerait, il me semble, des explications et des conditions spéciales, car les formules qui proviennent de ces représentations pourraient avoir des singularités.

En remarquant que la fonction G se compose de deux termes, dont l'un est le logarithme de la distance inverse $\frac{1}{r}$ du point (x, y) au point $M'(x', y')$, et l'autre, au signe près, est l'ancienne fonction de GREEN g qui sur le bord est égale à $-\log r$, et dans le cas du cercle de rayon R se réduit au logarithme de la distance du point (x, y) au point conjugué harmoniquement avec M', multipliée par $\frac{\rho'}{R}$, ρ' étant le rayon vecteur de M', il en conclut que si J est le maximum de $F(x, y)$ dans le champ C, l'intégrale v et ses dérivées $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ ne surpassent pas les nombres MJ et NJ, M et N étant des quantités qui dépendent seulement du champ C et non de la fonction $F(x, y)$, et qui, en supposant C suffisamment petit, peuvent devenir aussi petites que l'on veut.

Or, pour la partie de G qui provient de $\log\frac{1}{r}$ il suffit d'introduire les coordonnées polaires avec le pole en M' pour voir que les parties correspondantes de v et des dérivées $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ restent toujours finies même en s'approchant indéfiniment au contour, et sur ce contour même; mais pour l'autre partie de G qui provient de g, si l'on remarque que, quoique toujours finie avec ses dérivées quand le point $M'(x', y')$ est dans l'intérieur de C, elle aussi croit à l'infini en même temps que $\log\frac{1}{r}$ quand le point M' va en se rapprochant indéfiniment au contour, on voit que quand on n'est pas dans le cas du cercle, sans faire des remarques d'ordre général, on ne peut pas parvenir aux conclusions susdites de M. Picard. Et si dans le cas du cercle cela est permis tout de suite, c'est parce que alors on peut toujours introduire les coordonnées polaires avec le pole dans le point N conjugué harmonique de M' pour arriver immédiatement à la conclusion de M. Picard, aussi pour la fonction que pour ses dérivées premières, pour la partie de G qui provient de g.

Et, en dehors du cas du cercle, la difficulté devient même plus grande si l'on considère la fonction G sans la décomposer dans les deux $\log\frac{1}{r}$ et g, car quand le point M' s'approche indéfiniment au contour, cette fonction G passe d'une manière toujours plus rapide d'une valeur logarithmiquement infinie à la valeur zéro.

C'est donc là une première objection sur laquelle, du reste, M. Picard lui-même a peut-être voulu arrêter l'attention, puisque il a rappelé explicitement le cas du cercle.

Mais un autre point aussi doit être, il me semble, bien éclairci; c'est celui relatif au maximum J de la fonction $F_0(x, y)$ quand l'équation donnée (1) contient les termes $a\frac{\partial u}{\partial x}$, $b\frac{\partial u}{\partial y}$ des dérivées premières.

Il est certain en effet que, même si l'équation (1) a ces termes $a\frac{\partial u}{\partial x}$ et $b\frac{\partial u}{\partial y}$, la fonction $F_0(x, y)$ en chaque point *intérieur* à C a toujours une valeur finie, car dans les points intérieurs les dérivées $\frac{\partial u_0}{\partial x}$, $\frac{\partial u_0}{\partial y}$ sont finies; mais cela n'arrive pas toujours quand on s'approche indéfiniment au contour si on laisse entièrement arbitraires les valeurs données sur le bord pour l'intégrale u de la (1), en les supposant seulement finies et continues. Au contraire il y a bien des cas dans lesquels, quoique finies et continues les valeurs données pour u sur le bord, les dérivées au contour sont infinies, ou même elles n'existent pas.

Et, de même que pour la fonction $F_0(x, y)$, cette remarque devrait être faite aussi pour les autres fonctions successives $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, ...; mais puisque ces fonctions se composent seulement avec les dérivées premières des fonctions u_1, u_2, u_3, ... qui viennent successivement déterminées à l'aide de l'intégrale (2), si l'on admet d'être dans le cas du cercle, ou de ces autres champs pour lesquels on puisse s'assûrer que l'intégrale (2) et ses dérivées premières ne surpassent jamais les nombres MJ, et NJ quand J est un nombre fini, on voit tout de suite que quand on se soit assuré que pour la première fonction u_0 les dérivées $\frac{\partial u_0}{\partial x}$, $\frac{\partial u_0}{\partial y}$ et par conséquent $F_0(x, y)$ satisfont à la condition de ne pas surpasser un nombre fini, même en s'approchant indéfiniment du contour, cette condition sera aussi satisfaite pour les dérivées premières des fonctions successives u_1, u_2, u_3, ... et pour les fonctions $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, ... de sorte que la difficulté à surmonter reste seulement pour la fonction u_0. Et cela, on l'entend bien, dans le cas que l'équation donnée (1) ait les termes $a\frac{\partial u}{\partial x}$ et $b\frac{\partial u}{\partial y}$.

Enfin un troisième point du procédé de M. Picard doit aussi être éclairci, et c'est quand ayant trouvé que la série (4) est une fonction u qui en tout C est finie et continue, prend sur le bord les valeurs données, et dans C a aussi ses dérivées premières finies et continues et représentées par les séries

$$(5) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \dots, \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \dots, \end{cases}$$

il tâche de démontrer que cette fonction u satisfait à l'équation donnée (1).

Pour cela il remarque justement que les formules trouvées donnent

$$u = u_0 - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C \left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu + h\right) G(x, y, x', y')\,dx\,dy,$$

et que pour pouvoir en conclure que u satisfait à l'équation (1) il faut s'assurer que même la fonction $a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu + h$ ait des dérivées premières finies, ou du moins qu'on trouve satisfaites les conditions plus générales données d'abord dans le cas de trois variables par M. Hölder [1] et ensuite par M. Morera [2] pour que l'intégrale (2) ait des dérivées secondes, et satisfasse a l'équation (3); mais tandis que, en admettant l'hypothèse des dérivées secondes de u_0 finies et continues dans l'intérieur de C *et sur* C, il montre que la même chose arrivera pour les fonctions successives $u_1, u_2, u_3, \ldots$ et ensuite pour la fonction u qui est donnée par la série (4) (ce qui du reste n'est pas absolument nécessaire), il ne montre pas comme on devrait donner les valeurs u de l'intégrale au contour afin que la condition admise pour les dérivées secondes de u_0 sur le bord fût remplie.

Il est toutefois à remarquer que, sans faire mention de ces exceptions au procédé de M. Picard pour le cas général, MM. Paraf et Le Roy ont traité les mêmes questions par des procédés assez différents dans des cas particuliers.

Mais M. Paraf,[3] en s'arrêtant on peut dire, au cas du cercle et des aires qui peuvent être représentées sur le cercle d'une manière conforme, pose des conditions très restrictives pour les coefficients a, b, c, h de l'équation donnée (1) et pour les valeurs données pour l'intégrale u sur le bord; et M. Le Roy [4] ayant en vue surtout les problèmes de la théorie de la chaleur pour le cas de trois variables x, y, z se limite à considérer l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial u}{\partial z}+fu=g$$

quand a, b, c, f, g ont les dérivées premières finies et continues et $f>0$,

---

[1] Hölder, Dissertation inaugurale, *Beiträge zur Potentialtheorie* (Stuttgart 1882).

[2] Morera, *Sulle derivate seconde delle funzione potenziale nello spazio* (Rendiconti del Reale Istit. Lombardo. Vol. 20, pag. 302).

[3] A. Paraf, *Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation linéaire générale* (Annal. de la Fac. des Scienc. de Toulouse, t. 6, chap. 3, 1892). Dans ce Mémoire M. Paraf suppose que les coefficients a, b, c, h, de l'équation donnée (1) aient les dérivées secondes, et les valeurs données au contour pour l'intégrale aient les dérivées troisièmes, en disant pourtant que ces conditions ne sont pas indispensables.

[4] E. Le Roy, Thèse pour le doctorat, *Sur l'intégration des équations de la Chaleur.* (Paris, Gauthier-Villars et fils, 1898.)

et l'expression $adx + bdy + cdz$ est la différentielle exacte d'une fonction $\mu(x, y, z)$, de sorte que la même équation peut se réduire à la forme plus simple $\Delta u + fu = g$, c'est-à-dire au cas particulier dans lequel dans l'équation donnée manquent les termes aux dérivées premières; et dans ce cas les exceptions que je faisais tout à l'heure n'ont pas lieu, ou elles peuvent être écartées très facilement.

Mais dans le cas général, il me semble que les exceptions restent entièrement.

Ayant communiqué quelques-uns de mes doutes à M. PICARD l'année dernière, il me répondit très-aimablement qu'il les trouvait fondés, et que pour rendre vérifiées les conditions de son analyse du 1890 il fallait faire quelques hypothèses sur la nature des valeurs données pour la fonction sur le bord, pour lesquelles il aurait été suffisant d'admettre l'existence des dérivées des trois premières ordres, tandis qu'en opérant un peu autrement on pourrait montrer qu'il suffit d'aller jusqu'à la dérivée du second ordre. En même temps il m'ajoutait qu'il se proposait d'y revenir cette année dans son cours, et puis dans le quatrième volume de son traité d'analyse.

Quoique sûr que M. PICARD avec ces travaux apportera une nouvelle et importante contribution à la Science, et laissera bien loin les recherches que j'aurai pu faire moi-même [1] j'ai tâché déjà néanmoins de rendre de ma part parfaitement rigoureuse sa méthode qui a désormais déjà pris une place importante dans la Science; et je crois d'y être parvenu avec les considérations que je vais exposer.

En suivant en grande partie les procédés de MM. HÖLDER et MORERA (mém. cit.), je prémets d'abord certaines propriétés, en partie connues, de la fonction $W(x', y') = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_C F \log r dx dy$, et des autres

[1] Ce que je prévoyais quand j'écrivais cette lettre a M. MITTAG-LEFFLER dans le courant de l'année 1899, est arrivé. M. PICARD, d'abord avec des communications à l'Académie des Sciences de Paris, ensuite avec une publication dans le Journal de Math. de Liouville, a éclairci et complété sa méthode, dans des cas pourtant qui ne sont pas précisément ceux que j'ai traité ici, et avec des conditions et des procédés aussi différents. Cela pourrait peut-être demander des changements dans la rédaction de ce travail, mais le temps me fait défaut. D'ailleurs il ne sera pas inutile, je pense, qu'on connaisse mes procédés tels qu'ils sont sortis de mes études. Je n'y ai donc pas apporté aucune variation (10 novembre 1900).

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_C F\frac{\partial \log r}{\partial x}dx\,dy, \qquad -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_C F\frac{\partial \log r}{\partial y}dx\,dy$$

qui, comme on sait, et comme on trouvera aussi dans la suite, représentent les dérivées $\frac{\partial W}{\partial x'}$, $\frac{\partial W}{\partial y'}$, r étant la distance du point $M(x', y')$ au point d'intégration $M(x, y)$, et F étant une fonction de x et y qui, pour le moment, sera seulement supposée toujours finie et intégrable dans le champ C.

En remarquant que

$$\frac{\partial \log r}{\partial x} = \frac{x - x'}{r^2} = \frac{1}{r}\cos(r, x), \qquad \frac{\partial \log r}{\partial y} = \frac{y - y'}{r^2} = \frac{1}{r^2}\cos(r, y)$$

où (r, x), (r, y) sont les angles que la direction de r qui de M' va à M fait avec les directions positives des axes x et y, et en introduisant un système de coordonnées polaires avec le pôle en M', on verra tout de suite que ces fonctions W et $\frac{\partial W}{\partial x'}$, $\frac{\partial W}{\partial y'}$ ne surpassent jamais un nombre fini, même quand le point M' s'approche indéfiniment au contour de C, ou est sur ce contour même.

Prenons en C un autre point $M''(x'', y'')$ dont la distance de $M'(x', y')$ sera indiquée par δ; et par analogie, indiquons maintenant par r', au lieu que par r, la distance entre les points M' et M, et par r'' la distance entre les points M'' et M, et de même indiquons par W' et F', par W'' et F'' les valeurs de W et F dans les points M' et M''; et cherchons comment se changent W et ses dérivées premières $\frac{\partial W}{\partial x'}$, $\frac{\partial W}{\partial y'}$ quand on passe du point M' au point M''.

