EXPOSÉ SUCCINCT DES RÉSULTATS PRINCIPAUX DU MÉMOIRE POSTHUME DE KORKINE, AVEC UNE TABLE DES RACINES PRIMITIVES ET DES CARACTÈRES, QUI S'Y RAPPORTENT, CALCULÉE PAR LUI POUR LES NOMBRES PREMIERS INFÉRIEURS À 4000 ET PROLONGÉE JUSQU'À 5000.

PAR

C. POSSE

à ST. PETERSBOURG.

1. Le mémoire posthume de KORKINE, sous le titre: »Sur la distribution des nombres entiers suivant un module premier et les congruences binômes, avec une table des racines primitives et des caractères, qui s'y rapportent, pour tous les nombres premiers, inférieurs à 4000», est publié en russe dans le »Recueil mathematique de Moscou», (t. XXVII 1909).

Nous reproduisons ici cette table, l'ayant prolongée jusqu'à 5000, et nous donnons dans cette note l'explication de sa construction et son application à la résolution des congruences binômes, ce qui constitue le résultat principal du mémoire de KORKINE.

La table contient quatre colonnes, qui forment pour chacun des nombres premiers inférieurs à 5000 une bande particulière. Dans la première colonne se trouvent les nombres premiers p, dans la seconde les nombres $p-1$, décomposés en facteurs premiers, dans la troisième une des racines primitives g de p, dans la quatrième les nombres, appelés *caractères*, dont la définition et le calcul seront indiqués tout à l'heure.

La partie de la table, correspondante aux nombres p inférieurs à 1000, a été empruntée aux tables de JACOBI »Canon arithmeticus», en conservant les racines primitives adoptées pour bases dans ces dernières. Pour les nombres p entre 1000 et 4000 les racines primitives et les caractères ont été calculés par KORKINE; pour les nombres p entre 4000 et 5000 les caractères sont calculés par nous, à l'aide des tables des racines primitives de WERTHEIM (Acta mathematica t. 20).

En empruntant à ces tables les racines primitives, nous avons remplacé la plus petite racine positive, donnée par WERTHEIM, quand elle surpasse 2, par les nombres 10 et —10, lorsqu'ils sont aussi racines primitives, pour conserver l'anologie avec la partie de la table calculée par KORKINE, et parce que le calcul des caractères à l'aide de ces nombres présente quelques avantages.

2. *Définition et calcul des caractères.* Soit p le nombre premier donné, et

$$p - 1 = q^{\alpha} . N,$$

q étant un nombre premier, α un entier positif et N un nombre non divisible par q.

Les *caractères principaux ou du premier ordre et du degré* q sont les solutions de la congruence

$$u^q - 1 \equiv 0 \text{ (mod. } p) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

Nous les désignerons par

$$1, u_1, u_2, \ldots u_{q-1}.$$

En désignant par ξ un non-résidu du degré q du nombre p, c'est à dire un nombre, dont la puissance

$$\xi^{\frac{p-1}{q}}$$

n'est pas congrue à l'unité suivant le module p, nous pouvons prendre

$$u_1 \equiv \xi^{\frac{p-1}{q}} \text{ (mod. } p) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

et nous aurons tous les q caractères principaux du degré q, en faisant

$$i = 0, 1, 2, \ldots q - 1$$

dans la formule

$$u_i \equiv u_1^i \text{ (mod. } p) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

En particulier, si l'on connait une racine primitive g de p, on pourra prendre $\xi = g$, et c'est justement cette supposition qui est adoptée dans le calcul des caractères de la table.

Les caractères du second ordre et du degré q sont les solutions de la congruence

$$\frac{u^{q^2} - 1}{u^q - 1} \equiv 0 \text{ (mod. } p) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1^*)$$

Ils n'existent que dans le cas de $\alpha \geqq 2$, et dans ce cas leur nombre est égal à $q(q-1)$. On obtient une solution u'_1 de la congruence (1^*), en posant

$$u'_1 \equiv \xi^{\frac{p-1}{q^2}} \pmod{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2^*)$$

ξ désignant le même nombre que plus haut, et on aura toutes les solutions, c'est à dire tous les caractères du second ordre, en faisant

$$i = 1, 2, 3, \ldots q-1$$

dans la formule

$$u'_i \equiv [u'_1]^i \pmod{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3^*)$$

et multipliant les nombres

$$u'_1, u'_2, \ldots u'_{q-1}$$

par les caractères du premier ordre

$$1, u_1, u_2, \ldots u_{q-1}.$$

Remarquons encore la formule

$$[u'_i]^q \equiv u_i \pmod{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

qui découle immédiatement des formules (1), (2), (1*), (2*). On définit d'une manière analogue les caractères du 3^{me}, 4^{me}... ordre; l'ordre le plus élevé des caractères pour le nombre p donné est égal à α. Les caractères de l'ordre $K \leqq \alpha$ et du degré q sont les solutions de la congruence

$$\frac{u^{q^K}-1}{u^{q^{K-1}}-1} \equiv 0 \pmod{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1^{**})$$

Leur nombre est égal à $q^{K-1}(q-1)$. On obtient un de ces caractères $u_1^{(K-1)}$, en posant

$$u_1^{(K-1)} \equiv \xi^{\frac{p-1}{q^K}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2^{**})$$

ξ désignant *toujours le même non-résidu du degré q;* on les obtiendra tous, en faisant

$$i = 1, 2, 3, \ldots q-1$$

dans la formule

$$u_i^{(K-1)} \equiv [u_1^{(K-1)}]^i \pmod{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3^{**})$$

et multipliant les nombres

$$u_1^{(K-1)}, u_2^{(K-1)}, \ldots u_{q-1}^{(K-1)}$$

par tous les caractères de tous les ordres inférieurs à K. Remarquons encore la formule

$$[u_i^{(K)}]^q \equiv u_i^{(K-1)} \pmod{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4^*)$$

qui découle immédiatement des précédentes.

On voit d'après cela qu'on peut définir les caractères du degré q comme les solutions du système suivant de congruences:

$$u^q \equiv 1,\ [u']^q \equiv u,\ [u'']^q \equiv u',\ \ldots\ [u^{(\alpha-1)}]^q \equiv u^{(\alpha-2)} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

On en tire comme conséquence cette formule générale:

$$[u_m^{(\mu)}\, u_n^{(\nu)} \ldots u_r^{(\varrho)}]^q \equiv u_m^{(\mu-1)}\, u_n^{(\nu-1)} \ldots u_r^{(\varrho-1)} \pmod{p} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Elle montre, que pour avoir une solution de la congruence

$$X^q \equiv A \pmod{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

où A est représenté sous forme d'un produit des caractères, il suffit d'augmenter d'une unité les indices supérieurs dans l'expression de A.

C'est sous cette forme, que KORKINE énonce la règle, qui sert de base à son procédé de la résolution des congruences binômes.

