SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE ET D'ORDRE SUPÉRIEUR DONT L'INTÉGRALE GÉNÉRALE EST UNIFORME

PAR

P. PAINLEVÉ
à PARIS.

1ER MÉMOIRE.

1. La détermination des transcendantes uniformes définies par les équations différentielles algébriques est un problème qui se trouve posé en fait depuis les travaux d'ABEL et de JACOBI sur l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2y^2).$$

C'est l'étude de cette équation qui a engendré la théorie des fonctions elliptiques et (par extension) celle des fonctions uniformes. Cette dernière théorie une fois fondée, il s'agissait moins de construire artificiellement des transcendantes nouvelles que de découvrir, dans l'immense famille des transcendantes uniformes, celles qui peuvent servir à intégrer les équations différentielles. La fonction *exponentielle*, les fonctions *elliptiques* étaient les premiers types de telles fonctions; on ne tarda pas à en découvrir d'autres, à savoir les fonctions *abéliennes*, puis les intégrales uniformes des équations différentielles *linéaires;* enfin les fonctions *fuchsiennes* ou *automorphes, hyperfuchsiennes,* etc.

Mais l'étude de ces nouvelles transcendantes, si importante qu'elle fût, ne permettait en aucune manière d'épuiser le problème qui se posait dès lors naturellement:

Déterminer toutes les équations différentielles algébriques du premier ordre, puis du second ordre, puis du troisième ordre, etc., dont l'intégrale est uniforme.

2. Quand on approfondit ce problème, on se trouve conduit nécessairement à le décomposer en deux problèmes successifs.

Etant donnée une équation différentielle quelconque, les points critiques d'une intégrale $y(x)$ sont, les uns *fixes* (indépendants des constantes d'intégration), les autres *mobiles* (variables avec ces constantes); pour exprimer que l'intégrale est uniforme, il convient d'exprimer d'abord qu'elle n'a pas de points critiques *mobiles,* ensuite qu'elle n'a pas de points critiques *fixes;* et ces deux parties du problème exigent des méthodes toutes différentes.

On est amené ainsi à élargir la classe d'équations considérées et à étudier *les équations dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes.*[1]

Ces équations présentent d'ailleurs, en elles-mêmes, un intérêt considérable; elles constituent en effet le prolongement naturel des équations *linéaires.* Toutes les propriétés des équations linéaires qu'entraîne la fixité des points critiques, s'étendent aux nouvelles équations, en particulier la méthode d'intégration par les fonctions fuchsiennes. On conçoit donc, sans qu'il faille insister davantage, l'importance du problème qui consiste à déterminer, parmi les équations différentielles algébriques, *les équations à points critiques fixes.*

Historique de la question.

3. Dès 1855, M. Méray, Briot et Bouquet,[2] Weierstrass,[3] se sont attaqués au problème dans un cas particulier, en étudiant les équa-

---

[1] Nous réservons exclusivement le nom de points *critiques* d'une fonction $y(x)$ aux points singuliers (isolés ou non) autour desquels deux branches au moins de $y(x)$ se permutent. L'intégrale générale d'une équation à points critiques fixes peut présenter des singularités essentielles mobiles.

[2] Comptes-Rendus de l'Académie des sciences de Paris (1855—1856); Journal de l'Ecole Polytechnique, tome 21, cahier 36 (1856). — Voir aussi la *Théorie des fonctions elliptiques* (2ème édition), livre 5, chapitre 4.

[3] Les résultats de Weierstrass, qui servent de base à sa théorie des fonctions elliptiques, semblent remonter à la même époque. Ils ont été enseignés mais non publiés.

tions du *premier* ordre, *indépendantes de* x, soit $F\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = 0$, dont l'intégrale est uniforme. Les transcendantes ainsi définies se confondent d'ailleurs avec les fonctions elliptiques et leurs dégénérescences.

Trente ans plus tard, M. FUCHS,[1] généralisant les recherches de BRIOT et BOUQUET, a déterminé les équations différentielles (algébriques) du *premier* ordre dont les points critiques sont fixes; mais par une brillante méthode d'intégration, M. POINCARÉ[2] montrait presque aussitôt que ces équations sont toujours réductibles aux quadratures ou aux équations linéaires du second ordre.[3] Les équations à points critiques fixes d'ordre supérieur au premier peuvent donc seules définir des transcendantes nouvelles.

C'est M. PICARD qui, le premier, a abordé la théorie des équations du *second* ordre à intégrale générale uniforme ou à points critiques fixes. Entre les années 1880 et 1895, il a consacré à cette théorie plusieurs mémoires[4] du plus haut intérêt. Mais les efforts de l'illustre géomètre,

---

[1] Berlin. Sitzungsberichte, 1884, p. 699—720.

[2] Comptes Rendus Juillet 1884. Acta mathematica (tome 7) 1885, p. 1—32.

[3] D'une façon précise, l'équation s'intègre algébriquement, ou se ramène algébriquement soit à une équation de RICCATI, soit à l'équation:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} = u(x)dx, \quad [u \text{ fonction algébrique de } x;\ k \text{ numérique}].$$

[4] Les principaux de ces mémoires sont les suivants:

Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique et sur une classe d'équations différentielles [Comptes Rendus 1880, t. 91, et Bulletin des sciences mathématiques 1880, t. 4 (2e série)].

Sur la transformation des surfaces et sur une classe d'équations différentielles (Comptes Rendus 1886, t. 103).

Sur une classe d'équations différentielles (Comptes Rendus 1887, t. 104).

Mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables (Journal de Liouville 1889, t. 5, p. 223—249 et p. 263—319).

Sur des fonctions d'une variable dépendant de deux constantes arbitraires (Comptes Rendus 1892, t. 114).

Remarques sur les équations différentielles (Acta mathematica 1893, t. 17).

Sur une classe de transcendantes nouvelles (Comptes Rendus 1893, t. 117, et Acta mathematica 1894, t. 18).

Sur une classe d'équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme (Comptes Rendus 1893, t. 117).

aussi bien que les efforts de tous ceux qui sont venus à sa suite, se sont heurtés à une difficulté qui ne se présentait pas dans le cas du premier ordre [1]: à savoir l'existence de *singularités essentielles mobiles* des intégrales.

Je crois utile d'insister sur la gravité exceptionnelle de cette difficulté.

4. Considérons une équation du second ordre

$$y'' = \frac{P(y', y, x)}{Q(y', y, x)},$$

où P et Q sont des polynomes en y', y, x; et soit y'_0, y_0, x_0 des valeurs qui n'annulent pas à la fois P et Q. On sait étudier, dans le voisinage

---

Sur l'inversion des intégrales à multiplicateurs (American Journal 1894, t. 16, et Traité d'Analyse t. 3, p. 66—80).

Sur une classe d'équations différentielles dont l'intégrale est uniforme (Comptes Rendus 1895, t. 120).

[1] Les singularités transcendantes des intégrales $y(x)$ d'une équation différentielle (algébrique) *du premier ordre*

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0$$

sont des points *fixes en nombre fini,* dont les affixes se calculent algébriquement sur l'équation même; j'ai démontré ce théorème pour la première fois dans ma thèse *(Sur les lignes singulières des fonctions analytiques,* Paris, Juin 1887, p. 38). J'en ai déduit cette conséquence que, si l'équation $F = 0$ a ses points critiques fixes, *l'intégrale $y(x$ renferme algébriquement la constante y_0* (valeur de y pour la valeur numérique x_0 de x). Ces deux propositions (qui sont l'une et l'autre en défaut pour les équations du second ordre) mettent à l'abri de toute objection les travaux (cités plus haut) de M. Fuchs et de M. Poincaré. M. Fuchs se bornait à exprimer que l'équation $F = 0$ ne présente pas de points critiques *algébriques* mobiles: il n'en résultait pas que l'équation eût ses points critiques fixes; étendues au second ordre, les conditions de M. Fuchs conduisaient à des équations possédant des points critiques *transcendants* mobiles; si les conditions de M. Fuchs se trouvent être suffisantes pour le premier ordre, »la véritable raison», dit M. Picard (Acta mathematica, t. 17, p. 298) »en est dans le théorème de M. Painlevé». Les travaux de Briot et Bouquet prêtaient d'ailleurs à la même objection, mais non ceux de Weierstrass.

La méthode de M. Poincaré, au contraire, n'introduisait sûrement que des équations à points critiques fixes; mais comme elle supposait implicitement l'intégrale $y(x)$ algébrique en y_0, on pouvait se demander si elle les épuisait toutes. Étendue au second ordre, cette admirable méthode d'intégration est bien loin de donner toutes les équations à points critiques fixes, ainsi qu'on s'en rendra compte plus loin (n° 20).

Voir, au sujet de cette discussion, mes leçons de Stockholm (p. 23—60 et 443—462).

de x_0, l'intégrale $y(x)$ définie par les conditions initiales $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0$. Quand y'_0, y_0, x_0 annulent à la fois P et Q, le point x_0 est, en général, une singularité *transcendante* des intégrales $y(x)$ définies par ces conditions initiales, et c'est seulement dans des cas particuliers que les méthodes de M. POINCARÉ (en dépit de perfectionnements récents) permettent d'étudier ces intégrales; on conçoit cependant qu'il soit possible d'étendre ces méthodes à des cas de plus en plus généraux. Mais quand on poursuit l'étude d'une intégrale $y(x)$ le long d'un chemin quelconque du plan des x, il arrive qu'on rencontre des points singuliers $x = a$ d'une espèce toute différente: à savoir des points $x = a$ telsque y ou y' ne tende vers aucune limite (finie ou non) quand x tend vers a.

Prenons comme exemple l'équation:

$$y'' = y'^2 \frac{2y - 1}{1 + y^2}$$

dont l'intégrale générale est:

$$y = \operatorname{tg}[\log(Ax + B)], \quad A, B \text{ constantes arbitraires.}$$

Quand x tend vers le point $-\frac{B}{A}$ sur une direction quelconque, $y(x)$ est indéterminée. Une infinité de valeurs de y se permutent, d'ailleurs, autour de ce point, qui est à la fois point essentiel et point critique de $y(x)$.

Comme exemple plus frappant, citons encore l'équation suivante (où y figure algébriquement dans le coëfficient différentiel):

$$y'' = y'^2\left[\frac{y[2k^2y^2 - (1 + k^2)]}{(1 - y^2)(1 - k^2y^2)} + \frac{1}{\lambda\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2y^2)}}\right],$$

(λ, k^2, constantes numériques).

On voit aisément que l'intégrale $y(x)$ de cette équation ne présente pas de points singuliers algébriques autres que des pôles; d'une discussion plus approfondie, il ressort même que toute intégrale $y(x)$ qui tend vers une valeur déterminée (finie ou non) quand x tend vers a sur un certain chemin, est holomorphe ou méromorphe pour $x = a$. Ce serait cependant commettre une erreur grossière que d'en conclure que l'intégrale $y(x)$ est méromorphe dans le plan. L'intégrale de l'équation peut en effet s'écrire:

$$y = sn_{k^2}[\lambda \log(Ax + B)], \quad A, B \text{ constantes arbitraires;}$$

le point $x = -\frac{B}{A}$ est donc un point d'indétermination complète de $y(x)$; quand x tend vers $-\frac{B}{A}$ sur un chemin donné (quel qu'il soit), $y(x)$ ne tend vers aucune limite (finie ou non); de plus, une infinité de valeurs de $y(x)$ se permutent autour de ce point (à moins que $2i\pi\lambda$ ne soit une période ou une partie aliquote d'une période de sn_{k^2}).

Pour que l'intégrale de l'équation ait ses points critiques fixes (c'est-à-dire, ici, soit uniforme), il faut et il suffit que $2i\pi\lambda$ soit une période de sn_{k^2}, *condition transcendante* qu'on ne sait pas vérifier (λ et k^2 étant donnés) à l'aide d'un nombre fini d'opérations.[1]

Enfin, des types classiques d'équations du 3^e ordre montrent que les singularités essentielles des intégrales peuvent affecter les dispositions les plus compliquées, former des ensembles *parfaits* discontinus, des lignes (analytiques ou non analytiques), etc.... Pour démontrer que les intégrales $y(x)$ d'une équation différentielle (algébrique) ne présentent pas de singularités transcendantes mobiles, nous n'avons le droit d'introduire *a priori* aucune restriction: une discussion qui écarterait d'avance certaines singularités comme invraisemblables serait *inexistante.*

5. On conçoit immédiatement la profondeur de la difficulté que crée l'existence toujours possible de telles singularités, variables avec les constantes d'intégration et que rien ne met en évidence sur l'équation différentielle. Comment étudier une intégrale dans le voisinage d'un point où sa valeur est indéterminée? *Comment, avant tout, discerner si de telles singularités existent ou non?* A ces questions, les méthodes dérivées de la doctrine de CAUCHY ne semblaient pas susceptibles de répondre. Un tel obstacle pouvait donc, à bon droit, être jugé insurmontable.

C'est la conclusion à laquelle aboutissait M. PICARD dans les derniers travaux qu'il a consacrés à ce genre de problèmes. »On a fondé autrefois, écrivait-il[2] en 1892, les plus grandes espérances sur l'étude des équations différentielles ordinaires; on pensait ainsi obtenir de nombreuses classes bien définies de transcendantes nouvelles. Il faut reconnaître que, si on laisse de côté les équations linéaires, ces espérances ont été jusqu'ici, à

[1] Voir PICARD, Acta mathematica 1893, t. 17, p. 298.
[2] Comptes Rendus 1892, t. 114, p. 1310.

peu près déçues.» Après avoir rappelé que les équations différentielles à intégrale uniforme (ou à points critiques fixes), ne sauraient définir des transcendantes nouvelles sans être au moins du second ordre, M. PICARD ajoutait: »Malheureusement, une différence considérable se présente dès le début de la théorie (entre les équations du premier ordre, et les équations d'ordre supérieur). On peut, étant donnée une équation du premier ordre, reconnaître sur l'équation elle-même si les points critiques sont fixes; il n'en est plus ainsi pour les équations du second ordre . . . Les conditions sont de nature transcendante: il est impossible, en général, de les former.»

Dans un mémoire ultérieur,[1] revenant sur l'existence des singularités essentielles mobiles, M. PICARD constatait que, seule, l'intégration effective d'une équation différentielle (j'entends sa réduction aux quadratures et aux équations linéaires) permettait d'affirmer l'uniformité de son intégrale. »Ces réflexions», disait-il en terminant, »ne sont pas en définitive très encourageantes. Il est peu probable que les équations d'ordre supérieur, à points critiques fixes, puissent conduire à l'étude de transcendantes nouvelles.»[2]

6. Cet obstacle qui faisait échec »aux grandes espérances fondées sur l'étude des équations différentielles», je suis parvenu à le surmonter dans le cours de ces trois dernières années. J'ai pu en particulier résoudre le problème suivant:

Parmi les équations

$$y'' = R(y', y, x)$$

où R est rationnel en y', algébrique[3] *en y et en x, déterminer explicitement toutes les équations à points critiques fixes.*

---

[1] Acta mathematica 1893, t. 17, p. 300.

[2] M. PICARD ajoutait il est vrai: »J'espère beaucoup plus de ces systèmes d'équations aux dérivées partielles . . . que j'ai sommairement indiqués dans une note des Comptes Rendus *(Sur des fonctions d'une variable dépendant de deux constantes réelles arbitraires, juin* 1892).»

Mais ces systèmes, en réalité, équivalent à une équation ordinaire du premier ordre (voir le n° 9).

[3] Il est même loisible de supposer R non pas *algébrique en x* mais simplement *analytique en x*.

Mais avant d'exposer mes propres recherches, je voudrais indiquer avec précision les résultats antérieurement acquis.[1]

7. Les deux premiers mémoires cités de M. PICARD[2] sont relatifs aux équations algébriques

$$F(y'', y) = 0$$

et déterminent toutes celles de ces équations dont l'intégrale générale $y(x)$ est uniforme. Par la suite, M. PICARD[3] a traité le même problème pour les équations

$$y'' = y'^2 A(y)$$

où A est algébrique en y. Mais ces deux types d'équations sont *intégrables*, et les transcendantes uniformes qu'ils engendrent sont banales.

---

[1] Je laisse entièrement de côté dans cet historique les travaux (de WEIERSTRASS, de M. PICARD, de M. POINCARÉ, etc.) relatifs aux équations à points critiques fixes dont l'intégrale renferme *algébriquement* les constantes d'intégration. J'ai montré, en effet (*Leçons de Stockholm*, p. 351—394), *que toute équation différentielle (algébrique) dont l'intégrale est une fonction algébrique des constantes, se ramène algébriquement aux quadratures ou aux équations linéaires.* Pour nous limiter au second ordre, le théorème précis est le suivant:

ou bien l'intégrale $y(x)$ est une fonction algébrique de u, v, x, où $u(x)$, $v(x)$ sont donnés par un des systèmes

$$\frac{du}{dx}\begin{cases} = -u^2 + A(x, v) \\ = a(x)\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)} \end{cases}, \qquad \frac{dv}{dx}\begin{cases} = -v^2 + b(x) \\ = c(x)\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2v^2)} \end{cases}$$

(A fonction algébrique de x, v; a, b, c de x; k et $\varkappa$ numériques);

ou bien $y(x)$ s'exprime algébriquement à l'aide de x et de deux fonctions hyperelliptiques, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$, dont les deux arguments sont deux intégrales abéliennes en x, soit $u = \int a(x)dx$, $v = \int b(x)dx$,

ou enfin, $y(x)$ est une fonction algébrique de (x, u, u'), u désignant la dérivée logarithmique $\frac{z'}{z}$ de l'integrale z d'une équation linéaire, homogène du 3[e] ordre.

[2] Comptes Rendus 1880, t. 91, p. 1058, et Bulletin des sc. math., t. 4 (2[e] série), p. 416. M. PICARD se limite au cas où $y(x)$ est supposée *méromorphe* dans le plan.

[3] Journal de Liouville 1889, 4[e] série, t. 5, p. 300—318; American Journal 1894, t. 16, p. 111—122; Traité d'Analyse, t. 3, p. 67—80. M. PICARD ne considère que le cas où l'expression $e^{\int A(y)dy}$ n'a pas de points singuliers transcendants.

C'est surtout aux équations

$$(1) \qquad y'' = R(y', y)$$

où R est rationnel en y', y, que s'est attaché M. Picard.[1] Le procédé de M. Picard consiste à former des conditions *suffisantes*[2] pour que l'intégrale $y(x)$ n'ait ni points critiques algébriques, ni points critiques transcendants *d'une certaine espèce particulière.* L'intégrale est dite alors *à apparence uniforme:* mais est-elle vraiment uniforme? Des exemples particuliers montraient qu'il n'en était rien. Les conditions en question n'étaient donc pas *suffisantes* en général. J'ajoute que ces conditions *ne limitaient point le degré de R en y et ne laissaient pas soupçonner qu'une telle limitation fût possible.*

Les auteurs qui ont poursuivi les mémorables recherches de M. Picard sur les intégrales *à apparence uniforme,* tels que MM. Wallenberg,[3] Forsyth,[4] etc., n'ont fait qu'appliquer les conditions du géomètre Français à des types simples d'équations.

Pour les équations de la forme:

$$y'' = y'(ay + b) + Ay^3 + By^2 + Cy + D,$$

M. Mittag-Leffler[5] et, après lui, M. Fransén[6] ont montré que les conditions de M. Picard entraînent *l'intégrabilité* de l'équation; les fonctions $y(x)$ qu'on obtient en effectuant l'intégration sont des fonctions uniformes élémentaires.

8. Disons maintenant un mot des équations (1) (à points critiques fixes) *où x figure explicitement.* M. Picard[7] ne s'est occupé de ces équations que dans le cas particulier où elles sont de la forme:

$$(2) \qquad y'' = y'[a(x)y + b(x)] + A(x)y^3 + B(x)y^2 + C(x)y + D(x).$$

[1] Journal de Liouville 1889, 4e série, t. 5, p. 277—293.

[2] Comme ces conditions n'étaient établies que moyennant certaines hypothèses simplificatrices faites sur l'équation (1), il n'était pas démontré qu'elles fussent *nécessaires* pour que l'intégrale fût uniforme.

[3] Crelle, 1898, t. 119, p. 87—113, et 1899, t. 120, p. 113—131.

[4] Theory of differential equations, t. III, p. 276—306.

[5] Acta mathematica, t. 18 (1894), p. 233—245.

[6] Stockh. öfv., t. 52 (1895), p. 223—241.

[7] Acta Mathematica, t. 17 (1893), p. 296—300.

Imitant le procédé connu de Madame KOWALESKI, M. PICARD cherche les conditions pour que l'intégrale $y(x)$ admette des pôles mobiles. Il peut exister deux familles de pôles, et l'existence de chaque famille entraîne une condition entre a, b, A, B, C, D et leurs dérivées jusqu'au 4e ordre. Ces deux conditions, fort compliquées, et dont le caractère *nécessaire* n'était pas établi, étaient-elles *suffisantes* pour que l'équation (2) eût ses points critiques fixes? M. PICARD pensait que »bien probablement» il n'en était rien. En tous cas, la question restait en suspens et ne semblait guère susceptible d'être tranchée.[1]

9. L'étude directe des équations différentielles (non intégrables) à points critiques fixes semblant fermée, ne pouvait-on du moins l'aborder par des voies détournées? C'est ce qu'a tenté M. PICARD à l'aide de deux méthodes différentes.

La première[2] substitue aux équations différentielles un système d'équations aux dérivées partielles de la forme:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x, y, u, v), & \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\varphi(x, y, u, v) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \varphi(x, y, u, v), & \dfrac{\partial v}{\partial y} = f(x, y, u, v) \end{cases}$$

où f et φ désignent des fonctions algébriques *réelles* des variables *réelles* x, y, u, v, et vérifient identiquement les deux conditions d'intégrabilité. Si $u(x, y), v(x, y)$ représentent une intégrale réelle quelconque du système (3), la combinaison $w = u + iv$ est une fonction analytique de $z = x + iy$ qui dépend de deux constantes *réelles* arbitraires. »Etant donné un système tel que (3)», dit M. PICARD,[3] »on peut reconnaître si les intégrales ont leurs points critiques fixes. J'ai formé de tels exemples où f, φ sont rationnels. Il me paraît extrêmement probable que les intégrales de ces

[1] Il se trouve en réalité que, pour les équations (2), ces conditions sont *suffisantes* sans être *nécessaires*. De plus, en dépit de leur complication apparente et de leur caractère différentiel, on peut former explicitement, et d'une façon très simple, toutes les équations (2) qui satisfont à ces conditions [voir le n° 30].

