

ÜBER BIEGUNGSINVARIANTEN.
EINE ANWENDUNG DER LIE'SCHEN GRUPPENTHEORIE

VON

KASIMIR ŻORAWSKI

aus WARSCHAU.

Biegungsinvarianten werden wir solche Functionen des Ortes in einer Fläche nennen, welche bei jeder Biegung der Fläche in jedem Orte ihren ursprünglichen Zahlenwert behalten.¹ Das GAUSS'sche Krümmungsmass, die BELTRAMI'schen Parameter und MINDING's geodätische Krümmung z. B. sind Biegungsinvarianten. Sie sind von den genannten Mathematikern schon längst aufgestellt worden. Im Jahre 1884 skizzierte Herr LIE eine Methode zur Berechnung aller möglichen Biegungsinvarianten.² In der vorliegenden Arbeit theile ich dasjenige mit, was mir auf diesem Wege in Bezug auf die Theorie der Biegungsinvarianten zu erreichen gelungen ist.

Es war eben Herr LIE selbst, welcher mich dieses Problem zu behandeln veranlasste. Er richtete meine Aufmerksamkeit hauptsächlich darauf, dass es wichtig wäre, die Anzahl der Biegungsinvarianten verschiedener Ordnungen zu kennen.³ Demgemäss bildet die Abzählung der

¹ Diese Benennung ist von Herrn WEINGARTEN eingeführt worden (Journal f. r. u. ang. Math., Bd. 94, S. 182). Herr WEINGARTEN nennt aber Biegungsinvarianten nur diejenigen Functionen, welche wir später (N^o 13) als Gaussische Biegungsinvarianten bezeichnen. Es scheint nämlich zweckmässig, für alle Differentialinvarianten einer unendlichen Gruppe, die wir im Folgenden (N^o 4) definieren werden, den gemeinsamen Namen »Biegungsinvarianten« einzuführen.

² Mathem. Annal., Bd. 24, S. 574—575.

³ Es handelt sich natürlich um die Anzahl der *unabhängigen* Biegungsinvarianten, wobei zu bemerken ist, dass je N Biegungsinvarianten, etwa I_1, I_2, \dots, I_N , dann und nur dann von einander unabhängig sind, wenn keine Identität von der Form $F(I_1, I_2, \dots, I_N) = 0$ besteht.

Biegungsinvarianten den Hauptinhalt meiner Arbeit. Doch beschäftige ich mich in den zwei letzten Paragraphen auch mit der Berechnung der Biegungsinvarianten durch Integration von gewissen vollständigen Systemen. Ich darf hier bemerken, dass Herr LIE, als ich mich mit diesem Probleme zu beschäftigen anfang, mir die Resultate einer nicht gedruckten Arbeit von seinem Schüler Herrn HARTMANN mitteilte, in der nach der LIE'schen Methode die bekannten Biegungsinvarianten aufgestellt werden. Diese Rechnungen findet man bei mir im § VI; es schien mir aber bequemer, dieselben etwas anders durchzuführen, als es Herr HARTMANN gethan.

Auf die geometrische Bedeutung der Biegungsinvarianten gehe ich nicht ein.

Den Herren LIE und ENGEL erlaube ich mir hiermit für Ihre wohlwollende Unterstützung meinen besten Dank auszusprechen.

§ I. Einige Hilfssätze.

Es scheint mir zweckmässig und sogar nötig zu sein, den nachstehenden Untersuchungen einige Hilfssätze vorzuschicken, um später die Discussion meines Problems nicht unterbrechen zu müssen.

1. Zuerst führe ich ein Theorem an, auf welchem die ganze Theorie der Differentialinvarianten der unendlichen continuierlichen Gruppen basiert.

Theorem I. *Bezeichnet*

$$Xf = \sum_1^n \xi_i(x, z) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m \zeta_\mu(x, z) \frac{\partial f}{\partial z_\mu}$$

die allgemeinste infinitesimale Transformation einer unendlichen continuierlichen Transformationsgruppe in den Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n; z_1, z_2, \dots, z_m$, und betrachtet man die z_μ als beliebig wählbare Functionen der x_i , so werden auch die Differentialquotienten der z_μ nach den x_i transformiert.

Bezeichnet man im Allgemeinen:

$$\frac{\partial^{a_1+a_2+\dots+a_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}} = F_{a_1 a_2 \dots a_n}$$

und berechnet die Incremente aller genannten Differentialquotienten von der ersten bis etwa zur N^{ten} Ordnung, so bildet:

$$X^{(N)} f = Xf + \sum_{\zeta_{\mu}^{a_1 a_2 \dots a_n}} (x, z, z_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}) \frac{\partial f}{\partial z_{\mu, a_1 a_2 \dots a_n}},$$

$(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$

wo die letzte Summe alle Glieder enthält, welche allen Differentialquotienten der z_{μ} nach der x_i von der ersten bis zur N^{ten} Ordnung entsprechen, die allgemeinste infinitesimale Transformation einer unendlichen kontinuierlichen Transformationsgruppe, welche man N^{te} erweiterte Gruppe zu nennen pflegt.¹

Dieses Theorem benutzte Herr LIE in seiner Theorie der Differentialinvarianten,² ohne es ausdrücklich zu formulieren und zu beweisen. Herr LIE teilte mir mit, dass er dieses Theorem bewiesen und den Beweis in nächster Zeit veröffentlichen werde. Demnach glaube ich, dieses Theorem benutzen zu dürfen.

2. Jetzt werden wir ein Theorem aus der Theorie der Transformationsgruppen beweisen, welches trotz seiner speziellen Voraussetzungen uns im Folgenden gute Dienste leisten wird. Dieses Theorem lautet folgendermassen:

Theorem II. *Besitzt die allgemeinste infinitesimale Transformation einer unendlichen kontinuierlichen Transformationsgruppe in den Veränderlichen $x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m$ die Form:*

$$(1) \quad Zf = \sum_1^{p+r} \zeta_k(x_1, \dots, x_n) Z_k f,$$

¹ Dieser Satz ist analog dem entsprechenden Satze aus der Theorie der endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen. Siehe: SOPHUS LIE, *Theorie der Transformationsgruppen*. Erster Abschnitt. Unter Mitwirkung von Dr. F. ENGEL bearbeitet. Leipzig, Teubner. 1888. S. 547, Theorem 94. Die Formulierung des Theorems I ist eine etwas abweichende von der des Theorems 94.

² SOPHUS LIE, *Mathem. Ann.*, Bd. 24: *Über Differentialinvarianten*. S. 564 ff.

wo

$$Z_k f = \sum_1^n \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (k=1, 2, \dots, p)$$

$$Z_l f = \sum_1^m \eta_{li}(y_1, \dots, y_m) \frac{\partial f}{\partial y_i}, \quad (l=p+1, \dots, p+r)$$

gegebene Ausdrücke sind und die ξ_k ganz willkürliche Functionen ihrer Argumente bezeichnen, so bilden die infinitesimalen Transformationen:

$$Z_{p+1} f, Z_{p+2} f, \dots, Z_{p+r} f$$

eine höchstens r -gliedrige endliche continuierliche Gruppe.

Je zwei unabhängige infinitesimale Transformationen der Schar (1), etwa

$$Z_f = \sum_1^{p+r} \xi_k Z_k f \quad \text{und} \quad Z' f = \sum_1^{p+r} \xi'_k Z_k f$$

sollen durch die Operation (ZZ') eine infinitesimale Transformation derselben Schar ergeben.¹ Nun haben wir:

$$(ZZ') = \sum_1^{p+r} \sum_1^{p+r} \xi'_k \{ [\xi_k Z_k(\xi'_l) - \xi'_l Z_l(\xi_k)] Z_k f + \xi_k \xi'_l (Z_k Z_l) \}.$$

Weil aber $Z_k f$ für $k = 1, 2, \dots, p$ nur die Veränderliche x_i und für $k = p+1, \dots, p+r$ nur die Veränderliche y_i enthält, so folgt:

$$\begin{aligned} (ZZ') &= \sum_1^p \sum_1^p \xi'_k \{ [\xi_k Z_k(\xi'_l) - \xi'_l Z_l(\xi_k)] Z_k f + \xi_k \xi'_l (Z_k Z_l) \} \\ &+ \sum_{p+1}^{p+r} \sum_1^p \xi'_k \{ [\xi_k Z_k(\xi'_l) - \xi'_l Z_l(\xi_k)] Z_l f + \xi_k \xi'_l (Z_k Z_l) \} \\ &+ \sum_{p+1}^{p+r} \sum_{p+1}^{p+r} \xi'_k \xi'_l \{ [\xi_k Z_k(\xi'_l) - \xi'_l Z_l(\xi_k)] Z_l f + \xi_k \xi'_l (Z_k Z_l) \}. \end{aligned}$$

Da nun dieser Ausdruck einem Ausdrucke von der Form:

$$Z'' f = \sum_1^p \xi''_k(x_1, \dots, x_n) Z_k f + \sum_{p+1}^{p+r} \xi''_l(x_1, \dots, x_n) Z_l f$$

identisch gleich sein soll, so müssen die Glieder, welche $Z_k f$ und die

¹ SOPHUS LIE, *Über Differentialinvarianten*, S. 553 und *Christiania Videnskabselskabs Forhandling* 1883, *Über unendliche continuierliche Gruppen*, S. 4.

Glieder, welche $Z_i f$ enthalten, in beiden Ausdrücken identisch gleich sein. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn

$$(Z_k Z_{k'}) = \sum_1^p \omega_{kk's} (x_1, \dots, x_n) Z_s f, \quad (k, k' = 1, 2, \dots, p)$$

$$(Z_i Z_{i'}) = \sum_{p+1}^{p+r} \bar{\omega}_{i i' \sigma} (x_1, \dots, x_n) Z_\sigma f. \quad (i, i' = p+1, \dots, p+r)$$

Ferner hängen die Z_i nur von den Veränderlichen y_i ab; es müssen also die Functionen $\bar{\omega}_{i i' \sigma}$ constante Werte haben, welche wir wie gewöhnlich mit $c_{i i' \sigma}$ bezeichnen.

Folglich:

$$(Z_i Z_{i'}) = \sum_{p+1}^{p+r} c_{i i' \sigma} Z_\sigma f,$$

und damit ist unser Satz bewiesen.

3. In diesen einleitenden Bemerkungen sollen noch zwei einfache Sätze Platz finden, welche wir dazu benutzen, um die Unabhängigkeit von gewissen linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen 1^{ter} Ordnung mit einer abhängigen Variablen nachzuweisen.

Satz I: Sind die q Gleichungen:

$$X_k f = \sum_1^n \xi_{ki} (x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, q)$$

von einander unabhängig, so sind die q Gleichungen:

$$Z_k f = X_k f + \sum_1^m \zeta_{k\mu} (x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) \frac{\partial f}{\partial z_\mu} = 0,$$

wo die $\zeta_{k\mu}$ willkürlich wählbare Functionen ihrer Argumente bezeichnen, ebenfalls von einander unabhängig.

Nach Voraussetzung kann nämlich der Identität:

$$\chi_1 (x_1, \dots, x_n) X_1 f + \dots + \chi_q (x_1, \dots, x_n) X_q f = 0$$

nur durch die Werte:

$$\chi_1 = \chi_2 = \dots = \chi_q = 0$$

Genüge geleistet werden. Besteht andererseits die Identität:

$$\bar{\chi}_1(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) Z_1 f + \dots + \bar{\chi}_q(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) Z_q f = 0,$$

so muss auch diejenige bestehen, welche wir aus dieser durch die Annahme:

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{\partial f}{\partial z_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial z_m} = 0$$

erhalten. Es muss also die Identität:

$$\bar{\chi}_1(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) X_1 f + \dots + \bar{\chi}_q(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) X_q f = 0$$

gelten, welche augenscheinlich nur durch die Werte:

$$\bar{\chi}_1 = \bar{\chi}_2 = \dots = \bar{\chi}_q = 0$$

befriedigt sein kann; damit ist der Satz bewiesen.

Satz II: Sind die q Gleichungen:

$$X_k f = \sum_1^n \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, q)$$

von einander unabhängig, so sind die $q + \rho$ Gleichungen:

$$Z_k f = X_k f + \sum_1^m \zeta_{k\mu}(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) \frac{\partial f}{\partial z_\mu} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, q)$$

$$Z_l f = \sum_1^m \zeta_{lv}(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) \frac{\partial f}{\partial z_v} = 0, \quad (l=q+1, \dots, q+\rho)$$

wo die $\zeta_{k\mu}$ und ζ_{lv} willkürlich wählbare Functionen ihrer Argumente bezeichnen, dann und nur dann von einander unabhängig, wenn die ρ Gleichungen:

$$Z_l f = 0 \quad (l=q+1, \dots, q+\rho)$$

von einander unabhängig sind.

Setzen wir nämlich in der Identität:

$$\chi_1(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) Z_1 f + \dots + \chi_q(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) Z_q f + \dots \\ \dots + \chi_{q+\rho}(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) Z_{q+\rho} f = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{\partial f}{\partial z_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial z_m} = 0,$$

so erhalten wir die Identität:

$$\chi_1(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) X_1 f + \dots + \chi_q(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) X_q f = 0,$$

welche nach Voraussetzung nur durch die Werte:

$$\chi_1 = \chi_2 = \dots = \chi_q = 0$$

befriedigt werden kann. Es ergibt sich also die Identität:

$$\chi_{q+1}(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) Z_{q+1} f + \dots + \chi_{q+\rho}(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) Z_{q+\rho} f = 0,$$

welche augenscheinlich nur dann durch keine anderen Werte als die:

$$\chi_{q+1} = \chi_{q+2} = \dots = \chi_{q+\rho} = 0$$

befriedigt wird, wenn die Gleichungen:

$$Z_i f = 0 \quad (i=q+1, \dots, q+\rho)$$

von einander unabhängig sind. Damit ist der Satz bewiesen.

§ II. Unendliche Gruppe des Problems. Erweiterte Gruppen.

Jetzt werden wir nach Herrn LIE's Vorgang¹ unser Problem analytisch formulieren.

4. Es seien:

$$(1) \quad p = p(x, y), \quad q = q(x, y), \quad r = r(x, y),$$

wo x, y willkürliche Parameter bezeichnen, die Gleichungen einer Fläche in Cartesischen Coordinaten p, q, r .

Das Quadrat des Linienelementes auf der Fläche (1), nämlich:

$$ds^2 = dp^2 + dq^2 + dr^2$$

kann man nach GAUSS² in der Form:

$$(2) \quad ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$$

¹ SOPHUS LIE. *Über Differentialinvarianten*, S. 574.

² GAUSS. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*.

schreiben, wo:

$$E = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2, \quad F = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y},$$

$$G = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2.$$

Führen wir in (2) neue Veränderliche:

$$(\alpha) \quad x' = X(x, y), \quad y' = Y(x, y)$$

ein, wo X, Y ganz willkürliche Functionen von x, y bezeichnen. Das Linienelement erhält dann die neue Form:

$$ds^2 = E'dx'^2 + 2F'dx'dy' + G'dy'^2,$$

wo E', F', G' gewisse Functionen, welche man leicht berechnen kann, etwa:

$$(\beta) \quad E' = R(x, y, E, F, G), \quad F' = S(x, y, E, F, G),$$

$$G' = T(x, y, E, F, G)$$

der Veränderlichen x, y, E, F, G sind. Es ist leicht nachzuweisen, dass die Schar der Transformationen (α) und (β) der Veränderlichen x, y, E, F, G eine unendliche Gruppe bildet.

Transformiert man nämlich vermöge einer willkürlichen, aber bestimmten Transformation unserer Schar die Variablen x, y, E, F, G in x_1, y_1, E_1, F_1, G_1 , so bekommt man aus dem Linienelemente (2) das Linienelement:

$$ds^2 = E_1 dx_1^2 + 2F_1 dx_1 dy_1 + G_1 dy_1^2.$$

Nimmt man ferner anstatt der Veränderlichen x_1, y_1, E_1, F_1, G_1 neue x_2, y_2, E_2, F_2, G_2 , welche wieder mit den eben genannten durch eine willkürliche, aber bestimmte Transformation unserer Schar verknüpft sind, so erhält man die Form:

$$ds^2 = E_2 dx_2^2 + 2F_2 dx_2 dy_2 + G_2 dy_2^2.$$

Es ist nun unmittelbar klar, dass man, um von der Form (2) zu dieser dritten Form des Linienelementes zu gelangen, d. h. um von den Veränderlichen x, y, E, F, G unmittelbar zu den x_2, y_2, E_2, F_2, G_2 über-

zugehen, notwendig eine Transformation unserer Schar benutzen muss. Je zwei aufeinander folgende Transformationen unserer Schar sind also immer einer gewissen einzigen Transformation dieser Schar aequivalent, d. h. unsere Schar bildet eine *unendliche Gruppe*. Bei dieser Gruppe bleibt das Linienelement invariant, es müssen also ihre Differentialinvarianten *Biegungsinvarianten* sein. Wir werden mit infinitesimalen Transformationen operieren.

Setzen wir also voraus, dass die Veränderliche x, y ganz willkürliche Incremente:

$$(3) \quad \delta x = \xi(x, y) \delta t, \quad \delta y = \eta(x, y) \delta t$$

erhalten, dass also ξ, η ganz willkürliche Functionen von x, y bezeichnen. Formuliert man analytisch die Bedingung, dass das Linienelement bei unserer Gruppe unverändert bleibt, so erhält man:

$$\begin{aligned} \delta E dx^2 + 2\delta F dx dy + \delta G dy^2 + 2\{(Edx + Fdy)(\xi_{10} dx + \xi_{01} dy) \\ + (Fdx + Gdy)(\eta_{10} dx + \eta_{01} dy)\} \delta t = 0, \end{aligned}$$

wo wir für die partiellen Differentialquotienten die im Theorem I eingeführte Bezeichnung benutzen. Weil aber dx, dy hier vollkommen willkürlich sind, so ergeben sich folgende Incremente für E, F, G :

$$(4) \quad \begin{cases} \delta E = -2(E\xi_{10} + F\eta_{10}) \delta t, \\ \delta F = -(F\xi_{10} + E\xi_{01} + G\eta_{10} + F\eta_{01}) \delta t, \\ \delta G = -2(F\xi_{01} + G\eta_{01}) \delta t. \end{cases}$$

Die allgemeinste infinitesimale Transformation unserer Gruppe lautet also:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} - 2(E\xi_{10} + F\eta_{10}) \frac{\partial f}{\partial E} - (F\xi_{10} + E\xi_{01} + G\eta_{10} + F\eta_{01}) \frac{\partial f}{\partial F} \\ - 2(F\xi_{01} + G\eta_{01}) \frac{\partial f}{\partial G}. \end{aligned}$$

Die Berechnung der Biegungsinvarianten kommt somit zurück auf die Berechnung der Differentialinvarianten dieser unendlichen Gruppe.

Um diese vorzunehmen, wollen wir unsere Gruppe erweitern:

1) in bezug auf die Differentialquotienten von E, F, G nach x, y ;
 2) in bezug auf die Differentialquotienten von willkürlich wählbaren Functionen $\varphi^1(x, y), \varphi^2(x, y), \dots, \varphi^m(x, y)$, welche augenscheinlich bei allen Transformationen der Gruppe ihren Zahlenwert nicht verändern, und endlich

3) in bezug auf die Differentialquotienten von y nach x, y als Function von x betrachtet. Um diese Erweiterungen durchzuführen, wollen wir im Folgenden einige Hilfsformeln entwickeln.

5. Setzen wir voraus, dass der Zuwachs einer gewissen Function $\psi(x, y)$ bekannt ist, und versuchen wir die Zuwächse aller ihrer Differentialquotienten nach x und y zu berechnen! Wohl zu bemerken ist, dass wir für die partiellen Differentialquotienten stets die im Theorem I eingeführte Bezeichnung benutzen werden, also im Falle der Functionen von zwei Veränderlichen die Bezeichnung:

$$\frac{\partial^{i+k} \Phi(x, y)}{\partial x^i \partial y^k} = \Phi_{ik}.$$

Für jede Function $\psi(x, y)$ haben wir nun:

$$(a) \quad d\psi = \psi_{10} dx + \psi_{01} dy = 0.$$

Berücksichtigt man alsdann, dass:

$$\delta d\psi = d\delta\psi = \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{10} dx + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{01} dy \right] \delta t$$

und variiert (a) unter der Voraussetzung, dass x, y die Incremente (3) annehmen, so erhält man:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{10} dx + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{01} dy \right] \delta t - \delta \psi_{10} dx - \delta \psi_{01} dy - \psi_{10} (\xi_{10} dx + \xi_{01} dy) \delta t \\ & - \psi_{01} (\eta_{10} dx + \eta_{01} dy) = 0. \end{aligned}$$

Weil aber diese Gleichung bei allen Werten von dx, dy bestehen soll, so ergibt sich:

$$(b) \quad \frac{\partial \psi_{10}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{10} - \psi_{10} \xi_{10} - \psi_{01} \eta_{10}, \quad \frac{\partial \psi_{01}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{01} - \psi_{10} \xi_{01} - \psi_{01} \eta_{01}.$$

Setzt man in der ersten dieser Formeln ψ_{10} anstatt ψ , so gelangt man zur Formel:

$$\frac{\partial \psi_{20}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{20} - 2(\psi_{20} \xi_{10} + \psi_{11} \eta_{10}) - (\psi_{10} \xi_{20} + \psi_{01} \eta_{20}),$$

und in analoger Weise ergibt sich:

$$\frac{\partial \psi_{30}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{30} - 3(\psi_{30} \xi_{10} + \psi_{21} \eta_{10}) - 3(\psi_{20} \xi_{20} + \psi_{11} \eta_{20}) - (\psi_{10} \xi_{30} + \psi_{01} \eta_{30}).$$

Man sieht leicht, dass man allgemein erhält:

$$(c) \quad \frac{\partial \psi_{i0}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{i0} - \sum_1^i i_\mu (\psi_{i-\mu+1,0} \xi_{\mu 0} + \psi_{i-\mu,1} \eta_{\mu 0}),$$

wo i_μ die gewöhnliche Bezeichnung der Binomialcoefficienten ist. Die letzte Formel soll durch vollständige Induction verificiert werden. Setzt man nämlich in (c) ψ_{10} statt ψ , so ergibt sich vermöge der ersten Formel (b):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{i+1,0}}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{i+1,0} - \sum_0^i i_\mu (\psi_{i-\mu+1,0} \xi_{\mu+1,0} + \psi_{i-\mu,1} \eta_{\mu+1,0}) \\ &\quad - \sum_1^i i_\mu (\psi_{i-\mu+2,0} \xi_{\mu 0} + \psi_{i-\mu+1,1} \eta_{\mu 0}). \end{aligned}$$

Durch einfache Operationen mit Benutzung der Formel $i_\mu + i_{\mu-1} = (i+1)_\mu$ erhält man schliesslich:

$$\frac{\partial \psi_{i+1,0}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{i+1,0} - \sum_1^{i+1} (i+1)_\mu (\psi_{i-\mu+2,0} \xi_{\mu 0} + \psi_{i-\mu+1,1} \eta_{\mu 0}),$$

woraus die Richtigkeit der Formel (c) folgt.