Ajoutons à cela, que pour obtenir toutes les solutions de la congruence (7) il suffit de multiplier la solution obtenue par tous les caractères principaux du degré q.

Dans le cas de $q = 3$, les caractères, nommés cubiques, sont désignés par les lettres

$$z_i,\ z'_i,\ z''_i,\ \ldots$$

Les trois caractères principaux sont

$$1,\ z_1,\ z_2,$$

solutions de la congruence

$$z^3 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

ou, en excluant l'unité, de la congruence

$$z^2 + z + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

d'où il suit, qu'on a

$$z_2 = z_1^2 \equiv -z_1 - 1 \pmod{p}.$$

Dans le cas de $q = 2$, les caractères, nommés quadratiques, sont désignés par les lettres

$$f,\ f',\ f'',\ \ldots$$

Les caractères quadratiques principaux ne sont autre chose, que les nombres $+1$ et -1; les caractères du second ordre sont les solutions de la congruence

$$f^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

En appliquant la règle, exprimée par la formule (6), dans le cas de $q = 2$, il faut évidemment remplacer le facteur (-1), lorsqu'il figure dans l'expression de A, par la lettre f, pour passer de l'expression de A à celle de X. Dans la table, les caractères quadratiques sont calculés successivement à l'aide des formules

$$f^{(\alpha-2)} \equiv g^{\frac{p-1}{2^\alpha}},\ f^{(\alpha-3)} \equiv [f^{(\alpha-2)}]^2, \ldots f' \equiv f''^2,\ f \equiv f'^2 \pmod{p}$$

en supposant $\alpha \geqq 2$, $p - 1 = 2^\alpha N$, N impair, et désignant par g la racine primitive, placée dans la troisième colonne. La formule

$$f^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

sert comme moyen de vérification du calcul.

Pour les caractères cubiques et de degrés supérieurs la table ne contient qu'un seul caractère de chaque ordre, l'indice inférieur 1 étant toujours sous-entendu. Les caractères cubiques, pour un nombre $p = 3^\beta N + 1$, où N n'est pas divisible par 3, sont calculés à l'aide des formules

$$z^{(\beta-1)} \equiv g^{\frac{p-1}{3^\beta}},\ z^{(\beta-2)} \equiv [z^{(\beta-1)}]^3, \ldots z \equiv z'^3 \pmod{p}$$

la formule $z^2 \equiv -z - 1 \pmod{p}$ servant de vérification du calcul. Pour

$$p = 2^\alpha 3^\beta q^\gamma r^\delta s^\varepsilon \ldots + 1,$$

où

$$3 < q < r < s \ldots,$$

les caractères des degrés $q, r, s, \ldots$ sont désignés respectivement par les lettres $u, v, w, \ldots$ avec des indices supérieurs, et calculés à l'aide des formules

$$u^{(\gamma-1)} \equiv g^{\frac{p-1}{q^\gamma}},\ u^{(\gamma-2)} \equiv [u^{(\gamma-1)}]^q, \ldots u \equiv [u']^q \pmod{p}$$

et d'autres analogues pour les $v, w, \ldots$ qu'il est inutile d'écrire.

Le signe $\equiv$ est remplacé par le signe $=$.

Remarque. Dans tout ce qui précède et dans la suite, en disant, que nous calculons un nombre quelconque A, nous sous-entendons, que c'est le nombre de la suite

$$0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots \pm \frac{p-1}{2},$$

congru à A suivant le module p, que nous calculons. Cela revient à considérer tous les nombres congrus entre eux suivant le module p comme un seul nombre, représenté par son résidu, le plus petit en valeur absolue, par rapport à p.

3. *Résolution des congruences binômes.* Il suffit de considérer les congruences

$$x^q \equiv a \pmod{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

où q est un diviseur premier de $p-1$, car c'est à ce cas que se réduisent tous les autres. En outre, nous aurons la condition

$$a^{\frac{p-1}{q}} \equiv 1 \pmod{p},$$

car c'est dans ce cas seulement, que la congruence (8) admet des solutions.

Congruences du second degré. Le cas le plus simple de $q=2$ mérite d'être considéré à part.

Les solutions de la congruence

$$x^2 \equiv a \pmod{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8^*)$$

sont connues sous une forme générale, pour les modules p de la forme

$$p = 4n+3.$$

En effet, on a ici

$$a^{\frac{p-1}{2}} = a^{2n+1} \equiv 1 \pmod{p},$$

donc

$$a^{2n+2} \equiv a, \text{ et } x \equiv \pm a^{n+1} \pmod{p}.$$

Pour les modules p de la forme

$$p = 4n+1,$$

les solutions de la congruence sont aussi connues dans le cas de n impair. En effet, si $n = 2m+1$, on aura

$$p = 8m+5,$$

$$a^{\frac{p-1}{2}} = a^{4m+2} \equiv 1 \pmod{p},$$

donc

$$1)\ a^{2m+1} \equiv 1, \text{ ou } 2)\ a^{2m+1} \equiv -1.$$

Dans le cas 1), ou aura évidemment

$$x \equiv \pm a^{m+1} \pmod{p}$$

et dans le cas 2)

$$x \equiv \pm f . a^{m+1} \pmod{p}$$

où f est un nombre tel, que

$$f^2 \equiv -1 \pmod{p},$$

c'est à dire un caractère quadratique du second ordre. Pour $p < 5000$, la table nous le donne immédiatement; pour les modules plus grands, il faudra le calculer au moyen d'un non-résidu quadratique. Dans le cas de n pair le module p aura la forme

$$p = 2^{\alpha} N + 1,$$

α étant un entier positif ≥ 3, N un nombre impair.

Si

$$a^N \equiv 1 \text{ (mod. } p)$$

on aura

$$a^{N+1} \equiv a, \text{ et } x \equiv \pm a^{\frac{N+1}{2}} \text{ (mod } p).$$

Supposons donc, que a^N n'est pas congru à 1. Calculons les nombres

$$a^N, a^{2N}, a^{2^2 N} \dots \dots \dots \dots \dots \quad (9)$$

On arrivera nécessairement à un nombre congru à 1, car

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv a^{2^{\alpha-1}N} \equiv 1 \text{ (mod. } p).$$

Soit

$$a^{2^{n+2}N}$$

le premier nombre de la suite (9) congru à 1. On aura alors

$$a^{2^{n+1}N} \equiv -1 \text{ (mod. } p).$$

Posons

$$F \equiv a^{2^n N}, F' \equiv a^{2^{n-1}N}, \dots F^{(n-1)} \equiv a^{2N}, F^{(n)} \equiv a^N \text{ (mod. } p).$$

Nous aurons

$$F^2 \equiv -1, F'^2 \equiv F, \dots [F^{(n)}]^2 \equiv F^{(n-1)} \dots \dots \dots \quad (10)$$

La première de ces congruences donne

$$F \equiv f \text{ ou } F \equiv -f;$$

les nombres F et f étant connus, on saura lequel des deux cas a lieu effectivement.