[2] Comptes Rendus, tome 114 (1892), p. 1310—1313, et Acta mathematica, tome 17 (1893), p. 300.

[3] Comptes Rendus, ibidem, p. 1312.

équations constituent un type nouveau de transcendantes.» Mais, en fait, les fonctions $w(z)$ définies par un système (3), ou bien sont algébriques, ou bien vérifient une équation différentielle (algébrique) du premier ordre, dont les points critiques sont fixes en même temps que ceux du système réel (3).

Les fonctions signalées par M. PICARD sont donc des transcendantes classiques.

La seconde méthode consiste à renverser en quelque sorte le problème, en partant de fonctions uniformes définies directement et en cherchant à les choisir de manière qu'elles intègrent une équation différentielle algébrique. M. PICARD[1] a obtenu de cette manière des systèmes d'équations différentielles dont l'intégrale générale est effectivement uniforme, mais renferme *algébriquement* les constantes.[2] Ces équations sont donc réductibles aux quadratures ou aux équations linéaires, et cela sous la forme explicite qui a été indiquée plus haut (note 1, page 8).

10. En dépit de tant de profondes recherches, la question en restait donc au point si nettement précisé par M. PICARD: *les seules équations dont on pût affirmer que les points critiques étaient fixes, étaient des équations intégrables et c'est l'intégration même qui mettait en évidence la fixité des points critiques.*

Pour pousser la question plus loin, il m'a fallu constituer une double méthode qui répondît à ce double objet:

1°. Trouver de nouvelles conditions *nécessaires* pour qu'une équation différentielle ait ses points critiques fixes;

2°. Décider si ces conditions sont ou non *suffisantes.*

La première partie de la méthode (recherche des conditions *nécessaires*) est à la fois très simple et très élémentaire. Elle s'applique avec une extrême facilité à une équation différentielle d'ordre quelconque, ou plus généralement à tout système d'équations aux dérivées partielles dont l'intégrale ne dépend que d'un nombre *fini* de constantes.[3]

---

[1] Comptes Rendus, t. 117 (1893), p. 472 et p. 603; Acta mathematica, t. 18 (1894), p. 133.

[2] Cette remarque a été faite ultérieurement par M. PICARD [Comptes Rendus, t. 120 (1895), p. 402].

[3] La méthode repose sur ce principe bien intuitif: »Considérons une équation différentielle dont le coëfficient différentiel est une fonction (holomorphe pour $a = 0$) d'un

La seconde partie de la méthode (recherche des conditions *suffisantes*) est d'un caractère plus subtil; elle peut être étendue aux équations du 3e ordre ou d'ordre supérieur; mais les complications qu'elle entraîne croissent avec l'ordre différentiel.

Je vais résumer maintenant les principaux résultats auxquels m'a conduit cette double méthode. J'insisterai d'abord sur les résultats qui me semblent essentiellement nouveaux.

Transcendantes uniformes nouvelles engendrées par les équations différentielles du second ordre.

11. La détermination de toutes les équations à points critiques fixes de la forme

$$y'' = R(y', y, x)$$

(où R est rationnel en y', algébrique en y, analytique en x) m'a donné

---

paramètre α. Si l'équation a ses points critiques fixes pour α quelconque (mais $\neq 0$), il en est de même, *a fortiori* pour $\alpha = 0$, et le développement de l'intégrale $y(x)$, suivant les puissances de α, a comme coëfficients des fonctions de x à points critiques fixes.»

Pour faire concevoir immédiatement l'esprit de la méthode, cherchons des conditions *nécessaires* pour que l'équation $y'' = R(y', y, x)$, (où R est rationnel en y', y, x), ait ses points critiques fixes. Il faut d'abord, comme il est bien connu, que l'équation soit de la forme:

$$y'' = A(y, x)y'^2 + B(y, x)y' + C(y, x).$$

Changeons x en $x_0 + \alpha x$; l'équation devient

$$y'' = A(y, x_0)y'^2 + \alpha\{\ldots\};$$

d'après le principe énoncé, l'équation:

$$y'' = A(y, x_0)y'^2$$

doit avoir son intégrale générale uniforme: ce qui détermine aussitôt toutes les expressions possibles de la fraction rationnelle A en y. Les degrés de B et C en y se limitent avec la même facilité.

La méthode, moyennant quelques modifications, se laisse d'ailleurs adapter à toutes les questions qui concernent les propriétés analytiques des intégrales d'une équation différentielle quelconque: par exemple à l'étude des intégrales définies par des conditions initiales $x_0, y_0, y'_0 \ldots$ qui donnent au coëfficient différentiel la forme $\frac{0}{0}$.

trois** types (et trois seulement) d'équations différentielles dont l'intégrale générale $y(x)$ est une fonction uniforme de x **essentiellement nouvelle.

Ces trois types peuvent recevoir les trois formes canoniques qui suivent:

$$y'' = \alpha y^2 + \beta x + \gamma, \tag{4}$$

$$y'' = \alpha y^3 + \beta xy + \gamma y + \delta, \tag{5}$$

$$y'' = \frac{y'^2}{y} + e^x(\alpha y^2 + \beta) + e^{2x}\left(\gamma y^3 + \frac{\delta}{y}\right), \tag{6}$$

($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ constantes numériques).

L'intégrale générale $y(x)$ de chaque équation (4), (5) *et* (6) *est une fonction uniforme de x **méromorphe dans tout le plan.***

Si β est nul, l'équation (4) définit les fonctions elliptiques; si α est nul, des polynômes. D'autre part, si $\alpha\beta \neq 0$, la transformation $y = \lambda Y$, $x = \mu X + \nu$, (où λ, μ, ν sont des constantes) permet de donner à α, β, γ les valeurs respectives $6, 1, 0$. De même, en négligeant les cas où l'intégrale est une fonction connue, il est loisible de supposer que dans l'équation (5), on a: $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, et que, dans l'équation (6), les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ coïncident avec un des trois systèmes:

$$\begin{cases} \gamma = -1, & \delta = 1; \quad \alpha, \beta \text{ quelconques;} \\ \gamma = -1, & \delta = 0; \quad \beta = 1, \alpha \text{ quelconque;} \\ \gamma = 0, & \delta = 0; \quad \alpha = -1, \beta = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Autrement dit aux équations (4), (5), (6) on peut substituer les 5 équations canoniques suivantes:

$$\text{I} \qquad y'' = 6y^2 + x,$$

$$\text{II} \qquad y'' = 2y^3 + xy + \alpha,$$

$$\text{III} \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + e^x(1 - y^2),$$

$$\text{IV} \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + e^x(\alpha y^2 + 1) - e^{2x}y^3,$$

$$\text{V} \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + e^x(\alpha y^2 + \beta) + e^{2x}\left(\frac{1}{y} - y^3\right).$$

Les intégrales $y(x)$ des équations I, II, III, IV, V, *sont des transcendantes méromorphes essentiellement nouvelles.*

On peut réunir d'ailleurs les équations I et II dans le type unique:

$$y'' = \alpha y^3 + y^2 + 3\alpha xy + x$$

et remplacer les cinq équations précédentes par les deux équations:

$$\text{VI} \qquad y'' = \alpha y^3 + y^2 + 3\alpha xy + x$$

$$\text{VII} \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + e^x(\alpha y^2 + \beta) + e^{2x}\left(\gamma y^3 + \frac{\delta}{y}\right);$$

les constantes numériques $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de VII coïncident avec un des trois systèmes de valeurs (7).

Il convient de remarquer toutefois que le cas $\alpha = 0$ pour VI, et les cas $\delta = 0$, ou $\delta = 0$, $\gamma = 0$ pour VII sont des cas remarquables de *simplification* de ces équations; les transcendantes qu'elles définissent ont, dans ces cas particuliers, des propriétés moins compliquées que dans le cas général.

12. Puisque les intégrales $y(x)$ des équations précédentes sont des fonctions *méromorphes* dans tout le plan, il est bien évident qu'elles sont représentables par le quotient de deux fonctions *entières*; mais ce qu'il importe de remarquer c'est qu'on peut choisir ces fonctions entières de manière qu'elles vérifient une équation différentielle très simple du 3^e^ ordre.

Voici comment on effectue cette représentation pour les équations I, II, III, IV, V.

Pour l'équation I, on pose

$$z = \frac{y'^2}{2} - 2y^3 - xy, \qquad u = e^{\int z dx};$$

la fonction $u(x)$ est une fonction *entière* qui vérifie l'équation:

$$\frac{z''^2}{2} + 2z'^3 + xz' - z = 0, \qquad \text{où } z = \frac{u'}{u};$$

$y(x)$ est donnée par le quotient:

$$y = \frac{u'^2 - uu''}{u^2} \equiv -\frac{d^2}{dx^2} \log u.$$

Pour l'équation II, on pose:

$$z = y'^2 - y^4 - xy^2 - 2\alpha y, \qquad u = e^{\int z dx}, \qquad v = uy;$$

les fonctions $u(x)$, $v(x)$ sont des fonctions *entières* qui vérifient le système:

$$uu'' - u'^2 + v^2 = 0, \qquad (uv' - vu')^2 = v^4 + xv^2u^2 + (2\alpha v + u')u^3,$$

et $y(x)$ est donnée par le quotient:

$$y = \frac{v}{u}.$$

De plus, soit

$$2z_1 = z - y, \qquad 2z_2 = z + y;$$

les fonctions $u_1 = e^{\int z_1(x)dx}$, $u_2 = e^{\int z_2(x)dx}$ sont deux fonctions *entières qui vérifient respectivement une équation du* 3^e^ *ordre,* et on a:

$$u = u_1 u_2, \qquad v = (u'_2 u_1 - u'_1 u_2), \qquad y = \frac{u'_2}{u_2} - \frac{u'_1}{u_1}.$$

Pour l'équation VII (qui comprend les équations III, IV, V), on pose:

$$2\zeta = \frac{y'^2}{y} + \left(\frac{\delta}{y^2} - \gamma y^2\right)e^{2x} + 2e^x\left[\frac{\beta}{y} - \alpha y\right],$$

puis

$$2z = \zeta - \frac{y'}{y} + \frac{1}{2}, \qquad 2Z = \zeta + \frac{y'}{y} + \frac{1}{2},$$

enfin

$$u = e^{\int z dx}, \qquad v = e^{\int Z dx};$$

les fonctions $u(x)$, $v(x)$ sont des fonctions *entières* qui vérifient les équations:

$$\frac{u''}{u} - \frac{u'^2}{u^2} = -\frac{ve^x}{u}\left[\frac{\gamma ve^x}{u} + \alpha\right], \qquad \frac{v''}{v} - \frac{v'^2}{v^2} = \frac{ue^x}{v}\left[\frac{\delta ue^x}{v} + \beta\right]; \tag{8}$$

il est loisible de remplacer une des équations (8) par l'équation:

$$\left(\frac{v'}{v} - \frac{u'}{u}\right)^2 - 2\frac{v'}{v} - 2\frac{u'}{u} + 1 + e^{2x}\left[\delta\frac{u^2}{v^2} - \gamma\frac{v^2}{u^2}\right] + 2e^x\left[\beta\frac{u}{v} - \alpha\frac{v}{u}\right] = 0; \tag{9}$$

les fonctions $u(x)$, $v(x)$ étant définies par l'équation (9) et la première équation (8), $y(x)$ est représentée par le quotient $y = \frac{v}{u}$.

En outre, si on pose:

$$2z_1 = z - ye^x, \quad 2z_2 = z + ye^x; \quad 2Z_1 = Z - \frac{e^x}{y}, \quad 2Z_2 = Z + \frac{e^x}{y};$$

$$u_1 = e^{\int z_1 dx}, \quad u_2 = e^{\int z_2 dx}; \quad v_1 = e^{\int Z_1 dx}, \quad v_2 = e^{\int Z_2 dx},$$

les fonctions u_1, u_2, v_1, v_2 sont des fonctions *entières qui vérifient respectivement une équation différentielle du* 3^e *ordre,* et on a:

$$u = u_1 u_2, \quad v = v_1 v_2; \quad e^x y = \frac{u_2'}{u_2} - \frac{u_1'}{u_1}, \quad \frac{e^x}{y} = \frac{v_2'}{v_2} - \frac{v_1'}{v_1}.$$

13. Les équations I, II, III, IV et V doivent être regardées comme *intégrées* au sens moderne du mot, exactement comme l'équation:

$$y'^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2)$$

est intégrée par le quotient de deux fonctions θ. Si on définit l'intégrale $y(x)$ d'une des équations par les conditions initiales x_0, y_0, y_0', la fonction $y(x)$ est représentée par le quotient de deux séries entières en $(x - x_0)$, séries qui convergent dans tout le plan des x et dont les coëfficients se calculent par des dérivations successives. Ces coëfficients sont, pour I et II, des polynômes en x_0, y_0, y_0', et pour III, IV, V des polynômes en e^{x_0}, y_0, $\frac{1}{y_0}$ et y_0'.

C'est là un résultat essentiellement nouveau sur lequel je voudrais insister. Depuis la fondation du Calcul intégral, toutes les équations qu'on a réussi à intégrer (au sens le plus large de ce terme) sont réductibles à des combinaisons d'équations linéaires et de quadratures. D'une façon générale, c'est parce qu'on connaît la manière dont les constantes figurent dans l'intégrale qu'on sait étudier cette intégrale. Même les équations qui définissent les fonctions fuchsiennes n'échappent pas à cette remarque. *Les équations* I, II, III, IV, V *constituent donc le premier exemple connu d'équations qui se trouvent intégrées à l'aide des principes de la théorie des fonctions, sans qu'on sache les ramener à aucune combinaison d'équations linéaires, de quadratures et d'équations du premier ordre.*

J'ajoute que le caractère précis des types canoniques I, II, ... V, ne doit pas faire méconnaître le degré de généralité des équations différentielles qu'intégrent les nouvelles transcendantes. Parmi les équations à points critiques fixes de la forme

$$y'' = R(y', y, x) \tag{4}$$

(où R est *rationnel en* y', y et algébrique en x), celles qui s'intégrent à l'aide des nouvelles transcendantes dépendent de *quatre fonctions arbitraires et de deux constantes arbitraires ou d'une seule* suivant qu'elles correspondent au type VII ou au type VI.

Parmi les équations (4) où R est un *polynôme* en y', y, algébrique en x, celles qui sont réductibles algébriquement à l'équation VI, *où* α *est donné,* forment une classe aussi étendue que les équations différentielles linéaires, non homogènes, du second ordre.

Par exemple pour qu'une équation

$$y'' = a(x)y' + A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$$

soit réductible algébriquement à l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6y^2 + x \tag{I}$$

il faut et il suffit que a, A, B, C, satisfassent à une condition unique (qui permet d'exprimer a, A, B, C, *explicitement* à l'aide de trois fonctions arbitraires). (Voir le n° 23.)

14. Considérons maintenant, pour un instant, l'intégrale d'une des équations I, ... V comme fonction des constantes d'intégration.

Soit $y = \varphi(x, x_0, y_0, y'_0)$ l'intégrale de I définie par les conditions initiales x_0, y_0, y'_0. La fonction φ est une fonction *méromorphe* de x, x_0, y_0, y'_0, dans tout le plan de chacune de ces variables. Le point à l'infini dans chacun de ces plans est un point essentiel de φ. Nous venons de dire, au n° précédent, qu'on peut représenter φ par le quotient de deux séries de polynômes en x, x_0, y_0, y'_0 dont les termes successifs se calculent par de simples dérivations.

Pour plus de clarté, dans ce qui va suivre, remplaçons y' par z, et considérons (y, z) comme les coordonnées (réelles ou complexes) d'un plan yOz.

Les formules

$$y = \varphi(x, x_0, y_0, z_0), \qquad z = \psi(x, x_0, y_0, z_0) \tag{10}$$

entraînent les formules inverses

$$(11) \qquad y_0 = \varphi(x_0, x, y, z), \qquad z_0 = \psi(x_0, x, y, z).$$

Si on donne à x et à x_0 des valeurs numériques, les égalités (10), (11) définissent *une correspondance biuniforme* entre les plans (y, z) et (y_0, z_0). Il n'existe pas, dans cette correspondance, *de points-bases* [points (y_0, z_0) qui donnent à φ et à ψ la forme $\frac{0}{0}$]; mais les valeurs $y_0 = \infty$, $z_0 = \infty$, sont singularités essentielles de φ, ψ.

J'ai étudié[1] les correspondances biuniformes (èt non birationelles) entre deux plans; je les ai divisées en deux classes, suivant qu'il existe ou non un faisceau de courbes algébriques que la correspondance transforme en un autre faisceau de courbes algébriques. La transformation est dite *semi-transcendante* dans le premier cas, *essentiellement biuniforme* dans le second cas.[2] La correspondance biuniforme (10), (11) entre (y, z) et (y_0, z_0) est essentiellement biuniforme. C'est ce qui résulte immédiatement de ce théorème (qu'on peut établir en toute rigueur): »L'intégrale générale $y = \varphi(x, a, b)$ de l'équation I est une fonction transcendante de chacune des constantes d'intégration a, b, de quelque manière qu'on choisisse ces constantes.»

Considérée comme fonction de y_0, ou de y'_0, ou de x_0, l'intégrale $y = \varphi(x, x_0, y_0, y'_0)$ est encore une transcendante méromorphe nouvelle,

---

[1] Leçons de Stockholm, p. 482—484 et 501—517. — Comptes Rendus, avril 1896.

[2] La correspondance biuniforme

$$y = y_0, \qquad y_0 = y,$$
$$z = z_0 e^{y_0}, \qquad z_0 = z e^{-y}$$

est semi-transcendante. La combinaison des deux transformations

$$y_1 = y, \qquad y = y_1 e^{z_1},$$
$$z_1 = z_0 e^{y_0}, \qquad z = z_1$$

conduit à la transformation essentiellement biuniforme

$$y = y_0 e^{(z_0 e^{y_0})}, \qquad y_0 = y e^{-z},$$
$$z = z_0 e^{y_0}, \qquad z_0 = z e^{-(y e^{-z})}.$$

Il existe d'ailleurs, ainsi que je l'ai montré, des correspondances biuniformes qui ne résultent pas de la combinaison de transformations semi-transcendantes.

dont on ne connaît d'autres propriétés que celles qui dérivent de l'équation différentielle elle-même.

Les mêmes remarques peuvent se répéter pour les intégrales des équations II, III, IV, V, avec cette différence que, pour les trois dernières, la fonction $y = \varphi(x, x_0, y_0, y'_0)$ n'est plus méromorphe en y_0, mais admet *le point* $y_0 = 0$ *comme point singulier essentiel.* Si on pose $y_0 = e^{z_0}$, la fonction φ est une fonction méromorphe de z_0. Le quotient qui représente φ est formé de deux séries dont les termes, avons-nous dit, sont des polynômes en $x, e^{x_0}, y_0, \frac{1}{y_0}, y'_0$.

Regardons enfin l'intégrale $y = \varphi(x)$ de II comme fonction du *module* α qui figure dans l'équation; la fonction $y = \varphi(x, x_0, y_0, y'_0, \alpha)$ est une *fonction méromorphe des* 5 *variables indépendantes* $x, x_0, y_0, y'_0, \alpha$.

Cette propriété subsiste pour les équations IV et V (relativement à α ou à α, β), à cela près que $y_0 = 0$ est un point essentiel de φ. Pour l'équation V, l'intégrale φ est une fonction méromorphe des six variables indépendantes $x, x_0, z_0 = \log y_0, y'_0, \alpha, \beta$.

15. La méthode qui m'a permis de démontrer que l'intégrale $y(x)$ des équations I, II, ..., V est méromorphe, fournit aussi des indications sur la nature et les propriétés des nouvelles transcendantes. Il n'y a pas lieu d'espérer que ces transcendantes jouissent de propriétés fonctionnelles simples, analogues à la périodicité des fonctions *sn* ou θ. Mais il convient d'approfondir leur étude au point de vue *du genre*, de la distribution des zéros, de *la croissance* pour $x = \infty$, etc.

Cette étude, où les travaux bien connus de M. Hadamard et de M. Borel doivent jouer un rôle important, sera développée dans la monographie que je consacrerai à chacun des types de nouvelles transcendantes.

Je me borne ici à signaler cette proposition qui a son analogue pour les équations II, III, IV et V:

»Si $y(x)$ est une intégrale particulière de I, l'égalité $y(x) = A$ possède une infinité de racines quelle que soit la valeur (finie ou infinie) de A. La fréquence de ces racines (pour $x = \infty$) est la même quel que soit A.»

Les transcendantes définies plus haut sont les seules transcendantes vraiment nouvelles qu'engendrent les équations du second ordre à points critiques fixes (résolues par rapport à y'').

Je vais maintenant énumérer explicitement toutes ces équations.

Enumération de toutes les équations à points critiques fixes de la forme

$$(\mathrm{E}) \qquad y'' = R(y', y, x)$$

(R rationnel en y', algébrique en y, analytique en x).

16. Je formerai d'abord un tableau fondamental d'équations (E) à points critiques fixes, d'où se laissent déduire toutes les autres.

En premier lieu, si l'équation (E) a ses points critiques fixes, elle est nécessairement de la forme:

$$(12) \qquad y'' = A(y, x)y'^2 + B(y, x)y' + C(y, x).$$

Les fonctions A, B, C, algébriques en y, sont exprimables *rationnellement* à l'aide de y et d'une irrationnelle $t(y) = g(y, x)$ qui dépend de x analytiquement; soit:

$$A = L(t, y, x), \qquad B = M(t, y, x), \qquad C = N(t, y, x)$$

avec

$$H(t, y, x) = 0;$$

L, M, N, sont des *fractions rationnelles* et H un *polynôme* en t, y; leurs coëfficients $a, b, c, \ldots$ sont des fonctions analytiques de x.

Avant d'aller plus loin, précisons le sens de quelques expressions que nous emploierons fréquemment par la suite.

Je dirai qu'on sait reconnaître ***algébriquement*** si une équation (12) donnée jouit de telle propriété, quand cette propriété se traduira par un nombre *fini* de relations algébriques entre les coëfficients $a(x), b(x), \ldots$ de (12) et leurs dérivées jusqu'à un certain ordre.