Wenn wir die Formel (c) mit der ersten Formel (b) vergleichen, so sehen wir, dass die zweiten Indices in beiden Formeln dieselben sind; der erste Index bei $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ ist in (c) um $i-1$ grösser als in (b), und unter der Summe sind in (c) bei ψ die ersten Indices um $i-\mu$ und bei ξ und η um $\mu-1$ grösser als in (b). Demnach erhalten wir in analoger Weise aus der zweiten Formel (b) die Formel:

$$(d) \quad \frac{\partial \psi_{0k}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{0k} - \sum_1^k k_\nu (\psi_{1,k-\nu} \xi_{0\nu} + \psi_{0,k-\nu+1} \eta_{0\nu}).$$

Setzt man in (d) ψ_{i0} an Stelle von ψ , so ergibt sich:

$$\frac{\partial \psi_{ik}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \psi_{i0}}{\partial t} \right)_{0k} - \sum_1^k k_\nu (\psi_{i+1, k-\nu} \xi_{0\nu} + \psi_{i, k-\nu+1} \eta_{0\nu}),$$

wo nach (c):

$$\left(\frac{\partial \psi_{i0}}{\partial t} \right)_{0k} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{ik} - \sum_1^i i_\mu \sum_0^k k_\nu (\psi_{i-\mu+1, k-\nu} \xi_{\mu\nu} + \psi_{i-\mu, k-\nu+1} \eta_{\mu\nu});$$

also ist die allgemeinste Formel:

$$(e) \quad \frac{\partial \psi_{ik}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{ik} - \sum_0^i i'_\mu \sum_0^k k'_\nu (\psi_{i-\mu+1, k-\nu} \xi_{\mu\nu} + \psi_{i-\mu, k-\nu+1} \eta_{\mu\nu}),$$

wo die Striche an den Summenzeichen bedeuten, dass die Indices μ und ν nicht gleichzeitig beide gleich Null sein dürfen.

6. Setzen wir jetzt:

$$(f) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \rho^{10} \xi_{10} + \rho^{01} \xi_{01} + \sigma^{10} \eta_{10} + \sigma^{01} \eta_{01},$$

wo $\rho^{10}, \rho^{01}, \sigma^{10}, \sigma^{01}$ gewisse Functionen der Veränderlichen x, y bezeichnen, so haben wir:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{i0} = \sum_0^i i_\mu (\rho_{i-\mu,0}^{10} \xi_{\mu+1,0} + \rho_{i-\mu,0}^{01} \xi_{\mu 1} + \sigma_{i-\mu,0}^{10} \eta_{\mu+1,0} + \sigma_{i-\mu,0}^{01} \eta_{\mu 1})$$

und ferner:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{ik} &= \sum_0^i i_\mu \sum_0^k k_\nu (\rho_{i-\mu, k-\nu}^{10} \xi_{\mu+1, \nu} + \rho_{i-\mu, k-\nu}^{01} \xi_{\mu, \nu-1} \\ &\quad + \sigma_{i-\mu, k-\nu}^{10} \eta_{\mu+1, \nu} + \sigma_{i-\mu, k-\nu}^{01} \eta_{\mu, \nu+1}), \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{ik} &= \sum_1^{i+1} i_\mu \sum_0^k k_\nu (\rho_{i-\mu+1, k-\nu}^{10} \xi_{\mu\nu} + \sigma_{i-\mu+1, k-\nu}^{10} \eta_{\mu\nu}) \\ &\quad + \sum_0^i i_\mu \sum_1^{k+1} k_\nu (\rho_{i-\mu, k-\nu+1}^{01} \xi_{\mu\nu} + \sigma_{i-\mu, k-\nu+1}^{01} \eta_{\mu\nu}). \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt annehmen, dass alle Coefficienten i_p und k_q , für welche p von $0, 1, \dots, i$ und q von $0, 1, \dots, k$ verschieden, Null sind, so können wir schreiben:

$$(g) \quad \frac{\partial \psi_{ik}}{\partial t} = \sum_0^{i+1} \sum_0^{k+1} \{ (i_{\mu-1} k_{\nu} \rho_{i-\mu+1, k-\nu}^{10} + i_{\mu} k_{\nu-1} \rho_{i-\mu, k-\nu+1}^{01} - i_{\mu} k_{\nu} \psi_{i-\mu+1, k-\nu}) \xi_{\mu\nu} \\ + (i_{\mu-1} k_{\nu} \sigma_{i-\mu+1, k-\nu}^{10} + i_{\mu} k_{\nu-1} \sigma_{i-\mu, k-\nu+1}^{01} - i_{\mu} k_{\nu} \psi_{i-\mu, k-\nu+1}) \eta_{\mu\nu} \}.$$

Wohl zu beachten ist hierbei, dass i_p und k_q für $i = k = p = q = 0$ gleich 1 sind.

7. Versuchen wir nunmehr aus den bekannten Incrementen (3) von x, y die Incremente der Differentialquotienten y nach x zu bestimmen! Wir können hier die Formel (c) benutzen; weil (y als Function von x betrachtet) $y, \xi(x, y), \eta(x, y)$ Functionen einer einzigen Veränderlichen x sind, so werden in der Formel (c), $\phi = y$ gesetzt, alle partiellen Differentialquotienten nach y verschwinden und alle partiellen Differentialquotienten nach x sich in totale nach x verwandeln.

Demnach haben wir:

$$(h) \quad \frac{\partial y^{(i)}}{\partial t} = \frac{d^i \eta}{dx^i} - \sum_1^i l_{\lambda} y^{(i-\lambda+1)} \frac{d^{\lambda} \xi}{dx^{\lambda}}.$$

Die Berechnung dieser Incremente kommt also zurück auf die Berechnung der totalen Differentialquotienten einer Function $\zeta(x, y)$ nach x , wo y eine gewisse Function von x ist. Wir haben unmittelbar:

$$(i) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\zeta}{dx} = \zeta_{10} + y' \zeta_{01}, \\ \frac{d^2 \zeta}{dx^2} = y'' \zeta_{01} + \zeta_{20} + 2y' \zeta_{11} + y'^2 \zeta_{02}, \\ \frac{d^3 \zeta}{dx^3} = y''' \zeta_{01} + 3y'' \zeta_{11} + 3y' y'' \zeta_{02} + \zeta_{30} + 3y' \zeta_{21} + 3y'^2 \zeta_{12} + y'^3 \zeta_{03}, \\ \dots \end{array} \right.$$

Obwohl die Aufgabe, eine allgemeine Formel abzuleiten, gelöst ist,¹ ist diese Formel doch so compliciert, dass andere Formeln, welche wir aus dieser ableiten könnten, für eine weitere Betrachtung ungeeignet wären.

¹ F. BESSEL: *Über die Entwicklung der höheren Differentiale zusammengesetzter und impliciter Functionen.* Diss. Jena 1872.

Für unsere Zwecke wird es genügen, die ersten Formeln der Reihe (i) zu kennen. Mit Hilfe der Formeln (i) haben wir:

$$(6) \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta y'}{\delta t} &= \eta_{10} + y' \eta_{01} - y'(\xi_{10} + y' \xi_{01}), \\ \frac{\delta y''}{\delta t} &= y'' \eta_{10} + \eta_{20} + 2y' \eta_{11} + y'^2 \eta_{02} - 2y'' \xi_{10} - 3y' y'' \xi_{01} \\ &\quad - y'(\xi_{20} + 2y' \xi_{11} + y'^2 \xi_{02}), \\ \frac{\delta y'''}{\delta t} &= y''' \eta_{01} + 3y'' \eta_{11} + 3y' y'' \eta_{02} + \eta_{30} + 3y' \eta_{21} + 3y'^2 \eta_{12} + y'^3 \eta_{03} \\ &\quad - 3y''' \xi_{10} - (4y' y''' + 3y''^2) \xi_{01} - 3y'' \xi_{20} - 9y' y'' \xi_{11} - 6y'^2 y'' \xi_{02} \\ &\quad - y'(\xi_{30} + 3y' \xi_{21} + 3y'^2 \xi_{12} + y'^3 \xi_{03}), \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

Man sieht aber leicht, dass im Allgemeinen das Increment $\frac{\delta y^{(l)}}{\delta t}$ die Form:

$$(7) \quad \frac{\delta y^{(l)}}{\delta t} = \sum_0^l \sum_0^{l-\mu} [g_{\mu\nu}^l(y', \dots, y^{(l)}) \xi_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^l(y', \dots, y^{(l)}) \eta_{\mu\nu}]$$

hat, wo die $g_{\mu\nu}^l$ und $h_{\mu\nu}^l$ gewisse ganze Functionen ihrer Argumente bezeichnen.

8. Wir werden zuerst die Formel (g) auf die Functionen E, F, G anwenden. Aus den Formeln (4) erkennt man, was für Werte die Functionen $\rho^{10}, \rho^{01}, \sigma^{10}, \sigma^{01}$ hier erhalten, und zwar bekommen wir folgende Incremente:

$$(8) \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta E_{ik}}{\delta t} &= - \sum_0^{i+1} \sum_0^{k+1} \{ k_\nu (2i_{\mu-1} + i_\mu) E_{i-\mu+1, k-\nu} \xi_{\mu\nu} \\ &\quad + k_\nu (2i_{\mu-1} F_{i-\mu+1, k-\nu} + i_\mu E_{i-\mu, k-\nu+1}) \eta_{\mu\nu} \}, \\ \frac{\delta F_{ik}}{\delta t} &= - \sum_0^{i+1} \sum_0^{k+1} \{ [(i+1)_\mu k_\nu F_{i-\mu+1, k-\nu} + i_\mu k_{\nu-1} E_{i-\mu, k-\nu+1}] \xi_{\mu\nu} \\ &\quad + [i_\mu (k+1)_\nu F_{i-\mu, k-\nu+1} + i_{\mu-1} k_\nu G_{i-\mu+1, k-\nu}] \eta_{\mu\nu} \}, \\ \frac{\delta G_{ik}}{\delta t} &= - \sum_0^{i+1} \sum_0^{k+1} \{ i_\mu (2k_{\nu-1} F_{i-\mu, k-\nu+1} + k_\nu G_{i-\mu+1, k-\nu}) \xi_{\mu\nu} \\ &\quad + i_\mu (2k_{\nu-1} + k_\nu) G_{i-\mu, k-\nu+1} \eta_{\mu\nu} \}. \end{aligned} \right.$$

Nimmt man alle Differentialquotienten bis zur n^{ten} Ordnung inclusive, so ergibt sich eine erweiterte Gruppe:

$$(9) \quad \mathfrak{G}^{(n)} f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_0^n i \sum_0^{n-i} k \left(\frac{\partial E_{ik}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial E_{ik}} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial F_{ik}} + \frac{\partial G_{ik}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial G_{ik}} \right),$$

welche wir als *Gaussische n^{te} erweiterte Gruppe* bezeichnen werden.

Nimmt man eine Reihe von Functionen $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m$ der Veränderlichen x, y , so hat man:

$$\frac{\partial \varphi^s}{\partial t} = 0; \quad (s=1, 2, \dots, m)$$

es ergeben sich also die Incremente ihrer Differentialquotienten unmittelbar aus der Formel (e). Wir erhalten nämlich:

$$(10) \quad \frac{\partial \varphi_{ik}^s}{\partial t} = - \sum_0^i \mu' \sum_0^k \nu' i_{\mu} k_{\nu} (\varphi_{i-\mu+1, k-\nu}^s \xi_{\mu\nu} + \varphi_{i-\mu, k-\nu+1}^s \eta_{\mu\nu}). \quad (s=1, 2, \dots, m)$$

Demnach bilden wir die erweiterte Gruppe:

$$(11) \quad \mathfrak{B}^{(n)} f = \mathfrak{G}^{(n-1)} f + \sum_1^m s \sum_0^n i \sum_0^{n-i} k \frac{\partial \varphi_{ik}^s}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{ik}^s},$$

welche wir *Beltramische n^{te} erweiterte Gruppe* nennen werden.

Die Incremente von $y', y'', \dots, y^{(n)}$ sind in der Formel (7) gegeben. Die infinitesimale Transformation:

$$(12) \quad \mathfrak{N}^{(n)} f = \mathfrak{G}^{(n-1)} f + \sum_1^n i \frac{\partial y^{(i)}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial y^{(i)}}$$

ist auch die allgemeinste infinitesimale Transformation einer unendlichen Gruppe, welche wir als *Mindingsche n^{te} erweiterte Gruppe* bezeichnen werden.

Endlich die Gruppe:

$$(13) \quad \mathfrak{A}^{(n)} f = \mathfrak{G}^{(n-1)} f + \sum_1^m s \sum_0^n i \sum_0^{n-i} k \frac{\partial \varphi_{ik}^s}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{ik}^s} + \sum_1^n i \frac{\partial y^{(i)}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial y^{(i)}}$$

wollen wir *allgemeine n^{te} erweiterte Gruppe* nennen.

Nach dem Theorem I sind (9), (11), (12), (13) wirklich allgemeinste infinitesimale Transformationen von gewissen unendlichen continuierlichen Gruppen.

§ III. *Anzahl der Gaussischen Biegungsinvarianten.*

Die Differentialinvarianten der Gruppe (5) ergeben sich als Lösungen gewisser Systeme linearer homogener partieller Differentialgleichungen 1^{ter} Ordnung mit einer abhängigen Variablen. Diese Systeme erhält man, indem man alle Coefficienten der willkürlichen Functionen: ξ , η und $\xi_{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu}$ in (9), (11), (12), (13) gleich Null setzt. Hierbei ist zunächst zu beachten, dass:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

woraus folgt, dass die Differentialinvarianten unserer Gruppe explicite von x , y unabhängig sind. Wir brauchen nun nur noch diejenigen Gleichungen zu beachten, welche wir aus den Coefficienten von $\xi_{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu}$ erhalten.

9. Wir beginnen mit der *Gaussischen Gruppe* (9). Setzt man in (9) die Ausdrücke (8) ein, so ergibt sich folgendes System von partiellen Differentialgleichungen:

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n)} f = \sum_{i=\mu-1}^n \sum_{\nu-1}^{n-i} \left\{ (2i_{\mu-1} + i_{\mu}) k_{\nu} E_{i-\mu+1, k-\nu} \frac{\partial f}{\partial E_{ik}} \right. \\ \quad + [(i+1)_{\mu} k_{\nu} F_{i-\mu+1, k-\nu} + i_{\mu} k_{\nu-1} E_{i-\mu, k-\nu+1}] \frac{\partial f}{\partial F_{ik}} \\ \quad \left. + i_{\mu} (2k_{\nu-1} F_{i-\mu, k-\nu+1} + k_{\nu} G_{i-\mu+1, k-\nu}) \frac{\partial f}{\partial G_{ik}} \right\} = 0, \\ \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n)} f = \sum_{i=\mu-1}^n \sum_{\nu-1}^{n-i} \left\{ k_{\nu} (2i_{\mu-1} F_{i-\mu+1, k-\nu} + i_{\mu} E_{i-\mu, k-\nu+1}) \frac{\partial f}{\partial E_{ik}} \right. \\ \quad + [i_{\mu} (k+1)_{\nu} F_{i-\mu, k-\nu+1} + i_{\mu-1} k_{\nu} G_{i-\mu+1, k-\nu}] \frac{\partial f}{\partial F_{ik}} \\ \quad \left. + i_{\mu} (2k_{\nu-1} + k_{\nu}) G_{i-\mu, k-\nu+1} \frac{\partial f}{\partial G_{ik}} \right\} = 0. \quad \left(\begin{array}{l} \mu=0, 1, \dots, n+1 \\ \nu=0, 1, \dots, n+1-\mu \\ \mu=\nu \neq 0 \end{array} \right) \end{array} \right.$$

Wir haben die unteren Grenzen der Summation nach i und k gleich $\mu-1$ und $\nu-1$ gesetzt, weil die, zu kleineren Werten von i und k

gehörigen Glieder der Summen gleich Null sind. Die Striche an den Summenzeichen bedeuten, dass nicht gleichzeitig $i = \mu - 1$ und $k = \nu - 1$ sein soll, weil die zu diesem Wertpaar i, k gehörigen Glieder der Summen verschwinden. $\mu = \nu \neq 0$ soll bedeuten, dass μ und ν nicht gleichzeitig Null sein können.

Den Gleichungen $\mathfrak{S}_{\mu\nu}^{(n)} f = 0$ kann man eine bequemere Form geben. Vertauschen wir nämlich in $\mathfrak{S}_{\mu\nu}^{(n)} f$ gleichzeitig die Indices μ mit ν , und i mit k und beachten, dass die Summation $\sum_{\nu-1}^n \sum_{\mu-1}^{n-k}$ durch die Summation $\sum_{\mu-1}^n \sum_{\nu-1}^{n-i}$ ersetzt werden kann, so ergeben sich an Stelle der Gleichungen $\mathfrak{S}_{\mu\nu}^{(n)} f = 0$ die folgenden:

$$\begin{aligned}
 (14)(\beta) \quad \mathfrak{S}_{\nu\mu}^{(n)} f &= \sum_{\mu-1}^n \sum_{\nu-1}^{n-i} \left\{ (2i_{\mu-1} + i_{\mu}) k_{\nu} G_{k-\nu, i-\mu+1} \frac{\partial f}{\partial G_{ki}} \right. \\
 &+ [(i+1)_{\mu} k_{\nu} F_{k-\nu, i-\mu+1} + i_{\mu} k_{\nu-1} G_{k-\nu+1, i-\mu}] \frac{\partial f}{\partial F_{ki}} \\
 &\left. + i_{\mu} (2k_{\nu-1} F_{k-\nu+1, i-\mu} + k_{\nu} E_{k-\nu, i-\mu+1}) \frac{\partial f}{\partial E_{ki}} \right\} = 0. \quad \left(\begin{array}{l} \mu=0, 1, \dots, n+1 \\ \nu=0, 1, \dots, n+1-\mu \\ \mu \neq \nu=0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Wir haben also den Satz:

Satz III: *Hat man alle Gleichungen $\mathfrak{S}_{\mu\nu}^{(n)} f = 0$ aufgestellt, so kann man die Gleichungen $\mathfrak{S}_{\nu\mu}^{(n)} f = 0$ ohne weiteres angeben. Aus jeder Gleichung $\mathfrak{S}_{\mu\nu}^{(n)} f = 0$ ergibt sich nämlich die entsprechende Gleichung $\mathfrak{S}_{\nu\mu}^{(n)} f = 0$ durch gleichzeitige Vertauschung einerseits der Buchstaben E und G , andererseits der Indices von E, F, G .*

Dieser Satz ist von praktischer Wichtigkeit für die Aufstellung genannter Gleichungen bei gegebenen Werten von n .

10. Wenn die Gleichungen (14)(α) und (β) aufgestellt sind, so hat man, um die Gleichungen $\mathfrak{S}_{\mu\nu}^{(n+1)} f = 0$ und $\mathfrak{S}_{\nu\mu}^{(n+1)} f = 0$ zu berechnen, erstens zu den Ausdrücken $\mathfrak{S}_{\mu\nu}^{(n)} f$ und $\mathfrak{S}_{\nu\mu}^{(n)} f$ gewisse Glieder hinzuzufügen und zweitens eine gewisse Anzahl von neuen Gleichungen zu bilden. Es ist nämlich leicht nachzuweisen, dass sich für $\mu = 0, 1, \dots, n+1$; $\nu = 0, 1, \dots, n+1-\mu$: $\mathfrak{S}_{\mu\nu}^{(n+1)} f$ von $\mathfrak{S}_{\mu\nu}^{(n)} f$ nur durch solche additive Glieder unterscheidet, welche wir dadurch erhalten, dass wir in den Gliedern, die in $\mathfrak{S}_{\mu\nu}^{(n)} f$ unter dem

Summenzeichen stehen, $k = n + 1 - i$ setzen und nach i von $\mu - 1$ bis $n + 1$ summieren.¹ Das Entsprechende gilt für $\bar{\mathcal{G}}_{\nu}^{(n+1)}f$. Was die anderen Gleichungen anbelangt, so kann man die Gleichungen $\mathcal{G}_{\nu}^{(n+1)}f = 0$ für $\mu = 0, 1, \dots, n + 2$; $\nu = n + 2 - \mu$ dadurch erhalten, dass man in den Gliedern, welche in $\mathcal{G}_{\nu}^{(n)}f$ unter dem Summenzeichen stehen, $k = n + 1 - i$ setzt und nach i von $\mu - 1$ bis $n + 1$ summiert.² Die entsprechenden Gleichungen $\bar{\mathcal{G}}_{\nu}^{(n+1)}f = 0$ werden natürlich in derselben Weise aus den Gleichungen $\bar{\mathcal{G}}_{\nu}^{(n)}f = 0$ gebildet. Andererseits können wir auch zur Aufstellung der Gleichungen $\bar{\mathcal{G}}_{\nu}^{(n+1)}f = 0$ den Satz III benutzen.

Wenn wir also jetzt annehmen, dass $\mathcal{G}_{\nu}^{(n)}f$ und $\bar{\mathcal{G}}_{\nu}^{(n)}$ identisch Null sind, sobald $\mu + \nu = n + 2$ ist, so ergibt sich:

¹ Man bemerke, dass erstens jedes Glied der Summe, für welches i oder k negativ ausfällt, gleich Null ist und zweitens die untere Grenze der Summation stets kleiner, als die obere ist. Bezeichnet man also mit a_{ik} alles, was unter dem Zeichen der Summe steht, so kann man schreiben:

$$\sum_{\mu-1}^{n+1} \sum_{\nu-1}^{n+1-i} a_{ik} = \sum_{\mu-1}^{n+1} (a_{i,\nu-1} + \dots + a_{i,n-i} + a_{i,n+1-i})$$

$$= \sum_{\mu-1}^n \sum_{\nu-1}^{n-i} a_{ik} + \sum_{\nu-1}^{-1} a_{n+1,k} + \sum_{\mu-1}^{n+1} a_{i,n+1-i},$$

woraus folgt:

$$\sum_{\mu-1}^{n+1} \sum_{\nu-1}^{n+1-i} a_{ik} = \sum_{\mu-1}^n \sum_{\nu-1}^{n-i} a_{ik} + \sum_{\mu-1}^{n+1} a_{i,n+1-i},$$

was eben bewiesen werden sollte.

² In ähnlicher Weise haben wir:

$$\sum_{\mu-1}^{n+1} \sum_{n+1-\mu}^{n+1-i} a_{ik} = \sum_{n+1-\mu}^{n+2-\mu} a_{\mu-1,k} + \sum_{n+1-\mu}^{n+1-\mu} a_{\mu k} + \sum_{n+1-\mu}^{n-\mu} a_{\mu+1,k} + \dots + \sum_{n+1-\mu}^0 a_{n+1,k};$$

weil aber nicht gleichzeitig $i = \mu - 1$ und $k = n + 1 - \mu$ sein können, so ergibt sich:

$$\sum_{\mu-1}^{n+1} \sum_{n+1-\mu}^{n+1-i} a_{ik} = a_{\mu-1,n+2-\mu} + a_{\mu,n+1-\mu} + a_{\mu+1,n-\mu} + \dots + a_{n+1,0} = \sum_{\mu-1}^{n+1} a_{i,n+1-i},$$

was eben zu beweisen war.