Nous devrons par conséquent étudier les différences[1]

$$W'' - W' = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C F(\log r'' - \log r')dx\,dy,$$

$$\frac{\partial W''}{\partial x''} - \frac{\partial W'}{\partial x'} = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_C F\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy,$$

$$\frac{\partial W''}{\partial y''} - \frac{\partial W'}{\partial y'} = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_C F\left(\frac{\partial \log r''}{\partial y} - \frac{\partial \log r'}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

[1] Quand deux fonctions $F(x, y)$, $J(x, y)$ deviennent infinies la première dans un point $M'(x', y')$ d'un champ C, et la deuxième dans un autre point $M''(x'', y'')$ du

et pour cela, en supposant d'abord que les points M' et M'' soient intérieurs au champ C, nous décomposerons C en trois champs, c'est-à-dire:

1° un champ circulaire τ' avec le centre en M' et ayant pour rayon $\frac{1}{2}\delta$;

2° un champ circulaire semblable τ'' avec le centre en M'' et ayant pour rayon $\frac{1}{2}\delta$;

3° le champ restant $C - \tau' - \tau''$.

Les intégrales $\iint\limits_C$ seront aussi décomposées en trois intégrales que nous allons examiner séparement, en commençant par celles de $W'' - W'$, et en introduisant toujours pour τ' et $C - \tau' - \tau''$ les coordonnées polaires (r', θ') avec le pôle en M', et pour τ'' les coordonnées polaires avec le pôle en M''.

Indiquons pour cela par $\overline{F}', \overline{F}'', \overline{F}$ les limites supérieures des valeurs absolues de F en τ', τ'', et $C - \tau' - \tau''$ ou C; et représentons, comme d'ordinaire, avec le signe $|K|$ la valeur absolue de K; nous aurons évidemment

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\tau'} F(\log r'' - \log r')dx\,dy\right| \leqq \frac{\overline{F}'}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\delta}\int\limits_0^{2\pi}(\log r'' - \log r')r'\,dr'\,d\theta',$$

même champ, sans cesser pourtant d'être intégrables en C, c'est a peine besoin de remarquer que la somme ou différence des intégrales $\iint\limits_C F(x\,,\,y)dx\,dy$, $\iint\limits_C J(x\,,\,y)dx\,dy$ sera encore égale à l'intégrale $P = \iint\limits_C \{F(x\,,\,y) \pm J(x\,,\,y)\}dx\,dy$ de la somme ou différence, comme dans le cas ou $F(x\,,\,y)$ et $J(x\,,\,y)$ sont finies.

En effet si σ' et σ'' sont deux petits champs qui renferment les points M' et M'', nous aurons par les définitions ordinaires

$$P = \lim_{\sigma'=0,\,\sigma''=0}\iint\limits_{C-\sigma'-\sigma''}\{F(x,y) \pm J(x,y)\}dx\,dy =$$

$$= \lim_{\sigma'=0,\,\sigma''=0}\left\{\iint\limits_{C-\sigma'-\sigma''}F(x,y)dx\,dy \pm \iint\limits_{C-\sigma'-\sigma''}J(x,y)dx\,dy\right\} =$$

$$= \lim_{\sigma'=0,\,\sigma''=0}\left\{\iint\limits_{C-\sigma'}F(x,y)dx\,dy - \iint\limits_{\sigma''}F(x,y)dx\,dy \pm \iint\limits_{C-\sigma''}J(x,y)dx\,dy \mp \iint\limits_{\sigma'}J(x,y)dx\,dy\right\} =$$

$$= \lim_{\sigma'=0}\iint\limits_{C-\sigma'}F(x,y)dx\,dy \pm \lim_{\sigma''=0}\iint\limits_{C-\sigma''}J(x,y)dx\,dy = \iint\limits_C F(x,y)dx\,dy \pm \iint\limits_C J(x,y)dx\,dy,$$

comme on voulait démontrer.

La même chose arrive pour le cas d'un plus grand nombre de variables, et de plusieurs points d'infini.

car, étant dans τ' $\frac{3}{2}\delta \geqq r'' \geqq \frac{1}{2}\delta \geqq r'$, la différence $\log r'' - \log r' = \log\frac{r''}{r'}$ sera toujours positive ou nulle; et en substituant $\log\frac{3}{2}\delta$ à $\log r''$ et en intégrant, on trouve que la valeur absolue de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{\tau'} F(\log r'' - \log r')dx\,dy$$

ne surpassera pas $\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\log 3\right)\overline{F}'\delta^2$.

De même celle de $\frac{1}{2\pi}\iint_{\tau''} F(\log r'' - \log r')dx\,dy$ ne surpassera pas $\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\log 3\right)F''\delta^2$.

Enfin pour l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\iint_{C-\tau'-\tau''} F(\log r'' - \log r')dx\,dy$ on remarquera d'abord que $\log r'' - \log r' = \frac{r''-r'}{t}$, t étant un nombre compris entre r' et r'', de sorte que cette intégrale pourra s'écrire $\frac{1}{2\pi}\iint_{C-\tau'-\tau''} F(r''-r')\frac{r'}{t}dr'd\theta'$; et puisque en formant le triangle $M'M''M$ on voit que $|r''-r'|\leqq\delta$, et $\frac{r'}{t}\leqq 3$ parce que en $C-\tau'-\tau''$ on a toujours $\frac{r'}{r'}=1$, et $\frac{r'}{r''}\leqq 1+\frac{\delta}{r''}\leqq 3$, on en conclut que

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint_{C-\tau'-\tau''} F(\log r'' - \log r')dx\,dy\right| \leqq \frac{3F\delta}{2\pi}\iint_{C-\tau'-\tau''} dr'\,d\theta' < \frac{3F\delta}{2\pi}\iint_C dr'\,d\theta',$$

et puisque cette démonstration pourra évidemment s'appliquer aussi au cas où les points M' et M'' sont pris un ou tous les deux sur le contour de C, parce que alors il faudra seulement substituer aux cercles entières τ' et τ'' leurs portions qui seront comprises en C, on en conclut que pour les rapports incrémentaux de W l'on aura toujours $\left|\frac{W''-W'}{\delta}\right| < kF$, F étant la limite supérieure des valeurs absolues de $F(x\,,y)$ en C, et k étant une quantité qui ne surpasse pas le nombre $\frac{3}{2\pi}\iint_C dr'\,d\theta'$ et qui par conséquent dépend seulement de l'aire A de C.

Et cette dépendence est telle qu'en supposant l'aire A de C suffisamment petite mais de forme tout-à-fait quelconque, la même quantité k pourra être rendue plus petite qu'une autre quantité quelconque B, car si ε est un nombre inférieur à $\frac{B}{3}$, en faisant autour de M' un cercle σ de rayon ε qui soit en tout ou en partie contenu en C, on aura évidemment $\iint\limits_C dr'd\theta' < \iint\limits_\sigma dr'd\theta' + \frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{C-\sigma} r'dr'd\theta'$, ou $\iint\limits_C dr'd\theta' < 2\pi\varepsilon + \frac{A}{\varepsilon}$; et il suffira que l'on ait $A < \frac{2\pi\varepsilon}{3}(B - 3\varepsilon)$ pour qu'il soit $k < B$. Et indépendamment de cela, il suffit de remarquer que $\iint\limits_C dr'd\theta'$ est le potentiel newtonien de la surface A sur un des ses points (x', y') quand la masse est de densité égale à un, pour en deduire que si A est suffisamment petite, k est très petite elle aussi; et du reste si l'on indique avec L la plus grande distance entre deux points quelconques du contour de C on aura toujours aussi $k \leqq 3L$, dont il suit encore, mais seulement pour de cas plus particuliers pour le contour de C, que k sera très petite avec L, et par suite avec C.

Passons maintenant à étudier la différence $\frac{\partial W''}{\partial x''} - \frac{\partial W'}{\partial x'}$, et pour cela considérons l'autre $\Delta = \frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x} = \frac{1}{r''}\cos(r'', x) - \frac{1}{r'}\cos(r', x)$ qui figure sous l'intégrale.

Puisque on a évidemment

$$\Delta = \left(\frac{1}{r''} - \frac{1}{r'}\right)\{\cos(r', x) + \cos(r'', x)\} + \frac{1}{r'r''}\{r''\cos(r'', x) - z'\cos(r', x)\},$$

et que les projections des côtés du triangle $M'M''M$ sur l'axe des x donnent $\delta\cos(\delta, x) + r''\cos(r'', x) - r'\cos(r', x) = 0$, (δ, x) étant l'angle que la direction de M' à M'' fait avec l'axe x, on aura

$$\Delta = \frac{(r' - r'')\{\cos(r', x) + \cos(r'', x)\} - \delta\cos(\delta, x)}{r'r''},$$

et par conséquent $|\Delta| \leqq \frac{3\delta}{r'r''}$.

En observant donc que en τ' on a

$$\frac{3}{2}\delta \geqq r'' \geqq \frac{1}{2}\delta \geqq r', \text{ et en } \tau'' \text{ on a } \frac{3}{2}\delta \geqq r' \geqq \frac{1}{2}\delta \geqq r'',$$

on en tire que

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\tau'} F\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x}-\frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy\right| \leqq 3F'\delta,$$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\tau''} F\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x}-\frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy\right| \leqq 3F''\delta,$$

et ensuite, en remarquant, comme nous l'avons fait déjà dans le cas de $W''-W'$, que dans $C-\tau'-\tau''$ on a toujours $\frac{r'}{r''}\leqq 3$, on trouve aussi

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau'-\tau''} F\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x}-\frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy\right| \leqq \frac{9F\delta}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau'-\tau''}\frac{dr'}{r'}\,d\theta' < \frac{9F\delta}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau'}\frac{dr'}{r'}\,d\theta',$$

et par conséquent

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau'-\tau''} F\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x}-\frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy\right| < 9F\left(\log L-\log\frac{1}{2}\delta\right)\delta,$$

où

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau'-\tau''} F\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x}-\frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy\right| < 9F\left(\frac{\log 2L}{\log\delta}-1\right)\delta\log\delta.$$

On a les mêmes résultats pour les intégrales qui composent

$$\frac{\partial W''}{\partial y}-\frac{\partial W'}{\partial y};$$

de sorte que l'on peut maintenant conclure que pour tous les points M' et M'' de C, et même quand il sont sur le bord, les valeurs absolues des rapports incrémentaux $\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial W''}{\partial x}-\frac{\partial W'}{\partial x}\right)$, $\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial W''}{\partial y}-\frac{\partial W'}{\partial y}\right)$ ne surpasseront jamais le nombre $-k_1 F\log\delta$, k_1 étant une quantité qui ne surpassera pas le nombre fini $9\left(1-\frac{\log 2L}{\log\delta}\right)$ qui ne dépend pas de F, et tend a devenir indépendent même de la grandeur du champ C.

Le résultats obtenus sur les rapports incrémentaux de W, $\frac{\partial W}{\partial x'}$ et $\frac{\partial W}{\partial y'}$ nous permettraient déjà de faire disparaître quelques-unes des difficultés de la méthode des approximations successives dont nous avons parlé.

Indépendamment de ça, ils ont d'ailleurs un intêret tout particulier, parce qu'ils sont généraux, et ne supposent rien pour la fonction $F(x, y)$, hormis d'être finie et intégrable en C, de sorte qu'elle pourra même avoir des discontinuités, et ils conduisent à déterminer les dérivées premières de W dans tous les points de C, même sur le bord, sans faire aucune autre hypothèse pour $F(x, y)$, tandis que par eux on peut aussi déterminer les dérivées secondes de W, mais celles-ci seulement pour les points $M'(x', y')$ qui sont *intérieurs* à C, et pour lesquels $F(x, y)$ est continue et le rapport incrémental $\frac{F-F'}{r'}$ est intégrable en M' même réduit aux valeurs absolues, et d'une manière uniforme sur chaque rayon sortant de M', cette fonction $F(x, y)$ étant encore finie et intégrable, mais du reste tout-à-fait quelconque, dans les autres points de C.