Si $F \equiv f$, la congruence

$$F'^2 \equiv f \text{ (mod. } p)$$

donnera,

$$F' \equiv +f' \text{ ou } F' \equiv -f'.$$

Si $F \equiv -f$, la congruence

$$F'^2 \equiv -f$$

donnera

$$F' \equiv +ff' \text{ ou } -ff' \pmod{p}.$$

Ainsi on aura le nombre F' représenté par l'une des formes

$$f, -f, ff', -ff'.$$

En continuant ainsi de proche en proche, on parviendra à une expression de $F^{(n)}$ sous la forme d'un produit des caractères

$$-1, f, f', \ldots f^{(n)}$$

et l'application de la règle du n° 2 nous donnera ensuite une expression de la même forme d'un nombre $F^{(n+1)}$, satisfaisant à la congruence

$$[F^{(n+1)}]^2 \equiv F^{(n)} \equiv a^N \pmod{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Après cela, on déterminera un nombre φ, satisfaisant à la congruence

$$\varphi . F^{(n+1)} \equiv 1 \pmod{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

et l'on aura les solutions de la congruence (8*) sous la forme

$$x \equiv \pm \varphi . a^{\frac{N+1}{2}} \pmod{p}.$$

En effet

$$x^2 \equiv a . a^N \varphi^2 \equiv a . [F^{(n+1)} . \varphi]^2 \equiv a \pmod{p}$$

Quant au nombre φ, il n'est pas même nécessaire de résoudre la congruence linéaire (12), car ayant l'expression de $F^{(n+1)}$ sous la forme d'un produit des caractères, on obtiendra une expression analogue de φ, à l'aide de la formule

$$-ff'f''f''' \ldots [f^{(n+1)}]^2 \equiv 1 \pmod{p} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

qui découle immédiatement de la définition des caractères.

Pour éclaircir le procédé exposé, citons quelques exemples.

I. $$x^2 \equiv 380 \pmod{4481}.$$

$$p = 4481, \; p - 1 = 2^7 . 35, \; N = 35, \; a = 380.$$

Calculons

$$a^N \equiv 380^{35} \equiv -2035,$$
$$a^{2N} \equiv 781, \; a^{2^2 N} \equiv 545, \; a^{2^3 N} \equiv 1279,$$
$$a^{2^4 N} \equiv 276, \; a^{2^5 N} \equiv -1, \; a^{2^6 N} \equiv 1.$$

Donc

$$F \equiv 276, \; F' \equiv 1279, \; F'' \equiv 545,$$
$$F''' \equiv 781 \quad F^{\mathrm{IV}} \equiv -2035 \equiv a^N.$$

La table nous donne

$$f \equiv 276, \; f' \equiv -1279, \; f'' \equiv -1934,$$
$$f''' \equiv 364, \; f^{\mathrm{IV}} \equiv 1372, \; f^{\mathrm{V}} \equiv 1937.$$

Donc

$$F \equiv f, \; F' \equiv -f', \; F'' \equiv \pm f f''.$$

Or

$$f f'' \equiv -545, \; F'' \equiv 545,$$

donc

$$F'' \equiv -f f'', \; F''' \equiv \pm f f' f'''.$$

Or

$$f f' f''' \equiv -781, \; F''' \equiv 781,$$

donc

$$F''' \equiv -f f' f''', \; F^{\mathrm{IV}} \equiv \pm f f' f'' f^{\mathrm{IV}};$$

or

$$f f' f'' f^{\mathrm{IV}} \equiv 2035,$$

donc

$$F^{\mathrm{IV}} \equiv -f f' f'' f^{\mathrm{IV}}.$$

On prendra donc

$$F^{\mathrm{V}} \equiv \pm f f' f'' f''' f^{\mathrm{V}},$$

le signe de F^{V} pouvant être choisi à volonté, et d'après les congruences

$$\varphi F^{\mathrm{V}} \equiv 1, \; -f f' f'' f''' f^{\mathrm{IV}} [f^{\mathrm{V}}]^2 \equiv 1$$

on voit que

$$\varphi \equiv \pm f^{\mathrm{IV}} f^{\mathrm{V}} \equiv 331;$$
$$a^{\frac{N+1}{2}} = 380^{18} \equiv -324;$$

les solutions cherchées sont

$$x \equiv \pm 331 \cdot 324 \equiv \pm 300 \pmod{4481}.$$

II. $$x^2 + 71 \equiv 0 \pmod{4057}.$$

$$p - 1 = 2^3 \cdot 507, \; N = 507, \; a = -71.$$
$$a^N = (-71)^{507} \equiv -2200 \equiv f,$$

d'après la table,

$$a^{2N} \equiv -1.$$

Ayant
$$F = a^N \equiv f,$$
nous pouvons prendre
$$F' \equiv \pm f' \equiv \pm 315,$$
d'après la table, et
$$\varphi \equiv \pm f f' \equiv \pm 315 \cdot 2200 \equiv \pm 747,$$
$$a^{\frac{N+1}{2}} = (-71)^{254} \equiv -1863, \; x \equiv \pm 1863 \cdot 747 \equiv \pm 110.$$

Congruences des degrés supérieurs à 2.

Passons aux congruences
$$x^q \equiv a \text{ (mod. } p) \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (8)$$
où
$$q > 2, \text{ et } p - 1 = q^\alpha N,$$
N étant non-divisible par q.

Nous allons distinguer ici aussi les deux cas:
$$1) \; a^N \equiv 1 \text{ (mod. } p)$$
et
$$2) \; a^N \text{ n'est pas congru à } 1 \text{ (mod. } p).$$
Le premier cas aura lieu nécessairement quand $\alpha = 1$, parce-que alors
$$a^N = a^{\frac{p-1}{q}} \equiv 1 \text{ (mod. } p).$$
[C'est le cas le plus fréquent pour les modules $p < 5000$ et $q > 3$.] Dans ce cas on aura les q solutions de la congruence (8) de la manière suivante.