J'emploierai fréquemment, par la suite, les transformations:

$$(\mathrm{T}) \qquad Y = \psi(y, x), \qquad X = x \quad \text{ou} \quad X = \varphi(x),$$

où ψ est *algébrique* en y et analytique (ainsi que φ) en x. Je dirai qu'une équation (12) est *réductible algébriquement* à une équation

$$(13) \qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = F\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right)$$

par une transformation (T), si la transformation de passage se calcule *algébriquement* sur l'équation (12); autrement dit, si les coëfficients de la fonction algébrique $\psi(y)$ sont des combinaisons algébriques des coëfficients $a(x)$, $b(x)$, ... de (12) ainsi que de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre, et si, de plus, la fonction $\varphi(x)$ satisfait à la même condition ou se réduit identiquement à x.

Si l'équation (E) est algébrique en x le mot *algébriquement* est pris dans son sens ordinaire.

17. Rappelons maintenant quelques résultats connus et quelques définitions.

Admettons qu'une équation (E) ait ses points critiques fixes et étudions son intégrale $y(x)$ comme fonction des constantes y_0, y'_0 (valeurs de y, y' pour une valeur numérique x_0 de x).

Trois cas peuvent se présenter.

1^er^ Cas. L'intégrale dépend *algébriquement* de y_0, y'_0. On dit alors que *l'intégrale est une fonction algébrique des constantes.*

2^e^ Cas. L'intégrale est une fonction transcendante de y_0, y'_0, mais on peut, par un changement de constantes, faire en sorte que $y(x)$ renferme *algébriquement* **une** des nouvelles constantes. On dit alors que *l'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes.*

3^e^ Cas. L'intégrale $y(x)$ renferme l'une et l'autre des constantes sous forme transcendante de quelque manière qu'on les choisisse. On dit alors que *l'intégrale est une fonction essentiellement transcendante des deux constantes.*

Dans le premier cas,

ou bien l'équation (E) est réductible algébriquement à une équation linéaire:

$$z''' + p(x)z' + q(x)z = 0;$$

d'une façon précise, si on pose $\frac{z'}{z} = u$, on a $y = \varphi(u', u, x)$, φ désignant une fraction rationnelle en u', u, qui dépend de x analytiquement;

ou bien, l'équation (E) équivaut au système:

$$(14) \qquad F(y', y, u, x) = 0, \qquad u' = p(x)u^2 + q(x)u + r(x);$$

F est un polynôme en y', y, u, dont les coëfficients, ainsi que p, q, r, sont des fonctions algébriques des coëfficients de (E) et de leurs dérivées. L'équation du premier ordre $F = 0$ (où u est remplacé en fonction de x) doit d'ailleurs avoir ses points critiques fixes.[1]

---

[1] Voir la note 1 de la page 8, et mes *Leçons de Stockholm,* p. 360—389.

Dans le second cas, l'équation (E) équivaut[1] à un système (14), où le genre de la relation algébrique $F = 0$ entre y', y est (pour u, x quelconques) égal à zéro ou un.

Le troisième cas est le seul qui puisse conduire à des transcendantes nouvelles.

Le tableau que nous allons former, fournit une vérification de ces résultats.

Dans ce tableau, nous représentons invariablement par $a, b, c, \ldots$ des fonctions analytiques de x; par $a', b', c', \ldots, a'', b'', c'', \ldots,$ leurs dérivées premières, secondes, etc.; par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des constantes *numériques;* par $K, K_1, \ldots$ des constantes *arbitraires.*

Chaque équation est suivie d'une indication sur la manière dont l'intégrale générale $y(x)$ renferme ses constantes; si l'équation est *intégrable* (j'entends réductible aux quadratures ou aux équations linéaires), elle est accompagnée des formules qui effectuent cette intégration.

Le tableau total se compose de *trois* tableaux partiels, à savoir les tableaux I, II, III, qui suivent.

18. *Tableau des équations canoniques* (E) *à points critiques fixes.*

TABLEAU I.

(1) $$y'' = -3yy' - y^3 + a(x).$$

L'intégrale est une fonction algébrique des deux constantes. Intégration:

$$y = \frac{z'}{z}, \qquad z''' = a(x)z.$$

(2) $$y'' = -2yy' + a(x).$$

L'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes. Intégration:

$$y' + y^2 = u, \qquad u' = a(x).$$

---

[1] *Leçons de Stockholm,* p. 465—477.

(3) $$y'' = \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta.$$

L'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes. Intégration:

$$\frac{y'^2}{2} = \frac{\alpha}{4} y^4 + \frac{\beta}{3} y^3 + \frac{\gamma}{2} y^2 + \delta y + K.$$

(4) $$y'' = 6y^2 + x.$$

L'intégrale est une fonction essentiellement transcendante des deux constantes.

(5) $$y'' = 2y^3 + xy + \alpha.$$

L'intégrale est une fonction essentiellement transcendante des deux constantes.

(6) $$y'' = -yy' + y^3 - 12a(x)y + 12a'(x),$$

avec la condition $a'' = 6a^2 + \varepsilon$, ($\varepsilon = 0$ ou 1). L'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes. Intégration: la transformation

$$z = \frac{1}{6}(y' + y^2) - a$$

donne

$$y = \frac{z' - a'}{z - a}, \qquad z'' = 6z^2 + \varepsilon \quad \text{[équation (3)]}.$$

Intégrale première:

$$z'^2 = 4z^3 + 2\varepsilon z + K, \quad \text{où} \quad z = \frac{1}{6}(y' + y^2) - a, \quad z' = a' + y\left[\frac{1}{6}(y' + y^2) - 2a\right].$$

(7) $$y'' = -yy' + y^3 - 12a(x)y + 12a'(x),$$

avec la condition: $a'' = 6a^2 + x$. L'intégrale est une fonction essentiellement transcendante des deux constantes. La transformation $z = \frac{1}{6}(y' + y^2) - a$ donne:

$$y = \frac{z' - a'}{z - a}, \qquad z'' = 6z^2 + x \quad \text{[équation (4)]}.$$

TABLEAU II.

$$(1) \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + \left[a(x)y + \frac{b(x)}{y}\right]y' + a'(x)y^2 - b'(x).$$

L'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes. Intégration:

$$y' = a(x)y^2 - b(x) + Ky.$$

$$(2) \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + a'(x)\frac{y'}{y} + y^3 + a(x)y^2 - a''(x).$$

L'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes. Intégration:

$$(y' + a')^2 = y^2[(y + a)^2 + K].$$

$$(3) \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + a(x)\frac{y'}{y} - a'(x) + y^2.$$

L'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes. Intégration:

$$(y' + a)^2 = 2y^2(y + u), \qquad u' = a(x).$$

$$(4) \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma + \frac{\delta}{y}.$$

L'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes. Intégration:

$$y'^2 = \alpha y^4 + 2\beta y^3 - 2\gamma y - \delta + Ky^2.$$

$$(5) \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + e^x(\alpha y^2 + \beta) + e^{2x}\left[\gamma y^3 + \frac{\delta}{y}\right], \qquad (\beta \text{ ou } \delta \neq 0).$$

L'intégrale est une fonction essentiellement transcendante des deux constantes.

TABLEAU III.

(1) $$y'' = y'^2 \frac{\left(6y^2 - \frac{g_2}{2}\right)}{(4y^3 - g_2 y - g_3)}, \qquad (g_2, g_3 \text{ c}^{\text{tes}} \text{ numériques}).$$

L'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes. Intégration:

$$\frac{y'}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = K, \qquad y = \wp(u, g_2, g_3), \qquad u = Kx + K_1.$$

---

(2) $$y'' = \frac{y'^2(3y^2 - 2(1+x)y + x)}{2y(y-1)(y-x)} + y'\left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\right) + \frac{y(y-1)}{2x(x-1)(y-x)}.$$

L'intégrale est une fonction essentiellement transcendante des constantes. Si on appelle $\lambda(u, x_0)$ la fonction elliptique de u définie par l'égalité:

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-x_0)}} = u,$$

et $2\omega_1$, $2\omega_2$ ses deux périodes, l'intégrale générale de (2) est

$$y = \lambda[(K_1\omega_1 + K_2\omega_2), x].$$

---

(3) $$y'' = y'^2\left[\frac{6y^2 - \frac{g_2}{2}}{(4y^3 - g_2 y - g_3)} - \frac{i\pi}{\omega\sqrt{(4y^3 - g_2 y - g_3)}}\right]$$

[2ω période quelconque de $\wp(u, g_2, g_3)$].

L'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes. Intégration:

$$\frac{y'}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = \frac{\omega}{i\pi(x+K)}, \quad y = \wp(u, g_2, g_3), \quad u = K_1 + \frac{\omega}{i\pi}\log(x+K);$$

$x = -K$ est un point essentiel mobile de $y(x)$.

---

19. Parmi les équations précédentes, les seules dont l'intégrale soit une fonction *essentiellement transcendante des deux constantes* sont les équations (4), (5), (7) du tableau I, (5) du tableau II et (2) du tableau III.

Les équations (4), (5) du tableau I, et (5) du tableau II ont été étudiées plus haut (n^{os} 11—15); leur intégrale est méromorphe dans tout le plan. Quant à l'équation (7) du tableau I, elle est réductible à l'équation (4) par la transformation $y = \frac{z' - a'}{z - a}$; son intégrale est aussi méromorphe dans tout le plan.

L'intégrale $y(x)$ de l'équation (2) du tableau III admet trois points critiques (transcendants) fixes, à savoir $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$. Elle ne présente comme singularités mobiles que des pôles.[1] Si on pose

$$z = \frac{1}{4(y-x)}\left[\frac{x(x-1)y'^2}{y(y-1)} - 1\right], \qquad u = e^{\int z dx},$$

la fonction $u(x)$ est une fonction dont les seules singularités (polaires ou autres) sont les trois points fixes $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$.[2]

La fonction y s'exprime algébriquement à l'aide de u, u', u'' et de x. La fonction $u(x)$ vérifie une équation différentielle (algébrique) du 3^e ordre.

Posons maintenant $x = \psi(X)$, en désignant par $\psi(X)$ la fonction *modulaire* qui ne prend aucune des valeurs $0, 1, \infty$; les fonctions $y(X)$ et $u(X)$ sont uniformes et admettent l'axe réel des X comme coupure essentielle; la première est méromorphe, la seconde holomorphe au-dessus et au-dessous de cette coupure; elles vérifient respectivement une équation différentielle du 2^e et du 3^e ordre algébrique par rapport à la fonction et à ses dérivées, mais dont les coëfficients sont des transcendantes uniformes en X.

Enfin, l'intégrale générale de l'équation (2) de III, soit:

$$y = \varphi(x, x_0, y_0, y'_0),$$

---

[1] L'équation (2) de III a été formée explicitement par M. Picard (Journal de Liouville 1889, 4^e série, tome 5, p. 299). Elle fait partie, au fond, du système classique d'équations différentielles que vérifient les fonctions elliptiques regardées comme fonctions des invariants (voir Halphen, *Traité des fonctions elliptiques,* tome I, p. 252—253 et p. 291—331).

[2] On peut former trois autres expressions analogues à $u(x)$ en permutant le rôle des valeurs remarquables $y = x$, $y = 0$, $y = 1$, $y = \infty$.

définit (pour $\bar{x}$, $\bar{x}_0$ choisis numériquement) une correspondance biuniforme entre les deux *cylindres* de l'espace $Oyzt$

$$t^2 = y(y-1)(y-\bar{x}), \qquad t_0^2 = y_0(y_0-1)(y_0-\bar{x}_0).$$

Cette correspondance est *essentiellement biuniforme* (voir le n° 14); [1] il suffit, pour l'obtenir, de poser:

$$y' = z, \qquad t = \sqrt{y(y-1)(y-x)}, \quad \text{et} \quad y_0' = z_0, \qquad t_0 = \sqrt{y_0(y_0-1)(y_0-x_0)}.$$

Mais je n'insiste pas davantage sur cette équation qui ne définit pas de transcendantes vraiment nouvelles, du moment qu'on regarde comme connue la transcendante à deux variables $\operatorname{sn}(u, k^2)$.

20. Quant aux 11 autres équations des tableaux I, II, III, elles sont toutes réductibles à des équations classiques.

Les équations (1) et (3) du tableau I (cette dernière moyennant les conditions $\alpha = 0$, $\beta = 0$) jouissent seules de la propriété que l'intégrale renferme *algébriquement* les deux constantes. Pour les autres types, l'intégrale est une fonction *semi-transcendante* des constantes; je signale la manière variée dont figurent ces constantes dans l'intégrale.

Enfin la seule équation dont l'intégrale générale présente *des singularités essentielles mobiles*, c'est l'équation (3) du tableau III, dont l'intégrale est une fonction semi-transcendante des constantes et possède un point singulier essentiel variable avec les constantes d'intégration.

21. Ces tableaux I, II, III, permettent de résoudre bien aisément le problème général qui nous occupe:

Parmi les équations

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = R\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right),$$

où R est rationnel en $\frac{dY}{dX}$, algébrique en Y, analytique en X, déterminer toutes les équations à points critiques fixes.

---

[1] Voir mes *Leçons de Stockholm,* p. 501—517.

Pour obtenir toutes les équations cherchées, il suffit d'effectuer, dans les équations des tableaux I, II, le changement de variables

$$(15) \qquad Y = r(y\,,\,x), \qquad X = \phi(x)$$

et dans les équations du tableau III, le changement de variables:

$$(16) \qquad Y = r(y\,,\,x) + s(y\,,\,x)\sqrt{P}, \qquad X = \phi(x),$$

où

$$P = 4y^3 - g_2 y - g_3 \quad \text{pour (1) et (3) de III,}$$

et où

$$P = y(y-1)(y-x) \quad \text{pour (2) de III;}$$

dans les égalités (15), (16), les fonctions $r(y\,,\,x)$, $s(y\,,\,x)$ désignent des fonctions *rationnelles* quelconques de y, dont les coëfficients, ainsi que ϕ, sont analytiques en x.

Les équations (E) à points critiques fixes dont l'intégrale est une fonction *essentiellement transcendante des deux constantes* sont donc réductibles soit par une transformation (15) à une équation (4), (5), (7) de I ou (5) de II; soit par une transformation (16) à l'équation (2) de III.

Toutes les équations (E) à points critiques fixes dont l'intégrale présente des singularités essentielles mobiles sont réductibles par une transformation (16) à une équation (3) de III.

De la question de reconnaître si une équation (E) *donnée a ses points critiques fixes. Problèmes connexes.*

22. *Equations* (E) *où $R(y', y, x)$ est rationnel en y', y.* — Etant donnée une équation (E), comment reconnaître si elle a effectivement ses points critiques fixes?

C'est la question que je vais traiter maintenant. Je considèrerai d'abord le cas où le coëfficient différentiel R de (E), rationnel en y', est *rationnel* aussi en y, puis le cas où R est *algébrique* en y.

Soit donc:

$$(\mathrm{E}') \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = R\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) \equiv A(y, x)y'^2 + B(y, x)y' + C(y, x)$$

(R rationnel en y' et y, analytique en x).

La marche à suivre pour décider si cette équation a ses points critiques fixes est la suivante.

En premier lieu, $A(y, x)$ doit coïncider avec une des neuf expressions (θ):

$$(\theta) \quad \left\{ \begin{array}{c} 0\,; \ \dfrac{2a}{ay+b}\,; \ \dfrac{a\left(1+\frac{1}{n}\right)}{ay+b} + \dfrac{c\left(1-\frac{1}{n}\right)}{cy+d} \quad (n \text{ entier} > 1); \\ \dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{c}{cy+d}\,; \ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{c}{cy+d}\right) + \dfrac{e}{ey+f}\,; \\ \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{c}{cy+d} + \dfrac{e}{ey+f}\right)\,; \ \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{c}{cy+d} + \dfrac{e}{ey+f}\right); \\ \dfrac{5}{6}\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{2}{3}\dfrac{c}{cy+d} + \dfrac{1}{2}\dfrac{e}{ey+f}\,; \ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{c}{cy+d} + \dfrac{e}{ey+f} + \dfrac{g}{gy+h}\right), \end{array} \right.$$

où $a, b, \ldots, h$ désignent des fonctions de x (qui peuvent être identiquement nulles ou se réduire à des constantes).

Cette première condition étant remplie, on effectue sur y la transformation homographique

$$Y = \frac{1}{ay+b}, \quad \text{ou} \quad Y = \frac{cy+d}{ay+b}, \quad \text{ou} \quad Y = \frac{(af-be)(cy+d)}{(cf-de)(ay+b)},$$

suivant que A coïncide avec la seconde expression (θ), ou avec la troisième ou la quatrième, ou enfin avec une quelconque des suivantes.

Après cette transformation, l'équation garde une forme analogue à (E′), mais dans les neuf expressions possibles de θ on a

$$a = 0, \qquad d = 0, \qquad e = -f.$$

Nous n'avons donc plus à considérer que des équations (E′) de la forme:

$$(\mathrm{E}'') \qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = A(Y, X)\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + B(Y, X)\frac{dY}{dX} + C(Y, X)$$

où A, B, C sont rationnels en Y et où A coïncide avec une des huit expressions (θ')

$$(\theta')\qquad \left\{\begin{array}{c} 0\ ;\ \dfrac{1-\frac{1}{n}}{Y}\quad (n \text{ entier} > 1);\ \dfrac{1}{Y};\\[2mm] \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{Y}+\dfrac{1}{Y-1}\ ;\ \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{Y}+\dfrac{1}{Y-1}\right);\ \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{Y}+\dfrac{1}{Y-1}\right);\\[2mm] \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{Y}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{Y-1}\ ;\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{Y}+\dfrac{1}{Y-1}+\dfrac{1}{Y-H}\right); \end{array}\right.$$

H désigne[1] soit une constante numérique α, soit X.

Nous allons, dans ce qui suit, distinguer huit cas qui correspondent aux huit expressions possibles de $A(Y, X)$.

23. Premier cas: $A = 0$.

L'équation (E″) doit être alors de la forme

$$(\mathrm{E}_1)\qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{dY}{dX}(aY+b) + cY^3 + eY + f,$$

($a, b, \ldots, f$ fonctions analytiques de X).

Pour qu'elle ait ses points critiques fixes, il faut et il suffit qu'elle soit réductible, par une transformation

$$(17)\qquad y = m(X)Y + n(X), \qquad x = l(X),$$

à un des 7 types canoniques du tableau I.

On sait toujours reconnaître *algébriquement*[2] si cette condition est remplie. Mais le calcul de la transformation de passage (17) *ne s'effectue algébriquement que pour les types* (4), (5), (7) *de I*, dont l'intégrale est une fonction *essentiellement transcendante* des deux constantes.

---

[1] H est égal à l'expression $\dfrac{af-be}{cf-de} \times \dfrac{ch-dg}{ah-bg}$; si cette expression n'est pas une constante α, on pose:

$$H(x) = X.$$

[2] Voir au n° 16 le sens précis de ce terme.

Les autres équations sont *intégrables*. Pour se rendre compte avec précision des opérations qu'exige leur intégration, il importe de n'introduire que des types canoniques tels que la réduction d'une équation (E_1) à un quelconque de ces types s'effectue *algébriquement*.

C'est ce que nous allons faire dans le tableau IV qui suit, où chaque type canonique du tableau I est remplacé par une ou plusieurs équations nouvelles. Nous y représentons exclusivement par $\lambda(X)$, $\mu(X)$, $\nu(X)$, ... des combinaisons *algébriques* des coëfficients $a(X)$, ..., $f(X)$ de (E_1) et de leurs dérivées (jusqu'à un certain ordre).

Toute équation (E_1) *à points critiques fixes est réductible à une des équations* (1), (2), ... *du tableau IV par une transformation*

$$y = \mu(X)\,Y + \nu(X), \qquad x = \lambda(X). \tag{18}$$

TABLEAU IV.

Equations réductibles au type (1) du tableau I

$$y'' = -3yy' - y^3 + q(x)y + r(x). \tag{1}$$

Intégration:

$$y = \frac{z'}{z}, \qquad z''' = q(x)z' + r(x)z.$$

Transformation de passage de (E_1) à (1): $y = \mu Y + \nu$, $x = X$.

Equations réductibles au type (2) du tableau I.

$$y'' = -2yy' + q(x)(y' + y^2) + r(x). \tag{2}$$

Intégration:

$$y' + y^2 = u, \qquad u' = q(x)u + r(x).$$

Transformation de passage de (E_1) à (2): $y = \mu Y + \nu$, $x = X$.

Equations réductibles au type (3) du tableau I.

$$y'' = q(x)y' + r(x)y + s(x), \tag{3}$$

équation linéaire non homogène, du second ordre.

(4) $$y'' = y'\frac{q'(x)}{2q(x)} + q(x)[2\alpha y^3 + 6\beta y^2 + \gamma y + \delta].$$

Intégration:

$$y'^2 = q(x)[\alpha y^4 + 4\beta y^3 + \gamma y^2 + 2\delta y + K].$$

Transformation de passage de (E_1) à (4): $y = \mu Y + \nu$, $x = X$.

---

(5) $$y'' = -3q(x)y' + 2y^3 - y[q' + 2q^2(x)].$$

Intégration:

$$[y' + q(x)y]^2 = y^4 + u, \qquad \frac{u'}{u} = -4q(x).$$

Transformation de passage de (E_1) à (5): $y = \mu Y + \nu$, $x = X$.

Un changement de variables: $\eta = e^{\int q(x)dx} y$, $\xi = \int dx e^{-\int q(x)dx}$ ramène (5) à la forme: $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 2\eta^3$.

---

(6) $$y'' = -\frac{5}{2}q(x)y' + 6y^2 - y\left[q'(x) + \frac{3q^2(x)}{2}\right].$$

Intégration:

$$[y' + q(x)y]^2 = 4y^3 + u, \qquad \frac{u'}{u} = -3q(x).$$

Transformation de passage de (E_1) à (6): $y = \mu Y + \nu$, $x = X$.

Un changement de variables: $\eta = e^{\int q(x)dx}$, $\xi = \int dx e^{-\frac{1}{2}\int q(x)dx}$ ramène (6) à la forme: $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 6\eta^2$.

Equations réductibles au type (4) **du tableau I.**

(7) $$y'' = 6y^2 + x.$$

Transformation de passage de (E_1) à (7): $y = \mu Y + \nu$, $x = \lambda(X)$.

Equations réductibles au type (5) **du tableau I.**

(8) $$y'' = 2y^3 + xy + \alpha.$$

Transformation de passage de (E_1) à (8): $y = \mu Y + \nu$, $x = \lambda(X)$.