Reportons nous en effet aux démonstrations précédentes, et décomposons maintenant le champ $C-\tau'-\tau''$ en deux; l'un étant le champ $\tau-\tau'-\tau''$ qui reste d'un cercle τ ayant pour centre le point M' et un rayon très petit mais fini $\varepsilon \geqq \frac{3}{2}\delta$, quand on y supprime les cercles τ' et τ'', et l'autre étant le champ restant $C-\tau$; et supposons que le point $M''(x'', y'')$ soit sur la même horizontale ou sur la même verticale de M', de sorte que δ sera alors l'accroissement de x' ou de y' $\Delta x'$ ou $\Delta y'$.

Pour le champ $C-\tau$ l'intégrale $\iint\limits_{C-\tau} F \log r' dx dy$ admettra évidemment les dérivées premières et secondes par rapport à x' et y', parce que le point $M'(x', y')$ n'appartient pas au champ d'intégration; et ces dérivées seront

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} -\iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial \log r'}{\partial x} dx dy, \qquad -\iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial \log r'}{\partial y} dx dy, \\ \iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial^2 \log r'}{\partial x^2} dx dy, \qquad \iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial^2 \log r'}{\partial x \partial y} dx dy, \qquad \iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial^2 \log r'}{\partial y^2} dx dy, \end{array}\right.$$

sans qu'on ait besoin d'imposer d'autres conditions à F dans le champ $C-\tau$; et l'on aura évidemment $\iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial^2 \log r'}{\partial x^2}dx\,dy = -\iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial^2 \log r'}{\partial y^2}dx\,dy$.

En outre, sous les mêmes conditions pour F dans tout le champ C, les intégrales $-\iint\limits_{C} F\frac{\partial \log r'}{\partial x}dx\,dy$, $-\iint\limits_{C} F\frac{\partial \log r'}{\partial y}dx\,dy$ auront aussi toujours une signification, et elles seront pas conséquent les limites pour $\tau = 0$ des deux premières des intégrales précédentes (6).

De même les trois dernières de ces intégrales (6) auront souvent elles aussi des limites $A_{x,x}$, $A_{x,y}$, $A_{y,y}$ (avec $A_{x,x} = -A_{y,y}$) pour τ ou $\varepsilon = 0$, mais cela n'arrivera pas toujours; donc, si, pour le cas où l'on veut chercher aussi les dérivées secondes de W', on fait d'abord l'hypothèse de l'existence de ces limites, hypothèse du reste que nous remplacerons ensuite par une autre, il est certain que, après avoir fixé ε tellement petit que les intégrales (6) soient près de leurs limites

$$(7)\qquad -\iint\limits_{C} F\frac{\partial \log r'}{\partial x}dx\,dy,\qquad \iint\limits_{C} F\frac{\partial \log r'}{\partial y}dx\,dy,\qquad A_{x,x}\,,\ A_{x,y}\,,\ A_{y,y}$$

plus qu'un nombre σ aussi petit que l'on voudra, on pourra ensuite prendre δ tellement petit lui aussi que pour toutes les valeurs de δ encore plus petites les rapports incrémentaux correspondants

$$\frac{1}{\delta}\iint\limits_{C-\tau} F(\log r'' - \log r')dx\,dy,$$

$$\frac{1}{\delta}\iint\limits_{C-\tau} F\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy,\qquad \frac{1}{\delta}\iint\limits_{C-\tau} F\left(\frac{\partial \log r''}{\partial y} - \frac{\partial \log r'}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

soient près des intégrales (6) plus qu'un nombre σ_1 aussi petit lui aussi que l'on voudra; et alors pour ces valeurs de δ ces rapports ne différeront des limites susdites (7) plus de $\sigma + \sigma_1$.

Maintenant, en considérant d'abord le rapport $\frac{W'' - W'}{\delta}$, si l'on se rappelle ce que nous trouvions pour les intégrales

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\tau'} F(\log r'' - \log r')dx\,dy,\qquad \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\tau''} F(\log r'' - \log r')dx\,dy,$$

on voit tout de suite que leurs rapports à δ deviennent avec δ aussi petits que l'on veut; et de même en appliquant au cas de $C = \tau$, et par conséquent pour $L = 2\varepsilon$, ce que nous trouvions pour l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{C-\tau'-\tau''} F(\log r'' - \log r')\,dx\,dy,$$

on voit que son rapport à δ peut lui aussi être supposé aussi petit que l'on veut quand ε a été déjà pris suffisamment petit; donc évidemment quand on fait tendre δ vers zéro le rapport $\dfrac{W'' - W'}{\delta}$ tendra vers l'une ou l'autre des deux premières intégrales (7) divisées par 2π suivant que l'on a $\delta = \Delta x'$ ou $\delta = \Delta y'$; et l'on aura par conséquence

$$\frac{\partial W}{\partial x'} = \frac{1}{2\pi}\iint_C F\frac{\partial \log r}{\partial x'}\,dx\,dy, \qquad \frac{\partial W}{\partial y'} = \frac{1}{2\pi}\iint_C F\frac{\partial \log r}{\partial y'}\,dx\,dy$$

pour tous les points $M'(x', y')$ de C, même sur le bord, et cela quand pour $F(x, y)$ on maintient seulement l'hypothèse qu'elle soit finie et intégrable en C.

En passant ensuite à étudier les rapports incrémentaux

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial W''}{\partial x''} - \frac{\partial W'}{\partial x'}\right), \qquad \frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial W''}{\partial y''} - \frac{\partial W'}{\partial y'}\right),$$

nous observerons d'abord que l'on peut écrire

$$\iint_\tau F\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy = \tag{8}$$

$$= \iint_{\tau'} (F - F')\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy + \iint_{\tau''} (F - F')\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy$$

$$+ \iint_{\tau-\tau'-\tau''} (F - F')\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy + F'\iint_\tau \left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy,$$

où F' est la valeur de $F(x, y)$ en M'; et maintenant si pour ce cas on fait aussi l'hypothèse que $F(x, y)$ soit continue en ce point M', en rappelant ce que nous trouvions pour les deux premières intégrales du second membre quand il y avait F a la place de $F - F'$ on voit tout de suite que leurs rapports à δ seront aussi petits que l'on voudra si δ aura été déjà pris suffisamment petit.

De même en rappelant que à l'extérieur des cercles τ' et τ'' on a

$$|\Delta| = \left|\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right| \leqq \frac{3\delta}{r'r''}, \quad \text{et} \quad \frac{r'}{r''} \leqq 3,$$

on voit que, toujours en valeur absolue, sera

$$\frac{1}{\delta} \iint\limits_{\tau-\tau'-\tau''} (F - F')\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right) dx\,dy \leqq 9 \iint\limits_{\tau-\tau'-\tau''} \left|\frac{F - F'}{r'}\right| dr'd\theta',$$

donc évidemment, si maintenant on ajoute aussi l'hypothèse que les dérivées premières $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ de $F(x, y)$ soient déterminées et finies, ou du moins que le rapport incrémental $\frac{F - F'}{r'}$ soit intégrable en M' même en le réduisant à ses valeurs absolues, et d'une manière uniforme sur chaque rayon sortant de M', alors le rapport à δ de la troisième intégrale du second membre de (8) sera lui-même aussi petit que l'on voudra si ε aura été pris suffisamment petit.

Et avec cette nouvelle hypothèse pour le rapport $\frac{F - F'}{r'}$, les fonctions $(F - F')\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}$, $(F - F')\frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y}$, $(F - F')\frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2}$ seront aussi évidemment intégrables en M'; et par conséquent puisque l'on a

$$\iint\limits_{C-\tau} F \frac{\partial^2 \log r'}{\partial x^2} dx\,dy = \iint\limits_{C-\tau} (F - F') \frac{\partial^2 \log r'}{\partial x^2} dx\,dy + F' \iint\limits_{C-\tau} \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} dx\,dy,$$

si l'on remarque que l'intégrale $\iint\limits_{C-\tau} \frac{\partial^2 \log r'}{\partial x^2} dx\,dy$ a une limite pour $\tau = 0$, et qu'il ne change même pas avec τ, car si τ_1 est un autre cercle de rayon $\varepsilon_1 < \varepsilon$ avec le centre en M', on a évidemment

$$\iint\limits_{\tau-\tau_1} \frac{\partial^2 \log r'}{\partial x^2} dx\,dy = -\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta'}{r'} dr'd\theta' = 0,$$

on en conclut que l'intégrale $\iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial^2 \log r'}{\partial x^2}dx\,dy$ aura une limite déterminée et finie pour $\tau = 0$, et la même chose arrivera évidemment pour les autres intégrales $\iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial^2 \log r'}{\partial x \partial y}dx\,dy$, $\iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial^2 \log r'}{\partial y^2}dx\,dy$; donc, avec la condition que nous posons maintenant pour $\frac{F-F'}{r'}$, celle aussi, que nous avions posée ci-dessus, de l'existence des limites déterminées et finies pour $\tau = 0$ pour les trois dernières des intégrales (6) se trouvera satisfaite; et par suite il sera dorénavant inutile de parler de cette condition.

Avec tout cela, il ne reste plus que d'étudier la dernière intégrale de la formule (8), ou $\iint\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy$; et pour cela nous prendrons à considérer la fonction $u = \frac{(x-a)^2+(y-b)^2-R^2}{4}$ qui satisfait toujours à l'équation $\Delta u = 1$, et sur le cercle C_1 de rayon R avec le centre dans le point (a, b) est toujours zéro.

Par la formule bien connue de Green, nous aurons pour chaque point (x', y') intérieur à C_1

$$u' = \frac{(x'-a)^2+(y'-b)^2-R^2}{4} = -\frac{\eta^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log r'd\theta + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_1}\log r'dx\,dy;$$

et puisque, comme on sait, et comme du reste il résulte tout de suite du développement de $\log r'$ en série trigonométrique, l'intégrale $\int_0^{2\pi}\log r'd\theta$ a la valeur constante $2\pi\log R$, on en déduit que

$$\text{(9)} \qquad \frac{(x'-a)^2+(y'-b)^2-R^2}{4} + \frac{R^2\log R}{2} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_1}\log r'dx\,dy,$$

et par conséquent en dérivant on a

$$\frac{x'-a}{2} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_1}\frac{\partial \log r'}{\partial x'}dx\,dy = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_1}\frac{\partial \log r'}{\partial x}dx\,dy,$$

l'intégrale du second membre ayant une signification bien déterminée.

De même on a pour le point (x'', y'')

$$\frac{x''-a}{2} = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_1}\frac{\partial \log r''}{\partial x}\,dx\,dy,$$

et par suite on a la formule remarquable

$$(10)\qquad \frac{x''-x'}{2} = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_2}\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy,$$

qui donne

$$\frac{1}{\Delta x'}\iint\limits_{C_1}\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy = -\pi;$$

de sorte que maintenant il reste assuré que pour chaque point (x', y') *intérieur* à C, quand en ce point $F(x, y)$ est finie et continue et a ses dérivées premières déterminées et finies, ou du moins les rapports incrémentaux $\frac{F-F'}{r'}$ sont intégrables même réduits à leurs valeurs absolues et d'une manière uniforme pour chaque rayon sortant de M', on a la formule

$$(11)\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} = \frac{1}{2}F' + \lim_{\tau=0}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}\,dx\,dy.$$

D'une manière semblable on trouve

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x'\,\partial y'} &= \lim_{\tau=0}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial^2 \log r}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy,\\ \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} &= \frac{1}{2}F' + \lim_{\tau=0}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C-\tau} F\frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2}\,dx\,dy, \end{aligned}\right.$$

et d'après ce que nous avons déjà remarqué, les limites qui figurent dans ces formules seront déterminées et finies.