Soit
$$N = q N' + \varrho, \text{ où } |\varrho| < q$$
et σ et τ deux nombres entiers positifs, satisfaisant à l'équation
$$\varrho \sigma - q \tau = -1 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (14)$$
[Quand $\varrho = -1$, on peut prendre $\sigma = 1$, $\tau = 0$]. On aura une solution de la congruence (8), en posant
$$x \equiv a^{N'\sigma + \tau} \text{ (mod. } p) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (15)$$
En effet
$$x^q \equiv a^{q(N'\sigma+\tau)} \equiv a \cdot a^{(qN'+\varrho)\sigma} \equiv a \cdot a^{N\sigma} \equiv a \text{ (mod. } p).$$
On aura toutes les solutions, en multipliant la solution obtenue par les caractères principaux

$$1,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{q-1},$$

dont u_1 se trouve dans la table (pour $p < 5000$), et les autres se calculent aisément au moyen de la formule

$$u_i \equiv u_1^i \ (\text{mod. } p).$$

Dans le cas général où a^N n'est pas congru à 1, la marche à suivre est tout à fait analogue à celle, que nous avons développée dans le cas de $q = 2$. Calculons les nombres

$$a^N,\ a^{qN},\ a^{q^2 N},\ \ldots \tag{16}$$

On arrivera à un nombre congru à 1, parce-que

$$a^{\frac{p-1}{q}} = a^{q^{\alpha-1}\cdot N} \equiv 1 \ (\text{mod. } p).$$

Soit

$$a^{q^{n+1}N}$$

le premier nombre de la suite (16) congru à 1.

En posant

$$U \equiv a^{q^n N},\ U' \equiv a^{q^{n-1}N},\ \ldots\ U^{(n-1)} \equiv a^{qN},\ U^{(n)} \equiv a^N \ (\text{mod. } p)$$

on aura

$$U^q \equiv 1,\ U'^q \equiv U,\ \ldots\ [U^{(n)}]^q \equiv U^{(n-1)} \ (\text{mod. } p)\ \ldots\ldots\ldots \tag{17}$$

La première de ces congruences donne

$$U \equiv u_i,$$

où u_i est un des caractères principaux du degré q, différent de 1; la congruence

$$U'^q \equiv u_i$$

donnera ensuite

$$U' \equiv u'_i \lambda,$$

λ étant un des caractères principaux, l'unité y compris.

Connaisant les nombres U' et u'_i on aura aussi la valeur de λ.

Si $\lambda \equiv 1$, la congruence

$$U''^q \equiv U' \equiv u'_i$$

donnera

$$U'' \equiv u''_i \mu,$$

μ étant un des caractères principaux, l'unité y compris. Si $\lambda \equiv u_k$, la congruence

$$U''^q \equiv U' \equiv u'_i\, u_k$$

donnera

$$U'' \equiv u''_i\, u'_k\, \nu,$$

ν étant un des caractères principaux.

Continuant ainsi de proche en proche, nous parviendrons à une expression de $U^{(n)} \equiv a^N$ sous la forme d'un produit des caractères de divers ordres. Ensuite, l'application de la règle du nº 2 donnera une expression de la même forme d'un nombre $U^{(n+1)}$, satisfaisant à la congruence

$$[U^{(n+1)}]^q \equiv U^{(n)} \equiv a^N \pmod{p}.$$

Après cela, on cherchera un nombre φ, satisfaisant à la congruence

$$\varphi\, U^{(n+1)} \equiv 1 \pmod{p}$$

et on aura une solution de la congruence (8), en posant

$$x \equiv a^{N'\sigma+\tau} \varphi^\sigma \pmod{p},$$

les lettres N', σ, τ ayant la même signification que dans le cas précédent comme on le vérifie aisément.

Il suffit de multiplier la solution obtenue par les caractères principaux pour avoir toutes les solutions. Remarquons encore, que pour avoir les expressions de $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ on peut appliquer un procédé très simple, indiqué par Korkine, et que nous allons expliquer sur un exemple. Supposons qu'il s'agisse de trouver le facteur ν dans la congruence

$$U'' \equiv u''_i\, u'_k\, \nu.$$

Multipliant les deux membres par u''_{q-i}, et remarquant, que

$$u''_i\, u''_{q-i} \equiv [u''_1]^q \equiv u'_1,$$

nous débarasserons le coefficient de ν du caractère u''_i et nous aurons

$$u''_{q-i}\, U'' \equiv u'_1\, u'_k\, \nu \equiv u'_{k+1}\, \nu;$$

en multipliant de part et d'autre par u'_{q-k-1} et remarquant, que

$$u'_{k+1}\, u'_{q-k-1} \equiv [u'_1]^q \equiv u_1$$

nous aurons

$$u''_{q-i}\, u'_{q-k-1}\, U'' \equiv u_1\, \nu,$$

en multipliant enfin par u_{q-1}, on aura

$$u''_{q-i}\, u'_{q-k-1}\, u_{q-1}\, U'' \equiv \nu \pmod{p}$$

pour l'expression de ν par des nombres connus. Dans les exemples numériques la détermination des $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ se fait le plus souvent par des considérations particulières, sans recourir au procédé général.

Exemples.

III. $$x^3 \equiv 6 \pmod{4861}$$

$$p = 4861,\ p - 1 = 3^5 . 20,\ N = 20,$$

$$N' = 6,\ \varrho = 2,\ 2\sigma - 3\tau = -1,\ \sigma = \tau = 1.$$

La table nous donne

$$z_1 \equiv -320,\ (z_2 \equiv -z - 1 \equiv 319)$$

$$z_1' \equiv -2078,\ z_1'' \equiv 975,\ z_1''' \equiv -765,\ z_1^{IV} \equiv 243.$$

Calculons

$$a^N \equiv 6^{20} \equiv -79,\ a^{3N} \equiv -2078 \equiv z_1'$$

donc

$$a^N \equiv -79 \equiv z_1'' \lambda \equiv 975\, \lambda,$$

où λ doit être egal à l'un des nombres 1, z_1 et z_2; on voit de suite que la valeur $\lambda \equiv 1$ est à rejéter, ainsi que $\lambda \equiv z_1$; c'est $\lambda \equiv z_2 \equiv 319$ qui satisfait à la congruence

$$-79 \equiv 975\, \lambda \pmod{4861}.$$

Or aura donc

$$U'' \equiv a^N \equiv z_1'' z_2$$

et l'on pourra prendre

$$U''' \equiv z_1''' z_2' \equiv -765\, z_2',$$

$$z_2' \equiv 2078^2 \equiv 1516 \pmod{p}$$

et l'on aura

$$U''' \equiv -765 . 1516 \equiv 2039 \pmod{p}.$$

On trouvera φ d'après la congruence

$$2039\, \varphi \equiv 1 \pmod{p},$$

qui donne

$$\varphi \equiv 1521.$$

Solutions:

$$x_1 \equiv a^{N'\sigma + \tau} \varphi^{\sigma} \equiv 6^7 . 1521 \equiv -2056$$

$$x_2 \equiv x_1 z_1 \equiv 1685,\ x_3 \equiv x_1 z_2 \equiv 371.$$

IV $$x^5 \equiv 229 \pmod{4751}.$$

$$p-1 = 5^3 \cdot 38, \quad N = 38, \quad N' = 7, \quad \varrho = 3,$$

$$3\sigma - 5\tau = -1, \quad \sigma = 3, \quad \tau = 2.$$

La table donne

$$u_1 \equiv -2323, \quad u_1' \equiv 1913, \quad u_1'' \equiv -2110.$$

Calculons

$$a^N \equiv 229^{38} \equiv 1913, \text{ donc } U' \equiv u_1',$$

$$U'' \equiv u_1'' \equiv -2110, \quad -2110\,\varphi \equiv 1 \pmod{4751}$$

$$\varphi \equiv 340$$

$$x_1 \equiv a^{N'\sigma+\tau}\varphi^\sigma \equiv 229^{23} \cdot 340^3, \quad 229^{23} \equiv 966, \quad 340^3 \equiv -1023.$$

$$x_1 \equiv -966 \cdot 1023 \equiv 10.$$

Calculons les nombres u_2, u_3, u_4, d'après le nombre $u_1 \equiv -2323$ de la table et nous obtenons

$$u_2 \equiv u_1^2 \equiv -807, \quad u_3 \equiv u_1^2 \equiv 1984, \quad u_4 \equiv u_1^2 \equiv 362.$$