Equations réductibles au type (6) du tableau I.

$$(9)\qquad y'' = -yy' + y^3 + q(x)(3y' + y^2) - [2q^2(x) - q'(x)]y.$$

Intégration:

$$y = \frac{z'}{z}, \qquad \frac{z'}{\sqrt{4z^3 - 1}} = u, \qquad \frac{u'}{u} = q(x).$$

Transformation de passage de (E_1) à (9): $y = \mu Y + \nu$, $x = X$.

Un changement de variables: $\eta = m(x)y$, $\xi = l(x)$, qui exige **deux** quadratures, ramène l'équation (9) à la forme: $\eta''_{\xi^2} = -\eta\eta'_\xi + \eta^3$.

$$(10)\qquad y'' = -yy' + y^3 + \frac{q'(x)}{2q(x)}(3y' + y^2) + \left[\frac{q''(x)}{2q(x)} - \frac{q'^2(x)}{q^2(x)} - q(x)\right]y.$$

Intégration:

$$y = \frac{z'}{z - 1}, \qquad \frac{z'}{\sqrt{4z^3 - 12z + K}} = \frac{\sqrt{q(x)}}{2\sqrt{3}}.$$

Transformation de passage de (E_1) à (10): $y = \mu Y + \nu$, $x = X$.

Un changement de variables: $\eta = m(x)y$, $\xi = l(x)$, qui exige **une** quadrature, ramène l'équation (10) à la forme: $\eta''_{\xi^2} = -\eta\eta'_\xi + \eta^3 - 12\eta$.

$$(11)\qquad y'' = -yy' + y^3 - q(x)[3y' + y^2] - r(x)y - 24s^3(x)$$

avec

$$q = -\left[\frac{s'(x)}{s(x)} + s(x)\right], \qquad r = q'(x) + 2q^2(x) + 12s^2(x).$$

Intégration:

$$y = \frac{\sqrt{4z^3 - 1} + \dfrac{2}{u^3}}{v\left(z - \dfrac{1}{u^2}\right)}, \qquad z = \wp(u + K, 0, 1), \qquad v = e^{\int q dx}, \qquad u = \frac{1}{sv}.$$

Transformation de passage de (E_1) à (11): $y = \mu Y + \nu$, $x = X$.

Un changement de variables: $\eta = m(x)y$, $\xi = l(x)$, qui exige **une** quadrature, ramène (11) à la forme:

$$\eta''_{\xi^2} = -\eta\eta'_\xi + \eta^3 - 12\wp(\xi, 0, 1)\eta + 12\wp'(\xi, 0, 1).$$

---

(12) $$y'' = -yy' + y^3 - (3y' + y^2)\frac{2q(x)}{q'(x)} - \frac{24xy}{q} + \frac{12}{q}$$

où

$$q \equiv 4x^3 - \varepsilon x - \alpha, \qquad (\varepsilon = 0 \text{ ou } 1,\ \alpha = 1 \text{ si } \varepsilon = 0).$$

Intégration:

$$y = \frac{z' - 1}{z - x}, \qquad \frac{z'}{\sqrt{4z^3 - \varepsilon z + K}} = \frac{1}{\sqrt{4x^3 - \varepsilon x - \alpha}}.$$

Transformation de passage de (E_1) à (12): $y = \mu Y + \nu$, $x = \lambda(X)$.

Un changement de variables: $\eta = y\sqrt{4x^3 - \varepsilon x - \alpha}$, $x = \wp(\xi, \varepsilon, \alpha)$, ramène (12) à la forme:

$$\eta''_{\xi^2} = -\eta\eta'_\xi + \eta^3 - 12\wp(\xi, \varepsilon, \alpha) + 12\wp'(\xi, \varepsilon, \alpha).$$

Equations réductibles au type (7) du tableau I.

(13) $y'' = -yy' + y^3 - 12q(x)y + 12q'(x)$, avec $q'' = 6q^2 + x$.

Transformation de passage de (E_1) à (13): $y = \mu Y + \nu$, $x = \lambda(X)$.

L'équation (13) peut s'écrire: $y = \dfrac{z' - q'}{z - q}$ avec: $z'' = 6z^2 + x$.

---

24. Deuxième cas: $A(Y, X) = \dfrac{1 - \frac{1}{n}}{Y}$.

Tout d'abord, l'équation doit être, dans ce cas, de la forme:

(E_2) $$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{Y}\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + a\frac{dY}{dX} + bY^2 + cY$$

(a, b, c fonctions de X).

Pour qu'une équation (E_2) *ait ses points critiques fixes, il faut et il suffit qu'elle soit réductible par une transformation:*

(19) $$y = \mu(X)Y, \qquad x = \lambda(X)$$

à une des équations du tableau suivant:

TABLEAU V.

(1) $$y'' = \frac{y'^2}{y}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + q(x)y' + r(x)y,$$

ou

$$y = z^n, \qquad z'' = qz' + \frac{r}{n}z \quad \text{[éq. (3) de IV où } s = 0\text{]}.$$

---

(2) $$y'' = \frac{y'^2}{2y} + \frac{q'(x)}{2q(x)}y' + 2q(x)[2y^2 + y]$$

ou

$$y = z^2, \quad z'' = \frac{q'}{2q}z' + q[2z^3 + z] \quad \text{[éq. (4) de IV où } \alpha = 1,\ \beta = 0,\ \delta = 0\text{]}$$

---

(3) $$y'' = \frac{y'^2}{2y} - 3q(x)y' + 4y^2 - 2y[q'(x) + 2q^2(x)]$$

ou

$$y = z^2, \qquad z'' = -3qz' + 2z^3 - z(q' + 2q^2) \quad \text{[éq. (5) de IV]}.$$

Intégration:

$$\left(\frac{y'}{2} + qy\right)^2 = y(y^2 + u), \qquad \frac{u'}{u} = -4q.$$

---

(4) $$y'' = \frac{y'^2}{2y} + 2y^2 + xy$$

ou

$$y = z^2, \qquad z'' = 2z^3 + xz \quad \text{[éq. irréductible (S) de IV, où } \alpha = 0\text{]}.$$

Remarque. Les équations (2) et (3) de V dont réductibles par une transformation $y = m(x)\eta^2$, $x = l(\xi)$, la première (moyennant une quadrature) à l'équation $\eta''_{\xi^2} = 2\eta^3 + \eta$, [équation (3) de I où $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\delta = 0$], la seconde (moyennant deux quadratures) à l'équation $\eta''_{\xi^2} = 2\eta^3$ [équation (3) de I où $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = \delta = 0$].

25. TROISIÈME CAS: $A(Y, X) = \frac{1}{Y}$.

L'équation (E'') doit être de la forme:

$$(E_3)\quad \frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{\left(\frac{dY}{dX}\right)^2}{Y} + \left[aY + b + \frac{c}{Y}\right]\frac{dY}{dX} + dY^3 + eY^2 + fY + g + \frac{h}{Y},$$

où $a, b, \ldots h$ sont des fonctions analytiques de X.

Pour que l'équation (E_3) *ait ses points critiques fixes, il faut et il suffit qu'elle se laisse ramener par une transformation:*

$$(20)\qquad y\begin{cases} = m(X)Y, \\ \text{ou } = m(X)\frac{1}{Y}, \end{cases} \qquad x = l(X)$$

à un quelconque des types du tableau II.

On soit reconnaître *algébriquement* si cette condition est remplie, mais le calcul de la transformation (20) peut exiger des *quadratures.* Pour éviter cet inconvénient, il faut substituer au tableau II le tableau VI qui suit.

TABLEAU VI.

Equations réductibles au type (1) du tableau II.

$$(1)\qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + y'\left[q(x)\left\{\delta y + \frac{\varepsilon}{y}\right\} + r(x)\right]$$
$$+ [q'(x) - q(x)r(x)](\delta y^2 - \varepsilon) + s(x)y,$$
$$(\delta = 1 \text{ ou } 0, \qquad \varepsilon = 1 \text{ ou } 0).$$

Intégration:

$$y' = q(\delta y^2 - \varepsilon) + uy, \qquad u' = ru + s.$$

Transformation de passage de (E_3) à (1): $y = \mu Y$, $x = X$, [$\mu \equiv 1$ si ε ou δ est nul].

Un changement de variables $\eta = m(x)y$, $\xi = l(x)$, qui exige trois quadratures, ramène (1) à la forme (1) de II [où $a \equiv 0$ si $\delta = 0$, $b \equiv 0$ si $\varepsilon = 0$].

Equations réductibles au type (2) du tableau II.

$$(2) \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + y'\left[\frac{q(x)}{y} + \frac{r'(x)}{2r(x)} - q(x)\right]$$

$$+ (y+1)\left[r(x)y^2 + \frac{q(x)r'(x)}{2r(x)} - q'(x) - q^2(x)\right].$$

Intégration:

$$[y' + q(y+1)]^2 = ry^2[(y+1)^2 - u], \qquad \frac{u'}{u} = -2q.$$

Transformation de passage de (E_3) à (2): $y = \mu Y$ ou $\frac{\mu}{Y}$, $x = X$.

Un changement de variables $\eta = m(x)y$, $\xi = l(x)$, qui exige deux quadratures, ramène (2) à la forme (2) de II.

Equations réductibles au type (3) du tableau II.

$$(3) \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + y'\left[q(x) + \frac{1}{y}\right] + r(x)y^2 + s(x)y + q(x),$$

avec

$$s = \left(\frac{r'}{r} - q\right)\left[2(q + q') - \frac{r''}{r} + \frac{r'^2}{r^2}\right]$$

$$\left[y' + 1 + y\left(\frac{r'}{r} 2q\right)\right]^2 = 2ry^3 + uy^2, \qquad u' = 2qu + 2r.$$

Transformation de passage (E_3) à (3): $y = \mu Y$ ou $\frac{\mu}{Y}$, $x = X$.

Un changement de variables $\eta = m(x)y$, $\xi = l(x)$, qui exige deux quadratures, ramène l'équation à la forme (3) de II.

Equations réductibles au type (4) du tableau II.

$$(4) \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + \frac{q'(x)}{2q(x)}y' + q(x)\left[\alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma + \frac{\delta}{y}\right].$$

Intégration:

$$y'^2 = q(x)[\alpha y^4 + 2\beta y^3 - 2\gamma y - \delta + Ky^2].$$

Transformation de passage de (E_3) à (4): $y = \mu Y$, $x = X$.

---

(5) $$y'' = \frac{y'^2}{y} + \frac{(1-j)}{2} q(x) y' + \left[\frac{(1-j)}{2} q^2(x) - q'(x)\right] y + \frac{j-1}{2} y^j$$

$$(j = 3, 2, 0 \text{ ou } -1).$$

Intégration:

$$(y' + qy)^2 - y^{j+1} = uy^2, \qquad \frac{u'}{u} = (1-j)q.$$

Transformation de passage de (E_3) à (5): $y = \mu Y$, $y = X$.

Un changement de variables $\eta = m(x)y$, $\xi = l(x)$, qui exige deux quadratures, ramène (5) à la forme: $\eta''_{\xi^2} = \frac{\eta'^2_\xi}{\eta} + \eta^j$, (équation (4) de II où les $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont tous nuls sauf un seul).

---

(6) $$y'' = \frac{y'^2}{y} + q(x) y' + r(x) y.$$

Intégration:

$$\frac{y'}{y} = u, \qquad u' = qu + r.$$

Transformation de passage de (E_3) à (6): $y = Y$, $x = X$.

Un changement de variables $\eta = m(x)y$, $\xi = l(x)$, qui exige trois quadratures, ramène (6) à la forme: $\eta''_{\xi^2} = \frac{(\eta'_\xi)^2}{\eta}$, équation (4) de II où $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Equations réductibles au type (5) du tableau II.

(7) $$y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y'}{x} + \frac{1}{x}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}.$$

Transformation de passage de (E_3) à (7): $y = \mu Y$, $x = \lambda(X)$.

La transformation $x = e^\xi$ ramène (7) au type irréductible (5) de II.

26. Quatrième cas: $A(Y, X) = \frac{1}{2Y} + \frac{1}{Y-1}$.

Tout d'abord l'équation (E'') doit être de la forme

$$(E_4) \qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = \left(\frac{dY}{dX}\right)^2\left[\frac{1}{2Y} + \frac{1}{Y-1}\right] + \frac{dY}{dX}\left[\frac{aY+b}{Y-1}\right] + \frac{cY^2+dY}{Y-1}$$

(a, b, c, d fonctions analytiques de X).

Pour que (E_4) ait ses points critiques fixes, il faut et il suffit que la transformation $Y = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ ramène (E_4) à une équation (E_3) à points critiques fixes. On déduit de là que les équations (E_4) cherchées ou bien coïncident avec une des trois premières équations du tableau VII qui suit, ou bien se ramènent à la quatrième par une transformation: $x = \lambda(X)$ [λ désignant toujours une fonction algébrique des coëfficients a, b, c, d de (E_4) et de leurs dérivées].

TABLEAU VII.

$$(1) \quad y'' = y'^2\left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right] + \frac{2y'}{y-1}[q(x)y + r(x)] + 2y[q^2 - r^2 - q' - r'].$$

Intégration:

$$y' + 2(q+r)y = u(y-1)\sqrt{y}, \qquad \frac{u'}{u} = r - q.$$

La transformation: $y = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ ramène (1) à l'équation:

$$z'' = \frac{z'^2}{z} + \left[\frac{q+r}{2}\left(\frac{1}{z} + z\right) + (q-r)\right]z' + \left[\frac{q^2 - r^2 - q' - r'}{2}\right](1 - z^2),$$

(équation (1) de VI, ou $\delta = \varepsilon = 1$, et où $s \equiv 0$).

$$(2) \qquad y'' = y'^2\left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right] + y'\frac{q'(x)}{2q(x)} + 4q(x)y\left[\gamma + 2\delta\frac{y+1}{y-1}\right].$$

Intégration:

$$y'^2 = 2q(x)y\left[2\gamma(1-y^2) - \delta(y^2+6y+1) + K(y-1)^2\right].$$

La transformation $y = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ ramène (2) à l'équation:

$$z'' = \frac{z'^2}{z} + \frac{z'q'}{2q} + q\left[\delta\left(\frac{1}{z} - z^3\right) + \gamma(1 - z^2)\right],$$

(équation (4) de VI ou $\alpha = -\delta$, $\beta = -\gamma$).

$$(3) \qquad y'' = y'^2\left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right] + y'q(x).$$

Intégration:

$$y' = u(y-1)\sqrt{y}, \qquad \frac{u'}{u} = q.$$

La transformation $y = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ ramène (3) à l'équation:

$$z'' = \frac{z'^2}{z} + qz' \quad \text{(équation (6) de VI où } r \equiv 0).$$

$$(4) \qquad y'' = y'^2\left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right] - \frac{y'}{x} + 4\beta\frac{y}{x} + 8\delta y\frac{y+1}{y-1}.$$

Transformation de passage de (E_4) à (4): $y = Y$, $x = \lambda(X)$.

La transformation $y = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ ramène (4) à l'équation irréductible

$$z'' = \frac{z'^2}{z} - \frac{z'}{x} + \frac{\beta}{x}(1 - z^2) + \delta\left[\frac{1}{z} - z^3\right],$$

(équation (7) de VI où $\alpha = -\beta$, $\gamma = -\delta$).

---

27. Cinquième, sixième et septième cas:

$$A(Y, X) = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1}\right] \quad \text{ou} \quad = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1}\right] \quad \text{ou} \quad = \frac{2}{3}\frac{1}{Y} + \frac{1}{2(Y-1)}.$$

Pour que l'équation (E″) ait ses points critiques fixes, *il faut alors et il suffit qu'elle coïncide avec une des trois équations qui suivent.*

TABLEAU VIII.

(1) $$y'' = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right]y'^2 + q(x)y'.$$

Intégration:

$$\frac{y'}{y^{\frac{2}{3}}(y-1)^{\frac{2}{3}}} = u, \qquad \frac{u'}{u} = q.$$

La transformation: $y = \frac{1}{2}[1 + i\sqrt{4z^3 - 1}]$ ramène (1) à l'équation:

$z'' = \frac{6z^2}{4z^3 - 1}z'^2 + q(x)z'$, éq. (1) de IX (voir plus loin) où $g_2 = 0$, $g_3 = 1$.

(2) $$y'' = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right]y'^2 + q(x)y'.$$

Intégration:

$$\frac{y'}{y^{\frac{3}{4}}(y-1)^{\frac{3}{4}}} = u, \qquad \frac{u'}{u} = q.$$

La transformation $y = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{i\sqrt{4z^3 + z}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2}\right]$ ramène (2) à l'équation:

$z'' = \frac{\left(6z^2 + \frac{1}{2}\right)}{4z^3 + z}z'^2 + q(x)z'$, éq. (1) de IX où $g_2 = -1$, $g_3 = 0$.

(3) $$y'' = \left[\frac{2}{3}\frac{1}{y} + \frac{1}{2(y-1)}\right]y'^2 + q(x)y'.$$

Intégration:

$$\frac{y'}{y^{\frac{2}{3}}(y-1)^{\frac{1}{2}}} = u, \qquad \frac{u'}{u} = q.$$

La transformation $y = 4z^3$ ramène (3) à l'équation:

$z'' = \frac{6z^2}{4z^3 - 1}z'^2 + q(x)z'$, éq. (1) de IX où $g_2 = 0$, $g_3 = 1$.

28. Huitième cas: $A(Y, X) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Y-1} + \frac{1}{Y-H}\right)$,

$$H \equiv X \quad \text{ou} \quad H \equiv \alpha.$$

Si $H = \alpha$, il est loisible, en remplaçant Y par $\left(Y + \frac{1+H}{3}\right)$, de substituer à A l'expression:

$$A = \frac{6Y^2 - \frac{g_2}{2}}{4Y^3 - g_2 Y - g_3}, \quad (g_2, g_3 \text{ constantes numériques}).$$

Cela fait, *pour que l'équation considérée ait ses points critiques fixes, il faut et il suffit qu'elle coïncide avec une des deux équations qui suivent.*[1]

TABLEAU IX.

(1) $$y'' = \frac{6y^2 - \frac{g_2}{2}}{4y^3 - g_2 y - g_3} y'^2 + g(x) y'.$$

Intégration:

$$\frac{y'}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = u, \qquad \frac{u'}{u} = q.$$

Une transformation $x = l(\xi)$, qui exige deux quadratures, ramène (1) au type (1) de (III).

(2) $$y'' = \frac{y'^2}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right) + y'\left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\right) + \frac{y(y-1)}{2x(x-1)(y-x)}$$

équation (3) de III.

29. La question que nous nous sommes posés au début du n° 22 est maintenant complètement résolue:

Etant donnée une équation:

(E') $$\frac{d^2 Y}{dX^2} = R\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right)$$

[1] Il convient de remarquer que les fonctions $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$ pour l'équation (1) de IX, et $\sqrt{y(y-1)(y-x)}$ pour l'équation (2) de IX ont aussi leurs points critiques fixes.

où R est rationnel en $\frac{dY}{dX}$, Y, analytique en X, on sait reconnaître algébriquement si l'équation a ses points critiques fixes; quand il en est ainsi, on la ramène **algébriquement** *à une des équations des tableaux IV, V, VI, VII, VIII et IX.*

J'insiste sur le caractère vraiment simple et *pratique* des opérations algébriques qu'entraîne notre méthode. Tout revient à vérifier si l'équation donnée se laisse ramener par une transformation:

$$y = \frac{\mu(X)Y + \nu(X)}{\mu_1(X)Y + \nu_1(X)}, \qquad x = \lambda(X)$$

à un des types des tableaux IV, V, VI, VII, VIII et IX. Cette vérification ne présente aucune difficulté, et la réduction (quand elle est possible) s'opère algébriquement. Une fois cette réduction effectuée, l'équation (si elle est intégrable) se trouve toute intégrée dans les tableaux précédents.

Parmi les 33 équations des tableaux IV, V, ..., IX, il en est sept dont l'intégrale est une fonction *essentiellement transcendante des deux constantes*, à savoir les équations (7), (8), (13) de IV, (2) de V, (7) de VI, (4) de VII et (2) de IX.

Ces sept équations se ramènent d'ailleurs algébriquement à quatre d'entre elles, qui sont les équations (7), (8) de IV, (7) de VI et (2) de IX.

Quant aux équations dont l'intégrale renferme *algébriquement les deux constantes*, ce sont les *trois* équations (1), (3) de IV et (1) de V, c'est-à-dire:

$$y'' = q(x)y' + r(x)y + s(x),$$

$$y'' = -(3yy' + y^3) + q(x)y + r(x), \quad \text{ou} \quad y = \frac{z'}{z}, \qquad z''' = qz' + rz,$$

$$y'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y'^2}{y} + q(x)y' + r(x)y, \quad \text{ou} \quad y = z^n, \qquad z'' = qz' + \frac{r}{n}z.$$

L'intégrale des *vingt-trois* autres équations est une fonction *semi-transcendante* des constantes. Elles équivalent respectivement à un système

$$(21) \qquad P(y', y, x) = uH(y), \qquad u' = \rho(x)u + \sigma(x)$$

où H est un polynôme en y (indépendant de x), et P un polynôme en y', y, dont les coëfficients ainsi que $\rho(x)$ et $\sigma(x)$ sont des combinaisons *rationnelles* des coëfficients de (E') et de leurs dérivées.

Pour des valeurs numériques (arbitraires) de x et u, le *genre* de la relation $P = 0$ entre y', y est égal à zéro ou à un. Une transformation $y = \varphi(v, u, x)$ ramène l'équation à points critiques fixes $P(y', y, x) = u(x)$ à une des deux suivantes:

$$v' = \lambda(u, x)v^2 + \mu(u, x)v + \nu(u, x),$$

ou

$$\frac{v'}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} = \lambda(u, x), \quad (k \text{ numérique}).$$

La fonction $\varphi(v, u, x)$ est rationnelle en v [ou, dans le sesond cas, en v et $\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}$] et ses coëfficients sont des fonctions algébriques de u, des coëfficients de (E') et de leurs dérivées. La fonction $u(x)$ se déduit des coëfficients de (E') par les deux quadratures:

$$e^{\int \rho(x)dx}, \quad \int dx\, \sigma e^{-\int \rho dx}.$$

Nous vérifions bien ainsi, en les précisant, les théorèmes généraux rappelés au n° 17.