Et puisque si s et σ sont les contours de C et du petit cercle τ, et α et β sont les angles que la normale intérieure à s fait avec les axes x et y, on a par des formules connues

$$\iint\limits_{C-\tau} \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} dx dy = -\int\limits_s \frac{\partial \log r}{\partial x} \cos \alpha ds - \int\limits_\sigma \frac{\partial \log r}{\partial x} \cos \theta' d\sigma =$$

$$= -\int\limits_s \frac{\partial \log r}{\partial x} \cos \alpha d\sigma - \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 \theta' d\theta' = -\int\limits_s \frac{\partial \log r}{\partial x} \cos \alpha ds - \pi,$$

et par conséquent

$$\iint\limits_{C-\tau} F \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} dx dy = \iint\limits_{C-\tau} (F - F') \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} dx dy + F' \iint\limits_{C-\tau} \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} dx dy =$$

$$= \iint\limits_{C-\tau} (F - F') \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} dx dy - F' \int\limits_s \frac{\partial \log r}{\partial x} \cos \alpha ds - F'\pi,$$

il s'ensuit que pour les dérivées secondes de W on a aussi les formules

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} &= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_C (F - F') \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} dx dy - \frac{1}{2\pi} F' \int\limits_s \frac{\partial \log r}{\partial x} \cos \alpha ds, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial y'} &= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_C (F - F') \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} dx dy, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} &= \iint\limits_C (F - F') \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2} dx dy - \frac{1}{2\pi} F' \int\limits_s \frac{\partial \log r}{\partial y} \cos \beta ds, \end{aligned} \right.$$

lesquelles, à cause de la formule connue

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_s \frac{\partial \log r}{\partial x} \cos \alpha ds + \frac{1}{2\pi} \int\limits_s \frac{\partial \log r}{\partial y} \cos \beta ds = \frac{1}{2\pi} \int\limits_s \frac{\partial \log r}{\partial p} ds = -1,$$

nous donnent tout de suite

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} = F',$$

comme on le trouve aussi en ajoutant la formule (11) avec la deuxième des formules (12); de sorte que cette propriété du potentiel logarithmique reste ainsi démontrée d'une manière générale pour tous les points $M'(x', y')$ *intérieurs* à C pour lesquels $F(x, y)$ est finie et continue et a ses dérivées premières

$\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ déterminées et finies, ou du moins plus généralement est telle que son rapport incrémental $\frac{F - F'}{r'}$ est uniformément intégrable sur chaque rayon sortant de M' même en le réduisant à ses valeurs absolues, tandis que *pour les autres points de* C *on exige seulement que la même fonction* $F(x, y)$ *soit finie et intégrable.*

Ces résultats, qui du reste sont ceux donnés pour le cas de trois variables par MM. Hölder et Morera, enoncés toutefois d'une manière plus générale, peuvent être encore généralisés car avec des légères modifications dans les procédés précédents on pourrait même considérer le cas dans lequel pour la fonction $F(x, y)$ le point (x', y') appartient à une ligne de discontinuité de la fonction même $F(x, y)$, etc.

Tout cela admis, revenons aux trois objections qui, d'après ce que j'ai dit en commençant, il me parait qu'on puisse faire à la méthode de M. Picard.

Supposons toujours pour cela que C soit un de ces champs pour lesquels il est certain qu'il existe la fonction de Green $G = -g - \log r$, et rappelons la formule connue

$$U' = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial G}{\partial p}\, ds - \frac{1}{2\pi}\iint_C F(x, y)\, G\, dx\, dy \tag{14}$$

qui donne la valeur de U dans le point (x', y') intérieur à C quand U est une fonction pour laquelle on suppose l'existence d'avance, et qui dans le champ C est finie et continue avec ces dérivées premières jusqu'au contour, tandis que ses dérivées secondes $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ sont finies et intégrables en C, et, hormis tout au plus un nombre fini de points ou un nombre fini de lignes, satisfont toujours à l'équation $\Delta U = F(x, y)$, cette fonction $F(x, y)$ étant finie et intégrable en C.

Disons pour abréger que $F(x, y)$ satisfait en C aux *conditions normales* quand, exception faite tout au plus pour un nombre fini de points, ou pour un nombre fini de lignes, elle satisfait en chaque point aux conditions que toute à l'heure nous admettions seulement pour le point (x', y') que l'on voulait considérer dans le cas des dérivées secondes de W; c'est-à-dire admettons que, sauf les dites exceptions, pour chaque point (x', y')

de C la fonction $F(x,y)$ soit finie et continue et ait toujours les dérivées premières déterminées et finies, ou du moins qu'elle soit telle que les rapports incrémentaux $\frac{F-F'}{r'}$ soient uniformément intégrables pour les dits points $M'(x',y')$ sur chaque rayon sortant de M' même en les réduisant aux valeurs absolues. Alors il est certain que si $F(x,y)$ satisfait en C à ces conditions normales, la fonction $W = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C F(x,y)\log r\,dx\,dy$ que nous avons étudiée dans ce qui précède sera une fonction qui satisfaira à toutes les conditions de U, et par conséquent pour sa valeur W' dans le point $M'(x',y')$ on aura aussi

$$(15)\qquad W' = \frac{1}{2\pi}\int\limits_s W_s\frac{\partial G}{\partial p}ds + \frac{1}{2\pi}\iint F(x,y)(\log r + g)\,dx\,dy,$$

de sorte qu'il sera

$$(16)\qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_s W_s\frac{\partial G}{\partial p}ds = -\frac{1}{2\pi}\iint F(x,y)g\,dx\,dy,$$

W_s étant les valeurs de W sur le bord de C.

Cela posé, remarquons maintenant que dans le cas du cercle, si l'on donne des valeurs U_s sur le bord qui aient toujours les dérivées premières déterminées et finies, et aient aussi les dérivées secondes, ou du moins leurs dérivées premières aient leurs rapports incrémentaux intégrables même en les réduisant aux valeurs absolues, alors il existe une fonction harmonique U qui prend ces valeurs U_s sur le bord, et a les dérivées premières finies même en s'approchant indéfiniment au contour, et sur le contour aussi, et ces dérivées ne surpassent jamais l'intégrale des dits rapports incrémentaux rendus positifs, multipliée par un facteur toujours inférieure à un certain nombre fini.

Dans le cas du cercle cette particularité se démontre très facilement, comme nous le verrons plus tard, car dans ce cas on a sous une forme très simple l'expression de la fonction harmonique U; et même pour la dérivée $\frac{\partial U}{\partial \theta}$ on démontre qu'elle est toujours comprise entre les limites inférieures et supérieures de $U_1'(\theta')$. Pour d'autres champs les recherches me paraissent assez difficiles, et je me réserve de tâcher de les faire dans une autre occasion; mais, malgré cela, puisque il ne voudrait pas la peine de s'arrêter au cas du cercle, car étant alors suffisantes les considérations de M. PICARD, il n'y aurait pas besoin de ces études que nous faisons pour l'intégrale $\iint\limits_C F(x, y) g\,dx\,dy$; et puisque d'ailleurs l'on comprend bien déjà qu'il doit y avoir beaucoup d'autres champs pour lesquels on a les mêmes particularités, nous admettrons sans plus que les champs C que nous considérons soient de ceux-ci, en supposant aussi que les lignes du contour (qui pourront avoir aussi des points anguleux) aient toujours leur courbure finie; et pour abréger nous les appellerons *champs normaux*.

Alors si les valeurs données U_s au contour de C satisferont aux conditions susdites, la fonction harmonique U correspondante sera unique et aura certainement l'expression $\frac{1}{2\pi}\int\limits_s U_s \frac{\partial G}{\partial p} ds$, et ses valeurs absolues ne surpasseront jamais le maximum de ceux de U_s, tandis que ses dérivées premières auront les particularités que nous avons indiquées ci-dessus; donc, puisque en s'aidant de ce que nous avons déjà trouvé pour la fonction W nous démontrerons tout de suite ci-dessous que les valeurs W_s que prend cette fonction W satisfont aux conditions que l'on posait toute à l'heure pour les valeurs U_s, il est certain que le premier membre de la formule (16) ou le premier terme du second membre de la formule (15) est une fonction harmonique V qui a toutes les particularités de la dite fonction U, et sur le bord a les mêmes values W_s de W.

Or, en considérant les valeurs W_s comme provenant de W, et en indiquant par $W'(s)$ la dérivée de W_s par rapport à s qui certainement, d'après ce qui précède, sera déterminée et finie, on a

$$W'(s) = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{dy}{ds},$$

et par suite si, en restant sur le bord, on passe du point $M'(x', y')$ qui correspond à l'arc s, au point $M''(x'', y'')$ qui correspond à $s + \Delta s$, et dont la distance de M' est δ, le rapport $\frac{\delta}{\Delta s}$ tendra vers l'unité quand M'' s'approchera indéfiniment à M', et avec les notations qui précèdent on aura

$$(17) \quad \frac{W'(s+\Delta_s)-W'(s)}{\Delta_s} = \frac{1}{\Delta_s}\left(\frac{\partial W''}{\partial x}-\frac{\partial W'}{\partial x}\right)\frac{dx'}{ds}+\frac{1}{\Delta_s}\left(\frac{\partial W''}{\partial y}-\frac{\partial W'}{\partial y}\right)\frac{dy'}{ds}+$$
$$+\frac{\partial W''}{\partial x}\frac{\frac{dx''}{ds}-\frac{dx'}{ds}}{\Delta_s}+\frac{\partial W''}{\partial y}\frac{\frac{dy''}{ds}-\frac{dy'}{ds}}{\Delta_s};$$

donc, en remarquant que les facteurs qui multiplient $\frac{\partial W''}{\partial x}$ et $\frac{\partial W''}{\partial y}$ dépendent seulement du contour et sont finies parce que ce contour a la courbure toujours finie, et en rappelant aussi ce que nous trouvions pour les dérivées $\frac{\partial W}{\partial x}$ et $\frac{\partial W}{\partial y}$ et pour les rapports

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial W''}{\partial x}-\frac{\partial W'}{\partial x}\right), \qquad \frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial W''}{\partial y}-\frac{\partial W'}{\partial y}\right)$$

même sur le bord de C, on en tire que les valeurs absolues des rapports incrémentaux de $W'(s)$ ne surpassent jamais $k_2 F \log \delta$, F étant la limite supérieure des valeurs absolues de F en C, et k_2 ne surpassant jamais, quel que soit C, un certain nombre fini qui dépend seulement du contour de C; et cela met en évidence ce que nous voulions, c'est-à-dire que les valeurs absolues des rapports incrémentaux de $W'(s)$ seront toujours intégrables même en les réduisant aux valeurs absolues, comme justement il fallait qu'il fût pour pouvoir en tirer les conclusions que nous énonçâmes toute à l'heure pour V.

Il suit de là que les dérivées premières de cette fonction V qui, il est maintenant assuré, ne peuvent pas surpasser les intégrales des valeurs (17), ne surpasseront jamais $k_3 F$, k_3 étant un nombre fini qui dépend seulement du contour de C et qui évidemment devient avec ce contour aussi petit que l'on veut, parce que c'est une intégrale de la forme $\int_s \log \delta ds$; donc, puisque la même chose arrive évidemment pour les valeurs de V en C parce qu'elles sont toujours comprises entre les limites inférieures et supérieures de W_s, on peut maintenant en conclure qui si le champ C est un champ normal, et en même temps la fonction $F(x, y)$ satisfait en C aux conditions normales, l'intégrale

$$(18) \quad \frac{1}{2\pi}\iint_C F(x, y) g \, dx \, dy$$

du second membre de la formule (15), et par conséquent aussi l'intégrale double

$$(19)\qquad \Lambda = \frac{1}{2\pi}\iint_C F(x, y) G dx dy$$

toute entière, auront toutes les particularités de W, c'est-à-dire elles et leurs dérivées premières, même sur le bord, ne surpasseront jamais MF et NF, où M et N ne surpassent pas certains nombres finis qui dépendent seulement du contour de C, et qui deviennent avec ce contour aussi petits que l'on veut.

Et cela toujours, comme nous avons dit, quand C est un champ normal, et la fonction $F(x, y)$ y satisfait aux conditions normales; mais il n'est pas exclu, *et cela doit être bien remarqué*, que même si ces conditions ne sont pas *toutes* remplies, il pourra encore arriver que les intégrales (18) et (19) aient toujours les mêmes particularités.

En effet, notre démonstration pour les valeurs et pour les dérivées premières de l'intégrale (18), et par conséquent de Λ, s'appuie toute sur la formule (14) dans laquelle il faut nécessairement supposer que la fonction U existe et satisfait généralement en *tout* C à l'équation $\Delta U = F(x, y)$, et par suite il faut supposer que la fonction que nous avons indiquée par W ait elle aussi cette particularité, ce que par les démonstrations qui précèdent reste assuré seulement quand $F(x, y)$ satisfait en C aux conditions normales; et en outre quand on veut tirer nos conclusions des formules (15) ou (16) il faut aussi supposer que C soit un champ normal; mais il est évident que même quand ces conditions ne seront pas toutes satisfaites on pourra quelquefois vérifier *autrement* que l'intégrale (18) et par conséquent aussi Λ auront les propriétés voulues; seulement alors il faudra faire ces vérifications à part.