Solutions:

$$x_1 \equiv 10, \quad x_2 \equiv x_1 u_1 \equiv 525, \quad x_3 \equiv x_1 u_2 \equiv 1432, \quad x_4 \equiv x_1 u_3 \equiv 836, \quad x_5 \equiv x_1 u_4 \equiv -1331.$$

V. $$x^{11} + 615 \equiv 0 \pmod{2663}.$$

$$p-1 = 11^3 \cdot 2, \quad N = 2, \quad N' = 0, \quad \varrho = 2, \quad \sigma = 5, \quad \tau = 1.$$

$$x_1 \equiv -615\,\varphi^5.$$

$$a^N \equiv (-615)^2 \equiv 79 \equiv u_1' \text{ (voir la table).}$$

$$U'' \equiv u_1'' \equiv 4 \text{ (v. la t.).}$$

$$4\varphi \equiv 1 \pmod{2663}, \quad \varphi \equiv 666.$$

$$x_1 \equiv -615 \cdot 666^5 \equiv 2.$$

$$u_1 \equiv -142 \text{ (table)}, \quad u_2 \equiv -1140, \quad u_3 \equiv -563,$$

$$u_4 \equiv 56, \quad u_5 \equiv 37, \quad u_6 \equiv 72, \quad u_7 \equiv 428, \quad u_8 \equiv 473,$$

$$u_9 \equiv -591, \quad u_{10} \equiv -1294.$$

Solutions:

$$2, \ -284, \ 383, \ -1126, \ 112, \ 74,$$

$$144, \ 856, \ 946, \ -1182, \ 75.$$

4. *Application de la résolution des congruences binômes à la recherche des racines primitives.* — Nous avons déjà remarqué au commencement de cette note, que pour pouvoir calculer les caractères de tous les ordres, il n'est pas indispensable de connaître une racine primitive g du nombre donné p; il suffit de connaître un non-résidu ξ. Si dans le calcul des caractères on prend pour ξ, au lieu de g, un autre non-résidu, on trouvera les mêmes nombres, mais dans un ordre différent. Ayant les caractères, calculés au moyen d'un non-résidu quelconque, on peut les appliquer à la résolution des congruences binômes de la manière indiquée plus haut. Or, parmi les solutions des congruences binômes se trouvent, certaines conditions étant remplies, les racines primitives du module p et il y a des cas où toutes les solutions sont des racines primitives. KORKINE énonce dans son mémoire le théorème suivant, qui se rapporte directement à la recherche des racines primitives:

Théorème. Soit p un nombre premier et δ un diviseur quelconque de $p-1$, premier ou composé; soit a un nombre, appartenant à l'exposant $\frac{p-1}{\delta}$ (ou au groupe (δ), d'après la terminologie de KORKINE*), alors parmi les solutions de la congruence*

$$x^{\delta} \equiv a \ (mod.\ p)$$

il y aura précisement

$$\frac{\varphi(p-1)}{\varphi\left(\frac{p-1}{\delta}\right)}$$

racines primitives de p.

($\varphi(N)$ désigne le nombre des nombres premiers à N, qui ne le surpassent pas.) KORKINE ne donne pas la démonstration de son théorème, mais cette démonstration est très facile, et, si nous l'omettons ici aussi, c'est uniquement pour ne pas étendre encore cette note, déjà assez longue. Remarquons seulement, que si δ est egal à un diviseur *premier* q de p, on aura

$$\frac{\varphi(p-1)}{\varphi\left(\frac{p-1}{q}\right)} = q \text{ ou } q-1;$$

donc, dans ce cas, toutes les solutions de la congruence

$$x^{q} \equiv a \ (\text{mod. } p)$$

ou toutes les solutions, à l'exception d'une seule, (qu'on distingue facilement des autres) sont racines primitives de p.[1]

[1] La même circonstance peut arriver aussi dans le cas de δ non premier.

Pour donner une application de ce théorème, prenons

$$p = 10009$$

nombre premier en déhors des limites de la table de DESMAREST, donnant les racines primitives des nombres premiers inférieurs à 10000. Nous aurons

$$p - 1 = 2^3 . 3^2 . 139.$$

Prenons $a = 2$ et cherchons l'exposant, auquel il appartient, en considérant les diverses puissances de 2, aux exposants — diviseurs de $p - 1$. Nous trouverons que la plus petite de ces puissances congrue à 1 est $\frac{p-1}{6} = 1668$; donc 2 appartient à cet exposant ou au groupe (6). Considérons la congruence

$$x^6 \equiv 2 \pmod{10\,009} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

D'après le théorème de KORKINE parmi ses solutions se trouvent

$$\lambda = \frac{\varphi(p-1)}{\varphi\left(\frac{p-1}{6}\right)}$$

racines primitives de p. Or, nous avons ici $\lambda = 6$, donc toutes les solutions de la congruence (18) sont racines primitives de p.

Pour trouver les solutions de la congruence (18), posons $x^3 \equiv y$, et résolvons d'abord la congruence

$$y^2 \equiv 6 \pmod{10\,009}$$

Nous trouverons

$$y_1 \equiv 5590, \; y_2 \equiv -5590.$$

En résolvant ensuite les congruences

$$x^3 \equiv 5590, \; x^3 \equiv -5590 \pmod{p}$$

nous trouverons les six solutions de la congruence (18), savoir

$$\pm 6060, \; \pm 2997, \; \pm 952$$

qui sont racines primitives de 10 009. Le défaut de cette methode pour la recherche des racines primitives, qu'elle partage d'ailleurs avec les autres méthodes indirectes, consiste en ce qu'elle donne des racines primitives très grandes. La plus petite racine primitive de 10 009 est 11, mais on ne la trouve pas par cette méthode. Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un nombre donné a soit racine primitive d'un nombre premier p, et l'examen des suppositions $a = 2, 3, 5, 6, \ldots$ qui nous l'ont donnée.

$^{25}/_{12}$. V. 09.