30. La discussion précédente permet de résoudre le problème intéressant qui s'énonce ainsi:

Déterminer explicitement toutes les équations à points critiques fixes de la forme:

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = R\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right)$$

où R est rationnel en $\frac{dY}{dX}$, Y et analytique en X.

La réponse est immédiate: Il suffit d'adjoindre aux tableaux I, II et III les tableaux V, VII et VIII,[1] et d'effectuer sur toutes les équations I, II, III, V, VII, VIII la transformation la plus générale:

[1] Il est loisible de supposer:

$$\left.\begin{array}{llll} q \equiv 0,\ r \equiv 0 & \text{dans l'équation} & (1) \\ q \equiv 1 & \text{»} \quad \text{»} & (2) \\ q \equiv 0 & \text{»} \quad \text{»} & (3) \end{array}\right\} \text{de V}$$

$$\left.\begin{array}{llll} q \equiv r & \text{»} \quad \text{»} & (1) \\ q \equiv 1 & \text{»} \quad \text{»} & (2) \\ q \equiv 0 & \text{»} \quad \text{»} & (3) \end{array}\right\} \text{de VII}$$

$q \equiv 0$ dans les 3 éq. VIII.

$$(22) \qquad y = \frac{a(X)Y + b(X)}{c(X)Y + d(X)}, \qquad x = l(X),$$

$[a, b, c, d, l$ sont des fonctions analytiques quelconques de $X]$.

En particulier, *toutes les équations à points critiques fixes de la forme*

$$(\mathrm{F}) \quad \frac{d^2Y}{dX^2} = [a(X)Y + b(X)]\frac{dY}{dX} + c(X)Y^3 + d(X)Y^2 + e(X)Y + f(X)Y + g(X)$$

s'obtiennent en effectuant sur les sept équations du tableau I la transformation

$$(23) \qquad y = a(X)Y + b(X), \qquad x = l(X)$$

la plus générale.

Parmi ces 7 types d'équations I, il en est deux [le type (5), et le type (3) où $\alpha \neq 0$] dont l'intégrale possède *deux* familles de *pôles mobiles:* à savoir deux développements polaires distincts, déduits de l'équation différentielle.

Les types (1), (2), (6), (7) d'une part, le type (4) et le type (3) [où $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$] d'autre part possèdent *une seule* famille de *pôles mobiles* qui sont simples pour le premier groupe, doubles pour le second. Enfin le type (3), (où $\alpha = \beta = 0$) — équations linéaires — ne possède pas de pôles mobiles.

Pour qu'une équation (F) donnée possède deux familles de pôles mobiles, il faut et il suffit que les coëfficients $a, b, \ldots, g$, satisfassent à deux conditions différentielles. Quand ces conditions sont remplies, l'équations est réductible par une transformation (23) à l'une des équations (3) ou (5) de I; elle a donc ses points critiques fixes. Les deux conditions indiquées par M. Picard[1] (Acta mathematica, tome 17, p. 300) se trouvent ici être *suffisantes* sans être *nécessaires*.

Enfin, dans le problème énoncé au début de ce n°, assujettisons le coëfficient différentiel $R\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right)$, *rationnel* en $\frac{dY}{dX}$, Y, à être ***algébrique en X.*** La solution peut alors recevoir la forme suivante:

Toutes les équations à points critiques fixes de la forme

$$\frac{d^2X}{dX^2} = R\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right)$$

[1] Voir le n° 8, p. 9 et la note 1 de la page 10.

où R est rationnel en $\frac{dY}{dX}$, Y et algébrique en X, se déduisent des 32 équations IV, V, VI, VII, VIII et IX (où l'équation 13 de IV est supprimée) en choisissant, pour les coëfficients **arbitraires** *$q(x)$, $r(x)$, ... de ces équations, des fonctions algébriques quelconques et en effectuant sur ces équations la transformation algébrique (22) la plus génévle.* [1]

31. *Equations* (E) *où $R(y', y, x)$, rationnel en y', est algébrique en y.*

Il nous reste maintenant à étudier les équations (E) où R est non plus *rationnel*, mais *algébrique* en y.

Soit donc l'équation:

$$y'' = A(y, x)y'^2 + B(y, x)y' + C(y, x), \tag{E}$$

où A, B, C sont algébriques en y et analytiques en x. Pour x arbitrairement choisi, il est loisible d'exprimer rationnellement $A(y), B(y), C(y)$ à l'aide de y et d'une irrationnelle $t(y)$, et cela de telle façon que $t(y)$ soit une fonction rationnelle de y, A, B, C.

Pour cela, il suffit, par exemple, de poser:

$$t = A\lambda^2 + B\lambda + C, \tag{24}$$

λ désignant une constante ou une fonction de x; la fonction algébrique $t(y)$ vérifie une relation:

$$H(t, y, x) = 0 \tag{25}$$

où H est un polynôme en t, y, dont les coëfficients dépendent analytiquement de x. Les fonctions A, B, C s'expriment *rationnellement* [2] à l'aide de t et de y, soit:

$$A = L(t, y, x), \qquad B = M(t, y, x), \qquad C = N(t, y, x),$$

les coefficients $a(x)$, $b(x)$, ... des fonctions rationnelles $L(t, y)$, $M(t, y)$, $N(t, y)$ étant des fonctions analytiques de x.

---

[1] J'entends par là que les coëfficients a, b, c, d, l, de (22) sont des fonctions algébriques quelconques de X.

[2] La valeur de x étant arbitrairement choisie, il n'y a d'exception que pour un nombre fini de valeurs de λ; on donnera à λ une valeur distincte de ces valeurs exceptionnelles.

Inversement, la fonction $t(y)$ s'exprime *rationnellement* à l'aide de y, A, B, C, ou, si l'on veut, des variables y, y', y'' liées par la relation (E). Soit:

$$t = \rho(y'', y', y, x), \tag{26}$$

x figurant analytiquement[1] dans les coëfficients de la fraction rationnelle $\rho(y'', y', y)$.

Ceci posé, nous établissons d'abord ce théorème:

Pour que l'équation (E) *ait ses points critiques fixes, il faut que, pour x quelconque, le genre ϖ de la relation algébrique $H(t, y, x) = 0$ entre t, y soit égal à 0 ou à 1.*[2]

On sait reconnaître algébriquement si cette condition est remplie. Quand $\varpi = 0$, on sait exprimer *birationnellement*[3] y et t en fonction d'un paramètre Y, et quand $\varpi = 1$, en fonction de Y et de $\sqrt{Y(Y-1)(Y-H)}$; H désignant une combinaison algébrique des coëfficients $a(x)$, $b(x)$ ... de A, B, C. Si H est une *constante*, il est loisible de donner au radical la forme $\sqrt{4Y^3 - g_2 Y - g_3}$ (g_2, g_3 constantes numériques). Si H est une fonction de x, on posera $H = X$. Dans tous les cas, la fonction $Y(x)$ ou $Y(X)$ a ses points critiques fixes en même temps que l'intégrale générale $y(x)$ de (E).

32. Moyennant une transformation algébrique toute élémentaire, nous sommes ramenés ainsi aux cas où $R(y', y, x)$ est soit rationnel en y, soit rationnel en y, $\sqrt{P(y)}$, P désignant un des deux polynômes $(4y^3 - g_2 y - g_3)$ et $[y(y-1)(y-x)]$. Pour que l'équation donnée ait ses points critiques

---

[1] Si A, B, C sont algébriques en x, il suffit de choisir $\lambda(x)$ algébrique pour que x figure *algébriquement* dans toutes ces formules.

[2] Il est loisible de substituer à $t(y)$ toute irrationnelle $T(y)$ qui lui correspond par la transformation:

$$T = r(t, y, x), \qquad t = r_1(T, y, x)$$

où r, r_1 sont rationnels le premier en t, y, le second en T, y et analytiques en x. Inversement, toute irrationnelle $T(y)$ qui peut remplacer $t(y)$ s'en déduit par une transformation birationnelle de l'espèce précédente; cette transformation ne change pas le genre ϖ.

[3] J'entends par là que y et t sont rationnels en Y et qu'inversement Y est rationnel en y, t; x figure analytiquement.

fixes, il faut et il suffit que l'équation transformée jouisse elle-même de cette propriété.

D'après cela, deux cas sont à distinguer:

Si $\varpi = 0$, nous sommes ramenés au problème du n° 22 résolu plus haut dans tous ses détails.

Si $\varpi = 1$, je montre que l'équation transformée doit coïncider avec un des trois types du tableau X qui suit:

TABLEAU X.

$$(1) \qquad y'' = \frac{6y^2 - \frac{g_2}{2}}{4y^3 - g_2 y - g_3} y'^2 + q(x) y' + r(x)\sqrt{4y^3 - g^2 y - g_3}.$$

Intégration:

$$\frac{y'}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = u, \qquad u' = qu + r.$$

Une transformation $\eta = \varphi(y, x)$, $\xi = l(x)$, (où φ est algébrique en y mais qui exige 3 quadratures), ramène (1) à l'équation

$$\eta''_{\xi^2} = \frac{6\eta^2 - \frac{g_2}{2}}{4\eta^3 - g_2\eta - g_3} \qquad \text{(éq. (1) de III).}$$

$$(2) \quad y'' = \frac{y'^2}{2}\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right] + y'\left[\frac{1}{x-y} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\right] + \frac{y(y-1)}{2x(x-1)(y-x)}$$
$$+ q(x)\sqrt{y(y-1)(y-x)}.$$

Intégration:

$$J(y, x) = u, \qquad u'' + \frac{2x-1}{x(x-1)}u' + \frac{u}{4x(x-1)} = q,$$

où,

$$J(y, x_0) = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-x_0)}}$$

et par suite,

$$u = u_1(x) + K_1\omega_1 + K_2\omega_2;$$

($2\omega_1$ et $2\omega_2$ périodes de $J(y)$; K_1 et K_2 constantes arbitraires).

Une transformation $\eta = \varphi(y, y_1)$, où φ est algébrique en y, y_1 et où y_1

désigne une solution quelconque de (2), annule $q(x)$, c'est-à-dire ramène (2) à l'équation (2) de III.

---

(3)
$$y'' = \frac{y'^2}{2}\left[\frac{6y^2 - \frac{g_2}{2}}{4y^3 - g_2 y - g_3} + \frac{i\pi}{\omega\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}\right] + q(x)y' + r(x)\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$$

[2ω période quelconque de $\wp(u, g_2, g_3)$].

Intégration:
$$\frac{y'}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = u, \qquad u' = \frac{i\pi}{\omega}u^2 + qu + r.$$

Une transformation $\eta = \varphi(y, x)$, $\xi = l(x)$ [algébrique en y, mais qui exige la connaissance d'une intégrale de (3)] ramène (3) à l'équation:
$$\eta''_{\xi^2} = \eta'^2\left[\frac{6\eta^2 - \frac{g_2}{2}}{4\eta^3 - g_2\eta - g_3} + \frac{i\pi}{\omega\sqrt{4\eta^3 - g_2\eta - g_3}}\right]$$
[équation (3) de III].

---

33. Les conclusions auxquelles nous arrivons peuvent s'énoncer ainsi:

Etant donnée une équation

(E)
$$y'' = R(y', y, x)$$

où R est rationnel en y', algébrique en y, analytique en x, on sait reconnaître ***algébriquement***[1] *si son intégrale a ses points critiques fixes, ou bien on ramène algébriquement l'équation à la forme:*

(27)
$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'^2\left[\frac{6y^2 - \frac{g_2}{2}}{4y^3 - g_2 y - g_3} + \frac{\alpha}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}\right] + q(x)y' + r(x)\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$$

(g_2, g_3, α constantes numériques).

[1] J'entends par là, comme je l'ai dit (n° 16), que les conditions pour que les points critiques de (E) soient fixes se traduisent par un nombre fini de relations différentielles algébriques entre les coefficients $a(x)$, $b(x)$, ... de (E).

Dans ce dernier cas, pour que l'équation donnée ait ses points critiques fixes, il faut encore que la quantité $\frac{2i\pi}{\alpha}$ soit une période de $\wp(u, g_2, g_3)$, **condition transcendante.** Quand cette condition est remplie, l'intégrale générale a ses points critiques fixes, *mais possède des points essentiels (isolés) mobiles.*

Dans tous les autres cas, l'intégrale ne présente d'autres singularités mobiles que des *pôles*, et l'équation se ramène *algébriquement* à un des types des tableaux IV, V, VI, VII, VIII, IX et X.

La discussion précédente indique avec une précision parfaite les opérations (très simples) qui réalisent cette réduction, ainsi que les intégrations à effectuer dans les divers cas où l'équation est intégrable.

Nous vérifions, là encore, en les précisant, les théorèmes généraux rappelés au n° 17.

34. Posons-nous maintenant la question suivante:

Déterminer toutes les équations à points critiques fixes de la forme:

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = R\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right) \tag{e}$$

où R est rationnel en $\frac{dY}{dX}$ et algébrique en Y et en X.

La réponse est la suivante:

On considère toutes les équations du tableau IV [abstraction faite de l'équation (13)] et toutes les équations des tableaux VI et X, où les fonctions arbitraires $q(x)$, $r(x)$ etc.... sont supposées *algébriques.* On effectue dans ces équations la transformation la plus générale

$$Y = \varphi(y, x), \qquad X = \lambda(x)$$

où φ et λ sont algébriques en x et où φ est rationnel soit en y (pour les équations IV, VI) soit en y et $\sqrt{P(y)}$ (pour les équations X)

$$\begin{bmatrix} P \equiv 4y^3 - g_2 y - g_3 \text{ pour (1) et (3) de X} \\ P \equiv y(y-1)(y-x) \text{ pour (2) de X} \end{bmatrix}.$$

Toutes les équations ainsi obtenues ont leurs points critiques fixes et elles constituent les seules équations (e) *qui jouissent de cette propriété.*

35. *Remarques sur les équations* (e).

Parmi les équations (e) à points critiques fixes, celles dont l'intégrale est une fonction *essentiellement transcendante des deux constantes* peuvent seules conduire à des *transcendantes nouvelles.* D'après ce qui précède, ces dernières équations sont *réductibles algébriquement à un des quatre types:*

$$(28)\qquad y'' = 6y^2 + x$$

$$(29)\qquad y'' = 2y^3 + xy + \alpha$$

$$(30)\qquad y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y'}{x} + \frac{1}{x}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}$$

$$(31)\qquad y'' = \frac{y'^2}{2}\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right] + y'\left[\frac{1}{x-y} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\right] + \frac{y(y-1)}{2x(x-1)(y-x)} + q(x)\sqrt{y(y-1)(y-x)}.$$

L'intégrale $y(x)$ des deux premiers types est *méromorphe* dans tout le plan; celle du 3e admet deux points critiques *transcendants fixes* $x = 0$, $x = \infty$; *si on change x en* e^X, $y(X)$ est méromorphe dans tout le plan des X. — Enfin l'intégrale $y(x)$ de (31) admet trois points critiques fixes $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$; pour rendre la fonction uniforme, il faut faire un changement de variable $x = \psi(X)$, où $\psi(X)$ est une fonction telle que la fonction modulaire, qui doit présenter un ensemble parfait de singularités essentielles:[1] l'intégrale générale $y(X)$ est alors une fonction uniforme qui présente les mêmes singularités essentielles que $\psi(X)$, et ne saurait par suite être méromorphe.

Les seules fonctions méromorphes nouvelles qu'engendrent les équations (e) *à points critiques fixes, se laissent donc définir par les trois équations* (28), (29) *et:*

$$(32)\qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + e^x(\alpha y^2 + \beta) + e^{2x}\left(\gamma y^3 + \frac{\delta}{y}\right).$$

[1] En effet, $\psi(X)$ est une fonction uniforme qui ne doit acquérir aucune des trois valeurs $0, 1, \infty$.

Faisons une dernière remarque sur le cas où l'intégrale d'une équation (e) (à points critiques fixes) présente des *singularités essentielles mobiles:* ces singularités (qui sont toujours des points essentiels isolés au sens de WEIERSTRASS) peuvent être en nombre infini: elles admettent alors un nombre fini de *points-limites* qui sont *fixes.*

Considérons par exemple l'équation:

$$y'' = y'^2\left[\frac{\left(6y^2 - \frac{g_2}{2}\right)}{4y^3 - g_2 y - g_3} + \frac{i\pi}{\omega}\frac{1}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}\right] - \frac{i\pi}{\omega}\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$$

qui équivaut à la suivante:

$$\frac{y'}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = \frac{1 + e^{\frac{2i\pi}{\omega}(x+h)}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{\omega}(x+h)}};$$

l'intégrale est une fonction uniforme qui admet comme points essentiels les points $x = -h + n\omega$ (n entier positif, negatif ou nul), points en nombre infini, dont $x = \infty$ est le point limite.

Equations (E) *indépendantes de x.*

36. Les tableaux formés précedemment permettent de déterminer explicitement toutes les équations

$$Y'' = R(Y', Y) \tag{f}$$

à intégrale générale uniforme [R est rationnel en $\frac{dY}{dX}$, algébrique en Y et indépendant de X].

Il suffit, dans les tableaux IV, VI, X, de ne considérer que les types où x ne figure pas[1] dans le coëfficient différentiel et de faire le changement de variables: $Y = \varphi(y)$, φ désignant une fonction *rationnelle* de y (ou de y et de $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$ pour les équations (1) et (3) de X); on ne change pas la variable indépendante.

Nous sommes ainsi conduits au tableau suivant:

[1] D'après cela, les types (7), (8), (12) et (13) de IV, (7) de VI, (2) de X doivent être exclus. Dans les autres types, les fonctions arbitraires $q(x)$, etc., doivent être remplacées par des constantes arbitraires.

TABLEAU XI.

(1) $$y'' = -3yy' - y^3 + \alpha y + \beta.$$

Intégration:

$$y = \frac{z'}{z}, \qquad z''' = \alpha z' + \beta z.$$

(2) $$y'' = -2yy' + \alpha(y' + y^2) + \beta.$$

Intégration:

$$y' + y^2 = Ke^{\alpha x} - \frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{si} \quad \alpha \neq 0, \quad \text{et} \quad y' + y^2 = \beta x + K, \quad \text{si} \quad \alpha = 0.$$

(3) $$y'' = \alpha y' + \beta y + \gamma,$$

équation linéaire du second ordre à coëfficients constants.

(4) $$y'' = 2\alpha y^3 + 6\beta y^2 + \gamma y + \alpha.$$

Intégration:

$$y'^2 = \alpha y^4 + 4\beta y^3 + \gamma y^2 + 2\delta y + K.$$

(5) $$y'' = 3\alpha y' + 2y^3 - 2\alpha^2 y, \qquad \alpha \neq 0.$$

Intégration:

$$y = i\alpha Ke^{\alpha x} sn_{k^2=-1}(u), \qquad u = Ke^{\alpha x} + K_1.$$

(6) $$y'' = \frac{5}{2}\alpha y' + 6y^2 - 3\frac{\alpha^2}{2}y, \qquad \alpha \neq 0.$$

Intégration:

$$y = \frac{\alpha^2 K^2}{4} e^{\alpha x} \wp(u, 0, -1), \qquad u = Ke^{\frac{\alpha}{2}x} + K_1.$$

(7) $$y'' = -yy' + y^3 + \alpha(3y' + y^2) - 2\alpha^2 y.$$

Intégration:

$$y = Ke^{\alpha x}\frac{\wp'(u, 0, 1)}{\wp(u, 0, 1)}, \qquad \begin{cases} u = \dfrac{K}{\alpha}e^{\alpha x} + K_1, & \text{si} \quad \alpha \neq 0 \\ u = Kx + K_1, & \text{si} \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

---

(8) $$y'' = -yy' + y^3 - \alpha^2 y, \qquad \alpha \neq 0.$$

Intégration:

$$y = \frac{\alpha}{2\sqrt{3}}\frac{\wp'(u, 12, K)}{\wp(u, 12, K) - 1}, \qquad u = \frac{\alpha x}{2\sqrt{3}} + K_1.$$

---

(9) $$y'' = -yy' + y^3 + \alpha(3y' + y^2) - 14\alpha^2 y - 24\alpha^3, \qquad \alpha \neq 0.$$

Intégration:

$$y = \alpha K e^{\alpha x}\frac{\wp'(u, 0, 1) + \dfrac{2e^{-3\alpha x}}{K^3}}{\wp(u, 0, 1) - \dfrac{e^{-2\alpha x}}{K^2}}, \qquad u = Ke^{\alpha x} + K_1.$$

---

(10) $$y'' = \frac{y'^2}{y} + y'\left[\alpha\left(y + \frac{\varepsilon}{y}\right) + \beta\right] - \alpha\beta[y^2 - \varepsilon] + \gamma y, \qquad (\varepsilon = 0 \text{ ou } 1).$$

Intégration:

$$y' = \alpha(y^2 - \varepsilon) + uy, \qquad \begin{cases} u = Ke^{\beta x} - \dfrac{\beta}{\alpha}, & \text{si} \quad \beta \neq 0, \\ u = \gamma x + K, & \text{si} \quad \beta = 0. \end{cases}$$

---

(11) $$y'' = \frac{y'^2}{y} + \alpha y'\left[\frac{1}{y} - 1\right] + (y + 1)[\beta^2 y^2 - \alpha^2].$$

Intégration:

$$y = -1 + Ke^{-\alpha x}\frac{1 + v^2}{1 - v^2}, \qquad 2v' = \beta[Ke^{-\alpha x}(1 + v^2) + v^2 - 1].$$

---

(12) $$y'' = \frac{y'^2}{y} + y'\left[\alpha + \frac{1}{y}\right] + 2\beta^2 y^2 - 2\alpha^2 y + \alpha, \qquad (\alpha \text{ ou } \beta \neq 0).$$

Intégration:

$$y = \frac{1}{2\alpha} + e^{-2\alpha x}[K + u^2], \qquad u' = \beta e^{\alpha x}\left[\frac{1}{2\alpha} + (K + u^2)e^{-2\alpha x}\right], \quad \text{si} \quad \alpha \neq 0,$$

$$y = -x + K + u^2, \qquad u' = \beta[u^2 + K - x], \quad \text{si} \quad \alpha = 0, \ \beta \neq 0.$$

---

(13) $$y'' = \frac{y'^2}{y} + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma + \frac{\delta}{y}.$$

Intégration:

$$y'^2 = \alpha y^4 + 2\beta y^3 - 2\gamma y - \delta + Ky^2.$$

---

(14) $$y'' = \frac{y'^2}{y} + \frac{(j-1)}{2}\alpha y' - \frac{(j-1)}{2}\alpha^2 y + \frac{(j-1)}{2} y^j, \quad (j = 2 \text{ ou } 3, \ \alpha \neq 0).$$

Intégration:

$$y = \frac{\alpha K}{2}\frac{e^{\alpha x + u}}{(1 - e^{2u})}, \qquad u = Ke^{\alpha x} + K_1, \quad \text{si} \quad j = 3,$$

$$y = \frac{\alpha^2 K^2 e^{\alpha x + u}}{(1 - e^u)^2}, \qquad u = Ke^{\frac{\alpha}{2}x} + K_1, \quad \text{si} \quad j = 2.$$

---

(15) $$y'' = \frac{y'^2}{y} + \alpha y' + \beta y.$$

Intégration:

$$y = Ke^v, \qquad \begin{cases} v = -\dfrac{\beta}{\alpha}x + K_1 e^{\alpha x}, & \text{si} \quad \alpha \neq 0, \\[2ex] v = \dfrac{\beta x^2}{2} + K_1 x, & \text{si} \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

---

(16) $$y'' = y'^2\left[\frac{6y^2 - \frac{g_2}{2}}{4y^3 - g_2 y - g_3} + \frac{\lambda}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}\right] + \alpha y' + \beta\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3},$$

$$\left[\lambda = 0 \text{ ou } \lambda = \frac{i\pi}{\omega}, \ 2\omega \text{ période quelconque de } \wp(u, g_2, g_3)\right].$$

Intégration:

$$y = \wp(u, g_2, g_3)$$

avec:

$$u = \frac{\beta y^2}{2} + Kx + K_1, \qquad \text{si} \quad \lambda = 0, \ \alpha = 0$$

$$u = -\frac{\beta}{\alpha}x + Ke^{\alpha x} + K_1, \qquad \text{si} \quad \lambda = 0, \ \alpha \neq 0$$

$$u = \int \frac{g + hKe^{\mu x}}{1 - Ke^{\mu x}}dx + K_1, \quad \text{si} \quad \lambda = \frac{i\pi}{\omega}, \ \omega\alpha^2 \neq 4\beta i\pi$$

$$\left[\mu = \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\frac{i\pi}{\omega}}, \qquad g = \frac{\omega}{2i\pi}(\alpha + \mu), \qquad h = \frac{\omega}{2i\pi}(\alpha - \mu)\right]$$

$$u = -\frac{\alpha\omega}{2i\pi}x + \frac{\omega}{i\pi}\log(x - K) + K_1, \quad \text{si} \quad \lambda = \frac{i\pi}{\omega}, \ \omega\alpha^2 = 4\beta i\pi.$$

Toutes les équations (f) *à points critiques fixes se déduisent des* (16) *équations précédentes par le changement de variables:*

$$Y = \varphi(y),$$

φ désignant une fonction rationnelle de y (ou, pour l'équation (16), de y et de $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$).