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{G}_{\nu}^{(n+1)} f &= \mathfrak{G}_{\nu}^{(n)} f + \sum_{i=1}^{n+1} \left\{ (2i_{\mu-1} + i_{\mu})(n+1-i)_{\nu} E_{i-\mu+1, n+1-i-\nu} \frac{\partial f}{\partial E_{i, n+1-i}} \right. \\
 &\quad + [(i+1)_{\mu}(n+1-i)_{\nu} F_{i-\mu+1, n+1-i-\nu} \\
 &\quad + i_{\mu}(n+1-i)_{\nu-1} E_{i-\mu, n+2-i-\nu}] \frac{\partial f}{\partial F_{i, n+1-i}} \\
 &\quad + i_{\mu} [2(n+1-i)_{\nu-1} F_{i-\mu, n+2-i-\nu} \\
 &\quad \left. + (n+1-i)_{\nu} G_{i-\mu+1, n+1-i-\nu}] \frac{\partial f}{\partial G_{i, n+1-i}} \right\} = 0, \\
 \text{(I5)} \quad \bar{\mathfrak{G}}_{\nu_{\mu}}^{(n+1)} f &= \bar{\mathfrak{G}}_{\nu_{\mu}}^{(n)} f + \sum_{i=1}^{n+1} \left\{ (2i_{\mu-1} + i_{\mu})(n+1-i)_{\nu} G_{n+1-i-\nu, i-\mu+1} \frac{\partial f}{\partial G_{n+1-i, i}} \right. \\
 &\quad + [(i+1)_{\mu}(n+1-i)_{\nu} F_{n+1-i-\nu, i-\mu+1} \\
 &\quad + i_{\mu}(n+1-i)_{\nu-1} G_{n+2-i-\nu, i-\mu}] \frac{\partial f}{\partial F_{n+1-i, i}} \\
 &\quad + i_{\mu} [2(n+1-i)_{\nu-1} F_{n+2-1-\nu, i-\mu} \\
 &\quad \left. + (n+1-i)_{\nu} E_{n+1-i-\nu, i-\mu+1}] \frac{\partial f}{\partial E_{n+1-i, i}} \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \mu=0, 1, \dots, n+2 \\ \nu=0, 1, \dots, n+2-\mu \\ \mu=\nu \neq 0 \end{pmatrix}$$

11. Wir wollen jetzt diejenigen Gleichungen (15) näher betrachten, in welchen $\nu = n + 2 - \mu$ ist. Wir können die Gleichungen $\mathfrak{G}_{\mu, n+2-\mu}^{(n+1)} f = 0$ folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{G}_{\mu, n+2-\mu}^{(n+1)} f &= \sum_{i=1}^{n+1} \left\{ (2i_{\mu-1} + i_{\mu})(n+1-i)_{n+2-\mu} E_{i-\mu+1, \mu-i-1} \frac{\partial f}{\partial E_{i, n+1-i}} \right. \\
 &\quad + [(i+1)_{\mu}(n+1-i)_{n+2-\mu} F_{i-\mu+1, \mu-i-1} + i_{\mu}(n+1-i)_{n+1-\mu} E_{i-\mu, \mu-i}] \frac{\partial f}{\partial F_{i, n+1-i}} \\
 &\quad \left. + i_{\mu} [2(n+1-i)_{n+1-\mu} F_{i-\mu, \mu-i} + (n+1-i)_{n+2-\mu} G_{i-\mu+1, \mu-i-1}] \frac{\partial f}{\partial G_{i, n+1-i}} \right\} = 0
 \end{aligned}$$

$$(\mu=0, 1, \dots, n+2)$$

und analog die Gleichungen $\mathfrak{G}_{n+2-\mu,\mu}^{(n+1)} f = 0$. Man sieht unmittelbar, dass in den Gleichungen $\mathfrak{G}_{\mu,n+2-\mu}^{(n+1)} f = 0$ nur die Werte $\mu - 1$ und μ erhalten kann; bei $i > \mu$ verschwinden alle Glieder unter dem Summenzeichen. Führt man die Summation aus, so ergibt sich:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{G}_{\mu,n+2-\mu}^{(n+1)} f = 2E \frac{\partial f}{\partial E_{\mu-1,n+2-\mu}} + F \frac{\partial f}{\partial F_{\mu-1,n+2-\mu}} + E \frac{\partial f}{\partial F_{\mu,n+1-\mu}} \\ \quad + 2F \frac{\partial f}{\partial G_{\mu,n+1-\mu}} = 0, \\ \mathfrak{G}_{n+2-\mu,\mu}^{(n+1)} f = 2G \frac{\partial f}{\partial G_{n+2-\mu,\mu-1}} + F \frac{\partial f}{\partial F_{n+2-\mu,\mu-1}} + G \frac{\partial f}{\partial F_{n+1-\mu,\mu}} \\ \quad + 2F \frac{\partial f}{\partial E_{n+1-\mu,\mu}} = 0. \end{array} \right. \quad (\mu = 0, 1, \dots, n+2)$$

Wohl zu beachten ist, dass für $\mu = 0$ und $\mu = n + 2$ die Glieder mit negativen Indices ausgelassen werden müssen.

Die Gleichungen $\mathfrak{G}_{\mu,n+2-\mu}^{(n+1)} f = 0$ und $\mathfrak{G}_{n+2-\mu,\mu}^{(n+1)} f = 0$ können wir in der Form:

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\partial f}{\partial F_{\mu,n+1-\mu}} + 2 \frac{\partial f}{\partial E_{\mu-1,n+2-\mu}} \right) + F \left(\frac{\partial f}{\partial F_{\mu-1,n+2-\mu}} + 2 \frac{\partial f}{\partial G_{\mu,n+1-\mu}} \right) &= 0, \\ F \left(\frac{\partial f}{\partial F_{\mu,n+1-\mu}} + 2 \frac{\partial f}{\partial E_{\mu-1,n+2-\mu}} \right) + G \left(\frac{\partial f}{\partial F_{\mu-1,n+2-\mu}} + 2 \frac{\partial f}{\partial G_{\mu,n+1-\mu}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

angeben. Weil die Determinante $EG - F^2$ von Null verschieden ist, so erhält man die Gleichungen:

$$(16') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial F_{\mu,n+1-\mu}} + 2 \frac{\partial f}{\partial E_{\mu-1,n+2-\mu}} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial F_{\mu-1,n+2-\mu}} + 2 \frac{\partial f}{\partial G_{\mu,n+1-\mu}} = 0, \end{array} \right. \quad (\mu = 0, 1, \dots, n+2)$$

welche den Gleichungen (16) äquivalent sind. Schreibt man alle diese Gleichungen der Reihe nach auf:

$$(16'') \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial E'_{0,n+1}} = 0, & \frac{\partial f}{\partial G'_{0,n+1}} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial F'_{1n}} + 2 \frac{\partial f}{\partial E'_{0,n+1}} = 0, & \frac{\partial f}{\partial E'_{0,n+1}} + 2 \frac{\partial f}{\partial G'_{1n}} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial F'_{2,n-1}} + 2 \frac{\partial f}{\partial E'_{1n}} = 0, & \frac{\partial f}{\partial F'_{1n}} + 2 \frac{\partial f}{\partial G'_{2,n-1}} = 0, \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial f}{\partial F'_{n1}} + 2 \frac{\partial f}{\partial E'_{n-1,2}} = 0, & \frac{\partial f}{\partial F'_{n-1,2}} + 2 \frac{\partial f}{\partial G'_{n1}} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial F'_{n+1,0}} + 2 \frac{\partial f}{\partial E'_{n1}} = 0, & \frac{\partial f}{\partial F'_{n1}} + 2 \frac{\partial f}{\partial G'_{n+1,0}} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial E'_{n+1,0}} = 0, & \frac{\partial f}{\partial F'_{n+1,0}} = 0, \end{array} \right.$$

so sieht man, dass sie für alle möglichen Werthe von n von einander unabhängig sind. Also sind auch alle Gleichungen (16) von einander unabhängig. Dieses Resultat erlaubt uns einen Satz aufzustellen, welcher die Frage, ob die Gleichungen (14) von einander unabhängig sind oder nicht, zu entscheiden gestattet. Bezeichnet man nämlich im Allgemeinen die Gleichungen, welche alle Differentialinvarianten bis zur n^{ten} Ordnung definieren, als *Gleichungen der n^{ten} erweiterten Gruppe*, und wendet man den Satz II auf das System (15) an, so gewinnt man den folgenden Satz:

Satz IV: *Sind alle Gleichungen der n^{ten} erweiterten Gaussischen Gruppe von einander unabhängig, so sind auch alle Gleichungen der $(n + 1)^{\text{ten}}$ erweiterten Gaussischen Gruppe von einander unabhängig.*

Mit Hülfe der Gleichungen (16') kann man den Gleichungen (15), für welche $\mu = 0, 1, \dots, n + 1$; $\nu = 0, 1, \dots, n + 1 - \mu$, eine andere Form geben. Aus den Gleichungen (16') ergibt sich nämlich:

$$\frac{\partial f}{\partial E_{i,n+1-i}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial F_{i+1,n-i}}, \quad \frac{\partial f}{\partial G_{i,n+1-i}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial F_{i-1,n+2-i}}.$$

(i=0, 1, ..., n) (i=1, 2, ..., n+1)

Berücksichtigt man, dass diejenigen Differentialquotienten, für welche ein

Index negativ ausfällt, identisch Null sind, so kann man die erhaltenen Werte in $\mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n+1)}f$ einsetzen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n+1)}f &= \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n)}f - \frac{1}{2} \sum_{\mu}^{n+2} i [2(i-1)_{\mu-1} + (i-1)_{\mu}] (n+2-i)_{\nu} E_{i-\mu, n+2-i-\nu} \frac{\partial f}{\partial F_{i, n+1-i}} \\ &+ \sum_{\mu-1}^{n+1} i [(i+1)_{\mu} (n+1-i)_{\nu} F_{i-\mu+1, n+1-i-\nu} + i_{\mu} (n+1-i)_{\nu-1} E_{i-\mu, n+2-i-\nu}] \frac{\partial f}{\partial F_{i, n+1-i}} \\ &- \frac{1}{2} \sum_{\mu-2}^n i (i+1)_{\mu} [2(n-i)_{\nu-1} F_{i-\mu+1, n+1-i-\nu} + (n-i)_{\nu} G_{i-\mu+2, n-i-\nu}] \frac{\partial f}{\partial F_{i, n+1-i}} = 0. \end{aligned}$$

Als Grenzen der Summation kann man hier überall $\mu-1$ und n nehmen.

In der That: weil $2(\mu-2)_{\mu-1} + (\mu-2)_{\mu} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial F_{n+1,0}} = 0$ nach (16'')

und $\frac{\partial f}{\partial F_{n+2,-1}} = 0$, so sind die zu $i = \mu-1, n+1, n+2$ gehörigen

Glieder unter dem ersten Summenzeichen identisch Null; da ferner

$\frac{\partial f}{\partial F_{n+1,0}} = 0$, so ist das zu $i = n+1$ gehörige Glied unter dem zweiten

Summenzeichen gleich Null; endlich verschwindet noch das zu $i = \mu-2$ gehörige Glied unter dem dritten Summenzeichen, da $(\mu-1)_{\mu} = 0$ ist.

Demnach können wir das System (15) in der Form:

$$(17) \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n)}f + \sum_{\mu-1}^n \left\{ \left[i_{\mu} (n+1-i)_{\nu-1} - \left((i-1)_{\mu-1} + \frac{1}{2} (i-1)_{\mu} \right) (n+2-i)_{\nu} \right] E_{i-\mu, n+2-i-\nu} \right. \\ &\quad \left. + (i+1)_{\mu} (n-i)_{\nu} \left(F_{i-\mu+1, n+1-i-\nu} - \frac{1}{2} G_{i-\mu+2, n-i-\nu} \right) \right\} \frac{\partial f}{\partial F_{i, n+1-i}} = 0, \\ &\mathfrak{G}_{\nu\mu}^{(n)}f + \sum_{\mu-1}^n \left\{ \left[i_{\mu} (n+1-i)_{\nu-1} - \left((i-1)_{\mu-1} + \frac{1}{2} (i-1)_{\mu} \right) (n+2-i)_{\nu} \right] G_{n+2-i-\nu, i-\mu} \right. \\ &\quad \left. + (i+1)_{\mu} (n-1)_{\nu} \left(F_{n+1-i-\nu, i-\mu+1} - \frac{1}{2} E_{n-i-\nu, i-\mu+2} \right) \right\} \frac{\partial f}{\partial F_{n+1-i, i}} = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial F_{\mu, n+1-\mu}} + 2 \frac{\partial f}{\partial E_{\mu-1, n+2-\mu}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial F_{n+1-\mu, \mu}} + 2 \frac{\partial f}{\partial G_{n+2-\mu, \mu-1}} = 0^1 \end{aligned} \right. \begin{matrix} (\mu=0, 1, \dots, n+1) \\ (\nu=0, 1, \dots, n+1-\mu) \\ (\mu=\nu \neq 0) \end{matrix}$$

($\mu=0, 1, \dots, n+2$)

¹ Diese Gleichungen sind die etwas anders geschriebenen Gleichungen (16').

schreiben. Man muss hier beachten, dass alle Glieder, bei welchen ein Index von E , F oder G negativ ausfällt, gleich Null zu nehmen sind.

12. Nach dem Satze IV kommt die Frage, ob die Gleichungen der erweiterten Gaussischen Gruppe von bestimmter Ordnung alle von einander unabhängig sind oder nicht, auf die Untersuchung der Gleichungen zurück, welche die Differentialinvarianten der niedrigsten Ordnungen definieren. Hat man bewiesen, dass alle Gleichungen einer bestimmten, etwa der p^{ten} erweiterten Gruppe von einander unabhängig sind, so gilt das auch für jede Ordnung, welche grösser als p ist.

Aus den Formeln (14), (α) und (β) erhält man für $n = 0$:

$$(\alpha_0) \quad \begin{cases} \mathfrak{S}_{01}f = E \frac{\partial f}{\partial F} + 2F \frac{\partial f}{\partial G} = 0, \\ \bar{\mathfrak{S}}_{10}f = G \frac{\partial f}{\partial F} + 2F \frac{\partial f}{\partial E} = 0, \\ \mathfrak{S}_{10}f = 2E \frac{\partial f}{\partial E} + F \frac{\partial f}{\partial F} = 0, \\ \bar{\mathfrak{S}}_{01}f = 2G \frac{\partial f}{\partial G} + F \frac{\partial f}{\partial E} = 0. \end{cases}$$

Für die Grössen χ_{01} , $\bar{\chi}_{10}$, χ_{10} , $\bar{\chi}_{01}$, welche die Identität:

$$(\beta_0) \quad \chi_{01} \mathfrak{S}_{01}f + \bar{\chi}_{10} \bar{\mathfrak{S}}_{10}f + \chi_{10} \mathfrak{S}_{10}f + \bar{\chi}_{01} \bar{\mathfrak{S}}_{01}f = 0$$

befriedigen sollen, erhalten wir drei lineare homogene Gleichungen:

$$(\gamma_0) \quad \begin{cases} F\bar{\chi}_{10} + E\chi_{10} = 0, & E\chi_{10} + G\bar{\chi}_{10} + F\chi_{10} + F\bar{\chi}_{01} = 0, \\ & F\chi_{01} + G\bar{\chi}_{01} = 0, \end{cases}$$

aus welchen folgt:

$$(\delta_0) \quad \bar{\chi}_{10} = -\frac{E}{G}\chi_{01}, \quad \chi_{10} = \frac{F}{G}\chi_{01}, \quad \bar{\chi}_{01} = -\frac{F}{G}\chi_{01}.$$

Es existiert demnach eine, aber auch nur eine Identität (β_0). Es ergibt sich also, dass die Gleichungen (α_0) drei unabhängige enthalten.

Benutzt man ferner die Gleichungen (15), so erhält man:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{G}_{01}^{(1)} f &= \mathfrak{G}_{01} f + E_{10} \frac{\partial f}{\partial E_{01}} + (F_{10} + E_{01}) \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + (2F_{01} + G_{10}) \frac{\partial f}{\partial G_{01}} \\
 &\quad + E_{10} \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F_{10} \frac{\partial f}{\partial G_{10}} = 0, \\
 \bar{\mathfrak{G}}_{10}^{(1)} f &= \bar{\mathfrak{G}}_{10} f + G_{01} \frac{\partial f}{\partial G_{10}} + (F_{01} + G_{10}) \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + (2F_{10} + E_{01}) \frac{\partial f}{\partial E_{10}} \\
 &\quad + G_{01} \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F_{01} \frac{\partial f}{\partial E_{01}} = 0, \\
 \mathfrak{G}_{10}^{(1)} f &= \mathfrak{G}_{10} f + 2E_{01} \frac{\partial f}{\partial E_{01}} + F_{01} \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 3E_{10} \frac{\partial f}{\partial E_{10}} + 2F_{10} \frac{\partial f}{\partial F_{10}} \\
 &\quad + G_{10} \frac{\partial f}{\partial G_{10}} = 0, \\
 \bar{\mathfrak{G}}_{01}^{(1)} f &= \bar{\mathfrak{G}}_{01} f + 2G_{10} \frac{\partial f}{\partial G_{10}} + F_{10} \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 3G_{01} \frac{\partial f}{\partial G_{01}} + 2F_{01} \frac{\partial f}{\partial F_{01}} \\
 &\quad + E_{01} \frac{\partial f}{\partial E_{01}} = 0, \\
 \mathfrak{G}_{02}^{(1)} f &= E \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F \frac{\partial f}{\partial G_{01}} = 0, \\
 \bar{\mathfrak{G}}_{20}^{(1)} f &= G \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F \frac{\partial f}{\partial E_{10}} = 0, \\
 \mathfrak{G}_{11}^{(1)} f &= 2E \frac{\partial f}{\partial E_{01}} + F \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + E \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F \frac{\partial f}{\partial G_{10}} = 0, \\
 \bar{\mathfrak{G}}_{11}^{(1)} f &= 2G \frac{\partial f}{\partial G_{10}} + F \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + G \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F \frac{\partial f}{\partial E_{01}} = 0, \\
 \mathfrak{G}_{20}^{(1)} f &= 2E \frac{\partial f}{\partial E_{10}} + F \frac{\partial f}{\partial F_{10}} = 0, \\
 \bar{\mathfrak{G}}_{02}^{(1)} f &= 2G \frac{\partial f}{\partial G_{01}} + F \frac{\partial f}{\partial F_{01}} = 0.
 \end{aligned}$$

(α₁)

Wir versuchen die Grössen so zu bestimmen, dass die Identität:

$$(\beta_1) \quad \chi_{01} \mathfrak{G}_{01}^{(1)} f + \dots + \bar{\chi}_{01} \bar{\mathfrak{G}}_{10}^{(1)} f + \chi_{02} \mathfrak{G}_{02}^{(1)} f + \dots + \bar{\chi}_{02} \bar{\mathfrak{G}}_{20}^{(1)} f = 0$$

besteht. Man sieht ohne weiteres, dass $\chi_{01}, \dots, \bar{\chi}_{01}$ die Werte (∂_0) haben müssen. Für die anderen χ erhalten wir folgende Gleichungen:

$$(\gamma_1) \left\{ \begin{aligned}
 & 2E\chi_{11} + 2F\bar{\chi}_{11} + \frac{\chi_{01}}{G}(GE_{10} - 2EF_{01} + FE_{01}) = 0, \\
 & E\chi_{02} + F\chi_{11} + G\bar{\chi}_{11} + F\bar{\chi}_{02} + \frac{\chi_{01}}{G}[(F_{10} + E_{01})G - EG_{01} - FF_{01}] = 0, \\
 & 2F\chi_{02} + 2G\bar{\chi}_{02} + \frac{\chi_{01}}{G}[(2F_{01} + G_{10})G - 3G_{01}F] = 0, \\
 & 2F\chi_{11} + 2G\bar{\chi}_{11} - \frac{\chi_{01}}{G}(EG_{01} - 2GF_{10} + FG_{10}) = 0, \\
 & G\bar{\chi}_{20} + E\chi_{11} + F\bar{\chi}_{11} + F\chi_{20} - \frac{\chi_{01}}{G}[(F_{01} + G_{10})E - GE_{10} - FF_{10}] = 0, \\
 & 2E\chi_{20} + 2F\bar{\chi}_{20} - \frac{\chi_{01}}{G}[(2F_{10} + E_{01})E - 3E_{10}F] = 0.
 \end{aligned} \right.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$(\delta_1) \left\{ \begin{aligned}
 \chi_{02} &= \frac{\chi_{01}}{2G(EG - F^2)} \{ F(4GF_{01} - 3FG_{01}) - G(2GE_{01} - EG_{01}) \}, \\
 \bar{\chi}_{20} &= \frac{\chi_{01}}{2G(EG - F^2)} \{ E(2EG_{10} - GE_{10}) - F(4EF_{10} - 3FE_{10}) \}, \\
 \chi_{11} &= \frac{\chi_{01}}{2G(EG - F^2)} \{ -F(EG_{01} - 2GF_{10} + FG_{10}) \\
 &\quad - G(GE_{10} - 2EF_{01} + FE_{01}) \}, \\
 \bar{\chi}_{11} &= \frac{\chi_{01}}{2G(EG - F^2)} \{ E(EG_{01} - 2GF_{10} + FG_{10}) \\
 &\quad + F(GE_{10} - 2EF_{01} + FE_{01}) \}, \\
 \chi_{20} &= \frac{\chi_{01}}{2G(EG - F^2)} \{ 2(EG + F^2)F_{10} + (EG - F^2)E_{01} \\
 &\quad - 2F(GE_{10} + EG_{10}) \}, \\
 \bar{\chi}_{02} &= \frac{\chi_{01}}{2G(EG - F^2)} \{ 2F(EG_{01} + GE_{01}) - 2(EG + F^2)F_{01} \\
 &\quad - (EG - F^2)G_{10} \}.
 \end{aligned} \right.$$

Wir schliessen hieraus, dass es eine und nur eine Identität (β_1) gibt und dass also *die Gleichungen* (α_1) *9 unabhängige enthalten.*

Bilden wir jetzt die Gleichungen der zweiten erweiterten Gaussischen Gruppe nach dem Schema (17), so erhalten wir:

$$(\alpha_2) \left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{G}_{01}^{(1)} f = 0, & \bar{\mathfrak{G}}_{10}^{(1)} f = 0, \\ \mathfrak{G}_{10}^{(1)} f - (E_{02} - 2F_{11} + G_{20}) \frac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0, & \bar{\mathfrak{G}}_{01}^{(1)} f - (G_{20} - 2F_{11} + E_{02}) \frac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0, \\ \mathfrak{G}_{02}^{(1)} f + \frac{1}{2} E_{10} \frac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0, & \bar{\mathfrak{G}}_{20}^{(1)} f + \frac{1}{2} G_{01} \frac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0, \\ \mathfrak{G}_{11}^{(1)} f - E_{01} \frac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0, & \bar{\mathfrak{G}}_{11}^{(1)} f - G_{10} \frac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0, \\ \mathfrak{G}_{20}^{(1)} f + \left(F_{01} - \frac{1}{2} G_{10}\right) \frac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0, & \bar{\mathfrak{G}}_{02}^{(1)} f + \left(F_{10} - \frac{1}{2} E_{01}\right) \frac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial F_{02}} = 0, & \frac{\partial f}{\partial F_{20}} = 0, & \frac{\partial f}{\partial F_{11}} + 2 \frac{\partial f}{\partial E_{02}} = 0, & \frac{\partial f}{\partial F_{11}} + 2 \frac{\partial f}{\partial G_{20}} = 0, \\ & \frac{\partial f}{\partial E_{11}} = 0, & \frac{\partial f}{\partial G_{11}} = 0, & \frac{\partial f}{\partial E_{20}} = 0, & \frac{\partial f}{\partial G_{02}} = 0. \end{array} \right.$$

Multipliziert man die linken Seiten dieser Gleichungen mit gewissen unbekanntem Multiplikatoren, addiert die erhaltenen Ausdrücke und setzt die Summe gleich Null, so sieht man ohne weiteres, dass alle Multiplikatoren der acht letzten Gleichungen gleich Null sein müssen. Übrigens zerfällt die aufgestellte Identität in die Identität (β_1) und in die Identität:

$$\begin{aligned}
 & - (E_{02} - 2F_{11} + G_{20}) \chi_{10} - (G_{20} - 2F_{11} + E_{02}) \bar{\chi}_{01} + \frac{1}{2} E_{10} \chi_{02} \\
 & + \frac{1}{2} G_{01} \bar{\chi}_{20} - E_{01} \chi_{11} - G_{10} \bar{\chi}_{11} + \left(F_{01} - \frac{1}{2} G_{10}\right) \chi_{20} + \left(F_{10} - \frac{1}{2} E_{01}\right) \bar{\chi}_{02} = 0.
 \end{aligned}$$

Sind die Gleichungen (α_2) nicht alle von einander unabhängig, so müssen die Werte (δ_0) und (δ_1) diese Identität befriedigen. Und es lässt sich in der That leicht verifizieren, dass dies der Fall ist. Demnach *enthalten die Gleichungen* (α_2) *nur 17 unabhängige.* Hätten wir also andererseits die Gleichungen (α_2) in der Form:

$$(\alpha'_2) \quad \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(2)} f = 0, \quad \bar{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(2)} f = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \mu=0,1,2,3 \\ \nu=0,1,\dots,3-u \end{array} \right)$$

genommen, so wäre die Identität:

$$(\beta_2) \quad \chi_{01} \mathfrak{G}_{01}^{(2)} f + \dots + \bar{\chi}_{02} \bar{\mathfrak{G}}_{02}^{(2)} f + \chi_{03} \mathfrak{G}_{03}^{(2)} f + \dots + \bar{\chi}_{03} \bar{\mathfrak{G}}_{03}^{(2)} f = 0$$

durch die Werte (∂_0) , (∂_1) und

$$(\partial_2) \quad \chi_{03} = a_{03} \chi_{01}, \quad \bar{\chi}_{30} = \bar{a}_{30} \chi_{01}, \quad \chi_{12} = a_{12} \chi_{01}, \quad \dots, \quad \bar{\chi}_{03} = \bar{a}_{03} \chi_{01}$$

befriedigt worden, wobei wir die Coefficienten a und \bar{a} , wie aus dem Folgenden zu sehen ist, nicht aufzustellen brauchen.