C. Posse.

Table des racines primitives et des caractères, qui s'y rapportent pour les nombres premiers, inférieurs à 4000.

p	$p-1$	g	Caractères
5	2^2	2	$f=2$
7	2.3	3	$z=2$
11	2.5	2	$u=4$
13	$2^2.3$	6	$f=8,\ z=-4$
17	2^4	10	$f''=10,\ f'=-2,\ f=4$
19	2.3^2	10	$z'=5,\ z=11$
23	2.11	10	$u=8$
29	$2^2.7$	10	$f=-12,\ u=-5$
31	$2.3.5$	17	$z=-6,\ u=8$
37	$2^2.3^2$	5	$f=6,\ z'=-4,\ z=10$
41	$2^3.5$	6	$f'=-14,\ f=-9,\ u=10$
43	$2.3.7$	28	$z=6,\ u=11$
47	2.23	10	$u=6$
53	$2^2.13$	26	$f=-23,\ u=10$
59	2.29	10	$u=-18$
61	$2^2.3.5$	10	$f=-11,\ z=13,\ u=-3$
67	$2.3.11$	12	$z=29,\ u=-5$
71	$2.5.7$	62	$u=5,\ v=32$
73	$2^3.3^2$	5	$f'=10,\ f=27,\ z'=2,\ z=8$
79	$2.3.13$	29	$z=-24,\ u=10$
83	2.41	50	$u=10$
89	$2^3.11$	30	$f'=-12,\ f=55,\ u=32$
97	$2^5.3$	10	$f'''=30,\ f''=27,\ f'=50,\ f=-22,\ z=-36$
101	$2^2.5^2$	2	$f=10,\ u'=16,\ u=-6$
103	$2.3.17$	6	$z=46,\ u=-3$
107	2.53	63	$u=10$
109	$2^2.3^3$	10	$f=33,\ z''=-28,\ z'=-43,\ z=-46$
113	$2^4.7$	10	$f''=65,\ f'=44,\ f=15,\ u=-7$
127	$2.3^2.7$	109	$z'=-24,\ z=19,\ u=2$

p	$p-1$	g	Caractères
131	$2.5.13$	10	$u=58,\ v=-18$
137	$2^3.17$	12	$f'=10,\ f=-37,\ u=72$
139	$2.3.23$	92	$z=42,\ u=-39$
149	$2^2.37$	10	$f=-44,\ u=17$
151	$2.3.5^2$	114	$z=32,\ u'=94,\ u=59$
157	$2^2.3.13$	139	$f=28,\ z=-13,\ u=67$
163	2.3^4	70	$z'''=10,\ z''=22,\ z'=53,\ z=58$
167	2.83	10	$u=100$
173	$2^2.43$	91	$f=80,\ u=10$
179	2.89	10	$u=100$
181	$2^2.3^2.5$	10	$f=-19,\ z'=73,\ z=48,\ u=42$
191	$2.5.19$	157	$u=-7,\ v=-84$
193	$2^6.3$	10	$f^{\mathrm{IV}}=35,\ f'''=67,\ f''=50,\ f'=-9,\ f=81,\ z=-85$
197	$2^2.7^2$	73	$f=-14,\ u'=100,\ u=-6$
199	$2.3^2.11$	127	$z'=-37,\ z=92,\ u=-74$
211	$2.3.5.7$	142	$z=-15,\ u=71,\ v=-40$
223	$2.3.37$	10	$z=39,\ u=68$
227	2.113	-10	$u=100$
229	$2^2.3.19$	10	$f=107,\ z=94,\ u=17$
233	$2^3.29$	10	$f'=12,\ f=144,\ u=128$
239	$2.7.17$	-2	$u=-38,\ v=-107$
241	$2^4.3.5$	112	$f''=130,\ f'=30,\ f=-64,\ z=-16,\ u=91$
251	2.5^3	224	$u''=-24,\ u'=100,\ u=113$
257	2^8	10	$f^{\mathrm{VI}}=10,\ f^{\mathrm{V}}=100,\ f^{\mathrm{IV}}=-23,$
			$f'''=15,\ f''=-32,\ f'=-4,\ f=16$
263	2.131	10	$u=100$
269	$2^2.67$	10	$f=-82,\ u=47$
271	$2.3^3.5$	-2	$z''=-60,\ z'=-13,\ z=-29,\ u=-27$
277	$2^2.3.23$	199	$f=60,\ z=160,\ u=30$
281	$2^3.5.7$	117	$f'=192,\ f=53,\ u=86,\ v=165$
283	$2.3.47$	-10	$z=44,\ u=161$
293	$2^2.73$	204	$f=155,\ u=100$
307	$2.3^2.17$	-10	$z'=53,\ z=-18,\ u=9$
311	$2.5.31$	-10	$u=6,\ v=-51$
313	$2^3.3.13$	10	$f'=5,\ f=25,\ z=-99,\ u=103$

p	$p-1$	g	Caractères
317	$2^2.79$	270	$f=114,\ u=100$
331	$2.3.5.11$	140	$z=-32,\ u=150,\ v=120$
337	$2^4.3.7$	10	$f''=191,\ f'=85,\ f=148,\ z=128,\ u=175$
347	2.171	-10	$u=100$
349	$2^2.3.29$	220	$f=-136,\ z=-123,\ u=-121$
353	$2^5.11$	212	$f'''=10,\ f''=100,\ f'=116,\ f=42,\ u=58$
359	2.179	-10	$u=100$
367	$2.3.61$	10	$z=-84,\ u=-75$
373	$2^2.3.31$	291	$f=-104,\ z=-89,\ u=-13$
379	$2.3^3.7$	10	$z''=24,\ z'=180,\ z=-52,\ u=119$
383	2.191	10	$u=100$
389	$2^2.97$	10	$f=115,\ u=-114$
397	$2^2.3^2.11$	28	$f=63,\ z'=-85,\ z=34,\ u=-107$
401	$2^4.5^2$	211	$f''=147,\ f'=-45,\ f=20,\ u'=224,\ u=-29$
409	$2^3.3.17$	235	$f'=31,\ f=143,\ z=53,\ u=25$
419	$2.11.19$	10	$u=152,\ v=135$
421	$2^2.3.5.7$	238	$f=29,\ z=20,\ u=-67,\ v=75$
431	$2.5.43$	-10	$u=-26,\ v=64$
433	$2^4.3^3$	10	$f''=-151,\ f'=-148,\ f=-179,$ $z''=3,\ z'=27,\ z=198$
439	$2.3.73$	-10	$z=-172,\ u=-42$
443	$2.13.17$	-10	$u=188,\ v=59$
449	$2^6.7$	3	$f^{\mathrm{IV}}=-58,\ f'''=221,\ f''=-100,$ $f'=122,\ f=67,\ u=-125$
457	$2^3.3.19$	380	$f'=207,\ f=-109,\ z=133,\ u=174$
461	$2^2.5.23$	10	$f=48,\ u=-110,\ v=196$
463	$2.3.7.11$	174	$z=21,\ u=-155,\ v=134$
467	2.233	-10	$u=100$
479	2.239	-10	$u=100$
487	2.3^5	10	$z^{\mathrm{IV}}=100,\ z'''=189,\ z''=-12,\ z'=220,\ z=232$
491	$2.5.7^2$	10	$u=-175,\ v'=-109,\ v=153$
499	$2.3.83$	10	$z=139,\ u=4$
503	2.251	10	$u=100$
509	$2^2.127$	10	$f=208,\ u=-180$
521	$2^3.5.13$	439	$f'=-206,\ f=235,\ u=25,\ v=101$