37. Ces 16 équations XI sont toutes *intégrables,* j'entends réductibles aux quadratures et à une équation de Riccati. Leur intégrale est une combinaison de fonctions *rationnelles, exponentielles et elliptiques,* exception étant faite pour les (5) types (2), (10), (11), (12) et (16) (où $\lambda \neq 0$): l'intégrale des équations (2), (10), (11), (12) dépend *d'une équation de* Riccati dont le coëfficient différentiel est *linéaire en x ou $e^{\mu x}$* (μ constante numérique). L'intégrale de l'équation (16) (où $\lambda \neq 0$) est donnée par $y = \wp(u)$ avec

$$u = \int \rho(e^{\mu x})dx \quad \text{ou bien} \quad u = \mu x + \nu \log(x - K) + K_1,$$

ρ désignant une fraction du premier degré en $e^{\mu x}$. Toutes les périodes de u sont périodes de $\wp(u, g_2, g_3)$. Tous les infinis de u sont des *points essentiels* de $y(x)$.

L'intégrale des 16 équations XI est une fonction *semi-transcendante* des constantes; abstraction faite des équations (1) et (3) qui renferment les constantes *au premier degré.*

38. Proposons-nous maintenant de former *toutes les équations*

(f') $$Y'' = R(Y', Y)$$

(*où* R *est* **rationnel** *en* Y', Y) *dont l'intégrale générale est uniforme.*

Ces équations se déduisent de la manière suivante du tableau XI.

Annulons, dans (16), λ et β; puis effectuons les transformations:

$Y = \dfrac{hy + k}{h_1 y + k_1}$, ($h$, k, h_1, k_1 constantes), dans les 16 équations XI,

$Y = \dfrac{hy^n + k}{h_1 y^n + k_1}$ (n entier) . . . dans l'équation (3) de XI où $\gamma = 0$,

$Y = \dfrac{hy^2 + k}{h_1 y^2 + k_1}$ . . . . $\begin{cases} \text{dans l'équation (4) où } \alpha = 1,\ \beta = 0,\ \delta = 0 \\ \text{et dans l'équation (5),} \end{cases}$

$Y = \dfrac{h(y+1)^2 + k(y-1)^2}{h_1(y+1)^2 + k_1(y-1)^2}$. $\begin{cases} \text{dans l'équation (10) où } \varepsilon = 1,\ \gamma = 0 \\ \text{dans l'équation (13) où } \alpha = -\delta,\ \beta = -\gamma \\ \text{dans l'équation (15) où } \beta = 0, \end{cases}$

$Y = \dfrac{hz + k}{h_1 z + k_1}$, $\left.\begin{array}{r} \text{avec } z = \frac{1}{2}[1 + i\sqrt{4y^3 - 1}] \\ \text{ou } z = 4y^3 \end{array}\right\}$ dans l'équation (16) où $\begin{cases} \lambda = \beta = g_2 = 0, \\ g_3 = 1, \end{cases}$

$Y = \dfrac{hz + k}{h_1 z + k_1}$, avec $z = \dfrac{1}{2}\left[1 + i\dfrac{\sqrt{4y^3 + y}}{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}\right]$ dans l'équation (16) où $\begin{cases} \lambda = \beta = g_3 = 0, \\ g_2 = -1. \end{cases}$

Les équations obtenues par toutes ces transformations constituent les seules équations (f') *dont l'intégrale générale est uniforme.*

On peut donner au théorème une autre forme en adjoignant au tableau XI le tableau suivant:

TABLEAU XII.

(1) $$y'' = \frac{y'^2}{y}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \alpha y' + \beta y, \quad (n \text{ entier}),$$

ou

$$y = z^n, \qquad z'' = \alpha z' + \frac{\beta}{n} z \quad (\text{éq. } (3) \text{ de XI où } \gamma = 0).$$

---

(2) $$y'' = \frac{y'^2}{2y} + 2[2y^2 + \varepsilon y] \qquad (\varepsilon = 0 \text{ ou } 1),$$

ou

$$y = z^2, \qquad z'' = 2z^3 + \varepsilon z \quad (\text{éq. } (4) \text{ de XI où } \alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = \varepsilon,\ \delta = 0).$$

---

(3) $$y'' = \frac{y'^2}{2y} - 3\alpha y' + 4y^2 - 4\alpha^2 y$$

ou

$$y = z^2, \qquad z'' = 3\alpha z' + 2z^3 - 2\alpha^2 z \quad [\text{éq. } (5) \text{ de XI}].$$

---

(4) $$y'' = y'^2\left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right] + \frac{2y'}{y-1}(\alpha y + \beta) + 2y(\alpha^2 - \beta^2)$$

ou

$$y = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2,$$

$$z'' = \frac{z'^2}{z} + z'\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\frac{1}{z} + z\right) + 2(\alpha - \beta)\right] + \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}\right)(1 - z^2),$$

$$(\text{éq. } (10) \text{ de XI où } \varepsilon = 1,\ \gamma = 0).$$

---

(5) $$y'' = y'^2\left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right] + 4y\left[\gamma y + 2\delta \frac{y+1}{y-1}\right]$$

ou

$$y = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2, \qquad z'' = \frac{z'^2}{z} + \delta\left(\frac{1}{z} - z^3\right) + \gamma(1 - z^2)$$

$$(\text{éq. } (13) \text{ de XI où } \alpha = -\delta,\ \beta = -\gamma).$$

(6) $$y'' = y'^2\left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right] + \alpha y'$$

ou

$$y = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2, \qquad z'' = \frac{z'^2}{z} + \alpha z' \quad \text{(éq. (15) de XI où } \beta = 0\text{)}.$$

---

(7) $$y'' = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right]y'^2 + \alpha y'$$

ou

$$y = \frac{1}{2}[1 + i\sqrt{4z^3 - 1}], \qquad z'' = \frac{6z^2}{4z^3 - 1}z'^2 + \alpha z'$$

(éq. (16) de XI où $\lambda = 0$, $\beta = 0$, $g_2 = 0$, $g_3 = 1$).

---

(8) $$y'' = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{(y-1)}\right)y'^2 + \alpha y'$$

ou

$$y = \frac{1}{2}\left[1 + i\frac{\sqrt{4z^3 + z}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2}\right], \qquad z'' = \frac{6z^2 + \frac{1}{2}}{4z^3 + z}z'^2 + \alpha z'$$

(éq. (16) de XI où $\lambda = 0$, $\beta = 0$, $g_2 = -1$, $g_3 = 0$).

---

(9) $$y'' = \left(\frac{2}{3y} + \frac{1}{2(y-1)}\right)y'^2 + \alpha y'$$

ou

$$y = 4z^3, \qquad z'' = \frac{6z^2}{4z^3 - 1}z'^2 + \alpha z'$$

(éq. (16) de XI où $\lambda = 0$, $\beta = 0$, $g_2 = 0$, $g_3 = 1$).

Toutes les équations:

$$Y'' = R(Y', Y) \quad [R \text{ rationnel en } Y', Y]$$

dont l'intégrale générale est uniforme s'obtiennent en effectuant sur les 25 *équations* XI *et* XII *la transformation*

$$y = \frac{hY + k}{h_1 Y + k_1}, \quad (h, k, h_1, k_1 \text{ constantes}),$$

la plus générale.

Le problème abordé par M. Picard[1] dans son célèbre mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables se trouve ainsi résolu[2] avec une précision parfaite.

Les 9 premières équations XI ont été formées par M. Mittag-Leffler[3] dans son étude des équations:

$$(f'') \qquad y'' = a_1 yy' + a_2 y' + a_3 y^3 + a_4 y^2 + a_5 y + a_6$$
$$(a_1, \ldots, a_6 \text{ constantes}).$$

M. Mittag-Leffler a déterminé tous les cas où l'intégrale de (f'') est *méromorphe* et admet effectivement des pôles.[4] Notre discussion suppose seulement l'intégrale *uniforme;* mais pour les équations (f'') l'intégrale ne peut être uniforme sans être méromorphe.

39. Pour ce qui est du problème:

Reconnaître si une équation donnée

$$Y'' = R(Y', Y) \quad \begin{pmatrix} R \text{ rationnel en } Y' \\ \text{algébrique en } Y \end{pmatrix}$$

a son intégrale uniforme,

la solution d'après ce qui précède est évidente.

Une transformation algébrique toute élémentaire permet de supposer que R est *rationnel soit en* Y, *soit en* Y *et* $\sqrt{4Y^3 - g_2 Y - g_3}$.

---

[1] Journal de Liouville, 4e série, t. 5 (1887), p. 277—293.

[2] J'ai résolu ce problème dès l'année 1893 (voir les Comptes Rendus de l'Ac. des sciences de Paris, 24 juillet 1893), mais par une méthode beaucoup plus compliquée.

[3] Comptes Rendus de l'Ac. des sc. de Paris, 10 juillet 1893; Acta mathematica, t. 18 (1894), p. 233—246.

[4] La méthode de M. Mittag-Leffler négligeait l'hypothèse où l'intégrale serait holomorphe dans tout le plan. Mait il était bien facile de voir que cette hypothèse n'est réalisée que dans le cas où l'équation (f'') est *linéaire*.

Dans le premier cas, l'équation doit être réductible à une des 25 équations XI et XII par une transformation: $Y = \frac{hy + k}{h_1 y + k_1}$; ce qu'on reconnaît immédiatement.

Dans le second cas, l'équation doit coïncider avec une équation de la forme (16) de XI; pour que l'intégrale soit uniforme, il faut encore que λ soit nul ou égal à $\frac{i\pi}{\omega}$; cette dernière condition est *transcendante.*

Conclusions relatives aux équations (E).

40. Résumons, dans leurs grandes lignes, les résultats obtenus jusqu'ici.

Premier problème. *Déterminer toutes les équations à points critiques fixes de la forme:*

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = R\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right)$$

[R *rationnel* en $\frac{dY}{dX}$, *algébrique* en Y, *analytique* en X].

Considérons les huit équations:

TABLEAU XIII.[1]

(1) $\quad y'' = - 3yy' - y^3 + a(x)$

(2) $\quad y'' = - 2yy' + a(x)$

(3) $\quad y'' = 2\alpha y^3 + 6\beta y^2 + (\gamma x + \delta)y + (\varepsilon x + \varkappa), \qquad [\gamma\beta = \alpha\varepsilon]$

---

(4) $\quad y'' = \frac{y'^2}{y} + \left[a(x)y + \frac{b(x)}{y}\right]y' + a'(x)y^2 - b'(x)$

---

[1] L'équation (3) de XIII comprend les types (3), (4), (5) des I; l'équation (5) comprend les types (2) et (3) de II; l'équation (6) comprend les types (4) et (5) de II.

Comme dans tous les tableaux précédents, $\alpha, \beta \ldots$, désignent des constantes numériques, $a(x), b(x) \ldots$ des fonctions analytiques de x.

$$y'' = \frac{y'^2}{y} + a'(x)\frac{y'}{y} + \delta y^3 + [a(x)\delta + \varepsilon]y^2 - a''(x) \tag{5}$$

$$[\delta = 0 \text{ ou } 1, \ \varepsilon = 0 \text{ ou } 1]$$

$$y'' = \frac{y'^2}{y} + e^{\lambda x}(\alpha y^2 + \beta) + e^{2\lambda x}\left(\gamma y^3 + \frac{\delta}{y}\right) \tag{6}$$

$$y'' = y'^2\left[\frac{\left(6y^2 - \frac{g_2}{2}\right)}{(4y^3 - g_2 y - g_3)} + \frac{\lambda}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}\right] + a(x)y' + b(x)\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3} \tag{7}$$

$$\left[\lambda = 0 \text{ ou } \frac{i\pi}{\omega}; \ 2\omega \text{ période quelconque de } \wp(u, g_2, g_3)\right].$$

$$y'' = y'^2\frac{[3y^2 - 2(1 + x)y + x]}{2y(y - 1)(y - x)} + y'\left(\frac{1}{x - y} + \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{x}\right) + \frac{y(y - 1)}{2x(x - 1)(y - x)} + a(x)\sqrt{y(y - 1)(y - x)} \tag{8}$$

Toutes les équations (E) *à points critiques fixes s'obtiennent en effectuant sur ces huit équations* XIII *les transformations:*

$Y = \varphi(y, x)$, $X = l(x)$, ($l(x)$ analytique en x ainsi que φ)

- φ rationnel en y: dans les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6);
- φ rationnel en y et $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$: dans l'équation (7);
- φ rationnel en y et $\sqrt{y(y-1)(y-x)}$: dans l'équation (8);

et:

$Y = \varphi(z, x)$, $\quad z = \dfrac{y' - y_1'}{y - y_1}$, $\quad X = l(x)$ ($l(x)$ analytique en x ainsi que φ, φ rationnel en z) dans l'équation (3) où $\alpha = \gamma = \delta = 0$, $\beta = 1$, [$y_1(x)$ solution quelconque (3)].

41. **Deuxième problème.** *Déterminer toutes les équations à points critiques fixes de la forme:*

$$(\mathrm{E}') \qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = R\left(\frac{dY}{dX},\ Y,\ X\right), \quad R\begin{cases}\text{rationnel en } \dfrac{dY}{dX} \text{ et } Y,\\ \text{analytique en } X.\end{cases}$$

Toutes ces équations s'obtiennent en effectuant dans le tableau XIII les transformations:

$$(1^\circ) \quad Y = \frac{q(x)y + r(x)}{q_1(x)y + r_1(x)}, \qquad X = l(x), \text{ dans les 8 équations XIII.}$$

[On annule λ et $b(x)$ dans (7) et $a(x)$ dans (8)]:

$$(2^\circ) \quad Y = \frac{q(x)y^n + r(x)}{q_1(x)y^n + r_1(x)}, \quad X = l(x), \text{ dans l'équation (3) où } \alpha = \beta = \varepsilon = \varkappa = 0.$$

$$(3^\circ) \quad Y = \frac{q(x)y^2 + r(x)}{q_1(x)y^2 + r_1(x)}, \quad X = l(x), \text{ dans l'équation (3) où } \alpha = 1,\ \beta = \varepsilon = \varkappa = 0.$$

$$(4^\circ) \quad Y = \frac{q(x)(y+1)^2 + r(x)(y-1)^2}{q_1(x)(y+1)^2 + r_1(x)(y-1)^2}, \quad X = l(x),$$

$$\begin{cases}\text{dans l'équation (4) où } a \equiv b,\\ \text{dans l'équation (6) où } \alpha = -\beta,\ \gamma = -\delta.\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}(5^\circ)\\(6^\circ)\\(7^\circ)\end{matrix}\right\} \quad Y = \frac{q(x)z + r(x)}{q_1(x)z + r_1(x)}; \quad X = l(x),$$

$$\text{avec}\begin{cases}\left.\begin{matrix} z = \dfrac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{4y^3 - 1}\right) \\ \text{ou} \quad z = y^3\end{matrix}\right\} & \begin{matrix}\text{dans l'équation (7) où } \lambda = 0,\\ b \equiv 0,\ g_2 = 0,\ g_3 = 1,\end{matrix}\\[2ex] z = \dfrac{1}{2}\left[1 + i\dfrac{\sqrt{4y^3 + y}}{\left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2}\right] & \begin{matrix}\text{dans l'équation (7) où } \lambda = 0,\\ b \equiv 0,\ g_2 = -1,\ g_3 = 0.\end{matrix}\end{cases}$$

$$(8^\circ) \quad Y = \frac{q(x)z + r(x)}{q_1(x)z + r_1(x)}; \quad X = l(x), \text{ avec } z = \frac{y' - y_1'}{y - y_1},$$

dans l'équation (3) où $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = \delta = 0$,

[$y_1(x)$ intégrale quelconque de (3)].

42. **Troisième problème.** *Etant donnée une équation:*

$$\text{(E)}\qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = R\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right), \quad R\begin{cases}\text{rationnel en } Y'_X,\ Y,\\ \text{algébrique en } X,\end{cases}$$

reconnaître si elle a ses points critiques fixes.

Il faut et il suffit qu'elle soit réductible, par une des transformations précédentes (n° 41) à une[1] des équations XIII; ce qu'on reconnaît algébriquement à l'aide d'un petit nombre d'opérations très simples. La transformation de passage de (E) à l'équation XIII correspondante se calcule algébriquement, ou par quadratures, ou par l'intégration d'une équation linéaire.

Quatrième problème. *Etant donnée une équation:*

$$\text{(E)}\qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = R\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right), \quad R\begin{cases}\text{rationnel en } Y'_X,\\ \text{algébrique en } Y,\ X,\end{cases}$$

reconnaître si elle a ses points critiques fixes.

Une transformation algébrique toute élémentaire permet de supposer R rationnel soit en Y, soit en Y et $\sqrt{Y(Y-1)(Y-X)}$, soit en Y et $\sqrt{4Y^3-g_2Y-g_3}$ (X figurant algébriquement dans R).

Dans la première hypothèse, le problème est déjà résolu; dans la seconde hypothèse, l'équation doit coïncider avec une équation (8); et dans la 3[e] avec une équation (7). Ce dernier cas exige (si λ n'est pas nul) que la condition *transcendante* $\lambda = \dfrac{i\pi}{\omega}$ soit remplie.

43. **Cinquième problème.** *Déterminer les transcendantes nouvelles engendrées par les équations à points critiques fixes:*

$$\text{(E)}\qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = R\left(\frac{dY}{dX}, Y, X\right), \quad R\begin{cases}\text{rationnel en } Y'_X,\\ \text{algébrique en } Y,\ X.\end{cases}$$

Les équations (E) à points critiques fixes qui engendrent des transcendantes vraiment nouvelles sont réductibles aux deux types (3) et (6) de XIII, ou, d'une façon plus précise, aux équations:

$$(33)\qquad y'' = 2\alpha y^3 + 6y^2 + \alpha xy + x$$

$$(34)\qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + e^x(\alpha y^2 + \beta) + e^{2x}\left(\gamma y^3 + \frac{\delta}{y}\right), \qquad (\beta \text{ ou } \delta \neq 0,\ \alpha \text{ ou } \gamma \neq 0).$$

[1] On annule préalablement λ et $b(x)$ dans (7) et $a(x)$ dans (8).

La transformation de passage entre l'équation (E) et les équations (33) ou (34) est:

$$Y = \varphi(y, X), \qquad x = l(X) \quad \text{pour (33)},$$
$$Y = \varphi(y, X), \qquad e^x = l(X) \quad \text{pour (34)},$$

φ étant *rationnel* en y et *algébrique* (ainsi que l) en X.

Les intégrales de (33) et (34) sont des *transcendantes méromorphes nouvelles* (voir les n^{os} 11—16).

Tous les autres types d'équations (E) à points critiques fixes sont *intégrables,* et les tableaux précédents font connaître avec une précision parfaite les opérations qui effectuent cette intégration.

Equations différentielles (algébriques) quelconques du second ordre à points critiques fixes.

44. La détermination des équations (E) à points critiques fixes est maintenant achevée. Si, au lieu d'une équation résolue par rapport à y'', on considère *une équation algébrique quelconque du second ordre, de degré donné en* y'', notre méthode s'applique sans modification.

Soit, pour fixer les idées, une équation *du second degré en* y'':

$$P(y'', y', y, x) = 0, \tag{35}$$

où P désigne un polynôme en y'', y', dont les coëfficients sont fonctions algébriques de y, x.[1]

Tout d'abord, l'équation (pour avoir ses points critiques fixes) doit être de la forme:

$$y''^2 + (A_1 y'^2 + A_2 y' + A_3) y'' + A_4 y'^4 + A_5 y'^3 + A_6 y'^2 + A_7 y' + A_8$$

les A désignant des fonctions algébriques de y, x.