Jetzt werden wir die Gleichungen der 3^{ten} erweiterten Gaussischen Gruppe nach (17) aufstellen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{01}^{(2)} f - \frac{1}{2} (E_{12} - 2F_{21} + G_{30}) \frac{\partial f}{\partial F_{12}} &= 0, \\ \bar{\mathfrak{G}}_{10}^{(2)} f - \frac{1}{2} (G_{21} - 2F_{12} + E_{03}) \frac{\partial f}{\partial F_{21}} &= 0, \\ \mathfrak{G}_{10}^{(2)} f - (E_{03} - 2F_{12} + G_{21}) \frac{\partial f}{\partial F_{12}} - \frac{3}{2} (E_{12} - 2F_{21} + G_{30}) \frac{\partial f}{\partial F_{21}} &= 0, \\ \bar{\mathfrak{G}}_{01}^{(2)} f - (G_{30} - 2F_{21} + E_{12}) \frac{\partial f}{\partial F_{21}} - \frac{3}{2} (G_{21} - 2F_{12} + E_{03}) \frac{\partial f}{\partial F_{12}} &= 0, \\ \mathfrak{G}_{02}^{(2)} f + \frac{1}{2} E_{11} \frac{\partial f}{\partial F_{12}} + \frac{1}{2} E_{20} \frac{\partial f}{\partial F_{21}} &= 0, \quad \bar{\mathfrak{G}}_{20}^{(2)} f + \frac{1}{2} G_{11} \frac{\partial f}{\partial F_{21}} + \frac{1}{2} G_{02} \frac{\partial f}{\partial F_{12}} = 0, \\ \mathfrak{G}_{11}^{(2)} f - 2 \left(E_{02} - F_{11} + \frac{1}{2} G_{20} \right) \frac{\partial f}{\partial F_{12}} - E_{11} \frac{\partial f}{\partial F_{21}} &= 0, \\ \bar{\mathfrak{G}}_{11}^{(2)} f - 2 \left(G_{20} - F_{11} + \frac{1}{2} E_{02} \right) \frac{\partial f}{\partial F_{21}} - G_{11} \frac{\partial f}{\partial F_{12}} &= 0, \\ \mathfrak{G}_{20}^{(2)} f + \left(F_{02} - \frac{1}{2} G_{11} \right) \frac{\partial f}{\partial F_{12}} - \left(E_{02} - 3F_{11} + \frac{3}{2} G_{20} \right) \frac{\partial f}{\partial F_{21}} &= 0, \\ \bar{\mathfrak{G}}_{02}^{(2)} f + \left(F_{20} - \frac{1}{2} E_{11} \right) \frac{\partial f}{\partial F_{21}} - \left(G_{20} - 3F_{11} + \frac{3}{2} E_{02} \right) \frac{\partial f}{\partial F_{12}} &= 0, \\ \mathfrak{G}_{03}^{(2)} f + \frac{1}{2} E_{10} \frac{\partial f}{\partial F_{12}} &= 0, \quad \bar{\mathfrak{G}}_{30}^{(2)} f + \frac{1}{2} G_{01} \frac{\partial f}{\partial F_{21}} = 0, \\ \mathfrak{G}_{12}^{(2)} f - E_{01} \frac{\partial f}{\partial F_{12}} + \frac{1}{2} E_{10} \frac{\partial f}{\partial F_{21}} &= 0, \quad \bar{\mathfrak{G}}_{21}^{(2)} f - G_{10} \frac{\partial f}{\partial F_{21}} + \frac{1}{2} G_{01} \frac{\partial f}{\partial F_{12}} = 0, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{G}_{21}^{(2)} f + \left(F_{01} - \frac{1}{2} G_{10} \right) \frac{\partial f}{\partial F_{12}} - E_{01} \frac{\partial f}{\partial F_{21}} = 0,$$

$$\mathfrak{G}_{12}^{(2)} f + \left(F_{10} - \frac{1}{2} E_{01} \right) \frac{\partial f}{\partial F_{21}} - G_{10} \frac{\partial f}{\partial F_{12}} = 0,$$

$$\mathfrak{G}_{30}^{(2)} f + \left(F_{01} - \frac{1}{2} G_{10} \right) \frac{\partial f}{\partial F_{21}} = 0, \quad \mathfrak{G}_{03}^{(2)} f + \left(F_{10} - \frac{1}{2} E_{01} \right) \frac{\partial f}{\partial F_{12}} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial F_{03}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial F_{30}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial F_{12}} + 2 \frac{\partial f}{\partial E_{03}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial F_{21}} + 2 \frac{\partial f}{\partial G_{30}} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial F_{21}} + 2 \frac{\partial f}{\partial E_{12}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial F_{12}} + 2 \frac{\partial f}{\partial G_{21}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial E_{21}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial G_{12}} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial E_{30}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial G_{03}} = 0.$$

Multipliziert man die linken Seiten dieser Gleichungen mit gewissen unbestimmten Multiplikatoren, addiert die Produkte und setzt die Summe gleich Null, so sieht man sogleich, dass alle Multiplikatoren der letzten 10 Gleichungen gleich Null zu setzen sind. Und ausserdem zerfällt die erhaltene Identität in die Identität (β_2) und in die beiden folgenden:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(E_{12} - 2F_{21} + G_{30})\chi_{01} - (E_{03} - 2F_{12} + G_{21})\chi_{10} - \frac{3}{2}(G_{21} - 2F_{12} + E_{03})\bar{\chi}_{01} \\ & \quad + \frac{1}{2}E_{11}\chi_{02} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{\chi}_{20} - 2\left(E_{02} - F_{11} + \frac{1}{2}G_{20}\right)\chi_{11} - G_{11}\bar{\chi}_{11} \\ & \quad + \left(F_{02} - \frac{1}{2}G_{11}\right)\chi_{20} - \left(G_{20} - 3F_{11} + \frac{3}{2}E_{02}\right)\bar{\chi}_{02} + \frac{1}{2}E_{10}\chi_{03} - E_{01}\chi_{12} \\ & \quad + \frac{1}{2}G_{01}\bar{\chi}_{21} + \left(F_{01} - \frac{1}{2}G_{10}\right)\chi_{21} - G_{10}\bar{\chi}_{12} + \left(F_{10} - \frac{1}{2}E_{01}\right)\bar{\chi}_{03} = 0, \\ & -\frac{1}{2}(G_{21} - 2F_{12} + E_{03})\bar{\chi}_{10} - (G_{30} - 2F_{21} + E_{12})\bar{\chi}_{01} - \frac{3}{2}(E_{12} - 2F_{21} + G_{30})\chi_{10} \\ & \quad + \frac{1}{2}G_{11}\bar{\chi}_{20} + \frac{1}{2}E_{20}\chi_{02} - 2\left(G_{20} - F_{11} + \frac{1}{2}E_{02}\right)\bar{\chi}_{11} - E_{11}\chi_{11} \\ & \quad + \left(F_{20} - \frac{1}{2}E_{11}\right)\bar{\chi}_{02} - \left(E_{02} - 3F_{11} + \frac{3}{2}G_{20}\right)\chi_{20} + \frac{1}{2}G_{01}\bar{\chi}_{30} - G_{10}\bar{\chi}_{21} \\ & \quad + \frac{1}{2}E_{10}\chi_{12} + \left(F_{10} - \frac{1}{2}E_{01}\right)\bar{\chi}_{12} - E_{01}\chi_{21} + \left(F_{01} - \frac{1}{2}G_{10}\right)\chi_{30} = 0. \end{aligned}$$

Man sieht aber leicht, dass die Identität (β_2) und die beiden letzten Identitäten nur dann befriedigt sein können, wenn man alle χ gleich Null setzt. In der That: weil alle χ von den Differentialquotienten 3^{ter} Ordnung der E, F, G unabhängig sind, so müssen in den beiden letzten Identitäten die Coefficienten der genannten Differentialquotienten 3^{ter} Ordnung von selbst verschwinden. Es muss also insbesondere der Coefficient von $E_{1,2}$ in der ersten Identität verschwinden, d. h. es muss $\chi_{01} = 0$ sein; es müssen also auch alle χ gleich 0 werden. Daraus folgt, dass die Gleichungen der 3^{ten} erweiterten Gaussischen Gruppe alle von einander unabhängig sind.

13. Nach dem Theorem II bilden die infinitesimalen Transformationen:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(n)} f, \bar{\mathcal{G}}_{\nu\mu}^{(n)} f \quad \left(\begin{array}{l} \mu=0, 1, \dots, n+1 \\ \nu=0, 1, \dots, n+1-\mu \\ \mu \neq \nu \end{array} \right)$$

eine endliche continuierliche Transformationsgruppe, denn nach dem Theorem I ist jede Erweiterung einer unendlichen continuierlichen Transformationsgruppe ebenfalls eine unendliche continuierliche Transformationsgruppe. Also bilden die Gleichungen (14), (α) und (β) für jeden Wert von n ein vollständiges System.

Für $n = 0$ erhalten wir die 4 Gleichungen (α_0) welche drei unabhängige Veränderliche enthalten. Von diesen Gleichungen sind 3 unabhängig, woraus folgt, dass sie keine Lösung zulassen. Nennt man die Lösungen von (14), welche Differentialquotienten von E, F, G bis zur n ^{ten} Ordnung incl. enthalten, Gaussische Biegungsinvarianten n ^{ter} Ordnung, so sieht man, dass es keine Gaussische Biegungsinvariante 0^{ter} Ordnung giebt.

Für $n = 1$ ergeben sich die Gleichungen (α_1) und unter ihnen sind 9 unabhängig; die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen ist ebenfalls 9, es giebt also keine Gaussische Biegungsinvariante 1^{ter} Ordnung.

Für $n = 2$ haben wir unter (α_2) 17 unabhängige Gleichungen bei 18 unabhängigen Veränderlichen. Es existiert also eine Gaussische Biegungsinvariante 2^{ter} Ordnung.

Für $n = 3$ ist die Anzahl der Gleichungen gleich 28; sie sind alle unabhängig und die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen ist gleich 30. Wir haben also 2 unabhängige Lösungen, deren eine die Gaussische

Biegungsinvariante 2^{ter} Ordnung ist; die zweite ist die einzige Gaussische Biegungsinvariante 3^{ter} Ordnung.

Nach dem Satze IV sind mit Bezug auf das für $n = 3$ erhaltene Resultat *die Gleichungen jeder n^{ten} erweiterten Gaussischen Gruppe für $n > 3$ alle von einander unabhängig*. Die Anzahl dieser Gleichungen ist gleich der Anzahl aller Differentialquotienten von $\xi(xy)$ und $\eta(xy)$ nach x, y bis zur $(n + 1)^{\text{ten}}$ Ordnung incl. Sie ist also gleich:

$$2[2 + 3 + \dots + (n + 2)] = (n + 1)(n + 4);$$

weil aber die Anzahl aller Differentialquotienten von E, F, G bis zur n^{ten} Ordnung incl. und der Functionen selber, welche alle hier die Rolle der unabhängigen Veränderlichen spielen, gleich

$$3[1 + 2 + \dots + (n + 1)] = \frac{3}{2}(n + 1)(n + 2)$$

ist, so ist die Anzahl der unabhängigen Lösungen der Gleichungen der n^{ten} erweiterten Gaussischen Gruppe gleich:

$$\frac{3}{2}(n + 1)(n + 2) - (n + 1)(n + 4) = \frac{1}{2}(n - 2)(n + 1).$$

Die Anzahl der Lösungen für die $(n - 1)^{\text{te}}$ erweiterte Gaussische Gruppe ist dementsprechend gleich $\frac{1}{2}(n - 3)n$, also ist die Anzahl der Gaussischen Biegungsinvarianten n^{ter} Ordnung gleich:

$$\frac{1}{2}(n - 2)(n + 1) - \frac{1}{2}(n - 3)n = n - 1.$$

Fassen wir alle diese Resultate zusammen, so ergibt sich folgendes Theorem:

Theorem III. *Die Gaussischen Biegungsinvarianten werden als Lösungen der vollständigen Systeme:*

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n)} f &= \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^{n-i} \left\{ (2i_{\mu-1} + i_{\mu}) k_{\nu} E_{i-\mu+1, k-\nu} \frac{\partial f}{\partial E_{ik}} \right. \\
 &+ [(i+1)_{\mu} k_{\nu} F_{i-\mu+1, k-\nu} + i_{\mu} k_{\nu-1} E_{i-\mu, k-\nu+1}] \frac{\partial f}{\partial F_{ik}} \\
 &+ \left. i_{\mu} (2k_{\nu-1} F_{i-\mu, k-\nu+1} + k_{\nu} G_{i-\mu+1, k-\nu}) \frac{\partial f}{\partial G_{ik}} \right\} = 0, \\
 \bar{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n)} f &= \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^{n-i} \left\{ (2i_{\mu-1} + i_{\mu}) k_{\nu} G_{k-\nu, i-\mu+1} \frac{\partial f}{\partial G_{ki}} \right. \\
 &+ [(i+1)_{\mu} k_{\nu} F_{k-\nu, i-\mu+1} + i_{\mu} k_{\nu-1} G_{k-\nu+1, i-\mu}] \frac{\partial f}{\partial F_{ki}} \\
 &+ \left. i_{\mu} (2k_{\nu-1} F_{k-\nu+1, i-\mu} + k_{\nu} E_{k-\nu, i-\mu+1}) \frac{\partial f}{\partial E_{ki}} \right\} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \mu=0, 1, \dots, n+1 \\ \nu=0, 1, \dots, n+1-\mu \\ \mu=\nu \neq 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

definiert. Es gibt keine Gaussischen Biegungsinvarianten 0^{ter} und 1^{ter} Ordnung. Die Anzahl der Gaussischen Biegungsinvarianten 2^{ter} Ordnung ist gleich 1, 3^{ter} Ordnung gleich 1 und allgemein n^{ter} Ordnung, wo $n > 3$ ist, gleich $n - 1$.

§ IV. Anzahl der übrigen Biegungsinvarianten.

14. Nach den Formeln (10) und (11) sind die Gleichungen der n^{ten} erweiterten Beltramischen Gruppe:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{B}_{\mu\nu}^{(n)} f &= \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n-1)} f + \sum_1^m \sum_{\mu}^n \sum_{\nu}^{n-i} i_{\mu} k_{\nu} \varphi_{i-\mu+1, k-\nu}^s \frac{\partial f}{\partial \varphi_{ik}^s} = 0, \\
 \bar{\mathfrak{B}}_{\nu\mu}^{(n)} f &= \bar{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n-1)} f + \sum_1^m \sum_{\mu}^n \sum_{\nu}^{n-i} i_{\mu} k_{\nu} \varphi_{i-\mu, k-\nu+1}^s \frac{\partial f}{\partial \varphi_{ik}^s} = 0, \quad \left(\begin{array}{l} \mu=0, 1, \dots, n \\ \nu=0, 1, \dots, n-\mu \\ \mu=\nu \neq 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

wo die unteren Grenzen der Summation nach i und k gleich μ und ν genommen sind, weil die zu kleineren Werten von i und k gehörigen Glieder augenscheinlich immer verschwinden. Den Gleichungen $\bar{\mathfrak{B}}_{\nu\mu}^{(n)} f = 0$ kann man nach denselben Betrachtungen, wie sie in N^o 9 angestellt wurden, eine andere Form geben, so dass sich als Gleichungen der n^{ten} erweiterten Beltramischen Gruppe die folgenden ergeben:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}_{\mu\nu}^{(n)} f = \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n-1)} f + \sum_1^m \sum_\mu^n \sum_\nu^{n-i} i_\mu k_\nu \varphi_{i-\mu+1, k-\nu}^s \frac{\partial f}{\partial \varphi_{ik}^s} = 0, \\ \bar{\mathfrak{B}}_{\nu\mu}^{(n)} f = \bar{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n-1)} f + \sum_1^m \sum_\mu^n \sum_\nu^{n-i} i_\mu k_\nu \varphi_{k-\nu, i-\mu+1}^s \frac{\partial f}{\partial \varphi_{ki}^s} = 0. \quad \left(\begin{array}{l} \mu=0, 1, \dots, n \\ \nu=0, 1, \dots, n-\mu \\ \mu=\nu \neq 0 \end{array} \right) \end{array} \right.$$

Demnach können wir analog dem Satze III den folgenden Satz aufstellen:

Satz V: *Hat man alle Gleichungen $\mathfrak{B}_{\mu\nu}^{(n)} f = 0$ aufgestellt, so kann man die Gleichungen $\bar{\mathfrak{B}}_{\nu\mu}^{(n)} f = 0$ ohne weiteres angeben. Aus jeder Gleichung $\mathfrak{B}_{\mu\nu}^{(n)} f = 0$ ergibt sich nämlich die entsprechende Gleichung $\bar{\mathfrak{B}}_{\nu\mu}^{(n)} f = 0$ durch gleichzeitige Vertauschung einerseits der Buchstaben E und G , andererseits der Indices von $E, F, G, \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m$.*

Benutzt man ferner die Überlegungen im N^o 10, welche hier wegen der Allgemeinheit der Bemerkungen 1 und 2 angewendet werden können, so kann man die Gleichungen der $(n+1)^{\text{ten}}$ erweiterten Beltramischen Gruppe folgendermassen schreiben:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}_{\mu\nu}^{(n+1)} f = \mathfrak{B}_{\mu\nu}^{(n)} f + (\mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n)} f - \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n-1)} f) \\ + \sum_1^m \sum_\mu^{n+1} i_\mu (n+1-i)_\nu \varphi_{i-\mu+1, n+1-i-\nu}^s \frac{\partial f}{\partial \varphi_{i, n+1-i}^s} = 0, \\ \bar{\mathfrak{B}}_{\nu\mu}^{(n+1)} f = \bar{\mathfrak{B}}_{\nu\mu}^{(n)} f + (\bar{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n)} f - \bar{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n-1)} f) \\ + \sum_1^m \sum_\mu^{n+1} i_\mu (n+1-i)_\nu \varphi_{n+1-i-\nu, i-\mu+1}^s \frac{\partial f}{\partial \varphi_{n+1-i, i}^s} = 0, \quad \left(\begin{array}{l} \mu=0, 1, \dots, n \\ \nu=0, 1, \dots, n-\mu \\ \mu=\nu \neq 0 \end{array} \right) \\ (a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}_{\mu, n+1-\mu}^{(n+1)} f = \mathfrak{G}_{\mu, n+1-\mu}^{(n)} f \\ + \sum_1^m \sum_\mu^{n+1} i_\mu (n+1-i)_{n+1-\mu} \varphi_{i-\mu+1, \mu-i}^s \frac{\partial f}{\partial \varphi_{i, n+1-i}^s} = 0, \\ \bar{\mathfrak{B}}_{n+1-\mu, \mu}^{(n+1)} f = \bar{\mathfrak{G}}_{n+1-\mu, \mu}^{(n)} f \\ + \sum_1^m \sum_\mu^{n+1} i_\mu (n+1-i)_{n+1-\mu} \varphi_{\mu-i, i-\mu+1}^s \frac{\partial f}{\partial \varphi_{n+1-i, i}^s} = 0. \quad (\mu=0, 1, \dots, n+1) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Man sieht aber unmittelbar, dass die Gleichungen:

$$\mathfrak{B}_{\mu, n+1-\mu}^{(n+1)} f = 0, \quad \bar{\mathfrak{B}}_{n+1-\mu, \mu}^{(n+1)} f = 0 \quad (\mu=0, 1, \dots, n+1)$$

auf die Form:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{B}_{\mu, n+1-\mu}^{(n+1)} f &= \mathfrak{G}_{\mu, n+1-\mu}^{(n)} f + \sum_1^m \varphi_{10}^s \frac{\partial f}{\partial \varphi_{\mu, n+1-\mu}^s} = 0, \\ \overline{\mathfrak{B}}_{n+1-\mu, \mu}^{(n+1)} f &= \overline{\mathfrak{G}}_{n+1-\mu, \mu}^{(n)} f + \sum_1^m \varphi_{01}^s \frac{\partial f}{\partial \varphi_{n+1-\mu, \mu}^s} = 0, \end{aligned} \right.$$

gebracht werden können.