p	$p-1$	g	Caractères
523	$2.3^2.29$	-10	$z'=94,\ z=60,\ u=226$
541	$2^2.3^3.5$	10	$f=52,\ z''=76,\ z'=225,\ z=-130,\ u=140$
547	$2.3.7.13$	17	$z=40,\ u=9,\ v=-30$
557	$2^2.139$	41	$f=-118,\ u=100$
563	2.281	-10	$u=100$
569	$2^3.71$	420	$f'=76,\ f=86,\ u=-242$
571	$2.3.5.19$	10	$z=109,\ u=106,\ v=-300$
577	$2^6.3^2$	10	$f^{\mathrm{IV}}=146,\ f'''=-33,\ f''=-65,\ f'=186,\ f=-24,\ z'=321,\ z=213$
587	2.293	-10	$u=100$
593	$2^4.37$	10	$f''=-94,\ f'=-59,\ f=-77,\ u=258$
599	$2.13.23$	-10	$u=270,\ v=324$
601	$2^3.3.5^2$	506	$f'=-163,\ f=125,\ z=24,\ u'=-111,\ u=-178$
607	$2.3.101$	575	$z=210,\ u=100$
613	$2^2.3^2.17$	32	$f=-35,\ z'=160,\ z=-66,\ u=197$
617	$2^3.7.11$	410	$f'=182,\ f=423,\ u=420,\ v=342$
619	$2.3.103$	10	$z=252,\ u=315$
631	$2.3^2.5.7$	-10	$z'=-255,\ z=43,\ u=279,\ v=-204$
641	$2^7.5$	3	$f^{\mathrm{V}}=243,\ f^{\mathrm{IV}}=77,\ f'''=160,\ f''=-40,\ f'=318,\ f=-154,\ u=-284$
643	$2.3.107$	353	$z=177,\ u=100$
647	$2.17.19$	10	$u=555,\ v=287$
653	$2^2.163$	140	$f=504,\ u=100$
659	$2.7.47$	10	$u=144,\ v=185$
661	$2^2.3.5.11$	284	$f=555,\ z=364,\ u=406,\ v=68$
673	$2^5.3.7$	198	$f'''=-107,\ f''=8,\ f'=64,\ f=58,\ z=255,\ u=-23$
677	$2^2.13^2$	213	$f=-26,\ u'=100,\ u=-144$
683	$2.11.31$	-10	$u=-2,\ v=76$
691	$2.3.5.23$	521	$z=253,\ u=320,\ v=20$
701	$2^2.5^2.7$	10	$f=135,\ u'=-118,\ u=464,\ v=361$
709	$2^2.3.59$	10	$f=-96,\ z=-228,\ u=385$
719	2.359	-10	$u=100$
727	$2.3.11^2$	10	$z=-282,\ u'=375,\ u=181$
733	$2^2.3.61$	583	$f=380,\ z=-308,\ u=100$

p	$p-1$	g	Caractères
739	$2.3^2.41$	-9	$z'=317,\ z=-321,\ u=133$
743	$2.7.53$	10	$u=-151,\ v=-117$
751	$2.3.5^3$	39	$z=72,\ u''=100,\ u'=171,\ u=460$
757	$2^2.3^3.7$	2	$f=87,\ z''=228,\ z'=3,\ z=27,\ u=232$
761	$2^3.5.19$	422	$f'=62,\ f=39,\ u=168,\ v=410$
769	$2^8.3$	78	$f^{VI}=79,\ f^{V}=89,\ f^{IV}=231,\ f'''=300,\ f''=27,\ f'=-40,\ f=62,\ z=408$
773	$2^2.193$	302	$f=-317,\ u=100$
787	$2.3.131$	-10	$z=407,\ u=510$
797	$2^2.199$	623	$f=-215,\ u=100$
809	$2^3.101$	703	$f'=239,\ f=-318,\ u=100$
811	$2.3^4.5$	10	$z'''=184,\ z''=213,\ z'=-279,\ z=130,\ u=212$
821	$2^2.5.41$	10	$f=-295,\ u=161,\ v=-37$
823	$2.3.137$	10	$z=-175,\ u=55$
827	$2.7.59$	-10	$u=270,\ v=440$
829	$2^2.3^2.23$	598	$f=246,\ z'=-204,\ z=125,\ u=507$
839	2.419	-10	$u=100$
853	$2^2.3.71$	394	$f=333,\ z=220,\ u=284$
857	$2^3.107$	10	$f'=506,\ f=-207,\ u=98$
859	$2.3.11.13$	2	$z=260,\ u=-66,\ v=-86$
863	2.431	10	$u=100$
877	$2^2.3.73$	42	$f=-151,\ z=-283,\ u=220$
881	$2^4.5.11$	115	$f''=-85,\ f'=177,\ f=494,\ u=268,\ v=143$
883	$2.3^2.7^2$	-10	$z'=286,\ z=337,\ u'=126,\ u=707$
887	2.443	10	$u=100$
907	$2.3.151$	539	$z=384,\ u=100$
911	$2.5.7.13$	-10	$u=361,\ v=502,\ w=30$
919	$2.3^3.17$	-10	$z''=515,\ z'=-95,\ z=52,\ u=703$
929	$2^5.29$	224	$f'''=269,\ f''=-101,\ f'=-18,\ f=324,\ u=-361$
937	$2^3.3^2.13$	10	$f'=67,\ f=-196,\ z'=-241,\ z=322,\ u=-308$
941	$2^2.5.47$	10	$f=-97,\ u=349,\ v=248$
947	$2.11.43$	-10	$u=185,\ v=-7$
953	$2^3.7.17$	10	$f'=156,\ f=511,\ u=508,\ v=604$
967	$2.3.7.23$	526	$z=142,\ u=97,\ v=187$
971	$2.5.97$	10	$u=-239,\ v=169$