Je montre ensuite, que, moyennant une transformation algébrique toute élémentaire, il est loisible de supposer (pour x quelconque) les A *rationnels soit en* y, *soit en* y *et* $\sqrt{y(y-1)[y-H(x)]}$.

Le degré des A *en* y *peut dès lors être limité,* et la méthode permet de former un nombre *fini* de types d'équations (35), *dépendant explicitement*

[1] Il est loisible de supposer ces coëfficients analytiques (et non algébriques) en x.

d'un nombre fini de constantes et de fonctions arbitraires de x, qui épuisent toutes les équations (35) à points critiques fixes.

Je n'ai pas achevé encore l'énumération complète de ces types, mais ce n'est qu'une question de patience. J'ai poussé d'ailleurs la discussion assez loin pour établir *l'existence de transcendantes méromorphes vraiment nouvelles, engendrées par des types d'équations* (35), ***et irréductibles aux transcendantes que définissent les équations*** (E) ***du premier degré en y''.***

45. Ce que je viens de dire peut se répéter pour les équations (35) du 3^e^ degré, ou du 4^e^ degré, etc., en y''. Mais un nouvel effort sera nécessaire pour traiter le même problème *sans se donner le degré de P en y'';* autrement dit, pour déterminer explicitement toutes les équations différentielles (algébriques) du second ordre à points critiques fixes, et la nature de leur intégrale.

Je voudrais indiquer ici quelques considérations générales qui sont de nature à faciliter la solution de ce problème.

Donnons à x une valeur *numérique* quelconque $\bar{x}$; posons, pour plus de clarté, $y' = z$, $y'' = u$, et regardons y, z, u comme les coordonnées d'un point de l'espace à 3 dimensions. Si (quel que soit $\bar{x}$) on peut passer *rationnellement*[1] d'une certaine courbe algébrique:

$$G(\xi, \eta, \bar{x}) = 0$$

à la surface

$$P(u, z, y, \bar{x}) = 0,$$

la courbe $G(\xi, \eta, \bar{x}) = 0$ est de genre 0 ou 1.

Dans le cas particulier d'une équation (E) (résolue en y''), c'est ce théorème qui m'a permis de supposer le coëfficient différentiel R rationnel soit en y, soit en y et $\sqrt{y(y-1)(y-H)}$.

Voici maintenant deux théorèmes généraux que j'ai signalés jadis comme *très vraisemblables* sans en avoir de démonstration satisfaisante.

---

[1] J'entends par là qu'on a

$$\xi = r(u, z, y, \bar{x})$$
$$\eta = r_1(u, z, y, \bar{x})$$

r et r_1 étant rationnels en u, z, y.

Théorème I. Si l'intégrale d'une équation (35) à points critiques fixes est une fonction essentiellement transcendante des deux constantes,[1] la surface

$$P(u, z, y, \bar{x}) = 0$$

correspond birationnellement soit à un plan, soit au cylindre de l'espace (ξ, η, ζ) défini par l'équation

$$\xi^2 = \eta(\eta - 1)[\eta - H(\bar{x})].$$

L'équation, dans ce cas, équivaudrait donc à un système:

$$\frac{d\eta}{dx} = M + N\sqrt{\eta(\eta - 1)(\eta - H)}, \qquad \frac{d\zeta}{dx} = M_1 + N_1\sqrt{\eta(\eta - 1)(\eta - H)}$$

où M, N, M_1, N_1 seraient *rationnels* en η, ζ, (algébriques en x), N et N_1 pouvant être identiquement nuls.

Théorème II. Si l'intégrale d'une équation (35) à points critiques fixes, présente des singularités essentielles mobiles, ces singularités sont des *points essentiels isolés;* l'intégrale est une fonction *semi-transcendante* des constantes et par suite se laisse définir par une combinaison d'équations de Riccati ou de quadratures.

Ces deux théorèmes sont maintenant démontrés *en toute rigueur* pour les équations (35) *du premier degré en y''*. Il resterait à les démontrer *sans se donner le degré de P en y''*. La détermination complète des équations différentielles du second ordre à points critiques fixes, serait alors bien près d'être achevée.

Equations différentielles du troisième ordre.

46. *Equations résolues en y'''.*

Quand on passe aux équations du *troisième* ordre, la première partie de la méthode (recherche des conditions *nécessaires* pour que les points critiques soient fixes) s'applique d'elle-même; mais la question de savoir si ces conditions sont *suffisantes* entraîne des complications nouvelles.

[1] Dans les autres cas, l'équation (35) (à points critiques fixes) est réductible aux quadratures ou aux équations linéaires, et ne saurait définir de transcendantes nouvelles.

Parmi les conditions nécessaires que notre méthode met en évidence d'une façon en quelque sorte intuitive, je me bornerai à citer ici les plus simples et les plus caractéristiques, celles notamment qui précisent la nature du coëfficient différentiel y''' regardée comme fonction (algébrique) de y'' et de y'.

Je considérerai d'abord les équations résolues en y'''.

Soit donc:

$$y''' = R(y'', y', y, x) \tag{36}$$

(R rationnel en y'', y', algébrique en y, x).[1]

Si l'équation (36) a ses points critiques fixes, elle satisfait aux conditions suivantes:

1°. *R est un polynôme, du second degré ou plus, en y'', soit:*

$$y'' = R \equiv A(y', y, x)y''^2 + B(y', y, x)y'' + C(y', y, x); \tag{37}$$

(A, B, C fractions rationnelles en y', dont les coëfficients sont algébriques en y, x).

2°. *A coïncide avec une des douze expressions suivantes:*

$$0, \quad \frac{1}{y'+a}, \quad \frac{1-\frac{1}{n}}{y'+a} \quad (n \text{ entier } + \text{ ou } - \text{ mais } \neq -1),$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y'+a}+\frac{1}{y'+b}\right), \quad \frac{1}{y'+a}+\frac{1}{2(y'+b)}, \quad \frac{1}{2(y'+a)}+\frac{2}{3(y'+b)},$$

$$\frac{1}{2(y'+a)}+\frac{3}{4(y'+b)}, \quad \frac{1}{2(y'+a)}+\frac{5}{6(y'+b)},$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{y'+a}+\frac{1}{y'+b}\right), \quad \frac{2}{3(y'+a)}+\frac{5}{6(y'+b)}, \quad \frac{3}{4}\left(\frac{1}{y'+a}+\frac{1}{y'+b}\right),$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y'+a}+\frac{1}{y'+b}+\frac{1}{y'+c}\right)$$

(a, b, c, fonctions de y, x).

---

[1] Il serait loisible de supposer R analytique (et non algébrique) en x et même en y.

3°. *B et C, considérés comme fonctions de y', n'ont d'autres pôles $y' = g(y, x)$ que ceux de A, et ces pôles sont tous simples.*

4°. Posons: $A = \frac{Q}{D}$, $B = \frac{R}{D}$, $C = \frac{S}{D}$; D, Q, R, S désignant des polynômes en y' premiers entre eux. *Les degrés de R et de S en y' surpassent le degré de D le premier d'une unité, le second de trois unités, au plus.*

Ces théorèmes limitent le degré des fractions rationnelles A, B, C en y'. Les degrés respectifs de D, Q, R, S en y' sont en plus égaux à $3, 2, 4$ et 6.

On peut former d'après cela un nombre *fini* de fractions rationnelles $R(y, y')$ dont les coëfficients $a, b, \ldots l$ sont des fonctions indéterminées de y, x. Toutes les équations (36) à points critiques fixes rentrent dans un de ces types.

47. *Introduction de la **simplifiée** de l'équation* (36).

Mais notre méthode fournit en outre des conditions très précises sur ces fonctions encore indéterminées $a(y, x)$, $b(y, x)$, etc. ... Signalons seulement la suivante.

D'après ce qui précède, les fractions A, B, C, pour $y' = \infty$ sont de la forme:

$$A = \frac{1}{y'}(\alpha + \varepsilon), \qquad B = y'[\mu(y, x) + \varepsilon_1], \qquad C = y'^3[\nu(y, x) + \varepsilon_2]$$

$$\left(\alpha = 1 - \frac{1}{n}, \quad n \text{ entier } \neq -1 \text{ ou } n = \infty\right);$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ désignent des fonctions de y', y, x qui tendent vers zéro avec $\frac{1}{y'}$.

Les fonctions $\mu(y, x)$, $\nu(y, x)$ peuvent être identiquement nulles.

Appelons ***simplifiée*** de l'équation (36) l'équation:

$$y''' = \alpha\frac{y''^2}{y'} + y''y'\mu_0(y) + y'^3\nu_0(y) \tag{38}$$

$$\left\{\alpha = 1 - \frac{1}{n}, \qquad \mu_0(y) = \mu(y, x_0), \qquad \nu_0(y) = \nu(y, x_0)\right\}.$$

Si l'équation (36) *a ses points critiques fixes, sa simplifiée* (38) *a son intégrale uniforme.*

L'équation (38) se ramène *par une quadrature* à une équation linéaire. Elle équivaut en effet au système:

$$(39)\qquad \frac{dx}{dy} = u^{\frac{-n}{n+1}}, \qquad \frac{d^2u}{dy^2} = \mu_0(y)\frac{du}{dy} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\nu_0(y)u$$

(n entier $+$ ou $-$, $\neq -1$, ou $n = \infty$).

48. Un problmèe préliminaire s'impose donc:

Déterminer tous les cas où les fonctions $y(x)$ définies par un système (39) sont uniformes.

La résolution de ce problème n'est pas sans présenter des difficultés sérieuses.

Pour $n = -2$ et $\mu_0(y) \equiv 0$, les fonctions uniformes $y(x)$ définies par un système (39) constituent la classe des fonctions *automorphes (fuchsiennes ou kleinéennes).*

Dans les autres cas, j'ai montré que l'intégrale générale $y(x)$ d'un système (39), quand elle est uniforme, est une *dégénérescence de fonctions automorphes ou une combinaison de telles dégénérescences* (combinaisons telles que $y = e^{e^x}$, etc....).

La nature de l'intégrale $y(x)$ de la *simplifiée* (38) fournit des indications évidentes sur l'intégrale de l'équation (36) (à points critiques fixes):

1°. Si l'intégrale uniforme $y(x)$ de (38) présente *des lignes singulières,* a fortiori l'intégrale $y(x)$ de (36) présente des *lignes singulières mobiles.*

2°. Si l'intégrale uniforme $y(x)$ de (38) présente des *ensembles parfaits (discontinus)* de points singuliers, a fortiori l'intégrale $y(x)$ de (36) présente des *ensembles parfaits de points singuliers mobiles (ensembles discontinus ou continus).*

3°. Si l'intégrale uniforme $y(x)$ de (38) *n'est par méromorphe,* a fortiori l'intégrale $y(x)$ de (36) présente des *singularités essentielles mobiles (isolées ou non).*

D'autre part, les coëfficients $a(y, x)$, $b(y, x)$... des fractions rationnelles $A(y')$, $B(y')$, $C(y')$ sont, par hypothèse, algébriques en y. Donnons à x une valeur numérique quelconque x_0 et exprimons *birationnellement*[1] ces coëfficients

[1] J'entends par là que $a(y, x_0)$, $b(y, x_0)$ etc.... sont rationnels en y, t et qu'inversement $t(y, x_0)$ s'exprime rationnellement en fonction de y et de $a, b, \ldots$

$a(y, x_0)$, $b(y, x_0)$ etc.... à l'aide de y et d'une irrationnelle $t(y, x_0)$ définie par la relation algébrique

$$G(t, y, x_0) = 0. \tag{40}$$

Représentons par $y = \varphi(x, K, K_1, K_2, x_0)$, l'intégrale générale de la *simplifiée* (38) et par $t = \psi(x, K, K_1, K_2, x_0)$ la fonction t correspondante définie par (40). Si l'équation (36) a ses points critiques fixes, la fonction $\varphi(x)$ est, nous le savons, *uniforme;* j'ai pu établir qu'il en *est de même pour la fontion* $\psi(x)$ et cela lors même que les coëfficients $\mu_0(y)$, $\nu_0(y)$ de (38) sont *rationnels.*

Il suit de là que le *genre de la relation algébrique* $G = 0$ *est égal à* 0 *ou à* 1, *sauf dans le cas où l'intégrale générale de la simplifiée* (38) *présente des ensembles parfaits (discontinus ou continus) de points singuliers.* Dans ce cas on a nécessairement $n = -2$, $\mu(y, x) \equiv 0$.

49. On ne saurait espérer former, comme pour les équations du second ordre, un nombre *fini* de types d'équations (36) à points critiques fixes, auxquels toutes les autres soient réductibles. La considération des fonctions *automorphes* suffit à montrer qu'une solution de cette nature est impossible. En effet, à chaque *classe* de courbes algébriques correspondent des types distincts de fonctions automorphes et par conséquent des types distincts d'équations (38) (où $n = -2$, $\mu_0 \equiv 0$) à intégrale uniforme.

Je voudrais indiquer brièvement le genre de solution que semble comporter le problème. Cette solution résulte de ce fait que les propriétés d'une équation (38) à points critiques fixes se reflètent dans sa simplifiée d'une façon beaucoup plus précise que je ne l'ai indiqué jusqu'ici.

Supposons connue la simplifiée:

$$y''' = \frac{y''^2}{y'}\alpha + \mu(y, x_0)y''y' + \nu(y, x_0)y'^3 \tag{38}$$

de l'équation (36) (problème préliminaire).

Les résultats suivants me paraissent très vraisemblables:

1°. Toutes les équations (36) à points critiques fixes qui admettent la simplifiée donnée (38) sont réductibles à un nombre fini de types, dépendant d'un nombre fini de constantes et de fonctions de x.

2°. Si l'intégrale de l'équation (38) à points critiques fixes admet un ensemble parfait (discontinu ou continu) de points singuliers mobiles, il en est de même pour l'équation (38), et l'intégrale de (36) se déduit de celle de la simplifiée (38) par des quadratures ou par l'intégration d'une équation linéaire.[1]

3°. Si l'intégrale de (38) admet des points essentiels mobiles, elle est réductible à une équation du second ordre (à points critiques fixes) par des quadratures ou par l'intégration d'une équation linéaire.

Admettons pour un instant ces théorèmes: la difficulté la plus grave qu'introduit l'élévation de l'ordre différentiel — à savoir l'existence de singularités essentielles mobiles très compliquées — se trouve dès lors surmontée. La seule classe vraiment nouvelle d'équations qu'il reste à étudier est celle des équations (36) *dont l'intégrale n'a d'autres singularités mobiles que des pôles.* Or j'ai tout lieu de penser (d'après les premiers types que j'ai déjà élucidés) que la méthode appliquée au second ordre permet de former les conditions *suffisantes* pour qu'une équation (36) rentre dans cette classe.

Mais je n'insiste pas davantage sur ces *prévisions.* Les résultats rigoureusement acquis suffisent à mettre en lumière deux points: 1° la formation des équations (36) à points critiques fixes est un problème dès maintenant abordable; 2° dans l'étude rationnelle de ces équations, les travaux de M. Poincaré sur les fonctions *automorphes* doivent jouer un rôle primordial.

50. *Equations différentielles algébriques du troisième ordre à points critiques fixes.*

---

[1] La *simplifiée* de (36) peut s'obtenir en remplaçant, dans (36), la variable x par $x_0 + \lambda x$, et en faisant tendre λ vers zéro. La même transformation effectuée sur une équation:

$$(E) \qquad y'' = A(y, x)y'^2 + B(y, x)y' + C(y, x)$$

conduit à l'équation:

$$(e) \qquad y'' = A(y, x_0)y'^2$$

qui joue pour l'équation (E) (à points critiques fixes), le même rôle que la *simplifiée* (38) pour l'équation (36). Si l'intégrale (uniforme) de l'équation (e) présente des singularités essentielles mobiles, il en est de même *a fortiori* pour (E); mais ce qui est remarquable, c'est que *la réciproque est vraie;* l'intégrale de (E) se déduit alors de celle de (e) par l'intégration d'une équation de Riccati. Des circonstances analogues se présentent pour le 3^e ordre.

Les résultats qui précèdent peuvent être étendus (moyennant quelques modifications) aux équations (37) où A, B, C sont, non plus rationnels, mais *algébriques* en y'. On s'appuie sur la proposition suivante: si (pour y, x quelconques) on exprime *birationnellement* les fonctions algébriques $A(y')$, $B(y')$, $C(y')$ à l'aide de y' et d'une irrationnelle $t(y')$ définie par la relation

$$H(t, y', y, x) = 0,$$

le genre de cette relation (entre t et y') est au plus égal à l'unité.

Mais, plus généralement, considérons *une équation algébrique quelconque du* 3e *ordre,* soit:

$$P(y''', y'', y', y, x) = 0$$

où P désigne un polynôme en y''', y'', y' dont les coefficients sont[1] algébriques en y, x.

Quand l'équation a ses points critiques fixes, les conditions suivantes sont remplies:

1°. Si p est le degré de P en y''', l'équation est de la forme:

$$y'''^p + \Pi_2(y'', y', y, x)y'''^{p-1} + \ldots + \Pi_{2p}(y'', y', y, x) = 0, \tag{41}$$

Π_{2i} désignant un polynôme en y'' de degré $2i$ au plus, rationnel en y', algébrique en y, x.

2°. Des propositions semblables à celles du n° 46 limitent le degré auquel y' figure dans P ou dans les Π_{2i}; *ce degré est au plus égal à* $6p$.

3°. Si dans l'équation (41) on remplace x par $(x_0 + \lambda X)$, le premier membre admet $\lambda = 0$ comme pôle d'ordre exactement[2] égal à $3p$; autrement dit, l'équation transformée peut s'écrire:

$$\frac{1}{\lambda^{3p}}\left[y'''^p + y'''^{p-1}H_2(y'', y', y, x_0) + \ldots + H_{2p}(y'', y', y, x_0) + \lambda(\ldots)\right] = 0.$$

4°. Convenons d'appeler ***simplifiée*** de l'équation (41), l'équation:

$$y'''^p + y'''^{p-1}H_2(y'', y', y, x_0) + \ldots + H_{2p}(y'', y', y, x_0). \tag{42}$$

L'équation (42) *a son intégrale générale uniforme.*

[1] Il serait loisible, là encore, de supposer P non pas algébrique, mais analytique en x et même en y.

[2] $\lambda = 0$ ne peut être pôle d'ordre inférieur.

Cette équation épuivaut à un système:

$$\frac{d}{dy}\left(\log\frac{dx}{dy}\right) = u, \qquad G\left(\frac{du}{dy}, u, y\right) = 0, \tag{43}$$

où l'équation du premier ordre $G = 0$ a ses points critiques fixes.

L'équation (42) se laisse donc remplacer par un système:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dy}\left(\log\dfrac{dx}{dy}\right) = \rho(v, y) \quad \text{avec}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dv}{dy} = h(y)v^2 + k(y)v + l(y), \\ \text{ou } \dfrac{dv}{dy} = h(y)\sqrt{4v^3 - g_2 v - g_3}, \end{array}\right. \\ \text{ou } \dfrac{d}{dy}\left(\log\dfrac{dx}{dy}\right) = r(K, y); \end{array}\right. \tag{44}$$

ρ désigne une fonction algébrique de y, rationnelle en v (ou en v et $\sqrt{4v^3 - g_2 v - g_3}$ dans le second cas); r désigne une fonction algébrique de y et de la constante arbitraire K.

Ce ne sont là d'ailleurs que quelques-unes des plus caractéristiques parmi les conditions que fournit immédiatement notre méthode. Elles montrent l'importance du problème préliminaire qui consiste à *déterminer* les systèmes (44) *qui définissent des fonctions $y(x)$ uniformes.*

Dans l'hypothèse

$$\rho = -2v, \qquad h(y) \equiv -1, \qquad k = 0,$$

les systèmes (44) à intégrale $y(x)$ uniforme définissent les fonctions automorphes.

Equations différentielles d'ordre quelconque à points critiques fixes.

51. Des théorèmes analogues s'appliquent aux équations différentielles d'ordre m quelconque et fournissent notamment des renseignements très précis sur la nature du coëfficient différentiel $y^{(m)}$ considéré comme fonction (algébrique) de $y^{(m-1)}$, $y^{(m-2)}$ et de $y^{(m-3)}$.

Posons pour plus de clarté

$$y^{(m-3)} = z, \qquad y^{(m-2)} = z', \qquad y^{(m-1)} = z'', \qquad y^{(m)} = z''',$$

et considérons d'abord une équation résolue par rapport à z''', soit:

$$z''' = R(z'', z', z, y^{(m-4)}, \ldots y'', y', y, x) \tag{45}$$

où R est rationnel en z'', z', algébrique[1] en $z, y^{(m-4)}, \ldots y', y, x$.

Si l'équation (45) *a ses points critiques fixes les conditions suivantes sont remplies:*

1°. R est un polynôme du second degré au plus en z''; soit donc:

$$z''' = z''^2 A(z') + z'' B(z') + C(z'), \tag{46}$$

A, B, C étant rationnels en z', algébriques en $z, y^{(m-4)}, y', \ldots y, x$.

2°. $A(z')$ coïncide avec une des expressions suivantes:

$$0, \quad \frac{1 - \frac{1}{n}}{z' + a}, \quad \frac{1}{z' + a}, \quad \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z' + a} + \frac{1}{z' + b}\right]$$

(n entier $+$ ou $< 2 - m$, a et b fonctions algébriques de $z, y^{(m-4)}, \ldots y', y, x$), expressions auxquelles il faut joindre:

$$\frac{1}{2(z' + a)} + \frac{2}{3(z' + b)} \quad \text{pour } m \leqq 7,$$

$$\frac{1}{2(z' + a)} + \frac{3}{4(z' + b)} \quad \text{pour } m \leqq 5,$$

$$\frac{1}{2(z' + a)} + \frac{5}{6(z' + b)}, \quad \frac{2}{3}\left[\frac{1}{z' + a} + \frac{1}{z' + b}\right] \quad \text{pour } m = 4.$$

3°. Les fractions rationnelles $B(z')$, $C(z')$ n'ont [pour $z, y^{(m-4)}, \ldots y', y, x$ quelconques] d'autres pôles que ceux de A, et ces pôles sont tous simples. De plus, les degrés des numérateurs de B et C surpassent respectivement d'une unité et de trois unités au plus celui de leur dénominateur. Le degré auquel z' figure dans A, B, C est donc inférieur à 5.