15. Die Formeln (7) und (12) erlauben uns die Gleichungen der *Mindingschen n^{ten} erweiterten Gruppe* ohne weiteres aufzustellen:

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{N}_{\mu\nu}^{(n)} f &= \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n-1)} f - \sum_1^n g_{\mu\nu}^i \frac{\partial f}{\partial y^{(i)}} = 0, \\ \overline{\mathfrak{N}}_{\nu\mu}^{(n)} f &= \overline{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n-1)} f - \sum_1^n h_{\nu\mu}^i \frac{\partial f}{\partial y^{(i)}} = 0. \end{aligned} \right. \quad \left(\begin{array}{l} \mu=0, 1, \dots, n \\ \nu=0, 1, \dots, n-\mu \\ \mu=\nu \neq 0 \end{array} \right)$$

Hier kann man aber einen zu den Sätzen III und V analogen Satz nicht aufstellen. Hat man die Gleichungen der *n^{ten} erweiterten Mindingschen Gruppe* aufgestellt, so ergeben sich die Gleichungen der *(n + 1)^{ten} erweiterten Mindingschen Gruppe* folgendermassen:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{N}_{\mu\nu}^{(n+1)} f &= \mathfrak{N}_{\mu\nu}^{(n)} f + (\mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n)} f - \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n-1)} f) - g_{\mu\nu}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial y^{(n+1)}} = 0, \\ \overline{\mathfrak{N}}_{\nu\mu}^{(n+1)} f &= \overline{\mathfrak{N}}_{\nu\mu}^{(n)} f + (\overline{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n)} f - \overline{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n-1)} f) - h_{\nu\mu}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial y^{(n+1)}} = 0, \quad \left(\begin{array}{l} \mu=0, 1, \dots, n \\ \nu=0, 1, \dots, n-\mu \\ \mu=\nu \neq 0 \end{array} \right) \\ (a) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{N}_{\mu, n+1-\mu}^{(n+1)} f &= \mathfrak{G}_{\mu, n+1-\mu}^{(n)} f - g_{\mu, n+1-\mu}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial y^{(n+1)}} = 0, \\ \overline{\mathfrak{N}}_{n+1-\mu, \mu}^{(n+1)} f &= \overline{\mathfrak{G}}_{n+1-\mu, \mu}^{(n)} f - h_{n+1-\mu, \mu}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial y^{(n+1)}} = 0. \quad (\mu=0, 1, \dots, n+1) \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

16. Geht man endlich zu der *allgemeinen erweiterten n^{ten} Gruppe* (13) über, so ergeben sich folgende Gleichungen, welche ihre Differentialinvarianten definieren:

$$(23) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_{\mu\nu}^{(n)} f = \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n-1)} f + \sum_1^m \sum_\mu^n \sum_\nu^{n-i} i_\mu k_\nu \varphi_{i-\mu+1, k-\nu}^s \frac{\partial f}{\partial \varphi_{ik}^s} - \sum_1^n i g_{\mu\nu}^l \frac{\partial f}{\partial y^{(l)}} = 0, \\ \bar{\mathfrak{A}}_{\nu\mu}^{(n)} f = \bar{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n-1)} f + \sum_1^m \sum_s^n \sum_i^{n-i} i_\mu k_\nu \varphi_{k-\nu, i-\mu+1}^s \frac{\partial f}{\partial \varphi_{ki}^s} - \sum_1^n i h_{\nu\mu}^l \frac{\partial f}{\partial y^{(l)}} = 0. \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} \mu=0, 1, \dots, n \\ \nu=0, 1, \dots, n-\mu \\ \mu \neq \nu \end{array} \right)$$

Sind die Gleichungen der Allgemeinen n^{ten} erweiterten Gruppe aufgestellt, so ergeben sich die Gleichungen der $(n+1)^{\text{ten}}$ Gruppe folgendermassen:

$$(24) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_{\mu\nu}^{(n+1)} f = \mathfrak{A}_{\mu\nu}^{(n)} f + (\mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n)} f - \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n-1)} f) \\ + \sum_1^m \sum_\mu^{n+1} i_\mu (n+1-i)_\nu \varphi_{i-\mu+1, n+1-i-\nu}^s \frac{\partial f}{\partial \varphi_{i, n+1-i}^s} - g_{\mu\nu}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial y^{(n+1)}} = 0, \\ \bar{\mathfrak{A}}_{\nu\mu}^{(n+1)} f = \bar{\mathfrak{A}}_{\nu\mu}^{(n)} f + (\bar{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n)} f - \bar{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n-1)} f) \\ + \sum_1^m \sum_s^{n+1} i_\mu (n+1-i)_\nu \varphi_{n+1-i-\nu, i-\mu+1}^s \frac{\partial f}{\partial \varphi_{n+1-i, i}^s} - h_{\nu\mu}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial y^{(n+1)}} = 0, \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} \mu=0, 1, \dots, n \\ \nu=0, 1, \dots, n-\mu \\ \mu \neq \nu \end{array} \right)$$

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_{\mu, n+1-\mu}^{(n+1)} f = \mathfrak{G}_{\mu, n+1-\mu}^{(n)} f + \sum_1^m \varphi_{10}^s \frac{\partial f}{\partial \varphi_{\mu, n+1-\mu}^s} - g_{\mu, n+1-\mu}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial y^{(n+1)}} = 0, \\ \bar{\mathfrak{A}}_{n+1-\mu, \mu}^{(n+1)} f = \bar{\mathfrak{G}}_{n+1-\mu, \mu}^{(n)} f + \sum_1^m \varphi_{01}^s \frac{\partial f}{\partial \varphi_{n+1-\mu, \mu}^s} - h_{n+1-\mu, \mu}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial y^{(n+1)}} = 0. \end{array} \right. \quad (\mu=0, 1, \dots, n+1)$$

17. In N^o 11 haben wir bewiesen, dass die Gleichungen:

$$\mathfrak{G}_{\mu, n+1-\mu}^{(n)} f = 0, \quad \bar{\mathfrak{G}}_{n+1-\mu, \mu}^{(n)} f = 0 \quad (\mu=0, 1, \dots, n+1)$$

alle von einander unabhängig sind. Nach dem Satze I sind also alle Gleichungen (19 a), alle Gleichungen (22 a) und endlich alle (24 a) von einander unabhängig. Daraus folgt also nach dem Satze II, dass alle Gleichungen (19) von einander unabhängig sind, sobald alle Gleichungen (18) von einander unabhängig sind, dass alle Gleichungen (22) von einander unabhängig sind, sobald alle (21) von einander unabhängig sind und endlich, dass alle (24) von einander unabhängig sind, sobald alle (23) von einander unabhängig sind. Demnach können wir folgenden Satz aufstellen:

Satz VI: Sind die Gleichungen der n^{ten} erweiterten Beltramischen,

Minding'schen oder allgemeinen Gruppe alle von einander unabhängig, so sind auch die Gleichungen der $(n + 1)^{\text{ten}}$ erweiterten resp. Beltramischen, Minding'schen oder allgemeinen Gruppe alle von einander unabhängig.

18. Nimmt man in den Gleichungen der Beltramischen erweiterten Gruppe $m = 1$ an und berechnet die Gleichungen der ersten erweiterten Beltramischen Gruppe, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_{01}^{(1)}f &= E\frac{\partial f}{\partial F} + 2F\frac{\partial f}{\partial G} + \varphi_{10}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{01}} = 0, \\ \bar{\mathfrak{B}}_{10}^{(1)}f &= G\frac{\partial f}{\partial F} + 2F\frac{\partial f}{\partial E} + \varphi_{01}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{10}} = 0, \\ \mathfrak{B}_{10}^{(1)}f &= 2E\frac{\partial f}{\partial E} + F\frac{\partial f}{\partial F} + \varphi_{10}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{10}} = 0, \\ \bar{\mathfrak{B}}_{01}^{(1)}f &= 2G\frac{\partial f}{\partial G} + F\frac{\partial f}{\partial F} + \varphi_{01}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{01}} = 0;\end{aligned}$$

sind diese Gleichungen nicht alle von einander unabhängig, so muss die Identität:

$$\chi_{01}\mathfrak{B}_{01}^{(1)}f + \bar{\chi}_{10}\bar{\mathfrak{B}}_{10}^{(1)}f + \chi_{10}\mathfrak{B}_{10}^{(1)}f + \bar{\chi}_{01}\bar{\mathfrak{B}}_{01}^{(1)}f = 0$$

durch die Werte (∂_0) (N° 12) befriedigt werden, ohne dass χ_{01} identisch verschwindet. Es muss also gelten:

$$(\varphi_{10}G - \varphi_{01}F)\chi_{01} = 0, \quad (\varphi_{01}E - \varphi_{10}F)\chi_{01} = 0;$$

daraus folgt aber, dass $\chi_{01} = 0$ sein muss, dass also obige 4 Gleichungen von einander unabhängig sind.

Nach dem Satze I sind die Gleichungen der ersten erweiterten Beltramischen Gruppe für ein beliebiges m alle von einander unabhängig; also sind nach dem Satze VI *die Gleichungen jeder erweiterten Beltramischen Gruppe alle von einander unabhängig.* Nach den Theoremen I und II bilden diese Gleichungen stets vollständige Systeme; demnach kann man die Anzahl der Lösungen berechnen.

Die Anzahl der Gleichungen der n^{ten} erweiterten Beltramischen Gruppe ist $n(n + 3)$, die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen:

$$\frac{3}{2}n(n + 1) + m[2 + 3 + \dots + (n + 1)] = \frac{3}{2}n(n + 1) + m\frac{n(n + 3)}{2};$$

demnach ist die Anzahl der unabhängigen Lösungen der Gleichungen der n^{ten} erweiterten Beltramischen Gruppe:

$$\frac{n(n-3)}{2} + m \frac{n(n+3)}{2};$$

die Gleichungen der $(n-1)^{\text{ten}}$ Gruppe besitzen ferner

$$\frac{(n-1)(n-4)}{2} + m \frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

unabhängige Lösungen, welche augenscheinlich auch die Gleichungen der n^{ten} Gruppe gestatten. Die Gleichungen der n^{ten} Gruppe ergeben also:

$$\frac{n(n-3)}{2} + m \frac{n(n+3)}{2} - \frac{(n-1)(n-4)}{2} - m \frac{(n-1)(n+2)}{2} = n-2 + m(n+1)$$

neue Lösungen; nur in diesen Lösungen werden die Differentialquotienten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von E, F, G und die Differentialquotienten n^{ter} Ordnung von $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m$ auftreten. Einige von diesen Lösungen sind Gaussische Biegungsinvarianten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung; andere, welche ausser den Functionen E, F, G und ihren Ableitungen noch die Ableitungen von $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m$ enthalten, werden wir als *Beltramische Biegungsinvarianten n^{ter} Ordnung* bezeichnen, weil in ihnen die höchste Ordnung der Differentialquotienten von $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m$ eben die n^{te} ist.

Man sieht also: es giebt

$2m-1$ Beltramische Biegungsinvarianten 1^{ter} Ordnung,

$3m$ Beltramische Biegungsinvarianten 2^{ter} Ordnung,

$4m$ Beltramische Biegungsinvarianten 3^{ter} Ordnung,

$5m+1$ Beltramische Biegungsinvarianten 4^{ter} Ordnung,

$(n+1)m$ Beltramische Biegungsinvarianten n^{ter} Ordnung, wo $n > 4$ ist.

Diese Zahlen ergeben sich dadurch, dass wir von der Zahl $n-2 + m(n+1)$ die Anzahl der Gaussischen Biegungsinvarianten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung subtrahieren.

Die Anzahl aller Beltramischen Biegungsinvarianten von der 1^{ten} bis zur n^{ten} Ordnung incl. ist für $n > 3$ gleich:

$$(2m-1) + 3m + 4m + (5m+1) + 6m + 7m + \dots + (n+1)m = \frac{n(n+3)}{2}m.$$

Bilden wir für $n > 3$ die n^{te} erweiterte Beltramische Gruppe, welche nur eine einzige der Functionen $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m$ enthält, so definiert sie $\frac{n(n+3)}{2}$ unabhängige Beltramische Biegungsinvarianten, welche natürlich von einer einzigen der Functionen, $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m$ abhängig sind. Wenn wir jetzt in diese Biegungsinvarianten statt der früheren Function etwa statt φ^σ , alle anderen Functionen $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^{\sigma-1}, \varphi^{\sigma+1}, \dots, \varphi^m$ der Reihe nach einsetzen, so erhalten wir mit den früheren zusammen im Ganzen $\frac{n(n+3)}{2}m$ unabhängige Beltramische Biegungsinvarianten, d. h. alle Beltramischen Biegungsinvarianten, welche unsere n^{te} erweiterte Beltramische Gruppe (11) definiert. Dieses Resultat aber, dass man nämlich die Gruppe bloss auf eine einzige Function φ zu erweitern braucht, gilt nur dann, wenn $n > 3$ ist.

Ist $n = 1$ und erweitert man die Gruppe auf eine einzige Function φ^σ , so ergibt sich eine einzige Biegungsinvariante, etwa $\Delta\varphi^\sigma$; fügen wir hier die zweite Function $\varphi^{\sigma'}$ hinzu, so erhalten wir 3 Biegungsinvarianten, von denen $\Delta\varphi^\sigma$ und $\Delta\varphi^{\sigma'}$ augenscheinlich zwei sind; die dritte, welche von beiden Functionen φ^σ und $\varphi^{\sigma'}$ abhängen muss, werden wir mit $\theta(\varphi^\sigma\varphi^{\sigma'})$ bezeichnen. Stellt man nun die erste erweiterte Beltramische Gruppe mit allen Functionen $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m$ auf, so ergeben sich folgende Biegungsinvarianten:

$$\begin{aligned} 1^\circ: & \quad \Delta\varphi^1, \Delta\varphi^2, \dots, \Delta\varphi^m, \\ 2^\circ: & \quad \theta(\varphi^\sigma\varphi^1), \theta(\varphi^\sigma\varphi^2), \dots, \theta(\varphi^\sigma\varphi^{\sigma-1}), \theta(\varphi^\sigma\varphi^{\sigma+1}), \dots, \theta(\varphi^\sigma\varphi^m), \end{aligned}$$

welche augenscheinlich alle von einander unabhängig sind; weil ihre Anzahl gleich $2m - 1$ ist, so sind es alle Beltramischen Biegungsinvarianten, welche die erste erweiterte Beltramische Gruppe definiert. Wir könnten nach dem Schema $\theta(\varphi^\sigma\varphi^{\sigma'})$ noch mehrere Biegungsinvarianten ableiten; sie können aber nur eine Folge sein von den in den Reihen 1° und 2° angegebenen Biegungsinvarianten.

Es giebt 3 Biegungsinvarianten 2^{ter} Ordnung mit einer einzigen Function φ^σ . Setzt man in diesen Biegungsinvarianten statt φ^σ nacheinander alle Functionen $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^{\sigma-1}, \varphi^{\sigma+1}, \dots, \varphi^m$, so ergeben sich alle $3m$ Beltramischen Biegungsinvarianten 2^{ter} Ordnung. In derselben Weise werden alle $4m$ Beltramischen Biegungsinvarianten 3^{ter} Ordnung aus den 4 Biegungsinvarianten mit einer einzigen Function φ^σ gebildet.

Was die Biegungsinvarianten 4^{ter} Ordnung anbetrifft, so existieren 6 solcher Biegungsinvarianten mit einer einzigen Function φ^σ . Aus diesen kann man in der angegebenen Weise $6m$ von einander unabhängige Biegungsinvarianten 4^{ter} Ordnung ableiten. Weil aber nur $5m + 1$ unter ihnen von den Biegungsinvarianten niedrigerer Ordnungen unabhängig sind, so können die $m - 1$ übrigen nur eine Folge der 2 Gaussischen Biegungsinvarianten (eine von 2^{ter} und eine von 3^{ter} Ordnung) und der $14m$ Beltramischen Biegungsinvarianten [($2m - 1$) 1^{ter}, $3m$ 2^{ter}, $4m$ 3^{ter}, und $5m + 1$ 4^{ter} Ordnung] sein. Umgekehrt also kommen wir zum Schlusse, dass die in der Reihe 2^o markierten Biegungsinvarianten nur eine Folge der 2 Gaussischen Biegungsinvarianten (eine von 2^{ter} und eine von 3^{ter} Ordnung) und der $14m$ Beltramischen (m 1^{ter}, $3m$ 2^{ter}, $4m$ 3^{ter} und $6m$ 4^{ter} Ordnung) sind, deren jede nur eine einzige Function φ^σ enthält.

Alle diese Resultate können wir in das folgende Theorem zusammenfassen:

Theorem IV. *Alle Beltramischen Biegungsinvarianten können aus den Lösungen der vollständigen Systeme:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{\mu\nu}^{(n)} f &= \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n-1)} f + \sum_{\mu}^n \sum_{\nu}^{n-i} i_{\mu} k_{\nu} \varphi_{i-\mu+1, k-\nu} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{ik}} = 0, \\ \overline{\mathfrak{B}}_{\nu\mu}^{(n)} f &= \overline{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n-1)} f + \sum_{\mu}^n \sum_{\nu}^{n-i} i_{\mu} k_{\nu} \varphi_{k-\nu, i-\mu+1} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{ki}} = 0 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \mu=0, 1, \dots, n \\ \nu=0, 1, \dots, n-\mu \\ \mu=\nu \neq 0 \end{array} \right)$$

abgeleitet werden. Diese Gleichungen ergeben 1 Beltramische Biegungsinvariante 1^{ter} Ordnung, 3 — 2^{ter} Ordnung, 4 — 3^{ter} Ordnung, 6 — 4^{ter} Ordnung und $(n + 1) - n^{\text{ter}}$ Ordnung, wenn $n > 4$ ist. Setzt man in diesen Biegungsinvarianten der Reihe nach $\varphi = \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m$, so bekommt man die Gesamtheit aller Beltramischen Biegungsinvarianten. Jede andere Beltramische Biegungsinvariante ist eine Function einer gewissen Anzahl dieser Beltramischen und einer gewissen Anzahl der Gaussischen Biegungsinvarianten. Insbesondere existieren $m - 1$ Beltramische Biegungsinvarianten erster Ordnung, welche die Form:

$$\theta(\varphi^\sigma \varphi^1), \theta(\varphi^\sigma \varphi^2), \dots, \theta(\varphi^\sigma \varphi^{\sigma-1}), \theta(\varphi^\sigma \varphi^{\sigma+1}), \dots, \theta(\varphi^\sigma \varphi^m)$$

besitzen und Functionen der Gaussischen Biegungsinvarianten bis zur 3^{ten} Ordnung incl. und der genannten Beltramischen Biegungsinvarianten bis zur 4^{ten} Ordnung incl. sind.

19. Jetzt gehen wir zur Betrachtung der Gleichungen (21) der Mindingschen n^{ten} erweiterten Gruppe über. Benutzt man die erste der Formeln (6), so ergeben sich folgende Gleichungen der 1^{ten} erweiterten Mindingschen Gruppe:

$$\mathfrak{N}_{01}^{(1)} f = E \frac{\partial f}{\partial F} + 2F \frac{\partial f}{\partial G} + y'^2 \frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

$$\overline{\mathfrak{N}}_{10}^{(1)} f = G \frac{\partial f}{\partial F} + 2F \frac{\partial f}{\partial E} - \frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

$$\mathfrak{N}_{10}^{(1)} f = 2E \frac{\partial f}{\partial E} + F \frac{\partial f}{\partial F} + y' \frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

$$\overline{\mathfrak{N}}_{01}^{(1)} f = 2G \frac{\partial f}{\partial G} + F \frac{\partial f}{\partial F} - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

Sind diese Gleichungen nicht alle von einander unabhängig, so muss die Identität:

$$\chi_{01} \mathfrak{N}_{01}^{(1)} f + \bar{\chi}_{10} \overline{\mathfrak{N}}_{10}^{(1)} f + \chi_{10} \mathfrak{N}_{10}^{(1)} f + \bar{\chi}_{01} \overline{\mathfrak{N}}_{01}^{(1)} f = 0$$

durch die Werte (∂_0) (N^o 12) befriedigt werden, ohne dass χ_{01} identisch verschwindet. Diese Identität giebt aber:

$$(E + 2Fy' + Gy'^2)\chi_{01} = 0,$$

woraus folgt: $\chi_{01} = 0$; also sind die Gleichungen alle von einander unabhängig. Nach dem Satze VI sind also *alle Gleichungen jeder erweiterten Mindingschen Gruppe von einander unabhängig*. Demnach sind wir im Stande, die Anzahl ihrer Lösungen zu berechnen.

Die Anzahl der Gleichungen der n^{ten} erweiterten Mindingschen Gruppe ist $n(n+3)$, die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen: $\frac{3}{2}n(n+1) + n$; demnach ist die Anzahl der unabhängigen Lösungen gleich $\frac{n(n-3)}{2} + n$.

Die Gleichungen der $(n - 1)^{\text{ten}}$ Gruppe besitzen ferner $\frac{(n - 1)(n - 4)}{2} + n - 1$ unabhängige Lösungen, welche augenscheinlich auch die Gleichungen der n^{ten} Gruppe gestatten. Die Gleichungen der n^{ten} Gruppe ergeben also $n - 1$ neue Lösungen; nur in diesen Lösungen werden die Differentialquotienten $(n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung von E, F, G und die Ableitung $y^{(n)}$ auftreten. Einige dieser Lösungen sind uns als Gaussische Biegungsinvarianten bekannt. Andere, welche ausser den Functionen E, F, G und ihren Differentialquotienten noch die Ableitungen $y', y'', \dots, y^{(n)}$ enthalten, wollen wir *Mindingsche Biegungsinvarianten n^{ter} Ordnung* nennen. Zieht man also von der Zahl $n - 1$ die Anzahl der Gaussischen Biegungsinvarianten $(n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung ab, so erhält man die Anzahl der Mindingschen Biegungsinvarianten n^{ter} Ordnung. Also ergibt sich folgendes Theorem:

Theorem V. *Die Mindingschen Biegungsinvarianten werden als Lösungen der vollständigen Systeme von der Form:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_{\mu\nu}^{(n)} f &= \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n-1)} f - \sum_1^n g_{\mu\nu}^i(y', \dots, y^{(i)}) \frac{\partial f}{\partial y^{(i)}} = 0, \\ \overline{\mathfrak{N}}_{\nu\mu}^{(n)} f &= \overline{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n-1)} f - \sum_1^n h_{\nu\mu}^i(y', \dots, y^{(i)}) \frac{\partial f}{\partial y^{(i)}} = 0, \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \mu = 0, 1, \dots, n \\ \nu = 0, 1, \dots, n - \mu \\ \mu = \nu + 0 \end{array} \right)$$

wo die $g_{\mu\nu}^i$ und $h_{\nu\mu}^i$ gewisse ganze Functionen ihrer Argumente bezeichnen, definiert. Es gibt keine Mindingsche Biegungsinvariante 1^{ter} Ordnung. Die Anzahl der Mindingschen Biegungsinvarianten 2^{ter} Ordnung ist gleich 1, 3^{ter} gleich 1, 4^{ter} gleich 2 und überhaupt n^{ter} , wo $n > 4$ ist, gleich 1.

20. Stellen wir jetzt die gewonnenen Resultate in der folgenden Tabelle zusammen:

Ordnung	Anzahl der Biegungsinvarianten			
	Gaussische	Beltramische	Mindingsche	Sämmtliche
1	0	m	0	m
2	0	$3m$	1	$3m + 1$
3	1	$4m$	1	$4m + 2$
4	1	$6m$	2	$6m + 3$
5	3	$6m$	1	$6m + 4$
6	4	$7m$	1	$7m + 5$
.....
n	$n - 2$	$(n + 1)m$	1	$(n + 1)m + n - 1$
Summe bis zur n^{ten} Ordnung incl.	$\frac{n(n-3)}{2}$	$\frac{n(n+3)}{2}m$	n	$\frac{n(n+3)}{2}m + \frac{n(n-1)}{2}$

In dieser Tabelle haben wir der Bequemlichkeit wegen die ursprünglich als Gaussische Biegungsinvarianten n^{ter} Ordnung definierten Biegungsinvarianten (N° 13) als solche $(n + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung angeführt. Dies ist durch die Definitionen (11) und (12) der Beltramischen und Mindingschen Gruppe verursacht. Die ersten 4 Zeilen der Tabelle entziehen sich der allgemeinen Formel für die Ordnung n erstens deswegen, weil die Gleichungen der 3 ersten Gaussischen Gruppen nicht alle von einander unabhängig sind, zweitens weil wir als grundlegende Beltramische Biegungsinvarianten diejenigen angenommen haben, welche nur eine der Functionen $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m$ enthalten.