C'est justement ce que l'on peut faire dans le cas du cercle, comme (et je l'ai déjà dit en commençant) M. Picard avait déjà remarqué, sans rien dire pour les autres champs, car alors la fonction g, à une quantité constante près, est elle aussi le logarithme d'une distance; de sorte que dans le cas du cercle, ainsi que dans tous les autres cas pour lesquels on pourra retrouver à part les dites propriétés de l'intégrale (18) ou de Λ, il ne sera pas nécessaire d'exiger que $F(x, y)$ satisfasse en C aux conditions normales.

Tout cela pour ce qui regarde les valeurs et les dérivées premières de l'intégrale (17) et de A quand on s'approche indéfiniment au contour, ou l'on se place sur le contour même. Mais quand il suffit de considérer seulement les points (x', y') *intérieurs* à C, comme cela arrive ordinairement quand on a à s'occuper des dérivées secondes de A, alors il n'est pas nécessaire d'avoir égard à toutes ces particularités.

Et en effet si l'on veut, par ex.: considérer les dérivées secondes de A dans les points intérieurs (x', y'), en remarquant que celles de l'intégrale (18) sont évidemment

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_C F(x,y)\frac{\partial^2 g}{\partial x'^2}dx\,dy,\quad \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C F(x,y)\frac{\partial^2 g}{\partial x'\partial y'}dx\,dy,\quad \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C F(x,y)\frac{\partial^2 g}{\partial y'^2}dx\,dy,$$

et en s'appuyant sur les formules (13), on trouvera tout de suite

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial x'^2} &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C (F-F')\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}dx\,dy + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C F\frac{\partial^2 g}{\partial x'^2}dx\,dy - \\ &\qquad - \frac{F'}{2\pi}\int\limits_s \frac{\partial \log r}{\partial x}\cos\alpha\,ds, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial x'\partial y'} &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C (F-F')\frac{\partial^2 \log r}{\partial x\partial y}dx\,dy + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C F\frac{\partial^2 g}{\partial x'\partial y'}dx\,dy, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial y'^2} &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C (F-F')\frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2}dx\,dy + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C F\frac{\partial^2 g}{\partial y'^2}dx\,dy - \\ &\qquad - \frac{F'}{2\pi}\int\limits_s \frac{\partial \log r}{\partial y}\cos\beta\,ds, \end{aligned}\right.$$

α et β étant les angles de la normale intérieure au contour avec les axes x et y; et cela pour tous les points *intérieurs* $M'(x', y')$ pour lesquels les rapports $\frac{F-F'}{r'}$ sont intégrables d'une manière uniforme sur chaque rayon sortant de M' même en les réduisant aux valeurs absolues, $F(x,y)$ restant maintenant dans tous les autres points de C absolument quelconque et seulement finie et intégrable.

Après cela la première des objections que je faisais au procédé de M. PICARD vient tomber entièrement quand on suppose que C soit un champ normal et que les coefficients a, b, c, h de l'équation donnée (1) satisfassent aux conditions normales, ce qui est déjà un cas plus général que celui considéré par M. PICARD qui supposait que les dits coefficients en C avaient les dérivées déterminées et finies. Et même si les dites conditions pour le champ C, ou pour les coefficients a, b, c, h, ne sont pas satisfaites on n'exclut pas que, comme dans le cas du cercle, A et ses dérivées premières puissent encore ne surpasser jamais, en valeur absolue, les nombres MF et NF susdits; seulement il faudra faire pour ces cas des vérifications spéciales, après lesquelles seulement la difficulté que je faisais pour la méthode de M. PICARD viendra encore à disparaître.

Ensuite, évidemment la deuxième objection viendra elle aussi à tomber, si l'on suppose que C soit un champ normal, et que les valeurs données sur le bord pour l'intégrale que l'on cherche de l'équation (1) aient les dérivées premières déterminées et finies, et les secondes aussi, ou du moins les rapports incrémentaux des dérivées premières soient intégrables même en les réduisant aux valeurs absolues; car alors, avec les dites limitations pour les champs C, la fonction harmonique que, en commençant, nous avons indiqué par u_0 aura ses dérivées premières déterminées et finies même en s'approchant indéfiniment au contour, et sur le contour aussi; donc des objections à la méthode de M. PICARD il ne reste maintenant que celle relative aux dérivées secondes des fonctions successives $u_0, u_1, u_2, \ldots$ et de leur série (4).

Mais cette objection va tomber elle aussi tout de suite, et même dans un cas plus général que celui de M. PICARD, d'après ce que nous avons démontré ci-dessus.

Prenons en effet la formule (4) des approximations successives, c'est-à-dire

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n + \ldots,$$

où

$$u_1 = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_C \left(a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + cu_0 + h\right) G\,dx\,dy,$$

$$u_n = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_C \left(a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + cu_{n-1}\right)(\log r + g)\,dx\,dy \text{ pour } n > 1,$$

qui, avec nos limitations pour le champ C, et pour les valeurs données sur le bord pour u, représente certainement, d'après les démonstrations de M. PICARD une fonction qui en tout C est finie et continue avec ses dérivées premières (5), même en s'approchant indéfiniment au contours, et sur ce contour aussi.

Observons maintenant que puisque u_0 a certainement les dérivées secondes déterminées et finies dans l'intérieur de C, en s'appuyant sur ce que nous avons démontré on trouvera successivement que la même particularité subsiste aussi pour les termes $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n, \ldots$ en tous les points $M'(x', y')$, *intérieurs* à C, où les coefficients a, b, c, h de l'équation donnée (1) ont une dérivée déterminée et finie, ou du moins ont des rapport incrémentaux $\frac{a-a'}{r'}, \frac{b-b'}{r'}, \frac{c-c'}{r'}, \frac{h-h'}{r'}$ qui sont intégrables d'une manière uniforme sur chaque rayon sortant de M' même quand on les réduit aux valeurs absolues, et cela sans d'autres conditions pour leurs valeurs dans les autres points de C, hormis celle d'être toujours finies et intégrables; et ces dérivées secondes de $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n, \ldots$ pourront être déterminées en s'aidant des formules (20).

Pour tous ces points $M'(x', y')$ on pourra donc former les trois séries $\sum \frac{\partial^2 u_n}{\partial x'^2}, \sum \frac{\partial^2 u_n}{\partial x' \partial y'}, \sum \frac{\partial^2 u_n}{\partial y'^2}$ des dérivées secondes, et à cause des formules (20), la première de ces séries sera la suivante:

$$(21) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x'^2} + \frac{1}{2\pi} \sum_2^\infty \Bigg[\iint_C \Big\{ & a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c u_{n-1} - \\ & - a' \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial x'} - b' \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial y'} - c' u'_{n-1} \Big\} \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} dx\, dy + \\ + \iint_C \Big(a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} & + c u_{n-1} \Big) \frac{\partial^2 g}{\partial x'^2} dx\, dy - \\ - \Big(a' \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial x'} + b' \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial y'} & + c' u'_{n-1} \Big) \int_s \frac{\partial \log r}{\partial x} \cos \alpha\, ds \Bigg], \end{aligned}$$

et nous allons l'étudier.

Remarquons pour cela que, si l'on s'arrêtait au cas (qui du reste sera le cas ordinaire) dans lequel les coefficients a, b, c, h de la (1) satisfont en C aux conditions normales, alors outre que pour le point (x', y') on pourrait former la série (21) aussi pour tous les points de son voisinage, et pour les théorèmes connus de la dérivation par série il suffirait de démontrer que dans ces voisinages la même série (21) converge uniformément; et cette démonstration pourrait se faire très aisement en décomposant la même série (21) dans les trois séries (A), (B), (C) qui se forment avec les trois parties dont se composent ses terme, et en les examinant séparémment.

Mais, puisque on peut le faire assez aisément, nous resterons dans le cas plus général dans lequel on admet seulement de savoir que, pour le point $M'(x', y')$ qui l'on considére, les rapports $\frac{a-a'}{r'}$, $\frac{b-b'}{r'}$, $\frac{c-c'}{r'}$, $\frac{h-h'}{r'}$ satisfont à la condition d'intégrabilité d'une manière uniforme sur chaque rayon sortant de M' même en les réduisant aux valeurs absolues, sans rien supposer pour les autres points du voisinage de ce point M'; et alors, puisque on ne sait pas si on peut former la série (21) aussi pour ces autres points, il faudra appliquer d'autres théorèmes de la dérivation par série, pour montrer que la série (21), considérée seulement pour le point $M'(x', y')$, est convergente et représente la dérivée seconde $\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}$.

Considérons pour cela la série des dérivées premières de la (4), ou

$$(22)\qquad \frac{\partial u_0}{\partial x'}+\frac{\partial u_1}{\partial x'}-\frac{1}{2\pi}\sum_2^\infty \iint_C \left(a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}+b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}+cu_{n-1}\right)\frac{\partial \log r}{\partial x}\,dx\,dy+ \\ +\frac{1}{2\pi}\sum_2^\infty \iint_C \left(a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}+b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}+cu_{n-1}\right)\frac{\partial g}{\partial x'}\,dx\,dy,$$

qui représentera certainement $\frac{\partial u}{\partial x'}$; et remarquons que, puisque g et ses dérivées sont toujours finies quand, comme à present, le point $M'(x', y')$ est supposé intérieur à C, la deuxième série $\sum\limits_2^\infty$ a certainement une dérivée qui est donnée par la série des dérivées en tous les points intérieurs à C. Evidemment donc il suffira de chercher si la première série

$$(23)\qquad \sum_2^\infty \iint_C \left(a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}+b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}+cu_{n-1}\right)\frac{\partial \log r}{\partial x}\,dx\,dy$$

a une dérivée qui soit la série des dérivées dans le point $M'(x', y')$.

Indiquons pour cela par R'_m et R''_m les restes de cette série (23) pour les points $M'(x', y')$ et $M''(x'', y'')$ où $x'' = x' + \Delta x'$, $y'' = y'$, et rappelons le théorème du § 102 de mes *Fondamenti per la teorica delle funzioni di una variabile reale;* il suffira de démontrer que pour chaque nombre m supérieur à un certain nombre m' il existe un nombre ε (variable ou non avec m) tel que pour les valeurs de $\Delta x'$ numériquement inférieurs à ε le rapport $\Delta_1 = \dfrac{R'_m - R''_m}{\Delta x'}$ ne surpassera jamais en valeur absolue un nombre donné σ aussi petit que l'on voudra.

Remarquons pour cela qu'en ayant

$$\Delta_1 = \frac{1}{\Delta x'} \sum_{m+1}^{\infty} \iint\limits_C \left(a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c u_{n-1}\right)\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right) dx dy,$$

on pourra décomposer Δ_1 dans les deux séries

$$(24) \quad \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{\Delta x'} \iint\limits_C \left(a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c u_{n-1} - a' \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial x'} - b' \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial y'} - c' u'_{n-1}\right) \times \left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right) dx dy,$$

$$(25) \quad \frac{1}{\Delta x'} \iint\limits_C \left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right) dx dy \sum_{m+1}^{\infty} \left(a' \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial x'} + b' \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial y'} + c' u'_{n-1}\right)$$

qui sont convergentes; et puisque, quand $\Delta x'$ s'approche indéfiniment de zéro le rapport $\dfrac{1}{\Delta x'} \iint\limits_C \left(\dfrac{\partial \log r''}{\partial x} - \dfrac{\partial \log r'}{\partial x}\right) dx dy$ tend vers la dérivée seconde de $\iint\limits_C \log r \, dx dy$ qui est toujours déterminée et finie, et la série

$$\sum_{2}^{\infty} \left(a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c u_{n-1}\right)$$

converge uniformément *en tout* C, et aussi, d'après les raisonnements de M. Picard, est convergente la série $\sum_{2}^{\infty} (\bar{a}\alpha_{n-1} + \bar{b}\beta_{n-1} + \bar{c}\gamma_{n-1})$ où $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, α_{n-1}, β_{n-1}, γ_{n-1} sont les limites supérieures des valeurs absolues de a, b, c,

$\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}$, $\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}$, u_{n-1} en C est convergente, il est certain que si l'on prend un nombre m' tel que le reste $\sum_{m'+1}^{\infty}(\bar{a}\alpha_{n-1}+\bar{b}\beta_{n-1}+\bar{c}\gamma_{n-1})$ de cette série ne surpasse pas un nombre très petit que l'on ait choisi σ_1, alors pour chaque point $M'(x', y')$ intérieur à C la série (25), même quand $\Delta x'$ sera devenue numériquement inférieure à un certain nombre ε que nous fixerons ci-après, restera toujours aussi petite que l'on voudra pour toutes les valeurs de m supérieures à m'.