4°. On peut écrire d'après ce qui précède:

$$A = \frac{1}{z'}(\alpha + \varepsilon), \qquad B = z'[\mu(z, y^{(m-4)}, y', y, x) + \varepsilon_1],$$
$$C = z'^3[\nu(z, y^{(m-4)}, \ldots y', y, x) + \varepsilon_2]$$
$$\left(\alpha = 1 - \frac{1}{n}, \ n \text{ entier } + \text{ ou } < 2 - m, \text{ ou } n = \infty\right);$$

[1] Il serait loisible de supposer R analytique en $z, y^{(m-4)}, \ldots y', y, x$.

ε, ε_1, ε_2 sont des fonctions de z', z, $y^{(m-4)}$, ... y', y, x qui tendent vers zéro avec $\frac{1}{z'}$.

Représentons par μ_0, ν_0 ce que deviennent les fonctions μ et ν quand on y remplace $y^{(m-4)}$, ... y', y, x par des constantes numériques quelconques $y_0^{(m-4)}$, ... y'_0, y_0, x_0, et appelons *simplifiée* de (45) l'équation d'ordre m qui suit:

$$z''' = \frac{z''^2 a}{z'} + z''z'\mu_0(z) + z'^3\nu_0(z) \tag{47}$$

où

$$z = \frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}}.$$

Cette équation a son intégrale uniforme.

Elle équivaut au système (de l'espèce 44)

$$\frac{dx}{dz} = u^{-\frac{n}{n+1}}, \qquad \frac{d^2u}{dz^2} = \mu_0(z)\frac{du}{dz} + \frac{n}{n+1}\nu_0(z)u, \tag{48}$$

[n entier $+$ ou $< (2 - m)$, ou $n = \infty$], auquel il faut joindre la condition:

$$\frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} = z.$$

Il faut donc que les fonctions $z(x)$ définies par le système (48), non seulement soient uniformes, mais soient encore dérivées $(m-3)^{\text{es}}$ de fonctions uniformes.

L'entier n étant plus petit que -2, les intégrales $z(x)$ du système (48) (quand elles sont uniformes) sont des dégénérescences de fonctions automorphes, ou des combinaisons de telles dégénérescences.

5°. Pour des valeurs arbitraires données à $y^{(m-4)}$, ... y', y, x, les coëfficients a, b, ... des fractions rationnelles $A(z')$, $B(z')$, $C(z')$ sont des fonctions algébriques de z qui se laissent exprimer *birationnellement* à l'aide de z et d'une irrationnelle $t(z)$, définie par une relation

$$G(t, z) = 0 \tag{49}$$

($y^{(m-4)}$, ... y', y, x figurant algébriquement dans G).

Le genre de la relation (49) *est égal à zéro ou à un,*

52. Il est facile d'étendre les résultats précédents (moyennant quelques modifications) aux équations (46) dans lesquelles A, B, C sont non plus *rationnels,* mais *algébriques* en z'.[1]

Plus généralement, considérons *une équation différentielle quelconque d'ordre* m*:*

$$(50) \qquad P(z''', z'', z', z, y^{(m-4)}, \ldots y', y, x) = 0, \qquad \frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} = z,$$

où P est un polynôme en z''', z'', z' de degré p en z''', algébrique en x, $y^{(m-4)}$, $\ldots y'$, y, x.

Si l'équation a ses points critiques fixes, elle satisfait aux conditions suivantes:

1°. P est de la forme

$$(51) \quad z'''^p + z'''^{(p-1)}\Pi_2(z'', z') + \ldots + z'''^{(p-i)}\Pi_{2i}(z'', z') + \ldots + \Pi_{2p}(z'', z') = 0,$$

où Π_{2i} *désigne un polynôme de degré* $2i$ *au plus en* z''*, rationnel en* z'*,* algébrique en z, $y^{(m-4)}$, $\ldots y'$, y, x.

2°. Dans les Π_{2i}, z' figure au plus au degré $5p$.

3°. Si dans l'équation (51), on remplace z' par $\frac{z'}{\lambda}$, z'' par $\frac{z''}{\lambda^2}$, z''' par $\frac{z'''}{\lambda^3}$, le premier membre admet la valeur $\lambda = 0$ comme pôle d'ordre $3p$. Lorsqu'on le multiplie par λ^{3p}, il se réduit donc pour $\lambda = 0$ à une expression:

$$z'''^p + z'''^{(p-1)}H_2(z'', z', z, y^{(m-4)}, \ldots y', y, x) + \ldots$$

Par définition, on appelle simplifiée de l'équation (51) l'équation d'ordre m:

$$(52) \qquad z'''^p + z'''^{(p-1)}H_2(z'', z', z, y_0^{(m-4)}, \ldots y_0', y_0, x_0) + \ldots = 0$$

où

$$z = \frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}}.$$

Cette simplifiée a son intégrale uniforme.

[1] On peut [pour z, $y^{(m-4)}$, $\ldots y'$, y, x quelconques] exprimer $A(z')$, $B(z')$, $C(z')$ *birationnellement* à l'aide de z' et d'une irrationnelle $\theta(z')$ définie par une relation $H(\theta, z') = 0$, H renfermant algébriquement z, $y^{(m-4)}$, $\ldots y'$, y, x: on commence par établir que la courbe algébrique $H(\theta, z') = 0$ est unicursale, ou encore (si $m \leqq 7$) est une courbe de genre 1 (dont un des modules g_2, g_3 est nul).

L'équation (52) équivaut à un système (44), c'est-à-dire à un système:

$$\frac{d}{dz}\log\left(\frac{dx}{dz}\right) = u, \qquad G\left(\frac{du}{dz}, u, z\right) = 0 \tag{53}$$

où l'équation du premier ordre $G = 0$ a ses points critiques fixes. Les fonctions $z(x)$ définies par (53) doivent être non-seulement uniformes, mais dérivées $(m - 3)^{es}$ de fonctions uniformes.

J'arrête ici l'énoncé de ces conditions qui montrent suffisamment la fécondité de la méthode.

Conclusions générales.

53. Si, pour plus de clarté, nous nous limitons aux équations (d'ordre quelconque m) *résolues par rapport à* $\frac{d^m y}{dx^m}$, les conclusions auxquelles nous aboutissons s'énoncent ainsi:

La détermination des équations différentielles à points critiques fixes qui semblait récemment comme inabordable dès que l'ordre différentiel dépasse l'unité est complètement effectuée dans le cas du 2e ordre, et elle est assez avancée dans le cas du 3e ordre pour qu'on puisse espérer la voir achevée dans quelques années.

Jusqu'ici c'est au point de vue de la théorie des équations différentielles que nous nous sommes placés, le but que nous poursuivions était de former des équations nouvelles, intégrables de par la théorie des fonctions, sans être réductibles aux équations classiques.

Mais il est naturel de se demander quel rôle sont appelées à jouer, dans la théorie des fonctions, les nouvelles transcendantes méromorphes que j'ai mises en évidence (nos 11 . . . 16), ainsi que toutes les autres transcendantes uniformes que pourront introduire les équations du 2e ordre non résolues, les équations du 3e ordre, etc.

Ces transcendantes, ou du moins certaines d'entre elles, jouissent-elles de nombreuses propriétés remarquables et comportent-elles des applications importantes à l'étude générale des fonctions?

Pour prévoir le sens dans lequel il convient de trancher la question, deux remarques, je crois, suffiront: d'une part, toutes les transcendantes usuelles [à l'exception de la fonction Γ] sont les intégrales d'équations différentielles algébriques très simples; d'autre part, dans une étude systématique des équations à points critiques fixes du premier, du second, du troisième ordre, toutes ces transcendantes (fonctions exponentielle, elliptiques, abéliennes, fuchsiennes, etc.) se mettraient en évidence d'elle-même, si on en ignorait l'existence. Il apparaît donc comme bien peu vraisemblable que le champ des transcendantes remarquables engendrées par les équations différentielles soit dès maintenant épuisé.

Mais, d'un autre côté, les transcendantes uniformes qui jouissent (comme les fonctions elliptiques, fuchsiennes,[1] etc.) de propriétés *exactes* très nombreuses, qui sont notamment susceptibles de plusieurs générations simples très différentes, doivent former une classe extrêmement restreinte. C'est dans un autre ordre d'idées sans doute qu'on obtiendra des résultats généraux embrassant toutes les nouvelles transcendantes: il faudra, par exemple, étudier les nouvelles fonctions entières au point de vue de la croissance pour $x = \infty$, de la fréquence des zéros, etc.; en un mot, approfondir leurs propriétés *approchées*.

Des résultats de cette nature peuvent d'ailleurs rendre les plus grands services dans la théorie des fonctions, comme le montrent les conséquences qu'on a tirées du mode de croissance de e^x, de l'existence de fonctions uniformes qui n'atteignent pas trois valeurs connues, etc.

J'ajoute que la méthode même qui m'a permis de former les équations différentielles du second ordre à intégrale uniforme, fournit, quant aux propriétés *approchées* de leurs intégrales, des indications très précieuses.

54. Toutefois, quel que doive être l'intérêt intrinsèque des nouvelles transcendantes, c'est la théorie des équations différentielles qui a été, je le répète, le véritable objet de mes recherches et dans laquelle les méthodes que j'ai développées se montreront le plus efficaces. Les questions qu'elles sont susceptibles de résoudre sont, en effet, extrêmement diverses. J'en citerai, en terminant, quelques exemples caractéristiques.

Tout d'abord, il n'est nullement indispensable de se limiter aux équations différentielles où la variable indépendante est unique. Il suffit que l'intégrale du système différentiel considéré ne dépende que d'un

---

[1] Les fonctions elliptiques peuvent être définies par une équation différentielle, ou par une condition fonctionnelle (la double périodicité), ou par des séries à loi de récurrence très simple. La fonction modulaire, en outre des trois définitions analogues, se laisse aussi engendrer par l'intermédiaire d'une intégrale *définie*.

nombre fini de constantes. C'est ainsi que ces mêmes méthodes m'ont permis d'établir le célèbre théorème de WEIERSTRASS sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition — de déterminer toutes les fonctions uniformes définies par l'inversion d'un couple de différentielles totales (algébriques) à deux variables; enfin de montrer (en partant du système de différentielles totales qui les définissent) que les fonctions abéliennes sont le quotient de deux fonctions *entières* jouissant des propriétés qui caractérisent les fonctions θ. On est ainsi en état de constituer toute la théorie des fonctions abéliennes, en les définissant par des équations aux différentielles totales, sans rien emprunter à la doctrine des séries θ ni des courbes algébriques.

Mais ce n'est pas seulement à la recherche des intégrales uniformes que s'appliquent les méthodes que j'ai introduites. Elles interviennent utilement dans toutes les questions qui concernent les propriétés analytiques des intégrales, par exemple quand il s'agit de reconnaître si les intégrales possèdent ou non des singularités transcendantes mobiles. Pour fixer les idées, prenons l'équation:

$$y'' = R(y', y, x)$$

(R rationnel en y', y, x), et étudions les intégrales $y(x)$ définies par les conditions initiales x_0, y_0, y'_0 qui donnent à R la forme $\frac{0}{0}$; la méthode fournit des conditions *nécessaires* pour que toutes ces intégrales admettent le point x_0 comme point singulier algébrique, et permet de voir (au moins dans des cas très étendus) que ces conditions sont suffisantes.

55. Une autre considération qui ajoute à l'importance des questions dont je me suis occupé ici, c'est que les équations différentielles à points critiques fixes interviennent, et d'une façon bien inattendue, dans les théories les plus diverses.

C'est ainsi qu'elles se relient à la théorie des groupes par un théorème précis que j'ai établi récemment. Ce théorème concerne les groupes continus finis de la forme:

$$(G) \begin{cases} Y_i = r_i(y_1, \ldots y_n, y_{n+1}, x, a, b, \ldots l), & [i = 1, 2, \ldots (n+1)], \\ X = x, \end{cases}$$

où les r_i sont rationnels en $y_1, \ldots y_{n+1}$, analytiques en x.

J'ai montré que *les fractions rationnelles* r_i, *regardées comme fonctions de* x, *ont toujours leurs singularités non polaires fixes (indépendantes des paramètres* $a, b \ldots l$ *du groupe).*

Il suit de là que tout système différentiel d'ordre n, portant sur les fonctions $y_1(x), \ldots y_n(x)$, et qui admet un groupe continu transitif tel que G, a ses points critiques fixes.

Un théorème analogue s'applique, avec quelques modifications, aux groupes G où les r_i sont algébriques en $y_1 \ldots y_n$.

Le caractère algébrique des r_i par rapport aux y donnerait à penser que les systèmes différentiels à points critiques fixes qui rentrent dans la catégorie précédente sont de ceux dont l'intégrale renferme *algébriquement* ses constantes. Il n'en est rien: il existe des systèmes différentiels d'ordre quelconque à points critiques fixes dont l'intégrale est une fonction transcendante de toutes les constantes de quelque façon qu'on les choisisse, et qui cependant admettent un groupe continu transitif G. Comme types de tels systèmes, j'ai indiqué les systèmes différentiels algébriques que vérifient les fonctions abéliennes (et dégénérescences) regardées comme fonctions de leurs modules. En particulier la fonction $y = sn_x(h)$ (où on a posé $k^2 = x$) vérifie une équation connue du second ordre qui se ramène algébriquement au type (8) du tableau XIII. Cette équation admet le groupe de transformations:

$$Y = \frac{y cn_x u \, dn_x u + \sqrt{(1 - y^2)(1 - xy^2)} \, sn_x u}{1 - x sn_x^2 u} \quad \text{où} \quad u = a\omega_1 + b\omega_2$$

$$(2\omega_1, 2\omega_2 \text{ périodes de } sn, \ a \text{ et } b \text{ constantes arbitraires}),$$

et son intégrale générale $y = sn_x(a\omega_1 + b\omega_2)$ est une fonction essentiellement transcendante des deux constantes.

Si on réfléchit à la difficulté du problème qui consiste à reconnaître si une équation d'ordre $m (m > 2)$ a ses points critiques fixes, on conçoit combien il serait intéressant de former les équations du troisième ordre qui admettent un groupe transitif de la nature de G.

Ces équations (qui se déterminent par des conditions algébriques) ont sûrement leurs points critiques fixes. Il est vrai qu'en vertu de la théorie des groupes, ces équations se ramènent à des combinaisons d'équations linéaires et de quadratures. Mais cette réduction n'est pas explicite, et les transcendantes ainsi définies, peuvent être, comme les fonctions fuchsiennes, des fonctions uniformes d'une nature nouvelle.

56. Une relation plus importante est celle que j'ai établie entre les équations à points critiques fixes et *les intégrales premières des systèmes différentiels.* Cette relation résulte d'un théorème général que je me bornerai à indiquer dans le cas particulier où les équations différentielles définissent le mouvement d'un système matériel soumis à des liaisons et à des forces indépendantes des vitesses. Le théorème s'énonce ainsi:

Les intégrales premières algébriques et de degré donné par rapport aux vitesses sont déterminées par des équations différentielles dont tous les points singuliers (non polaires) sont fixes.

De même, les intégrales premières *uniformes* par rapport aux vitesses ont leurs points critiques fixes (dans tout le champ des paramètres $x_1, \dots x_n$).

C'est en m'appuyant sur ces théorèmes que j'ai pu généraliser les propositions bien connues de M. Bruns et de M. Poincaré sur le *problème des n corps:* j'ai fait voir que toutes les intégrales premières analytiques et uniformes dans tout le champ réel des vitesses mais fonctions quelconques des coordonnées, sont des combinaisons des intégrales classiques.

J'ai même étendu la proposition aux *équations intégrales* algébriques par rapport aux vitesses, où les coordonnées peuvent figurer de façon quelconque. J'en ai déduit que les conditions du choc sont sûrement transcendantes, et même transcendantes par rapport aux vitesses.

57. Jusqu'ici nous avons embrassé dans nos recherches le champ complexe des variables. Mais les méthodes que j'emploie trouvent aussi bien leur application quand on se restreint au domaine réel. La remarque suivante le fait aussitôt comprendre: admettons qu'il soit établi que l'intégrale d'une équation différentielle ne présente dans tout le champ réel d'autres singularités que des pôles; l'intégration quantitative de l'équation est achevée: j'entends par là que l'on peut représenter l'intégrale $y(x)$ (pour toutes les valeurs réelles de x) par le quotient de deux séries de polynômes uniformément convergentes, et dont les coëfficients se calculent par dérivations successives. Or les méthodes que j'ai développées dans le domaine complexe ont précisément comme objet de former les conditions

nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale d'une équation n'admette pas de singularités transcendantes.

Considérons, par exemple, une équation de la forme:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = R(y\,,\,x) = \frac{P(y\,,\,x)}{Q(y\,,\,x)},$$

P et Q désignant deux polynômes en $x\,,y$, et le polynôme Q ne s'annulant pour aucune valeur réelle de $x\,,\,y$. Pour que les intégrales réelles $y(x)$ ne présentent d'autres singularités mobiles que des pôles, il faut d'abord que le degré p de P en y surpassè au plus de *trois* unités le degré q de Q.

Si $p \leq q + 1$, les intégrales réelles $y(x)$, comme il est bien connu sont holomorphes quel que soit x.

Si $p = q + 2$, pour que $y(x)$ n'ait d'autres singularités que des pôles, il faut et il suffit que par une transformation:

$$y = a(X)Y + b(X), \qquad x = \varphi(X)$$

l'équation soit réductible à la forme:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6Y^2 + a(X) + \frac{b(X)Y^{(q-1)} + c(X)Y^{(q-2)} + \ldots}{Y^q + d(X)Y^{(q-1)} + \ldots}, \quad \text{où} \quad \frac{a''(X)}{2} + b(X) \equiv 0,$$

ce qu'on reconnaît algébriquement.

Les conditions ne sont guère plus compliquées dans le cas où $p = q + 3$.

La méthode peut d'ailleurs s'étendre aux équations différentielles non analytiques; il suffit de substituer, dans les raisonnements, la méthode de CAUCHY-LIPSCHITZ à celle du calcul des limites.

58. Une classe de problèmes où cette étude générale des équations différentielles trouvera naturellement son application, ce sont les problèmes de la Mécanique.

On peut d'abord se proposer de reconnaître si les paramètres qui définissent la position d'un système matériel sont des fonctions uniformes du temps t (pour toutes les valeurs réelles et imaginaires de t).

Dans le cas du corps pesant fixé par un point, le problème n'est autre que celui de M[e] KOWALEVSKI, mais élargi: M[e] KOWALEVSKI se propose de trouver les cas où le mouvement du solide est défini par des *fonctions méromorphes de t qui possèdent effectivement des pôles.* Son procédé laisse échapper les cas où ces fonctions seraient uniformes sans avoir de pôles, soit qu'elles fussent *holomorphes*, soit que toutes leurs singularités fussent transcendantes.

De plus, après avoir formé les conditions pour qu'il existe des pôles mobiles, Mᵉ KOWALEVSKI remarque que ces conditions entraînent l'intégrabilité des équations du mouvement, ce qui lui permet de mener la question jusqu'au bout. Mais cette remarque laisse échapper un cas où il existe des pôles et qui n'est pas un cas d'intégration. Toutefois les géomètres Russes ont montré, par la suite, que, dans ce cas, les équations du mouvement n'ont pas leur intégrale uniforme.

Les résultats de Mᵉ KOWALEVSKI subsistent donc en fait. Mais si intéressante que soit la voie suivie par Mᵉ KOWALEVSKI, il était désirable de reprendre la question d'une façon plus rationnelle. C'est ce que permettent les procédés que j'ai employés pour les équations du second ordre: ils fournissent de la manière la plus naturelle et la plus simple les conditions nécessaires pour que *ce mouvement soit représenté par des fonctions uniformes de t*, sans qu'il soit besoin de faire aucune autre hypothèse sur ces fonctions. Les conditions auxquelles on parvient ainsi ne diffèrent pas d'ailleurs de celles de Mᵉ KOWALEVSKI. Pour ce problème particulier, on n'arrive donc pas à des cas nouveaux.

Il est bien certain d'ailleurs que les problèmes de mécanique qui s'intègrent par les fonctions uniformes forment une classe très exceptionnelle. Mais on obtient des résultats autrement généraux en se restreignant au domaine réel: les systèmes dont le mouvement est représenté par des fonctions de t qui restent régulières ou méromorphes pour toutes les valeurs réelles de t sont extrêmement nombreux. Nous possédons maintenant une méthode pour les mettre en évidence.

59. J'ai cherché, dans cette exposition, à donner un aperçu des diverses questions auxquelles sont applicables les méthodes qui m'ont permis de trouver les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. La démonstration détaillée des théorèmes que j'ai énoncés plus haut et d'autres propositions qui les complètent seront développées dans une suite de mémoires dont le premier sera consacré à la formation explicite de toutes les équations à points critiques fixes de la forme:

$$y'' = R(y', y, x)$$

(R rationnel en y', algébrique en y, analytique en x).

Les trois classes de transcendantes méromorphes nouvelles engendrées par ces équations feront ensuite l'objet de trois monographies distinctes.

J'aborderai dans des publications ultérieures l'étude des équations différentielles (algébriques) d'ordre quelconque à points critiques fixes, en particulier des équations du second ordre non résolues en y'' et des équations du troisième ordre résolues en y'''. Enfin, les applications et questions connexes (inversion des intégrales de différentielles totales, étude des singularités des intégrales d'une équation quelconque, intégration quantitative dans le domaine réel, application aux équations de la mécanique, etc. . . .) seront traitées dans des mémoires séparés.

La variété de ces applications m'a fait juger utile de donner un exposé détaillé de la méthode dans le cas le plus simple, de façon à la rendre accessible au plus grand nombre possible de lecteurs. On trouvera cet exposé dans un mémoire du Bulletin de la société mathématique de France (tome XXVIII, p. 201—261, juin 1900); ce mémoire contient notamment la détermination explicite de toutes les équations à points critiques fixes qui rentrent dans le type

$$y'' = a(x)y' + b(x)y^2 + c(x)y + d(x),$$

la démonstration des propriétés fondamentales de l'équation

$$y'' = 6y^2 + x,$$

enfin les premières conditions précises auxquelles est assujettie une équation différentielle du troisième ordre pour avoir ses points critiques fixes.