Es ist unmittelbar klar, dass die Gleichungen jeder allgemeinen erweiterten Gruppe alle von einander unabhängig sind. Für die n^{te} erweiterte Gruppe haben wir $n(n + 3)$ Gleichungen und $\frac{3}{2}n(n + 1) + m\frac{n(n + 3)}{2} + n$ unabhängige Veränderliche; also ist die Anzahl der unabhängigen Lösungen $\frac{n(n + 3)}{2}m + \frac{n(n - 1)}{2}$. Ist also $n > 3$, so geben die Gleichungen

der n^{ten} erweiterten allgemeinen Gruppe keine neuen Biegungsinvarianten. Alle Lösungen dieser Gleichungen sind nur Functionen der Gaussischen Biegungsinvarianten bis zur $(n - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung incl. und der Beltramischen und Mindingschen bis zur n^{ten} Ordnung incl. Das gilt aber nur für $n > 3$.

Die Anzahl der Lösungen von Gleichungen der n^{ten} erweiterten allgemeinen Gruppe, welche die Gleichungen der $(n - 1)^{\text{ten}}$ Gruppe nicht gestatten, ist: $(n + 1)m + n - 1$. Für $n = 1$ erhalten wir $2m$ Lösungen, für $n = 2$ $3m + 1$, für $n = 3$ $4m + 2$ und für $n = 4$ $5m + 3$. Ausser den in den Reihen 1^o und 2^o aufgeführten Biegungsinvarianten 1^{ter} Ordnung erhalten wir also noch eine Biegungsinvariante, welche von y' abhängen muss. Vorausgesetzt, dass die allgemeine erste erweiterte Gruppe nur eine Function φ^σ enthält, sehen wir, dass sie 2 Biegungsinvarianten 1^{ter} Ordnung definiert; eine von diesen Biegungsinvarianten ist $\Delta\varphi^\sigma$; die andere muss von y' abhängen. Wir wollen sie mit $I(\varphi^\sigma y')$ bezeichnen. Es ist klar, dass alle Biegungsinvarianten:

$$(\alpha) \quad I(\varphi^1 y'), I(\varphi^2 y'), \dots, I(\varphi^m y')$$

den Gleichungen der ersten erweiterten allgemeinen Gruppe genügen müssen, sobald diese auf alle Functionen $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m$ erweitert ist. Weil aber diese Gleichungen gerade $2m$ unabhängige Lösungen zulassen, so müssen die Biegungsinvarianten:

$$I(\varphi^1 y'), I(\varphi^2 y'), \dots, I(\varphi^{\sigma-1} y'), I(\varphi^{\sigma+1} y'), \dots, I(\varphi^m y')$$

Functionen von Biegungsinvarianten:

$$(\beta) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi^{s'}, \quad (s' = 1, 2, \dots, m) \\ \theta(\varphi^s \varphi^{s'}) \text{ und } I(\varphi^\sigma y') \quad (s' = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, m) \end{array} \right.$$

sein. Ferner sind alle in der Tabelle angegebenen Biegungsinvarianten 2^{ter} und 3^{ter} Ordnung von den in der Reihe (β) angeführten Biegungsinvarianten 1^{ter} Ordnung unabhängig. Dies gilt aber nicht von den $6m + 3$ Biegungsinvarianten 4^{ter} Ordnung. Nur $5m + 3$ von ihnen sind neue Biegungsinvarianten; die m übrigen sind Functionen der in der Reihe (β) aufgezählten Biegungsinvarianten 1^{ter} Ordnung, der $3m + 1$ Biegungs-

invarianten 2^{ter} , $4m + 2$ 3^{ter} und $5m + 3$ 4^{ter} Ordnung. Umgekehrt also kommen wir zu dem Schluss, dass die Biegungsinvarianten:

$$\theta(\varphi^s \varphi^s) \quad \text{und} \quad I(\varphi^s y') \quad (s' = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, m)$$

Functionen der in der Tabelle aufgeführten Biegungsinvarianten 1^{ter} , 2^{ter} , 3^{ter} und 4^{ter} Ordnung sind. Das gewonnene Resultat bezieht sich auf alle Biegungsinvarianten:

$$I(\varphi^1 y'), I(\varphi^2 y'), \dots, I(\varphi^m y').$$

Was die Biegungsinvarianten $\theta(\varphi^s \varphi^s)$ anbetrifft, so haben wir für sie in N° 18 bereits einen noch bestimmteren Satz bewiesen.

Unsere jetzt erhaltenen Resultate können wir folgendermassen zusammenfassen:

Theorem VI. *Die allgemeine erweiterte Gruppe giebt ausser den Gaussischen, Beltramischen und Mindingschen Biegungsinvarianten keine neuen Biegungsinvarianten. Jede Biegungsinvariante, welche gleichzeitig von E, F, G und deren Differentialquotienten, von den Differentialquotienten der Functionen $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m$ und von den Ableitungen y', y'', \dots abhängt, ist nur eine Function einer gewissen Anzahl von Gaussischen, Beltramischen und Mindingschen Biegungsinvarianten. Insbesondere existieren Biegungsinvarianten 1^{ter} Ordnung von der Form:*

$$I(\varphi^1 y'), I(\varphi^2 y'), \dots, I(\varphi^m y'),$$

welche Functionen einiger, in den früheren Theoremen angegebenen, grundlegenden Biegungsinvarianten und zwar Gaussischer 2^{ter} und 3^{ter} Ordnung und Beltramischer und Mindingscher von der 1^{ten} bis zur 4^{ten} Ordnung incl. sind.

Damit schliesse ich den ersten Teil meiner Arbeit; ich muss aber hier hervorheben, dass meine Betrachtungen noch eine gewisse Willkürlichkeit enthalten: man brauchte als wesentliche, grundlegende Biegungsinvarianten nicht eben diejenigen zu bezeichnen, welche ich als solche angenommen habe. Doch schien mir meine Annahme vom theoretischen Standpunkte aus die naturgemässe sein, weil sie den Umstand besonders betont, dass die Beltramischen erweiterten Gruppen nur in Bezug auf eine einzige Function φ erweitert zu werden brauchen.

§ V. *Über die Berechnung der Biegungsinvarianten im Allgemeinen.*

Wir haben gesehen, dass man alle Biegungsinvarianten durch Integration gewisser vollständiger Systeme berechnen kann. In diesem Paragraphen habe ich die Absicht zu untersuchen, wie sich diese vollständigen Systeme in möglichst bequemer Weise integrieren lassen.

Diesen Betrachtungen muss ich einige allgemeine Sätze vorausschicken.

21. Nach der Jacobischen Methode lassen sich nicht nur die Jacobischen Systeme integrieren; man kann nämlich, wenn man die Gleichungen des Systems nicht in einer beliebigen, sondern in einer gewissen bestimmten Reihenfolge integriert, die Jacobische Methode auch auf allgemeinere vollständige Systeme anwenden. Und zwar können wir folgenden Satz angeben:

Satz VII: *Ein q -gliedriges vollständiges System:*

$$X_k f = \xi_{k1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{k2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_{kn} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, q)$$

dessen Poissonsche Ausdrücke:

$$(X_k X_l) = \sum_{s=1}^{k-1} \omega_{kls}(x_1, x_2, \dots, x_n) X_s f \quad (k=2, 3, \dots, q, l=1, 2, \dots, k-1)$$

sind, braucht man nicht auf ein Jacobisches System zurückzuführen; es lässt sich vielmehr in der Reihenfolge:

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0, \quad \dots, \quad X_q f = 0$$

unmittelbar integrieren.

¹ Sind hier die ω_{kls} von den x_1, x_2, \dots, x_n unabhängig, so bilden die infinitesimalen Transformationen $X_k f$ eine q -gliedrige Gruppe, deren Betrachtung man im LIE'schen Lehrbuche: *Theorie der Transformationsgruppen*. Erster Abschnitt. Kapitel 28. findet.

Dieser Satz bedarf eigentlich keines Beweises, denn es ist völlig klar, dass wenn φ eine gemeinsame Lösung der Gleichungen:

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0, \quad \dots, \quad X_{k-1} f = 0$$

ist, $X_k(\varphi)$ ebenfalls eine gemeinsame Lösung dieser Gleichungen vorstellt.

Satz VIII: Ein q -gliedriges vollständiges System:

$$(\alpha) \quad X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0, \quad \dots, \quad X_{q-1} f = 0, \quad Y_q f = 0,$$

dessen Poissonsche Ausdrücke:

$$(X_k X_l) = \sum_1^{k-1} \omega_{kls} X_s f, \quad \begin{matrix} (k=2, 3, \dots, q-1) \\ (l=1, 2, \dots, k-1) \end{matrix}$$

$$(Y_q X_l) = \sum_1^{q-1} \bar{\omega}_{qls} X_s f + \bar{\omega}_{qlq} Y_q f \quad (l=1, 2, \dots, q-1)$$

sind, lässt sich durch die Annahme:

$$(\beta) \quad X_q f = \frac{Y_q f}{Y_q(\varphi)},$$

wo φ eine gemeinsame Lösung der Gleichungen:

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0, \quad \dots, \quad X_{q-1} f = 0,$$

aber keine Lösung der Gleichung $Y_q f = 0$ ist,¹ auf ein System:

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0, \quad \dots, \quad X_q f = 0$$

von der Beschaffenheit:

$$(X_k X_l) = \sum_1^{k-1} \omega_{kls} X_s f \quad \begin{matrix} (k=2, 3, \dots, q) \\ (l=1, 2, \dots, k-1) \end{matrix}$$

zurückführen.

Der Beweis ist sehr einfach. Nimmt man an, dass:

$$(X_q X_l) = X_q[X_l(f)] - X_l[X_q(f)] = \sum_1^{q-1} \omega_{qls} X_s f + \omega_{qlq} X_q f, \quad (l=1, 2, \dots, q-1)$$

¹ Es muss wenigstens eine solche Function φ geben. Angenommen, dass alle Lösungen der Gleichungen $X_l f = 0$ ($l = 1, 2, \dots, q-1$) auch die Gleichung $Y_q f = 0$ befriedigten, so kommen wir zum Schlusse, dass das System (α) $n - q + 1$ unabhängige Lösungen besitzt, was unmöglich ist.

und setzt man in diesen Identitäten $f = \varphi$, so verschwinden alle Glieder ausser $\omega_{q1q} X_q f$, denn es ist $X_l(\varphi) = 0$ und $X_q(\varphi) = 1$. Es ergibt sich also: $\omega_{q1q} = 0$; und damit ist der Satz bewiesen.

Dieser Satz lehrt andererseits, dass man das System (α) in der bezeichneten Reihenfolge ohne die Transformation (β) integrieren kann; alsdann werden zwar die Coefficienten der Differentialquotienten von f genommen nach den Lösungen der Gleichungen $X_l f = 0$ ($l = 1, 2, \dots, q-1$), in $Y_q f = 0$ nicht nur von diesen Lösungen abhängen, sondern noch von anderen Veränderlichen, diese werden aber hier nur als ein allen Gliedern gemeinsamer Multiplicator vorkommen und deshalb sich vollständig wegheben. In der Praxis ist es aber bequemer, die Transformation (β) anzuwenden.

22. Die linken Seiten der Gleichungen der vollständigen Systeme, welche die Biegungsinvarianten definieren, sind gewisse infinitesimale Transformationen, welche stets endliche kontinuierliche Gruppen bilden. Die Frage also nach den Poissonschen Ausdrücken der Gleichungen unserer vollständigen Systeme, reducirt sich auf die Frage, welche Zusammensetzung die betreffenden endlichen Gruppen besitzen. Um darauf die Antwort zu geben, sehe ich mich veranlasst, wieder zwei allgemeine Sätze aufzustellen.

Satz IX: *Bestehen für die q -gliedrige endliche kontinuierliche Gruppe:*

$$X_k f = \sum_1^n \xi_{ki}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k=1, 2, \dots, q)$$

die Relationen:

$$(X_k X_l) = \sum_1^q c_{kls} X_s f, \quad \begin{matrix} (k=2, 3, \dots, q) \\ (l=1, 2, \dots, k-1) \end{matrix}$$

und erzeugen die infinitesimalen Transformationen:

$$Z_k f = X_k f + \sum_1^m \zeta_{ki}(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) \frac{\partial f}{\partial z_i} \quad (k=1, 2, \dots, q)$$

ebenfalls eine kontinuierliche Gruppe, so bestehen für diese Gruppe die Relationen:

$$(Z_k Z_l) = \sum_1^q c_{kls} Z_s f \quad \begin{matrix} (k=2, 3, \dots, q) \\ (l=1, 2, \dots, k-1) \end{matrix}$$

oder, anders gesagt, so sind beide Gruppen gleichzusammengesetzt.

Ist nämlich:

$$(Z_k Z_l) = \sum_1^q c'_{kls} Z_s f, \quad \begin{matrix} (k=2, 3, \dots, q) \\ (l=1, 2, \dots, k-1) \end{matrix}$$

so ergeben sich, wenn man die Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ in diesen Identitäten gleich 0 setzt, die Relationen:

$$(X_k X_l) = \sum_1^q c'_{kls} X_s f, \quad \begin{matrix} (k=2, 3, \dots, q) \\ (l=1, 2, \dots, k-1) \end{matrix}$$

woraus folgt, dass notwendig $c'_{kls} = c_{kls}$ ist, und damit ist der Satz bewiesen.

Satz X: *Bilden die infinitesimalen Transformationen:*

$$X_k f = \sum_1^n \xi_{ki}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} + Z_k f, \quad (k=1, 2, \dots, q)$$

wo

$$Z_k f = \sum_1^m \zeta_{ki}(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) \frac{\partial f}{\partial z_i} \quad (k=1, 2, \dots, q)$$

ist, eine q -gliedrige kontinuierliche Gruppe, und kann erstens die Relation:

$$\sum_1^q e_k Z_k f = 0,$$

wo die e_k numerische Constanten bezeichnen, nur dann bestehen, wenn alle e_k gleich Null sind, und bestehen zweitens die Relationen:

$$(Z_k Z_l) = \sum_1^q c_{kls} Z_s f, \quad \begin{matrix} (k=2, 3, \dots, q) \\ (l=1, 2, \dots, k-1) \end{matrix}$$

wo die c_{kls} ebenfalls numerische Constanten sind, so ist die Zusammensetzung unserer Gruppe:

$$(X_k X_l) = \sum_1^q c_{kls} X_s f. \quad \begin{matrix} (k=2, 3, \dots, q) \\ (l=1, 2, \dots, k-1) \end{matrix}$$

Nimmt man nämlich an, dass:

$$(X_k X_l) = \sum_1^q c'_{kls} X_s f, \quad \begin{matrix} (k=2, 3, \dots, q) \\ (l=1, 2, \dots, k-1) \end{matrix}$$

wo $c'_{kls} \geq c_{kls}$, und setzt man in diesen Identitäten alle Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, so ergibt sich:

$$(Z_k Z_l) = \sum_1^q c'_{kls} Z_s f. \quad (k=2, 3, \dots, q; l=1, 2, \dots, k-1)$$

Wären die Constanten e_k nicht alle gleich Null, so wäre denkbar, dass man diese Relationen auf die frühere Form bringen könnte, weil das aber nicht der Fall ist, so ist unsere Annahme falsch und der Satz bewiesen.

23. Jetzt wollen wir versuchen, ob wir den Satz X auf die Gleichungen der n^{ten} erweiterten Gaussischen Gruppe anwenden können. Aus den Gleichungen (14) erhalten wir, indem wir dort $\nu = \lambda + 1 - \mu$ setzen und in derselben Weise verfahren, wie wir es bereits in N° 10 gethan:

$$(25) \quad \begin{cases} \mathfrak{G}_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f = \mathfrak{G}_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n-1)} f + \Gamma_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f = 0, \\ \bar{\mathfrak{G}}_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f = \bar{\mathfrak{G}}_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n-1)} f + \bar{\Gamma}_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} (\lambda=0, 1, \dots, n) \\ (\mu=0, 1, \dots, \lambda+1) \end{matrix}$$

wo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f &= \sum_{\mu-1}^n \left\{ (2i_{\mu-1} + i_{\mu})(n-i)_{\lambda+1-\mu} E_{i-\mu+1, n-i-\lambda-1+\mu} \frac{\partial f}{\partial E_{i, n-i}} \right. \\ &+ [(i+1)_{\mu}(n-i)_{\lambda+1-\mu} F_{i-\mu+1, n-i-\lambda-1+\mu} + i_{\mu}(n-i)_{\lambda-\mu} E_{i-\mu, n-i-\lambda+\mu}] \frac{\partial f}{\partial F_{i, n-i}} \\ &\left. + i_{\mu} [2(n-i)_{\lambda-\mu} F_{i-\mu, n-i-\lambda+\mu} + (n-i)_{\lambda+1-\mu} G_{i-\mu+1, n-i-\lambda-1+\mu}] \frac{\partial f}{\partial G_{i, n-i}} \right\}, \\ \bar{\Gamma}_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f &= \sum_{\mu-1}^n \left\{ (n-i)_{\lambda+1-\mu} (2i_{\mu-1} F_{i-\mu+1, n-i-\lambda-1+\mu} + i_{\mu} E_{i-\mu, n-i-\lambda+\mu}) \frac{\partial f}{\partial E_{i, n-i}} \right. \\ &+ [i_{\mu}(n-i+1)_{\lambda+1-\mu} F_{i-\mu, n-i-\lambda+\mu} + i_{\mu-1}(n-i)_{\lambda+1-\mu} G_{i-\mu+1, n-i-1-\lambda+\mu}] \frac{\partial f}{\partial F_{i, n-i}} \\ &\left. + [2(n-i)_{\lambda-\mu} + (n-i)_{\lambda+1-\mu}] G_{i-\mu, n-i-\lambda+\mu} \frac{\partial f}{\partial G_{i, n-i}} \right\}. \end{aligned}$$

Der Bequemlichkeit wegen werde ich alle diejenigen von den Gleichungen (25), für welche λ denselben Werth besitzt, *Gleichungen* λ^{ter} *Classe* nennen.

Wir sehen, dass in den Ausdrücken $\Gamma_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f$ und $\bar{\Gamma}_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f$ die Ordnung der Differentialquotienten von E, F, G , nach welchen f differentiiert

wird, überall die n^{te} ist. Ferner kommen solche Differentialquotienten von f in den Ausdrücken $\mathfrak{S}_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n-1)} f$ und $\bar{\mathfrak{S}}_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n-1)} f$ augenscheinlich nicht vor; auch die Coefficienten der Differentialquotienten von f sind in diesen Ausdrücken von den Differentialquotienten n^{ter} Ordnung der E, F, G unabhängig. Demnach sind die infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{S}_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f$ und $\bar{\mathfrak{S}}_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f$ von derselben Art wie die Transformationen $X_k f$ in unserem Satze X. Die Rolle der Veränderlichen z_i spielen hier die Differentialquotienten n^{ter} Ordnung von E, F, G ; die Rolle der Veränderlichen x_i fällt den Differentialquotienten niedrigerer Ordnungen von E, F, G zu. Nun versuchen wir nachzuweisen, dass die Identität:

$$(26) \quad \sum_0^n \sum_0^{\lambda+1} \mu (e_{\lambda\mu} I_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f + \bar{e}_{\lambda\mu} \bar{I}_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f) = 0,$$

wo $e_{\lambda\mu}$ und $\bar{e}_{\lambda\mu}$ numerische Constanten bezeichnen, nur dann möglich ist, wenn alle $e_{\lambda\mu}$ und $\bar{e}_{\lambda\mu}$ gleichzeitig verschwinden. Wir bemerken nämlich, dass die Coefficienten der Differentialquotienten von f in allen: $I_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f$ und $\bar{I}_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f$ lineare homogene Functionen der Differentialquotienten von E, F, G sind; die Ordnung aller dieser Differentialquotienten ist $n - \lambda$, also für jede Classe constant, und von den Ordnungen dieser Differentialquotienten in jeder anderen Classe verschieden. Weil aber unsere Identität nur bei constanten Werten von $e_{\lambda\mu}$ und $\bar{e}_{\lambda\mu}$ bestehen soll, so ist das nur dann möglich, wenn die $n + 1$ Identitäten:

$$(26') \quad \sum_0^{\lambda+1} \mu (e_{\lambda\mu} I_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f + \bar{e}_{\lambda\mu} \bar{I}_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f) = 0 \quad (\lambda = 0, 1, \dots, n)$$

bestehen. Betrachten wir gleichzeitig zwei Classen λ und λ' , wo $\lambda' < \lambda$ ist! Die Ordnung der Differentialquotienten von E, F, G , welche in die Coefficienten der Differentialquotienten von f eingehen, ist $n - \lambda$ resp. $n - \lambda'$. Weil aber $n - \lambda' > n - \lambda$ ist, so ist die Anzahl dieser Differentialquotienten von E, F, G für die Classe λ' grösser als für die Classe λ . Kann also die letzte Identität für die Classe λ nur in der Weise bestehen, dass alle $e_{\lambda\mu}$ und $\bar{e}_{\lambda\mu}$ verschwinden, so kann ihr Auftreten für die Classe λ' nur in derselben Weise möglich sein. Weil aber nach unseren Entwicklungen in N° 11 das Bestehen einer solchen Identität für $\lambda = n$ sogar dann, wenn $e_{n\mu}$ und $\bar{e}_{n\mu}$ keine Constanten sein sollen, notwendig das Verschwinden dieser Grössen verlangt, so kommen wir zum Schlusse, dass

in der Identität (26) alle $e_{\lambda\mu}$ und $\bar{e}_{\lambda\mu}$ gleich Null sind.¹ Also reduciert sich nach dem Satze X die Untersuchung der Zusammensetzung der endlichen Gruppe, welche als infinitesimale Transformationen die linken Seiten

¹ Doch scheint dieser Beweis nicht ganz streng zu sein; deshalb wollen wir einen anderen angeben. Soll unsere Identität (26') bestehen, so müssen die Coefficienten der Differentialquotienten von f alle identisch Null werden. Insbesondere giebt der Coefficient von $\frac{\partial f}{\partial E_{i',n-i'}}$:

$$(a) \quad \sum_0^{\lambda+1} \left\{ e_{\lambda\mu} (2i'_{\mu-1} + i'_{\mu}) (n - i')_{\lambda+1-\mu} E_{i'-\mu+1, n-i'-\lambda-1+\mu} + \bar{e}_{\lambda\mu} (n - i')_{\lambda+1-\mu} (2i'_{\mu-1} F_{i'-\mu+1, n-i'-\lambda-1+\mu} + i'_{\mu} E_{i'-\mu, n-i'-\lambda+\mu}) \right\} = 0.$$

$(n - i')_{\lambda+1-\mu}$ ist immer dann und nur dann von Null verschieden, wenn $(\lambda + 1 - \mu) \leq (n - i')$ ist; im Grenzfall $\lambda + 1 - \mu = n - i'$ bekommen wir $0_0 = 1$ ($N^{\circ} 6$). Also erstreckt sich die Summation nach μ von $\lambda + 1 - (n - i')$ bis $\lambda + 1$. Demnach können wir die frühere Gleichung folgendermassen schreiben:

$$\sum_{\lambda+2-(n-i')}^{\lambda+1} \left\{ \right\} + e_{\lambda, \lambda+1-(n-i')} (2i'_{\lambda-(n-i')} + i'_{\lambda+1-(n-i')}) E_{n-\lambda, 0} + \bar{e}_{\lambda, \lambda+1-(n-i')} (2i'_{\lambda-(n-i')} F_{n-\lambda, 0} + i'_{\lambda+1-(n-i')} E_{n-\lambda-1, 1}) = 0.$$

Der Ausdruck $i'_{\lambda-(n-i')}$ verschwindet nur dann, wenn $i' - (n - \lambda) > i'$, wenn also $n - \lambda < 0$, was unmöglich ist; demnach kann weder der Coefficient von $e_{\lambda, \lambda+1-(n-i')}$ noch der Coefficient von $\bar{e}_{\lambda, \lambda+1-(n-i')}$ verschwinden. Weil ferner $E_{n-\lambda, 0}$ und $F_{n-\lambda, 0}$ unter dem Summenzeichen nicht auftreten können, so erhält man:

$$e_{\lambda, \lambda+1-(n-i')} = \bar{e}_{\lambda, \lambda+1-(n-i')} = 0.$$

Dieses Resultat gilt aber nur dann, wenn $\lambda - (n - i') \geq 0$ ist; also ergibt sich:

$$e_{\lambda 1} = \bar{e}_{\lambda 1} = e_{\lambda 2} = \bar{e}_{\lambda 2} = \dots = e_{\lambda, \lambda+1} = \bar{e}_{\lambda, \lambda+1} = 0. \quad (\lambda=0, 1, \dots, n)$$

Es handelt sich also nur darum, zu beweisen, dass $e_{\lambda 0} = \bar{e}_{\lambda 0} = 0$ ($\lambda = 0, 1, \dots, n$) ist. Setzt man in der Identität (a) $i' = \mu = 0$, so ergibt sich:

$$e_{\lambda 0} n_{\lambda+1} E_{1, n-\lambda-1} + \bar{e}_{\lambda 0} n_{\lambda+1} E_{0, n-\lambda} = 0,$$

wo wir mit dem Multiplier $n_{\lambda+1}$ dividieren dürfen, ausser wenn $\lambda = n$ ist, wo $n_{\lambda+1} = 0$ ist; wir erhalten also $e_{\lambda 0} = \bar{e}_{\lambda 0} = 0$ ($\lambda = 0, 1, \dots, n-1$). Weil aber alle $e_{n\mu}$ und $\bar{e}_{n\mu}$ gleich Null sein müssen, so erhalten wir:

$$e_{\lambda 0} = \bar{e}_{\lambda 0} = 0. \quad (\lambda=0, 1, \dots, n)$$

Damit ist aber unsere Behauptung bewiesen.

der Gleichungen (25) besitzt, auf die Ableitung der Poissonschen Symbole für die Ausdrücke $\Gamma_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f$ und $\bar{\Gamma}_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f$.