Or, quant à la série (24) remarquons qu'elle peut se décomposer dans les quatre

$$(26)\quad \sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{\Delta x'}\iint\limits_C\left\{a\left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}-\frac{\partial u'_{n-1}}{\partial x'}\right)+b\left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}-\frac{\partial u'_{n-1}}{\partial y'}\right)+c(u_{n-1}-u'_{n-1})\right\}$$
$$\times\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x}-\frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy,$$

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta x'}\displaystyle\iint\limits_C (a-a')\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x}-\frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy\sum_{m+1}^{\infty}\frac{\partial u'_{n-1}}{\partial x'}, \\[2ex] \dfrac{1}{\Delta x'}\displaystyle\iint\limits_C (b-b')\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x}-\frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy\sum_{m+1}^{\infty}\frac{\partial u'_{n-1}}{\partial y'}, \\[2ex] \dfrac{1}{\Delta x'}\displaystyle\iint\limits_C (c-c')\left(\frac{\partial \log r''}{\partial x}-\frac{\partial \log r'}{\partial x}\right)dx\,dy\sum_{m+1}^{\infty}u'_{n-1}, \end{cases}$$

et puisque, d'après nos hypothèses sur les rapports $\frac{a-a'}{r'}$, $\frac{b-b'}{r'}$, $\frac{c-c'}{r'}$ pour le point M' les rapports à $\Delta x'$ des intégrales doubles qui figurent dans les dernières séries (27), quand $\Delta x'$ s'approche indéfiniment à zéro, tendent vers les dérivées secondes des fonctions

$$\iint\limits_C (a-a')\log r\,dx\,dy,\qquad \iint\limits_C (b-b')\log r\,dx\,dy,\qquad \iint\limits_C (c-c')\log r\,dx\,dy,$$

qui d'après les dites hypothèses sont déterminées et finies, c'est évident que si le nombre m' aura été pris suffisamment grand, les trois séries (27) seront elles aussi aussi petites que l'on voudra pour $m > m'$, quand $\Delta x'$ sera numériquement inférieure à ε.

Il reste maintenant à étudier la série (26), et pour celle-ci nous procèderons comme il suit.

Prenons un petit champ circulaire ω avec le centre dans le point $M'(x', y')$ et dont le rayon sera choisi de manière que ω soit tout entier intérieur à C, et sera pris pour le nombre ε; et décomposons C dans les deux champs ω et $C - \omega$.

La série (26) pourra se décomposer dans les deux

$$(28)\qquad \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{\Delta x'} \iint\limits_{C-\omega} \left\{ a\left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} - \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial x'}\right) + b\left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} - \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial y'}\right) + c(u_{n-1} - u'_{n-1}) \right\} \times \left(\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right) dx dy,$$

$$(29)\qquad \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{\Delta x'} \iint\limits_{\omega} \left\{ a\left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} - \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial x'}\right) + b\left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} - \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial y'}\right) + c(u_{n-1} - u'_{n-1}) \right\} \times \left(\frac{\partial \log r''}{dx} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}\right) dx dy,$$

et puisque, si l'on suppose que $\Delta x'$ soit déjà numériquement inférieure à ε, dans les intégrales qui figurent dans la première de ces séries les points M' et M'' n'appartiennent pas au champ d'intégration $C - \omega$, avec les mêmes procédés que nous appliquâmes en commençant pour étudier la partie de la différence $\frac{\partial W''}{\partial x''} - \frac{\partial W'}{\partial x'}$ correspondante au champ que alors nous avions indiqué par $C - \tau' - \tau''$, on trouve tout de suite que la dite série (28) sera toujours numériquement inférieure à

$$36\pi(\log 2L_1 - \log \varepsilon) \sum_{m+1}^{\infty} (\bar{a}\alpha_{n+1} + \bar{b}\beta_{n-1} + \bar{c}\gamma_n).$$

L_1 étant la limite supérieure des distances de M' aux points du contour; et par conséquent, même si ε aura été pris très petit, en grandissant, si cela sera nécessaire, le nombre m' déjà choisi ci-dessus, la dite série (28) sera toujours aussi petite que l'on voudra pour toutes les valeurs de m supérieures à m'.

Pour considérer maintenant la serie (29), remarquons d'abord que u_{n-1} est donné par la formule

$$(30) \qquad u_{n-1} = \frac{1}{2\pi} \iint_C \left(a \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-2}}{\partial y} + c u_{n-2}\right) \log r \, d\xi \, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \iint_C \left(a \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-2}}{\partial y} + c u_{n-2}\right) g(\xi, \eta, x, y) \, d\xi \, d\eta,$$

où a, b, c, u_{n-2} sous les intégrales sont fonctions de ξ, η, et r est la distance entre les points (x, y) et (ξ, η); et déduisons d'ici les valeurs des différences

$$(31) \qquad \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} - \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial x'}, \quad \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} - \frac{\partial u'_{n-1}}{\partial y'}, \quad u_{n-1} - u'_{n-1}$$

pour les points (x, y), (x', y') du champ ω que l'on doit considérer à présent pour l'étude de la série (29).

Ces différences (31) auront chacune deux termes comme dans l'expression (30) de u_{n-1}, et en appliquant aux premiers de ces termes les considérations générales que nous avons faites en commençant pour l'étude des différences $W'' - W'$, $\frac{\partial W''}{\partial x''} - \frac{\partial W'}{\partial x'}$, on verra tout de suite que les parties des différences (31) qui proviennent de leurs premiers termes ne surpasseront pas en valeur absolue pour les deux premières différences la quantité

$$(\bar{a}\alpha_{n-2} + \bar{b}\beta_{n-2} + \bar{c}\gamma_{n-2}) K_1 r' \log r',$$

et pour la troisième la quantité

$$(\bar{a}\alpha_{n-2} + \bar{b}\beta_{n-1} + \bar{c}\gamma_{n-2}) K_2 r',$$

K_1 et K_2 étant des nombres finis qu'on peut supposer ne dépendants que du champ C.

De même on trouve que les parties des différences (31) qui proviennent de leurs deuxièmes termes ne surpasseront jamais une quantité de la forme $(\bar{a}\alpha_{n-2} + \bar{b}\beta_{n-2} + \bar{c}\gamma_{n-2}) K_3 r'$, où K_3 est encore un nombre fini; car si l'on observe que maintenant le point (x, y), ainsi que l'autre (x', y'), est toujours compris dans le champ ω qui est tout intérieur à C, on voit que dans ce cas la fonction $g(\xi, \eta, x, y)$ est finie et continue avec ses dérivées par rapport à x et y *pour tous les points* (ξ, η) de C,[1] et par conséquent les différences

$$g(\xi, \eta, x, y) - g(\xi, \eta, x', y'),$$

$$\frac{\partial g(\xi, \eta, x, y)}{\partial x} - \frac{\partial g(\xi, \eta, x', y')}{\partial x'},$$

$$\frac{\partial g(\xi, \eta, x, y)}{\partial y} - \frac{\partial g(\xi, \eta, x', y')}{\partial y'},$$

avec le développement par la série de TAYLOR peuvent se mettre toutes sous la forme

$$A(x - x') + B(y - y') \quad \text{ou} \quad K_n r',$$

où A, B, K_n pourront être assez grandes, mais ne surpasseront jamais un nombre fini $\frac{K_s}{C}$ qui dépend seulement de C et de ε.

Donc évidemment la série (29) sera toujours numériquement inférieure à

$$\frac{1}{\Delta x'} \iint_C \{(\bar{a} + \bar{b}) K_1 r' \log r' + (\bar{c} K_2 + K_2) r'\} \left| \frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x'} \right| dx\, dy$$

$$\times \sum_{m+1}^{\infty} (\bar{a}\alpha_{n-2} + \bar{b}\beta_{n-2} + \bar{c}\gamma_{n-2})$$

où nous avons indiqué avec $\left| \frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x} \right|$ la valeur absolue de la différence $\frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x}$; donc, puisque avec les mêmes procédés généraux que nous avons appliqués en commençant à la fonction indiquée alors par W, avec la décomposition du champ C dans les trois champs τ', τ'', $C - \tau' - \tau''$, on voit tout de suite que pour tous les valeurs de $\Delta x'$ numériquement inférieures à ε les rapports

$$\frac{1}{\Delta x'} \iint r' \log r' \left| \frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x} \right| dx\, dy, \qquad \frac{1}{\Delta x'} \iint r' \left| \frac{\partial \log r''}{\partial x} - \frac{\partial \log r'}{\partial x} \right| dx\, dy$$

restent finis, on en conclut que même la série (29), pour ces valeurs de $\Delta x'$ et quand $m > m'$, sera toujours aussi petite que l'on voudra; et avec

[1] C'est justement pour pouvoir considérer la fonction $g(\xi, \eta, x, y)$ seulement pour les points (x, y) pour lesquels elle a les propriétés indiquées que nous avons décomposée la série (26) dans les deux (28) et (29).

cela d'après le théorème que j'ai rappelé du § 102 des mes *Fondamenti* etc., reste démontré que pour le point (x', y') la dérivation par série est applicable à la série (22), et par conséquence on a, pour la (21) et en ayant regard à la première des formules (20)

$$
\begin{aligned}
(32) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{1}{2\pi}\left(a'\frac{\partial u'}{\partial x'} + b'\frac{\partial u'}{\partial y'} + c'u' + h'\right)\int_s \frac{\partial \log r}{\partial x}\cos\alpha\, ds \\
+ \frac{1}{2\pi}\iint_C (h - h')\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}\,dx\,dy + \frac{1}{2\pi}\iint_C h\frac{\partial^2 g}{\partial x'^2}\,dx\,dy \\
+ \frac{1}{2\pi}\sum_1^\infty\Bigg[\iint_C \Bigg\{a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + cu_{n-1} \\
- a'\frac{\partial u'_{n-1}}{\partial x'} - b'\frac{\partial u'_{n-1}}{\partial y'} - c'u'_{n-1}\Bigg\}\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}\,dx\,dy \\
+ \iint_C \left(a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + cu_{n-1}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial x'^2}\,dx\,dy\Bigg];
\end{aligned}
$$

et maintenant en remarquant que le même résultat peut s'obtenir pour $\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}$, on trouvera tout de suite

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= -\frac{1}{2\pi}\left(a'\frac{\partial u'}{\partial x'} + b'\frac{\partial u'}{\partial y'} + c'u' + h'\right)\int_s \left(\frac{\partial \log r}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \log r}{\partial y}\cos\beta\right)ds \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left(a'\frac{\partial u'}{\partial x'} + b'\frac{\partial u'}{\partial y'} + c'u' + h'\right)\int_s \frac{\partial \log r}{dp}\,ds = a'\frac{\partial u'}{\partial x'} + b'\frac{\partial u'}{\partial y'} + c'u' + h',
\end{aligned}
$$

comme il fallait démontrer.