In diesen Ausdrücken wird f immer nach den Differentialquotienten n^{ter} Ordnung von E, F, G differenziert; weil aber diese Differentialquotienten in den Coefficienten der Differentialquotienten von f für die Classen $1, 2, \dots, n$ nirgends vorkommen, so schliessen wir unmittelbar, dass:

$$(\Gamma_{\mu', \lambda'+1-\mu'}^{(n)}, \Gamma_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)}) = 0, \quad \begin{pmatrix} \lambda'=1, 2, \dots, n \\ \mu'=0, 1, \dots, \lambda'+1 \\ \lambda=1, 2, \dots, n \\ \mu=0, 1, \dots, \lambda+1 \end{pmatrix}$$

wo Γ'' entweder Γ oder aber $\bar{\Gamma}$ bezeichnet. Weil ferner nur für die Classe 0 die Coefficienten der Differentialquotienten von f die Differentialquotienten n^{ter} Ordnung der E, F, G enthalten, haben wir:

$$(\Gamma_{\mu', 0+1-\mu'}^{(n)}, \Gamma_{\mu, 0+1-\mu}^{(n)}) = [\Gamma_{\mu, 0+1-\mu}^{(n)} f], \quad \begin{pmatrix} \mu=0, 1 \end{pmatrix}$$

wo $[\Gamma_{\mu, 0+1-\mu}^{(n)} f]$ einen linearen homogenen Ausdruck mit constanten Coefficienten der Ausdrücke $\Gamma'' f$ nullter Classe bezeichnet. erinnert man sich endlich, dass die Coefficienten der Differentialquotienten von f in den $\Gamma'' f$ λ^{ter} Classe lineare und homogene Functionen der Differentialquotienten $(n - \lambda)^{\text{ter}}$ Ordnung von E, F, G sind, so resultiert notwendig:

$$(\Gamma_{\mu', \lambda'+1-\mu'}^{(n)}, \Gamma_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)}) = [\Gamma_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f], \quad \begin{pmatrix} \lambda=1, 2, \dots, n \\ \mu=0, 1, 2, \dots, \lambda+1 \\ \mu'=0, 1 \end{pmatrix}$$

Wenn wir jetzt den Satz X in Anwendung bringen, so ergibt sich folgendes:

1) Die infinitesimalen Transformationen:

$$\mathfrak{S}_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{S}}_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f \quad \begin{pmatrix} \lambda=1, 2, \dots, n \\ \mu=0, 1, \dots, \lambda+1 \end{pmatrix}$$

bilden eine endliche continuierliche Gruppe mit lauter vertauschbaren Transformationen; 2) die infinitesimalen Transformationen: $\mathfrak{S}_{01}^{(n)} f, \mathfrak{S}_{10}^{(n)} f, \bar{\mathfrak{S}}_{01}^{(n)} f, \bar{\mathfrak{S}}_{10}^{(n)} f$ bilden eine 4-gliedrige continuierliche Gruppe; 3) die Poissonschen Ausdrücke jeder dieser infinitesimalen Transformationen mit jeder infinitesimalen Transformation, welche der Classe λ angehört ($\lambda = 1, 2, \dots, n$) können nur von den infinitesimalen Transformationen dieser Classe λ abhängen.

Die Zusammensetzung der 4-gliedrigen Gruppe müssen wir aber genau berechnen. Nach dem Satze IX reducirt sich diese Rechnung auf die

Berechnung der Zusammensetzung der Gruppe: $\mathfrak{G}_{0,1}f, \mathfrak{G}_{1,0}f, \bar{\mathfrak{G}}_{0,1}f, \bar{\mathfrak{G}}_{1,0}f$ (N° 12 (α_0)). Führt man diese Rechnung wirklich aus, so gelangt man zu folgendem Resultate:

$$(27) \quad \begin{cases} (\bar{\mathfrak{G}}_{1,0}^{(n)}, \mathfrak{G}_{0,1}^{(n)}) = \bar{\mathfrak{G}}_{0,1}^{(n)}f - \mathfrak{G}_{1,0}^{(n)}f, & (\mathfrak{G}_{1,0}^{(n)}, \mathfrak{G}_{0,1}^{(n)}) = \mathfrak{G}_{0,1}^{(n)}f, \\ (\bar{\mathfrak{G}}_{0,1}^{(n)}, \mathfrak{G}_{0,1}^{(n)}) = -\mathfrak{G}_{0,1}^{(n)}f, & (\mathfrak{G}_{1,0}^{(n)}, \bar{\mathfrak{G}}_{1,0}^{(n)}) = -\bar{\mathfrak{G}}_{1,0}^{(n)}f, \\ (\bar{\mathfrak{G}}_{0,1}^{(n)}, \bar{\mathfrak{G}}_{1,0}^{(n)}) = \bar{\mathfrak{G}}_{1,0}^{(n)}f, & (\bar{\mathfrak{G}}_{0,1}^{(n)}, \mathfrak{G}_{1,0}^{(n)}) = 0. \end{cases}$$

Zuerst also bilden die Gleichungen der n^{ten} erweiterten Gruppe aller Classen ausser der Classe 0 zusammengenommen ein Jacobisches System. Demnach kann man diese Gleichungen ohne irgend welche Transformationen und in einer beliebigen Reihenfolge integrieren. Setzt man nun die erhaltenen Lösungen in irgend eine der Gleichungen:

$$(27') \quad \mathfrak{G}_{0,1}^{(n)}f = 0, \quad \bar{\mathfrak{G}}_{1,0}^{(n)}f = 0, \quad \mathfrak{G}_{1,0}^{(n)}f = 0, \quad \bar{\mathfrak{G}}_{0,1}^{(n)}f = 0$$

statt der ursprünglichen Veränderlichen ein, so erhält man nach der bewiesenen Eigenschaft 3) eine Gleichung, welche die ursprünglichen Veränderlichen nicht enthält. Nun aber giebt es, wie die Formeln (27) zeigen, keine Reihenfolge der Gleichungen (27'), welche die im Satz VII angegebene Eigenschaft besitzt. Andererseits giebt es aber 4 Reihenfolgen der Gleichungen (27'), nämlich:

$$\begin{array}{llll} 1^{\text{te}} & \mathfrak{G}_{0,1}^{(n)}f = 0, & \mathfrak{G}_{1,0}^{(n)}f = 0, & \bar{\mathfrak{G}}_{0,1}^{(n)}f = 0, & \bar{\mathfrak{G}}_{1,0}^{(n)}f = 0, \\ 2^{\text{te}} & \mathfrak{G}_{0,1}^{(n)}f = 0, & \bar{\mathfrak{G}}_{0,1}^{(n)}f = 0, & \mathfrak{G}_{1,0}^{(n)}f = 0, & \bar{\mathfrak{G}}_{1,0}^{(n)}f = 0, \\ 3^{\text{te}} & \bar{\mathfrak{G}}_{1,0}^{(n)}f = 0, & \mathfrak{G}_{1,0}^{(n)}f = 0, & \bar{\mathfrak{G}}_{0,1}^{(n)}f = 0, & \mathfrak{G}_{0,1}^{(n)}f = 0, \\ 4^{\text{te}} & \bar{\mathfrak{G}}_{1,0}^{(n)}f = 0, & \bar{\mathfrak{G}}_{0,1}^{(n)}f = 0, & \mathfrak{G}_{1,0}^{(n)}f = 0, & \mathfrak{G}_{0,1}^{(n)}f = 0, \end{array}$$

welche specielle Fälle des Systems des Satzes VIII sind. Hat man also die Gleichungen der höheren Classen integriert, so kann man die übrigen Gleichungen der Classe 0 in einer der 4 angegebenen Reihenfolgen auf die im Satze VIII angegebene Weise integrieren.

Es ist dabei ganz evident, dass diese Resultate, welche wir für die Gestalt (14) oder (25) der Gleichungen der n^{ten} erweiterten Gaussischen Gruppe bewiesen haben, sich auch auf die Gestalt (17) dieser Gleichungen beziehen.

Ferner kann man alle diese Ergebnisse auf die Gleichungen der Beltramischen (18), Mindingschen (21) und allgemeinen (23) n^{ten} erweiterten Gruppe ausdehnen. Setzt man nämlich dort überall $\nu = \lambda + 1 - \mu$, teilt die Gleichungen in Classen ein (wobei zu bemerken ist, dass hier nur n verschiedene Classen vorhanden sind, da λ nur gleich $0, 1, \dots, n-1$ sein kann) und benutzt den Satz IX, so ergeben sich unsere früheren Resultate auch für diese vollständigen Systeme ohne Weiteres.

Um ein allgemeines Theorem aufstellen zu können, setzen wir statt der Buchstaben $\mathcal{G}, \mathcal{B}, \mathcal{M}, \mathcal{A}$ überall \mathcal{S} ; mit anderen Worten:

bezeichnen wir mit:

$$\mathcal{S}_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f = 0, \quad \bar{\mathcal{S}}_{\lambda+1-\mu, \mu}^{(n)} f = 0 \quad (\lambda=0, 1, \dots, n-1; \mu=0, 1, \dots, \lambda+1)$$

entweder die Gleichungen der $(n-1)^{\text{ten}}$ erweiterten Gaussischen oder der n^{ten} Beltramischen, Mindingschen oder allgemeinen erweiterten Gruppe, so haben wir:

Theorem VII. *Um das vollständige System:*

$$\mathcal{S}_{\mu, \lambda+1-\mu}^{(n)} f = 0, \quad \bar{\mathcal{S}}_{\lambda+1-\mu, \mu}^{(n)} f = 0 \quad (\lambda=0, 1, \dots, n-1; \mu=0, 1, \dots, \lambda+1)$$

nach der Jacobischen Methode zu integrieren, integriert man zuerst in beliebiger Reihenfolge die Gleichungen aller Classen ausser der Classe 0. Diese Gleichungen aber integriert man weiter in einer der 4 Reihenfolgen:

$$1^{\text{te}} \quad \mathcal{S}_{01}^{(n)} f = 0, \quad \mathcal{S}_{10}^{(n)} f = 0, \quad \bar{\mathcal{S}}_{01}^{(n)} f = 0, \quad \frac{\bar{\mathcal{S}}_{10}^{(n)} f}{\mathcal{S}_{10}^{(n)}(\Phi)} = 0,$$

$$2^{\text{te}} \quad \mathcal{S}_{01}^{(n)} f = 0, \quad \bar{\mathcal{S}}_{01}^{(n)} f = 0, \quad \mathcal{S}_{10}^{(n)} f = 0, \quad \frac{\bar{\mathcal{S}}_{10}^{(n)} f}{\bar{\mathcal{S}}_{10}^{(n)}(\Phi)} = 0,$$

$$3^{\text{te}} \quad \bar{\mathcal{S}}_{10}^{(n)} f = 0, \quad \mathcal{S}_{10}^{(n)} f = 0, \quad \bar{\mathcal{S}}_{01}^{(n)} f = 0, \quad \frac{\mathcal{S}_{01}^{(n)} f}{\bar{\mathcal{S}}_{01}^{(n)}(\Phi)} = 0,$$

$$4^{\text{te}} \quad \bar{\mathcal{S}}_{10}^{(n)} f = 0, \quad \bar{\mathcal{S}}_{01}^{(n)} f = 0, \quad \mathcal{S}_{10}^{(n)} f = 0, \quad \frac{\mathcal{S}_{01}^{(n)} f}{\mathcal{S}_{01}^{(n)}(\Phi)} = 0,$$

wo Φ überall eine gemeinsame Lösung aller schon integrierten, aber kein Lösung der letzten Gleichung bezeichnet.

§ VI. *Berechnung einiger Biegungsinvarianten niedrigster Ordnungen.*

Hier stelle ich einige Biegungsinvarianten auf, indem ich das Theorem VII in Anwendung bringe. Man könnte eigentlich diese Rechnungen ohne Benutzung des Theorems VII vollständig durchführen; doch scheint mir die dort angegebene Integrationsweise hier die bequemste zu sein. Ferner meine ich, dass es keinen Zweck hat, alle diese einfachen, obwohl langen Rechnungen hier anzugeben; vielmehr werde ich mich auf die Angabe der Resultate und einiger speziellen Bemerkungen beschränken.

24. Die Gaussische Biegungsinvariante niedrigster Ordnung ist von 2^{ter} Ordnung. Man bekommt sie durch Integration des Systems: (N^o 12 (α₂))

$$1) \quad E \frac{\partial f}{\partial F} + 2F \frac{\partial f}{\partial G} + E_{10} \frac{\partial f}{\partial E_{01}} + (F_{10} + E_{01}) \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + (2F_{01} + G_{10}) \frac{\partial f}{\partial G_{01}} \\ + E_{10} \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F_{10} \frac{\partial f}{\partial G_{10}} = 0,$$

$$4) \quad G \frac{\partial f}{\partial F} + 2F \frac{\partial f}{\partial E} + G_{01} \frac{\partial f}{\partial G_{10}} + (F_{01} + G_{10}) \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + (2F_{10} + E_{01}) \frac{\partial f}{\partial E_{10}} \\ + G_{01} \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F_{01} \frac{\partial f}{\partial E_{01}} = 0,$$

$$2) \quad 2E \frac{\partial f}{\partial E} + F \frac{\partial f}{\partial F} + 2E_{01} \frac{\partial f}{\partial E_{01}} + F_{01} \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 3E_{10} \frac{\partial f}{\partial E_{10}} + 2F_{10} \frac{\partial f}{\partial F_{10}} \\ + G_{10} \frac{\partial f}{\partial G_{10}} - (E_{02} - 2F_{11} + G_{20}) \frac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0,$$

$$3) \quad 2G \frac{\partial f}{\partial G} + F \frac{\partial f}{\partial F} + 2G_{10} \frac{\partial f}{\partial G_{10}} + F_{10} \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 3G_{01} \frac{\partial f}{\partial G_{01}} + 2F_{01} \frac{\partial f}{\partial F_{01}} \\ + E_{01} \frac{\partial f}{\partial E_{01}} - (G_{20} - 2F_{11} + E_{02}) \frac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 & E \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F \frac{\partial f}{\partial G_{01}} + \frac{1}{2} E_{10} \frac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0, \\
 & G \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F \frac{\partial f}{\partial E_{10}} + \frac{1}{2} G_{01} \frac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0, \\
 \text{(Classe 1.)} \left\{ \begin{aligned}
 & 2E \frac{\partial f}{\partial E_{01}} + F \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + E \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F \frac{\partial f}{\partial G_{10}} - E_{01} \frac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0, \\
 & 2G \frac{\partial f}{\partial G_{10}} + F \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + G \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F \frac{\partial f}{\partial E_{01}} - G_{10} \frac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0, \\
 & 2E \frac{\partial f}{\partial E_{10}} + F \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + \left(F_{01} - \frac{1}{2} G_{10} \right) \frac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0, \\
 & 2G \frac{\partial f}{\partial G_{01}} + F \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + \left(F_{10} - \frac{1}{2} E_{01} \right) \frac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0,
 \end{aligned} \right. \\
 \text{(Classe 2.)} \quad & \frac{\partial f}{\partial F_{11}} + 2 \frac{\partial f}{\partial E_{02}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial F_{11}} + 2 \frac{\partial f}{\partial G_{20}} = 0.
 \end{aligned}$$

Wir haben in N° 12 bewiesen, dass von den 10 ersten Gleichungen nur 9 von einander unabhängig sind; demnach können wir eine dieser Gleichungen bei der Integration weglassen. Dieser Umstand erlaubt uns, das System ohne Weiteres auf ein System des Satzes VII zurückzuführen; zu dem Zwecke lassen wir die Gleichung 4) weg. Indem wir zuerst die Gleichungen der Classe 2, dann der Classe 1 und schliesslich die Gleichungen 1), 2), 3) nach einander integrieren, bekommen wir die einzige Lösung:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4(EG - F^2)^2} \{ E(E_{01} G_{01} - 2F_{10} G_{01} + G_{10}^2) \\
 & + F(E_{10} G_{01} - E_{01} G_{10} - 2E_{01} F_{01} + 4F_{10} F_{01} - 2F_{10} G_{10}) \\
 & + G(E_{10} G_{10} - 2E_{10} F_{01} + E_{01}^2) - 2(EG - F^2)(E_{02} - 2F_{11} + G_{20}) \}.
 \end{aligned}$$

Das ist das *Gaussische Krümmungsmass*, deren Invarianz bei der Biegung der Fläche GAUSS in *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (XI, XII) bewiesen hat. Nach der Gaussischen Schreibweise haben wir:

$$\begin{aligned}
4(EG - F^2)^2 K &= E \left[\frac{\partial E}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial q} - 2 \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q} + \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)^2 \right] \\
&+ F \left[\frac{\partial E}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial E}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} - 2 \frac{\partial E}{\partial q} \frac{\partial F}{\partial q} + 4 \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q} - 2 \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial p} \right] \\
&+ G \left[\frac{\partial E}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial p} - 2 \frac{\partial E}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q} + \left(\frac{\partial E}{\partial q} \right)^2 \right] - 2(EG - F^2) \left[\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} \right],
\end{aligned}$$

wo K das Krümmungsmass bezeichnet.

25. Jetzt wollen wir gleichzeitig die Biegungsinvarianten $\Delta\varphi$, $\theta(\varphi\psi)$, und $I(\varphi y')$, deren Existenz wir in N^o 18 und 20 bewiesen haben, wirklich aufstellen. Zu dem Zwecke werden wir die Gleichungen der ersten erweiterten allgemeinen Gruppe integrieren, indem wir in (23) $m = 2$, $\varphi^1 = \varphi$ und $\varphi^2 = \psi$ annehmen. Wir haben die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
1) \quad E \frac{\partial f}{\partial F} + 2F \frac{\partial f}{\partial G} + \varphi_{10} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{01}} + \psi_{10} \frac{\partial f}{\partial \psi_{01}} + y'^2 \frac{\partial f}{\partial y'} &= 0, \\
4) \quad G \frac{\partial f}{\partial F} + 2F \frac{\partial f}{\partial E} + \varphi_{01} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{10}} + \psi_{01} \frac{\partial f}{\partial \psi_{10}} - \frac{\partial f}{\partial y'} &= 0, \\
2) \quad 2E \frac{\partial f}{\partial E} + F \frac{\partial f}{\partial F} + \varphi_{10} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{10}} + \psi_{10} \frac{\partial f}{\partial \psi_{10}} + y' \frac{\partial f}{\partial y'} &= 0, \\
3) \quad 2G \frac{\partial f}{\partial G} + F \frac{\partial f}{\partial F} + \varphi_{01} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{01}} + \psi_{01} \frac{\partial f}{\partial \psi_{01}} - y' \frac{\partial f}{\partial y'} &= 0.
\end{aligned}$$

Integriert man diese Gleichungen in der Reihenfolge 1), 2), 3), 4), so ergeben sich folgende Lösungen:

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &= \frac{E\varphi_{01}^2 - 2F\varphi_{01}\varphi_{10} + G\varphi_{10}^2}{EG - F^2}, & \Delta\psi &= \frac{E\psi_{01}^2 - 2F\psi_{01}\psi_{10} + G\psi_{10}^2}{EG - F^2}, \\
\nabla\varphi\psi &= \frac{E\varphi_{01}\psi_{01} - F(\varphi_{01}\psi_{10} + \varphi_{10}\psi_{01}) + G\varphi_{10}\psi_{10}}{EG - F^2}, & I(\varphi y') &= \frac{\varphi_{10} + y'\varphi_{01}}{\sqrt{E + 2Fy' + Gy'^2}}. \quad 1
\end{aligned}$$

¹ Die Gleichungen 1), 2), 3) haben 5 gemeinsame Lösungen:

$$c_1 = \frac{\varphi_{10}}{\sqrt{E}}, \quad c_2 = \frac{\psi_{10}}{\sqrt{E}}, \quad c_3 = \frac{E\varphi_{01} - F\varphi_{10}}{\sqrt{E(EG - F^2)}}, \quad c_4 = \frac{E\psi_{01} - F\psi_{10}}{\sqrt{E(EG - F^2)}}, \quad c_5 = \frac{Fy' + E}{y'\sqrt{EG - F^2}}.$$

Unsere Function $\theta(\varphi\psi)$ ergibt sich als Folge der Lösungen $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$ und $\nabla\varphi\psi$; wir haben nämlich:

$$\theta(\varphi\psi) = \sqrt{\Delta\varphi \cdot \Delta\psi - (\nabla\varphi\psi)^2} = \frac{\varphi_{10}\psi_{01} - \varphi_{01}\psi_{10}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Indem wir also $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$ und $\theta(\varphi\psi)$ als wesentliche Biegungsinvarianten betrachten, so wird $\nabla\varphi\psi$ eine Folge von ihnen, also unwesentlich. Die Biegungsinvarianten $\Delta\varphi$, $\theta(\varphi\psi)$ und $\nabla\varphi\psi$ sind von Herrn BELTRAMI in *Ricerche di analisi applicata alla Geometria* (XIV) (Giornale di Matematiche, Bände II und III) aufgestellt worden. Herr BELTRAMI berechnet natürlich diese Ausdrücke in einer ganz anderen Weise, als es hier geschehen ist. $\Delta\varphi$ nennt er *Differentialparameter 1^{ter} Ordnung*.