Avec cela la belle méthode de M. Picard des approximations successives est réduite parfaitement rigoureuse pour toutes les équations (1), avec les seules limitations que nous avons posées pour le champ C et pour les valeurs données pour l'intégrale sur le bord; et cela d'une manière bien générale, puisque on n'admet même pas que les coefficients a, b, c, h, qui doivent pourtant être finis et intégrables en C, aient aussi les dérivées premières déterminées et finies, mais seulement on exige qu'ils satisfassent en C aux conditions que nous avons dit conditions normales, si, comme il est naturel, on veut être sûr que la fonction (4) que l'on trouve pour

u satisfait à l'équation donnée (1) en tous les points intérieurs à C, exceptés seulement, tout au plus, les points isolés et les lignes singulières (en nombre fini) qui, même avec les conditions normales, on admet qu'ils puissent exister, où les coefficients a, b, c, h n'aient pas les propriétés ordinaires relatives à la continuité, et à l'intégrabilité d'une manière uniforme des rapports $\frac{a - a'}{r'}, \frac{b - b'}{r'}, \frac{c - c'}{r'}, \frac{h - h'}{r'}$ sur chaque rayon sortant du point (x', y') même en les réduisant à leurs valeurs absolues.

Cela d'ailleurs sera le cas ordinaire; mais du reste si quelquefois ces conditions normales pour les coefficients a, b, c, h ne seront pas satisfaites, on pourra toutefois considérer encore le cas dans lequel le champ C est un cercle, ou même plus généralement est un de ces champs pour lesquels on pourra encore de quelque manière s'assurer que, pour toute fonction $F(x, y)$ finie et intégrable au C, l'intégrale double (18) ou

$$\frac{1}{2\pi}\iint_C F(x, y) g(x, y, x', y') dx dy$$

et ses dérivées premières, même quand le point (x', y') s'approche indéfiniment au contour, ou est sur ce contour même, restent inférieures aux nombres $M\overline{F}$, et $N\overline{F}$, $\overline{F}$ étant la limite supérieure des valeurs absolues de $F(x, y)$ en C, et M et N étant des nombres finis qui dépendent seulement du champ C et qui peuvent même être réduits aussi petits que l'on voudra en prenant le champ C suffisamment petit. Seulement dans ces cas, tandis qu'il sera encore certain que la fonction u déterminée par la série (4) sera finie et continue avec ses dérivées premières en tout C, et prendra sur le bord les valeurs données, on ne sera pas sûr de même qu'elle satisfait en C à l'équation donnée (1), sauf pour les points (x', y') intérieurs à C pour lesquels a, b, c, h sont continues et les rapports $\frac{a - a'}{r'}, \frac{b - b'}{r'}, \frac{c - c'}{r'}$ et $\frac{h - h'}{r'}$ sont intégrables d'une manière uniforme sur chaque rayon sortant du point (x', y') même en les réduisant à leurs valeurs absolues; de sorte que dans ces cas il pourra y avoir des portions superficielles de C, ou même seulement des points ou des lignes isolées, où on sera encore tout à fait sûr que la fonction trouvée (4) satisfait à l'équation donnée (1) et aux autres conditions voulues, en même temps qu'il pourra y avoir aussi des points ou des lignes, ou même d'autres portions superficielles de C où on ne sera pas sûr que cette équation (1) soit satisfaite.

Du reste, même en restant dans le cas plus restreint des conditions normales pour a, b, c, h, la circonstance que dans ce cas aussi nous avons admis qu'il puisse y avoir des lignes singulières est bien remarquable, car on pourra, par exemple, supposer que dans une certaine portion A de C doive être satisfaite une certaine équation (1) et dans la portion restante B de C doive être satisfaite une autre équation dans la quelle a, b, c, h ne soient pas toutes les mêmes fonctions que l'on avait en A; et alors la série (4) des approximations successives donnera encore la fonction u qui est finie et continue en tout C, même sur le contour, elle et ses dérivées premières, et prend sur le bord les valeurs données, et en A satisfait à la première équation (1) et en B satisfait à l'autre; l'incertitude pour l'équation (1) à satisfaire restant seulement, outre que sur le bord, le long de la ligne de séparation de A et B.

Enfin il est à peine nécessaire de remarquer que toutes nos objections et nos recherches sur la méthode des approximations successives de M. Picard se rapportent principalement au cas dans lequel l'équation donnée (1) a au moins un des deux termes $a\frac{\partial u}{\partial x}$, $b\frac{\partial u}{\partial y}$ qui portent les dérivées premières; tandis que quand ces deux termes manquent tout devient bien plus simple, car alors il suffit que le champ C soit de ceux pour lesquels il existe la fonction de Green, que les valeurs données au contour pour l'intégrale soient finies et continues, et enfin que les coefficients c et h satisfassent aux conditions normales.

Dans ce cas en effet, puisque dans les fonctions que nous avons indiquées en commençant avec F_0, F_1, F_2, ... ne figurent pas les dérivées premières de u_0, u_1, u_2, ..., il n'y a pas lieu à considérer les dérivées de l'intégrale double (18), tandis que cette intégrale à cause de (16) résulte inférieure au nombre MF; et alors cette seule condition, quand le champ C est suffisamment restreint, donne tout de suite la formule

$$u = u_0 + \frac{1}{2\pi}\iint_C (cu + h) G dx dy,$$

de laquelle, à cause de nos considérations sur les fonctions indiquées par W et par Λ, on en tire d'abord que pour tous les points (x', y') de C, même sur le bord, la fonction u est finie et continue et prend sur le bord les valeurs données, et la même chose arrive pour ses dérivées premières dans tous les points (x', y') *intérieurs* à C; et ensuite, à cause de cette particularité pour les dérivées premières de u et de ce que nous trouvâmes pour l'intégrale A, on en tire que u satisfait à l'équation donnée (1) en tout C, sauf tout au plus sur le bord, et dans les points ou sur les lignes des singularités des fonctions c et h.

Et avec ce procédé on voit aussi que l'équation donnée actuelle $\Delta u = cu + h$ pourra avoir des formes différentes en différentes portions de C, car les fonctions c et h peuvent encore avoir des lignes de discontinuité etc.

Maintenant, avant de finir, c'est le cas aussi de montrer que la limitation que nous avons posée pour les champs C dans le cas que l'équation donnée (1) ait au moins un des deux termes $a\frac{\partial u}{\partial x}$, $b\frac{\partial u}{\partial y}$, c'est-à-dire la condition d'être de ceux que nous avons nommés champs normaux, se trouve satisfaite, comme nous avons affirmé à sa place, pour le cercle, et par conséquent aussi pour tous les autres champs que l'on peut déduire du cercle avec les procédés ordinaires de représentation, quand les formules correspondantes à ces représentations ne portent pas elles-mêmes des singularités.

Rappelons pour cela que dans le cas du cercle C de rayon R, si l'on introduit les coordonnées polaires (ρ, θ) avec le pôle dans le centre, la fonction harmonique qui prend sur le bord des valeurs données $u(\theta)$ est déterminée dans les points intérieurs (ρ', θ') par la formule de Poisson

$$(33) \qquad u(\rho', \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta)\frac{R^2-\rho'^2}{R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos(\theta-\theta')}d\theta,$$

et ces valeurs dans les points intérieurs tendent avec continuité vers les valeurs données $u(\theta)$ en s'approchant indéfiniment au contour, si ces valeurs données $u(\theta$ sont finies et continues, et l'on a $u(0) = u(2\pi)$.

Supposons maintenant que ces valeurs données $u(\theta)$ aient aussi la dérivée première $u'(\theta)$ finie et continue pour tous les points du contour, ou du moins intégrable même en la reduisant à ses valeurs absolues, et avec cette hypothèse cherchons les dérivées premières $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$ et $\frac{\partial u}{\partial \theta'}$ de $u(\rho', \theta')$ en tous les points de C, même en s'approchant indéfiniment au contour.

Puisque l'on a en général, si $a < b$,

$$\int \frac{d\alpha}{a + b\cos\alpha} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\right) + \text{ const.},$$

et par conséquent

$$\int \frac{d\theta}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho'\cos(\theta - \theta')} = \frac{2}{R^2 - \rho'^2} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{R + \rho'}{R - \rho'}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta - \theta')\right] + \text{ const.},$$

si l'on écrit la (33) sous la forme

$$u(\rho', \theta') = \int\limits_{\theta'-\pi}^{\theta'+\pi} u(\theta) \frac{R^2 - \rho'^2}{R^2 + \rho'^2 - 2R\rho'\cos(\theta - \theta')} d\theta,$$

en y appliquant l'intégration par parties, on trouvera tout de suite la formule suivante

$$(34) \qquad u(\rho', \theta') = u(\theta' - \pi) - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\theta'-\pi}^{\theta'+\pi} u'(\theta) \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{R + \rho'}{R - \rho'}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta - \theta')\right] d\theta$$

qui donne une autre expression de la fonction $u(\rho', \theta')$; et maintenant, de même qu'à l'aide de (33) on pourra aisément déterminer une expression de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \theta'}$ qui met bien en évidence ce qu'il advient de cette dérivée en s'approchant indéfiniment au contour, ainsi en s'aidant de la formule (34) on pourra déterminer une expression semblable pour l'autre dérivée $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$.

En effet la formule (33) nous donne

$$\frac{\partial u}{\partial \theta'} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta'}\left[\frac{R^2 - \rho'^2}{R^2 + \rho'^2 - 2R\rho'\cos(\theta - \theta')}\right] d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{R^2 - \rho'^2}{R^2 + \rho'^2 - 2R\rho'\cos(\theta - \theta')}\right] d\theta$$

et en appliquant l'intégration par parties on trouve immédiatement la formule

$$(35) \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta'} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u'(\theta) \frac{R^2 - \rho'^2}{R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta - \theta')} d\theta,$$

qui donne la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \theta'}$ que nous cherchions, et par laquelle on voit (chose du reste bien naturelle puisque $\frac{\partial u}{\partial \theta'}$ satisfait à l'équation $\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial \theta'}\right) = 0$) que cette dérivée a les valeurs qui prend la fonction harmonique dont les valeurs sur le bord sont $u'(\theta)$; et pourtant cette dérivée $\frac{\partial u}{\partial \theta'}$ ira avec continuité vers la dérivée de la fonction au contour pour tous les points θ' pour lesquels cette dérivée $u'(\theta)$ est finie et continue; et elle sera toujours finie et comprise entre les limites inférieurs et supérieurs de cette dérivée $u'(\theta)$ si celle-ci sera toujours finie et intégrable.

Ensuite, en faisant la dérivation par rapport a ρ' sous l'intégrale, la formule (34) nous donne

$$(36) \qquad \frac{\partial u}{\partial \rho'} = -\frac{2R}{\pi} \int_{\theta'-\pi}^{\theta'+\pi} u'(\theta) \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\theta - \theta')}{(R - \rho')^2 + (R + \rho')^2 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(\theta - \theta')} d\theta,$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial \rho'} = -\frac{R}{\pi} \int_{\theta'-\pi}^{\theta'+\pi} u'(\theta) \frac{\sin(\theta - \theta')}{(R - \rho')^2 \cos^2 \frac{1}{2}(\theta - \theta') + (R + \rho')^2 \sin^2 \frac{1}{2}(\theta - \theta')} d\theta$$

et l'on pourra écrire aussi

$$\frac{\partial u}{\partial \rho'} = -\frac{R}{\pi} \int_{\theta'-\pi}^{\theta'+\pi} u'(\theta) \frac{\sin(\theta - \theta')}{R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta - \theta')} d\theta$$

ou enfin

$$(37) \qquad \frac{\partial u}{\partial \rho'} = -\frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} u'(\theta) \frac{\sin(\theta - \theta')}{R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta - \theta')} d\theta$$

et ces formules donneront des différentes expressions de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$ en tous les points (ρ', θ') *intérieurs* au cercle.

Maintenant pour voir ce qu'il arrive quand on s'approche indéfiniment au contour, remarquons qu'avec une décomposition convenable en parties de l'intégrale du second membre de la formule (37), et avec un changement de variable, on trouve aussi

$$(38)\qquad \frac{\partial u}{\partial \rho'} = -\frac{R}{\pi}\int_0^\pi \{u'(\theta'+\alpha) - u'(\theta'-\alpha)\}\frac{\sin\alpha}{R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos\alpha}\,d\alpha,$$

et par conséquent si l'on suppose maintenant que pour chaque valeur de θ la dérivée $u'(\theta)$ soit toujours finie et intégrable, et que pour la valeur θ' que l'on considère le rapport $\frac{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)}{\alpha}$ soit intégrable pour $\alpha = 0$ même en le réduisant à ses valeurs absolues, alors en remarquant que

$$R^2+\rho'^2 > 2R\rho' \quad \text{et} \quad R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos\alpha \geqq (R-\rho')^2,$$

et en s'aidant de l'une ou de l'autre de ces deux conditions selon que l'on a par ex.: $\frac{1}{2}R \leqq \rho' < R$ ou $\rho' < \frac{1}{2}R$, on trouve qu'en chaque point sur le rayon correspondant à la valeur θ' on aura

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \rho'}\right| < k\int_0^\pi \left|\frac{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)}{\alpha}\right| d\alpha,$$

k étant un nombre fini, qui l'on voit tout aisément que ne surpassera jamais le nombre $\frac{4}{\pi R}$.