In N^o 18 haben wir bewiesen, dass wenn mehrere invariante Functionen φ auftreten, einige von den Ausdrücken θ nur Folgen der übrigen und der Parameter Δ sind. Nehmen wir drei Functionen: φ , ψ , σ , so haben wir:

$$\Delta\varphi = \frac{E\varphi_{01}^2 - 2F\varphi_{01}\varphi_{10} + G\varphi_{10}^2}{EG - F^2}, \quad \Delta\psi = \frac{E\psi_{01}^2 - 2F\psi_{01}\psi_{10} + G\psi_{10}^2}{EG - F^2},$$

$$\Delta\sigma = \frac{E\sigma_{01}^2 - 2F\sigma_{01}\sigma_{10} + G\sigma_{10}^2}{EG - F^2},$$

$$\theta(\psi\sigma) = \frac{\psi_{10}\sigma_{01} - \psi_{01}\sigma_{10}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \theta(\sigma\varphi) = \frac{\sigma_{10}\varphi_{01} - \sigma_{01}\varphi_{10}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \theta(\varphi\psi) = \frac{\varphi_{10}\psi_{01} - \varphi_{01}\psi_{10}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Zwischen diesen 6 Grössen soll eine Identität bestehen. Wenn wir aus

Verfährt man, wie im Theorem V angedeutet ist, so erhält man aus 4) die Gleichung:

$$c_3 \frac{\partial f}{\partial c_1} + c_4 \frac{\partial f}{\partial c_2} - c_1 \frac{\partial f}{\partial c_3} - c_2 \frac{\partial f}{\partial c_4} + (1 + c_5^2) \frac{\partial f}{\partial c_5} = 0,$$

welche schliesslich folgende 4 unabhängige Lösungen giebt:

$$c_1^2 + c_3^2 = \Delta\varphi, \quad c_2^2 + c_4^2 = \Delta\psi, \quad c_1c_2 + c_3c_4 = \nabla\varphi\psi, \quad \frac{c_3 + c_1c_5}{\sqrt{1 + c_5^2}} = I(\varphi\psi).$$

($I(\varphi\psi)$) ist keine neue Biegungsinvariante; man sieht leicht, dass sie mit dem Ausdrucke identisch ist, den Herr DARBOUX mit $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ bezeichnet. *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. Troisième partie, p. 195.)

den zwei letzten Gleichungen φ_{10} und φ_{01} bestimmen und diese Werte in die ersten der sechs Gleichungen einsetzen, so ergibt sich ohne Schwierigkeit die Identität:

$$\begin{aligned} & (\Delta\varphi)^2\theta^4(\psi\sigma) + (\Delta\psi)^2\theta^4(\sigma\varphi) + (\Delta\sigma)^2\theta^4(\varphi\psi) + 4\theta^2(\psi\sigma)\theta^2(\sigma\varphi)\theta^2(\varphi\psi) \\ & - 2\Delta\psi\Delta\sigma\theta^2(\sigma\varphi)\theta^2(\varphi\psi) - 2\Delta\sigma\Delta\varphi\theta^2(\varphi\psi)\theta^2(\psi\sigma) - 2\Delta\varphi\Delta\psi\theta^2(\psi\sigma)\theta^2(\sigma\varphi) = 0. \end{aligned}$$

Natürlich werden wir, wenn mehr als 3 invariante Functionen auftreten, mehrere solche Identitäten aufstellen können. Diese Identität kontrolliert unsere frühere Behauptung.

In derselben Weise ergibt sich aus den Entwicklungen in N° 20, dass zwischen:

$$\Delta\varphi, \Delta\psi, \theta(\varphi\psi), I(\varphi y'), I(\psi y')$$

eine Identität bestehen muss. In der That, wir haben:

$$\sqrt{\Delta\varphi - I^2(\varphi y')} = \frac{(E + Fy')\varphi_{10} - (F + Gy')\varphi_{01}}{\sqrt{EG - F^2}\sqrt{E + 2Fy' + Gy'^2}},$$

und es ist leicht zu verificieren, dass

$$I(\varphi y')\sqrt{\Delta\psi - I^2(\psi y')} - I(\psi y')\sqrt{\Delta\varphi - I^2(\varphi y')} = \frac{\varphi_{10}\psi_{01} - \varphi_{01}\psi_{10}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

ist; es besteht also die Identität:

$$I(\varphi y')\sqrt{\Delta\psi - I^2(\psi y')} - I(\psi y')\sqrt{\Delta\varphi - I^2(\varphi y')} = \theta(\varphi\psi).$$

Wir müssen hier noch hervorheben, dass man die in Rede stehenden Biegungsinvarianten gewöhnlich in anderer Form schreibt, als wir es gethan haben, man setzt nämlich statt $\varphi_{10}, \varphi_{01}$ bez. $\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}$; für uns war die kürzere Schreibweise bequemer.

26. Wir gehen jetzt zur Berechnung der Beltramischen Biegungsinvarianten 2^{ter} Ordnung mit einer Function φ über.

Aus (18) ergeben sich dafür folgende Gleichungen:

$$1) \quad E \frac{\partial f}{\partial F} + 2F \frac{\partial f}{\partial G} + E_{10} \frac{\partial f}{\partial E_{01}} + (F_{10} + E_{01}) \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + (2F_{01} + G_{10}) \frac{\partial f}{\partial G_{01}} \\ + E_{10} \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F_{10} \frac{\partial f}{\partial G_{10}} + \varphi_{10} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{01}} + 2\varphi_{11} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{02}} + \varphi_{20} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{11}} = 0,$$

$$4) \quad G \frac{\partial f}{\partial F} + 2F \frac{\partial f}{\partial E} + G_{01} \frac{\partial f}{\partial G_{10}} + (F_{01} + G_{10}) \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + (2F_{10} + E_{01}) \frac{\partial f}{\partial E_{10}} \\ + G_{01} \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F_{01} \frac{\partial f}{\partial E_{01}} + \varphi_{01} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{10}} + 2\varphi_{11} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{20}} + \varphi_{02} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{11}} = 0,$$

$$2) \quad 2E \frac{\partial f}{\partial E} + F \frac{\partial f}{\partial F} + 2E_{01} \frac{\partial f}{\partial E_{01}} + F_{01} \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 3E_{10} \frac{\partial f}{\partial E_{10}} + 2F_{10} \frac{\partial f}{\partial F_{10}} \\ + G_{10} \frac{\partial f}{\partial G_{10}} + \varphi_{10} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{10}} + \varphi_{11} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{11}} + 2\varphi_{20} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{20}} = 0,$$

$$3) \quad 2G \frac{\partial f}{\partial G} + F \frac{\partial f}{\partial F} + 2G_{10} \frac{\partial f}{\partial G_{10}} + F_{10} \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 3G_{01} \frac{\partial f}{\partial G_{01}} + 2F_{01} \frac{\partial f}{\partial F_{01}} \\ + E_{01} \frac{\partial f}{\partial E_{01}} + \varphi_{01} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{01}} + \varphi_{11} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{11}} + 2\varphi_{02} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{02}} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} & E \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F \frac{\partial f}{\partial G_{01}} + \varphi_{10} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{02}} = 0, \\ & G \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F \frac{\partial f}{\partial E_{10}} + \varphi_{01} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{20}} = 0, \\ & 2E \frac{\partial f}{\partial E_{01}} + F \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + E \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F \frac{\partial f}{\partial G_{10}} + \varphi_{10} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{11}} = 0, \\ & 2G \frac{\partial f}{\partial G_{10}} + F \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + G \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F \frac{\partial f}{\partial E_{01}} + \varphi_{01} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{11}} = 0, \\ & 2E \frac{\partial f}{\partial E_{10}} + F \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + \varphi_{10} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{20}} = 0, \\ & 2G \frac{\partial f}{\partial G_{01}} + F \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + \varphi_{01} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{02}} = 0. \end{aligned} \right\} \text{(Classe 1.)}$$

Ich integriere zuerst die Gleichungen der Classe 1; dann die Gleichungen der Classe 0 in der Reihenfolge 1), 2), 3), 4). Bezeichnet man:

$$a = 2(EG - F^2)\varphi_{20} + (E_{01} - 2F_{10})(E\varphi_{01} - F\varphi_{10}) - E_{10}(G\varphi_{10} - F\varphi_{01}),$$

$$b = 2(EG - F^2)\varphi_{11} - G_{10}(E\varphi_{01} - F\varphi_{10}) - E_{01}(G\varphi_{10} - F\varphi_{01}),$$

$$c = 2(EG - F^2)\varphi_{02} - G_{01}(E\varphi_{01} - F\varphi_{10}) + (G_{10} - 2F_{01})(G\varphi_{10} - F\varphi_{01}),$$

so bekommt man folgende Lösungen des Systems:

$$\Delta_2 \varphi = \frac{Ec - 2Fb + Ga}{2(EG - F^2)^2},$$

$$\Delta_2' \varphi = \frac{1}{(EG - F^2)^3} \{ [(E\varphi_{01} - F\varphi_{10})^2 - (EG - F^2)\varphi_{10}^2] c - 2(EF\varphi_{01}^2 - 2EG\varphi_{01}\varphi_{10} + FG\varphi_{10}^2)b + [(G\varphi_{10} - F\varphi_{01})^2 - (EG - F^2)\varphi_{01}^2] a \},$$

$$\Delta_2'' \varphi = \frac{ac - b^2}{(EG - F^2)^3} \quad ^1$$

¹ Die Grössen a, b, c sind Lösungen der Gleichungen der Classe 1 und ergeben sich ohne Schwierigkeit. Führt man diese Integrale a, b, c in die Gleichungen 1), 2), 3), 4) ein, so erhält man das System:

$$1) \quad E \frac{\partial f}{\partial F} + 2F \frac{\partial f}{\partial G} + \varphi_{10} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{01}} + a \frac{\partial f}{\partial b} + 2b \frac{\partial f}{\partial c} = 0,$$

$$2) \quad 2E \frac{\partial f}{\partial E} + F \frac{\partial f}{\partial F} + \varphi_{10} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{10}} + 4a \frac{\partial f}{\partial a} + 3b \frac{\partial f}{\partial b} + 2c \frac{\partial f}{\partial c} = 0,$$

$$3) \quad 2G \frac{\partial f}{\partial G} + F \frac{\partial f}{\partial F} + \varphi_{01} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{01}} + 2a \frac{\partial f}{\partial a} + 3b \frac{\partial f}{\partial b} + 4c \frac{\partial f}{\partial c} = 0,$$

$$4) \quad G \frac{\partial f}{\partial F} + 2F \frac{\partial f}{\partial E} + \varphi_{01} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{10}} + 2b \frac{\partial f}{\partial a} + c \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

Die Gleichungen 1), 2), 3) ergeben sehr leicht die Lösungen:

$$\gamma_1 = \frac{\varphi_{10}}{\sqrt{E}}, \quad \gamma_2 = \frac{E\varphi_{01} - F\varphi_{10}}{\sqrt{E(EG - F^2)}}, \quad \gamma_3 = \frac{ac - b^2}{(EG - F^2)^2},$$

$$\gamma_4 = \frac{a}{E(EG - F^2)}, \quad \gamma_5 = \frac{Eb - Fa}{E(\sqrt{EG - F^2})^3};$$

setzt man diese Lösungen in 4) ein, so findet man erstens, dass $\gamma_3 = \Delta_2'' \varphi$ eine Biegungs-invariante ist, zweitens die Gleichung: $\gamma_2 \frac{\partial f}{\partial \gamma_1} - \gamma_1 \frac{\partial f}{\partial \gamma_2} + 2\gamma_5 \frac{\partial f}{\partial \gamma_4} + \frac{1}{\gamma_4} (\gamma_3 + \gamma_3^2 - \gamma_4^2) \frac{\partial f}{\partial \gamma_5} = 0.$

und endlich die Biegungsinvariante 1^{ter} Ordnung $\Delta\varphi$. Setzt man in $\Delta_2\varphi$ die Ausdrücke a, b, c ein, und ordnet man die Glieder zweckmässig, so ergibt sich ohne Schwierigkeit:

$$\begin{aligned} \Delta_2\varphi &= \frac{1}{(\sqrt{EG-F^2})^3} \{ (G\varphi_{20} - F\varphi_{11} + G_{10}\varphi_{10} - F_{10}\varphi_{01})\sqrt{EG-F^2} \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}} (GE_{10} + EG_{10} - 2FF_{10})(G\varphi_{10} - F\varphi_{01}) \\ &\quad + (E\varphi_{02} - F\varphi_{11} + E_{01}\varphi_{01} - F_{01}\varphi_{01})\sqrt{EG-F^2} \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}} (EG_{01} + GE_{01} - 2FF_{10})(E\varphi_{01} - F\varphi_{10}) \}; \end{aligned}$$

daraus resultiert aber unmittelbar:

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left\{ \left(\frac{G\varphi_{10} - F\varphi_{01}}{\sqrt{EG-F^2}} \right)_{10} + \left(\frac{E\varphi_{01} - F\varphi_{10}}{\sqrt{EG-F^2}} \right)_{01} \right\}.$$

Das ist der Beltramische *Differentialparameter 2^{ter} Ordnung*; in gewöhnlicher Weise geschrieben lautet er:

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G \frac{\partial\varphi}{\partial u} - F \frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E \frac{\partial\varphi}{\partial v} - F \frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} \right) \right\},$$

wo die Veränderlichen x, y durch u, v ersetzt sind.

27. Endlich gehen wir zur Berechnung der Mindingschen Biegungs-

Daraus ergibt sich: 1) die Lösung: $\Delta\varphi = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$; 2) die Gleichung:

$$2\gamma_3 \frac{d\gamma_5}{d\gamma_4} - \frac{\gamma_3 + \gamma_5^2}{\gamma_4} + \gamma_4 = 0,$$

welche sich vermöge der Substitution $\gamma_3 + \gamma_5^2 = z$ auf eine lineare bringen lässt und die Lösung $\Delta_2\varphi = \frac{\gamma_3 + \gamma_4^2 + \gamma_5^2}{2\gamma_4}$ ergibt, und endlich 3) die Gleichung:

$$\frac{2d\gamma_2}{\sqrt{\Delta\varphi - \gamma_2^2}} + \frac{d\gamma_4}{\sqrt{\gamma_4(2\Delta_2\varphi - \gamma_4) - \gamma_3}} = 0,$$

woraus wir die Biegungsinvariante $\Delta_2'\varphi = 2\gamma_1\gamma_2\gamma_5 + (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)(\gamma_4 - \Delta_2\varphi)$ bekommen.

invariante 2^{ter} Ordnung über. Nach (6) und (21) ergeben sich für diese Biegungsinvariante folgende Gleichungen:

$$1) \quad E \frac{\partial f}{\partial F} + 2F \frac{\partial f}{\partial G} + E_{10} \frac{\partial f}{\partial E_{01}} + (F_{10} + E_{01}) \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + (2F_{01} + G_{10}) \frac{\partial f}{\partial G_{01}} \\ + E_{10} \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F_{10} \frac{\partial f}{\partial G_{10}} + y'^2 \frac{\partial f}{\partial y'} + 3y'y'' \frac{\partial f}{\partial y''} = 0,$$

$$4) \quad G \frac{\partial f}{\partial F} + 2F \frac{\partial f}{\partial E} + G_{01} \frac{\partial f}{\partial G_{10}} + (F_{01} + G_{10}) \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + (2F_{10} + E_{01}) \frac{\partial f}{\partial E_{10}} \\ + G_{01} \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F_{01} \frac{\partial f}{\partial E_{01}} - \frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

$$2) \quad 2E \frac{\partial f}{\partial E} + F \frac{\partial f}{\partial F} + 2E_{01} \frac{\partial f}{\partial E_{01}} + F_{01} \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 3E_{10} \frac{\partial f}{\partial E_{10}} + 2F_{10} \frac{\partial f}{\partial F_{10}} \\ + G_{10} \frac{\partial f}{\partial G_{10}} + y' \frac{\partial f}{\partial y'} + 2y'' \frac{\partial f}{\partial y''} = 0,$$

$$3) \quad 2G \frac{\partial f}{\partial G} + F \frac{\partial f}{\partial F} + 2G_{10} \frac{\partial f}{\partial G_{10}} + F_{10} \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 3G_{01} \frac{\partial f}{\partial G_{01}} + 2F_{01} \frac{\partial f}{\partial F_{01}} \\ + E_{01} \frac{\partial f}{\partial E_{10}} - y' \frac{\partial f}{\partial y'} - y'' \frac{\partial f}{\partial y''} = 0,$$

$$\left. \begin{array}{l} E \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F \frac{\partial f}{\partial G_{01}} + y'^3 \frac{\partial f}{\partial y''} = 0, \\ G \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F \frac{\partial f}{\partial E_{10}} - \frac{\partial f}{\partial y''} = 0, \\ 2E \frac{\partial f}{\partial E_{01}} + F \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + E \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F \frac{\partial f}{\partial G_{10}} + 2y'^2 \frac{\partial f}{\partial y''} = 0, \\ 2G \frac{\partial f}{\partial G_{10}} + F \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + G \frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F \frac{\partial f}{\partial E_{01}} - 2y' \frac{\partial f}{\partial y''} = 0, \\ 2E \frac{\partial f}{\partial E_{10}} + F \frac{\partial f}{\partial F_{10}} + y' \frac{\partial f}{\partial y''} = 0, \\ 2G \frac{\partial f}{\partial G_{01}} + F \frac{\partial f}{\partial F_{01}} - y'^2 \frac{\partial f}{\partial y''} = 0. \end{array} \right\} \text{(Classe 1.)}$$

Ich integriere zuerst alle Gleichungen der Classe 1, dann die Gleichungen der Classe 0 in der Reihenfolge 1), 2), 3), 4). Es ergibt sich die Biegungsinvariante:

$$\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}(\sqrt{E + 2Fy' + Gy'^2})^3} \left\{ \left(EF_{10} - \frac{1}{2} FE_{01} - \frac{1}{2} FF_{10} \right) + \left(EG_{10} + FF_{10} - \frac{3}{2} FE_{01} - \frac{1}{2} GE_{10} \right) y' - \left(GE_{01} + FF_{01} - \frac{3}{2} FG_{10} - \frac{1}{2} EG_{01} \right) y'^2 - \left(GF_{01} - \frac{1}{2} GG_{10} - \frac{1}{2} FG_{01} \right) y'^3 + (EG - F^2) y' \right\}.$$

Dieser Ausdruck ist die von MINDING (Crelles Journal, Band 6: *Bemerkung über die Abwicklung krummer Linien von Flächen*) berechnete *geodätische Krümmung*. Ordnet man hier die Glieder zweckmässig und setzt statt x, y bez. p, q , so bekommt man den Mindingschen Ausdruck:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}(\sqrt{Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2})^3} \left\{ \left[E \left(\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial p} dq + \frac{\partial F}{\partial p} dp - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial q} dp \right) - \frac{1}{2} F dE \right] dp^2 + \left[\frac{1}{2} F dG - G \left(\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial q} dp + \frac{\partial F}{\partial q} dq - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial p} dq \right) \right] dq^2 + \left[\frac{1}{2} EdG - \frac{1}{2} GdE + F \left(\frac{\partial F}{\partial p} dp - \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial G}{\partial p} dq - \frac{\partial E}{\partial q} dp \right) \right] dpdq + (EG - F^2)(dpd^2q - dqd^2p) \right\}.$$

¹ Der Ausdruck, welcher in Klammern $\{ \}$ steht, ist die einzige gemeinsame Lösung der Gleichungen der Classe 1. Bezeichnet man diesen Ausdruck mit c und setzt man ihn in 1), 2), 3), 4) ein, so ergibt sich das System:

$$\begin{aligned} 1) \quad E \frac{\partial f}{\partial F} + 2F \frac{\partial f}{\partial G} + y'^2 \frac{\partial f}{\partial y'} + 3y'c \frac{\partial f}{\partial c} = 0, \quad 2) \quad 2E \frac{\partial f}{\partial E} + F \frac{\partial f}{\partial F} + y' \frac{\partial f}{\partial y'} + 4c \frac{\partial f}{\partial c} = 0, \\ 3) \quad 2G \frac{\partial f}{\partial G} + F \frac{\partial f}{\partial F} - y' \frac{\partial f}{\partial y'} + c \frac{\partial f}{\partial c} = 0, \quad 4) \quad G \frac{\partial f}{\partial F} + 2F \frac{\partial f}{\partial E} - \frac{\partial f}{\partial y'} = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 1), 2), 3) ergeben zwei gemeinsame Lösungen: $\alpha = \frac{E + Fy'}{y' \sqrt{EG - F^2}}$ und

$$\beta = \frac{cE^{3/2}}{y'^3(EG - F^2)^{3/2}}; \text{ demnach nimmt die Gleichung 4) die Form: } (1 + \alpha^2) \frac{\partial f}{\partial \alpha} + 3\alpha\beta \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$$

an und liefert das Integral $C = \frac{\beta}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} = \frac{c}{\sqrt{EG - F^2}(\sqrt{E + 2Fy' + Gy'^2})^3}.$

28. Die Berechnung der Biegungsinvarianten durch Integration vollständiger Systeme ist aber sehr umständlich. Es giebt zwar ein anderes Mittel: hat man nämlich eine gewisse Biegungsinvariante, welche invariante Functionen enthält, und setzt man in diese Biegungsinvariante statt dieser invarianten Functionen ebenfalls Biegungsinvarianten ein, so bekommt man offenbar auch eine Biegungsinvariante von höherer Ordnung als diejenigen, welche zu ihrer Berechnung gebraucht wurden. Dies hat schon Herr BELTRAMI bemerkt in Bezug auf seine Symbole $\Delta\varphi$, $\theta(\varphi\psi)$, $\Delta_2\varphi$. Diese Methode der Berechnung von Biegungsinvarianten wird aber nur dann mit vollständigem Rechte gebraucht werden können, wenn man weiss, wie man diese Operationen dirigieren muss, um *alle* wesentlichen Biegungsinvarianten zu erhalten. Mir ist es nicht gelungen, irgend ein Resultat in dieser Richtung zu gewinnen.

Ich habe vielmehr im Allgemeinen nur den folgenden Satz anzumerken:

»Setzt man in einer Gaussischen Biegungsinvariante statt E_{ik} , F_{ik} , G_{ik} bez. G_{ki} , F_{ki} , E_{ki} und in einer Beltramischen statt E_{ik} , F_{ik} , G_{ik} , φ_{ik}^2 bez. G_{ki} , F_{ki} , E_{ki} , φ_{ki}^2 , so bekommt man wieder eine Gaussische resp. Beltramische Biegungsinvariante.»

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge der Sätze III und V. Die in den letzten Artikeln berechneten Gaussischen und Beltramischen Biegungsinvarianten gehen bei solcher Vertauschung in sich selbst über.

Für die Mindingschen und allgemeinen Biegungsinvarianten gilt ein analoger Satz offenbar nicht.

Göttingen, im März 1891.