Mais on peut voir aussi que, sous la dite hypothèse sur le rapport $\frac{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)}{\alpha}$ pour la valeur θ' que l'on considère, la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$ existe effectivement même sur le bord, et elle est donnée par l'intégrale limite

$$(39)\qquad -\frac{1}{2\pi R}\int_0^\pi \{u'(\theta'+\alpha) - u'(\theta'-\alpha)\}\cot\frac{\alpha}{2}\,d\alpha$$

de celle qui figure dans la valeur (38) de $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$ pour les points intérieurs et qui aura évidemment toujours une signification pour les dits points θ'.

Pour démontrer cela remarquons que cette intégrale (39) peut aussi être regardée comme la limite pour $\rho' = R$ de l'autre

$$-\frac{R}{\pi}\int_0^\pi \{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)\}\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2R\rho'\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha,$$

et par conséquent si l'on trouvera que la différence

$$\Omega = -\frac{R}{\pi}\int_0^\pi \{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)\}\left\{\frac{\sin\alpha}{R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos\alpha}-\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2R\rho'\sin\frac{\alpha}{2}}\right\}d\alpha$$

entre cette intégrale et celle de la formule (38) peut devenir et rester aussi petite que l'on voudra quand ρ' s'approche indéfiniment à R, alors il sera certain que la valeur (38) aura une limite en allant au contour sur le rayon qui correspond à l'angle polaire θ', et cette limite sera justement l'intégrale (39), qui viendra pourtant à être la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$ sur le bord pour la valeur θ'.

Or, l'on a évidemment

$$\Omega = \frac{1}{2R\rho'}\int_0^\pi \frac{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,\frac{(R-\rho')^2}{R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos\alpha}\cos\frac{\alpha}{2}\,d\alpha,$$

et ici le rapport $\frac{(R-\rho')^2}{R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos\alpha} = \frac{(R-\rho')^2}{(R-\rho')^2+2R\rho'(1-\cos\alpha)}$ ne surpasse jamais l'unité; donc en indiquant avec ε un nombre aussi petit que l'on voudra, et en remarquant que l'intégrale $\int_0^\pi$ peut se décomposer dans les deux $\int_0^\varepsilon$, $\int_\varepsilon^\pi$, on en tire que la valeur absolue de Ω sera toujours inférieure à la somme des deux termes

$$\frac{\lambda}{\pi\rho'}\int_0^{\varepsilon}\left|\frac{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)}{\alpha}\right|d\alpha,$$

$$\frac{(R-\rho')^2}{4\pi R\rho'^2}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{|u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)|}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{R^2+\rho'^2}{2R\rho'}-\cos\alpha}\,d\alpha,$$

λ étant une valeur moyenne de $\dfrac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ pour α comprise entre o et ε et pourtant très voisine de l'unité.

Or, si l'on prend pour ε un nombre assez petit, le premier de ces deux termes, d'après notre hypothèse, sera aussi petit que l'on voudra.

Ensuite, après avoir ainsi fixé ε, si l'on indique par m la limite supérieure des valeurs absolues de $u'(\theta)$ sur le bord, et l'on remarque que $\frac{R^2+\rho'^2}{2R\rho'}>1$, on voit tout de suite que le second terme ne surpasse pas

$\dfrac{(R-\rho')^2 m}{2\pi R\rho'^2\sin\frac{\varepsilon}{2}}\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{d\alpha}{1-\cos\alpha}$, ou $\dfrac{(R-\rho')^2 m\cos\frac{\varepsilon}{2}}{2\pi R\rho'^2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}$; et quelque petit qu'on ait pris ε on pourra déterminer toujours un nombre ρ_1 inférieur à R mais aussi près de R que pour toutes les valeurs de ρ' entre ρ_1 et R cette dernière quantité soit aussi petite que l'on voudra; donc évidemment il reste maintenant démontré que pour les valeurs de θ' qui à present nous considérons la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$ existe même sur le bord, et alors sa valeur est donnée par l'intégrale (39); ou, en d'autres termes la formule (38) pour les dits valeurs de θ' subsiste même au contour.

En résumé donc, nous pouvons maintenant affirmer que si l'on se propose de déterminer dans un cercle C de rayon R une fonction harmonique u qui sur le bord prenne des valeurs données qui constituent une fonction finie et continue $u(\theta)$ pour laquelle on ait $u(2\pi)=u(0)$, et dont la dérivée prémière $u'(\theta)$ existe et soit finie et continue ou du moins finie et intégrable entre o et 2π, alors cette fonction u non seulement existera toujours en tout C, et pour chaque point (ρ', θ') intérieur à C sera donnée par les formules

$$u(\rho', \theta') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta)\frac{R^2-\rho'^2}{R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos(\theta-\theta')}d\theta,$$

ou

$$u(\rho', \theta') = u(\theta'-\pi) - \frac{1}{\pi}\int_{\theta'-\pi}^{\theta'+\pi} u'(\theta)\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{R+\rho'}{R-\rho'}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta-\theta')\right]d\theta,$$

et elle aura les dérivées premières $\frac{\partial u}{\partial \theta'}$ et $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$ déterminées et finies dans les mêmes points (ρ', θ') intérieurs à C, mais il adviendra aussi que en s'approchant indéfiniment aux points θ' du contour, la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \theta'}$ ira avec continuité vers la valeur $u'(\theta')$ de la dérivée de $u(\theta)$ dans tous les points θ' de continuité de cette dérivée, et en ces points sera elle aussi égale a cette dérivée $u'(\theta')$; tandis que pour l'autre dérivée $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$ sur le bord on pourra assurer qu'elle est déterminée et finie seulement pour les points θ' pour lesquels le rapport $\frac{u'(\theta+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)}{\alpha}$ sera intégrable pour $\alpha = 0$ même en le réduisant à ses valeurs absolues.

Et la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \theta'}$ sera donnée par la formule

$$(40) \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta'} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u'(\theta)\frac{R^2-\rho'^2}{R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos(\theta-\theta')}d\theta$$

pour tous les points (ρ', θ') intérieurs au cercle, et l'autre dérivée $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$ sera donnée par la formule

$$(41) \qquad \frac{\partial u}{\partial \rho'} = -\frac{R}{\pi}\int_0^{\pi}\{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)\}\frac{\sin\alpha}{R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos\alpha}d\alpha$$

pour tous les points (ρ', θ') intérieurs au cercle, et même pour les dits points (R, θ') du contour pour lesquels le rapport $\frac{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)}{\alpha}$ sera intégrable même réduit à ses valeurs absolues.

Et les valeurs absolues de $\frac{\partial u}{\partial \theta'}$ ne surpasseront jamais la limite supérieure des valeurs absolues de $u'(\theta)$ sur le bord, et celles de $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$ sur chaque rayon correspondant aux dits points θ' ne surpasseront jamais la valeur de l'intégrale $\frac{4}{\pi R}\int_0^\pi \left|\frac{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)}{\alpha}\right| d\alpha$, ou $4\int_0^{\frac{1}{2}l} \left|\frac{u'(s'+s)-u'(s'-s)}{s}\right| ds$.

Et pourtant si $u'(\theta)$ sera finie et continue pour toutes les valeurs de θ de o à 2π, la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \theta'}$ sera finie et continue en tout le cercle, et même sur le bord où elle aura les valeurs $u'(\theta)$, et ses valeurs seront toujours comprises entre les valeurs minima et maxima de $u'(\theta)$; et si le rapport $\frac{u'(\theta+\alpha)-u'(\theta-\alpha)}{\alpha}$ sera intégrable pour $\alpha = 0$ même en le réduisant à ses valeurs absolues *pour toutes les valeurs de* θ' *de* o à π, alors aussi la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$ existera pour tous les points du cercle et même sur le bord et ses valeurs seront toujours déterminées par la formule (41) et ne surpasseront jamais la limite supérieure des valeurs de l'intégrale

$$\frac{4}{\pi R}\int_0^\pi \left|\frac{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)}{\alpha}\right| d\alpha \quad \text{ou} \quad \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}l} \left|\frac{u'(s'+s)-u'(s'-s)}{s}\right| ds$$

pour toutes les valeurs de θ' de o à π, ou de s' de o à $\frac{1}{2}l = \pi R$.

En particulier donc, puisque le rapport $\frac{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta'-\alpha)}{\alpha}$ peut s'écrire aussi $\frac{u'(\theta'+\alpha)-u'(\theta')}{\alpha}+\frac{u'(\theta'-\alpha)-u'(\theta')}{-\alpha}$, on peut de même affirmer que le résultat que nous avons énoncé dernièrement subsistera toujours quand les valeurs données au contour $u(\theta)$ ont aussi les dérivées secondes déterminées et finies, ou du moins quand, les dérivées premières étant encore déterminées et finies, leurs rapports incrémentaux seront toujours intégrables même en les réduisant à leurs valeurs absolues; et dans ce cas les valeurs absolues de $\frac{\partial u}{\partial \rho'}$ ne surpasseront jamais la limite supérieure des valeurs de l'intégrale entre o et 2π de ces rapports incrémentaux réduits positifs multipliée par le nombre $\frac{4}{\pi R}$, ou celle du produit de $\frac{4}{\pi}$ par l'intégrale entre θ et l des rapports incrémentaux $\frac{u'(s' \pm s) - u'(s)}{\pm s}$ réduits positifs.

En rappelant donc les recherches précédents sur la méthode de M. Picard, on peut dire maintenant que le cas du cercle correspond évidemment, ainsi que nous avions déjà affirmé, à un cas de champ normal; et pourtant il ne reste pas aucun doute que pour le cercle, et ainsi pour tous les champs qui peuvent se représenter sur le cercle par le moyen d'une représentation conforme avec des formules qui ne portent pas des singularités, la méthode des approximations successives de M. Picard soit parfaitement rigoureuse quand le cercle ou le champ correspondant est suffisamment petit, et les valeurs données sur le bord ont aussi les dérivées secondes finies, ou du moins les rapports incrémentaux des dérivées premières sont intégrables même en les réduisant à leurs valeurs absolues; et cela, bien entendu, pour les points pour lesquels les coefficients a, b, c, h de l'équation donnée (1) satisfont aux conditions normales dont nous avons parlé en ce qui précède.

Enfin je remarquerai que les résultats obtenus pour l'équation linéaire (1) subsistent aussi pour les équations plus générales

$$\Delta u = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

sous certaines conditions, comme M. Picard aussi l'a relevé.

Il suffit pour cela de supposer que pour le champ C on ait les mêmes conditions que l'on avait précédemment, et que la fonction F soit toujours finie quand x et y se meuvent en C, et u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, et $\frac{\partial u}{\partial y}$ restent elles aussi entre des limites déterminées; et que si l'on indique $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ par v et w la différence

$$F(x, y, u, v, w) - F(x', y', u', v', w')$$

puisse se mettre sous la forme

$$A(u - u') + B(v - v') + C(w - w') + P,$$

P étant elle aussi de la forme $A_1(x-x')+B_1(y-y')$, ou plus généralement étant telle que le rapport $\frac{P}{r'}$ soit intégrable même en le réduisant à ses valeurs absolues dans le voisinage du point (x', y') et avec les valeurs u', v', w' de u, v, w; et A, B, C ne surpassant jamais certains nombres finis qui dépendent seulement du champ que l'on considère et de l'équation donnée.

Avec ces conditions, *mutatis mutandis*, les procédés de M. Picard avec les compléments que j'ai donnés ici, peuvent se répéter parfaitement, de sorte que l'on parvient aussi aux mêmes résultats que dans le cas de l'équation linéaire (1).

Pise (Italie), le 8 décembre 1899.