p	$p-1$	g	Caractères
977	$2^4.61$	10	$f'' = -403,\ f' = 227,\ f = -252,\ u = -353$
983	2.491	10	$u = 100$
991	$2.3^2.5.11$	-10	$z' = -70,\ z = -114,\ u = -166,\ v = -46$
997	$2^2.3.83$	656	$f = 161,\ z = 304,\ u = 100$
1009	$2^4.3^2.7$	11	$f'' = 179,\ f' = -247,\ f = 469,\ z' = -87,\ z = 374,\ u = -74$
1013	$2^2.11.23$	3	$f = -45,\ u = 122,\ v = -427$
1019	2.509	10	$u = 100$
1021	$2^2.3.5.17$	10	$f = -374,\ z = -369,\ u = -219,\ v = 81$
1031	$2.5.103$	14	$u = 264,\ v = 320$
1033	$2^3.3.43$	10	$f' = 231,\ f = -355,\ z = 195,\ u = 336$
1039	$2.3.173$	-10	$z = 140,\ u = 482$
1049	$2^3.131$	3	$f' = 461,\ f = -426,\ u = 267$
1051	$2.3.5^2.7$	10	$z = 180,\ u' = -454,\ u = -380,\ v = 402$
1061	$2^2.5.53$	3	$f = -103,\ u = -196,\ v = -58$
1063	$2.3^2.59$	10	$z' = -282,\ z = 343,\ u = 99$
1069	$2^2.3.89$	10	$f = -249,\ z = 86,\ u = 45$
1087	$2.3.181$	10	$z = 257,\ u = -40$
1091	$2.5.109$	10	$u = 93,\ v = -173$
1093	$2^2.3.7.13$	5	$f = -530,\ z = 151,\ u = 9,\ v = 124$
1097	$2^3.137$	10	$f' = -79,\ f = -341,\ u = -326$
1103	$2.19.29$	10	$u = -354,\ v = -322$
1109	$2^2.277$	10	$f = -354,\ u = 19$
1117	$2^2.3^2.31$	2	$f = 214,\ z' = 529,\ z = -121,\ u = 331$
1123	$2.3.11.17$	-10	$z = 33,\ u = -384,\ v = 36$
1129	$2^3.3.47$	11	$f' = -437,\ f = 168,\ z = 387,\ u = 338$
1151	$2.5^2.23$	-10	$u' = 470,\ u = 224,\ v = 467$
1153	$2^7.3^2$	10	$f^{V} = -359,\ f^{IV} = -255,\ f''' = 457,\ f'' = 156,\ f' = 123,\ f = 140,\ z' = -523,\ z = 502$
1163	$2.7.83$	-10	$u = 44,\ v = -118$
1171	$2.3^2.5.13$	10	$z' = -388,\ z = 750,\ u = -184,\ v = 166$
1181	$2^2.5.59$	10	$f = -243,\ u = -9,\ v = -205$
1187	2.593	-10	$u = 100$
1193	$2^3.149$	10	$f' = 362,\ f = -186,\ u = 354$
1201	$2^4.3.5^2$	11	$f'' = 473,\ f' = 343,\ f = -49,\ z = 570,\ u' = 96,\ u = -139$

p	$p-1$	g	Caractères
1213	$2^2.3.101$	2	$f=495,\ z=217,\ u=457$
1217	$2^6.19$	10	$f^{IV}=271,\ f'''=421,\ f''=-441,\ f'=-239,$ $f=-78,\ u=-549$
1223	$2.13.47$	10	$u=-554,\ v=-259$
1229	$2^2.307$	10	$f=632,\ u=168$
1231	$2.3.5.41$	3	$z=126,\ u=401,\ v=-231$
1237	$2^2.3.103$	2	$f=-546,\ z=300,\ u=385$
1249	$2^5.3.13$	7	$f'''=577,\ f''=-554,\ f'=-338,$ $f=585,\ z=-94,\ u=994$
1259	$2.17.37$	10	$u=594,\ v=-583$
1277	$2^2.11.29$	2	$f=113,\ u=135,\ v=-313$
1279	$2.3^2.71$	-10	$z'=392,\ z=504,\ u=-641$
1283	2.641	-10	$u=100$
1289	$2^3.7.23$	6	$f'=497,\ f=810,\ u=-204,\ v=-373$
1291	$2.3.5.43$	10	$z=346,\ u=-228,\ v=-299$
1297	$2^4.3^4$	10	$f''=355,\ f'=216,\ f=-36,\ z'''=9,$ $z''=729,\ z'=104,\ z=365$
1301	$2^2.5^2.13$	10	$f=51,\ u'=468,\ u=549,\ v=305$
1303	$2.3.7.31$	10	$z=-96,\ u=98,\ v=140$
1307	2.653	-10	$u=100$
1319	2.659	-10	$u=100$
1321	$2^3.3.5.11$	13	$f'=371,\ f=257,\ z=297,\ u=133,\ v=-396$
1327	$2.3.13.17$	10	$z=347,\ u=601,\ v=-506$
1361	$2^4.5.17$	3	$f''=574,\ f'=114,\ f=-614,\ u=211,\ v=260$
1367	2.683	10	$u=100$
1373	$2^2.7^3$	2	$f=668,\ u''=16,\ u'=226,\ u=333$
1381	$2^2.3.5.23$	10	$f=-366,\ z=-355,\ u=670,\ v=20$
1399	$2.3.233$	-10	$z=-391,\ u=-285$
1409	$2^7.11$	3	$f^{V}=-387,\ f^{IV}=415,\ f'''=327,\ f''=-155,$ $f'=72,\ f=-452,\ u=-417$
1423	$2.3^2.79$	3	$z'=-17,\ z=-644,\ u=201$
1427	$2.23.31$	-10	$u=459,\ v=-118$
1429	$2^2.3.7.17$	10	$f=-620,\ z=-665,\ u=-64,\ v=-324$
1433	$2^3.179$	10	$f'=-507,\ f=542,\ u=961$
1439	2.719	-10	$u=100$

p	$p-1$	g	Caractères
1447	$2.3.241$	10	$z=-705,\ u=123$
1451	$2.5^2.29$	2	$u'=321,\ u=712,\ v=347$
1453	$2^2.3.11^2$	2	$f=497,\ z=-694,\ u'=-263,\ u=131$
1459	2.3^6	3	$z^{V}=9,\ z^{IV}=-730,\ z'''=547,\ z''=-379,$ $z'=-272,\ z=339$
1471	$2.3.5.7^2$	-10	$z=-252,\ u=554,\ v'=-470,\ v=-208$
1481	$2^3.5.37$	3	$f'=-655,\ f=-465,\ u=-98,\ v=-264$
1483	$2.3.13.19$	2	$z=-39,\ u=191,\ v=-46$
1487	2.743	10	$u=100$
1489	$2^4.3.31$	14	$f''=-189,\ f'=-15,\ f=225,\ z=483,\ u=132$
1493	$2^2.373$	2	$f=432,\ u=16$
1499	$2.7.107$	2	$u=-252,\ v=-105$
1511	$2.5.151$	-10	$u=534,\ v=-474$
1523	2.761	-10	$u=100$
1531	$2.3^2.5.17$	10	$z'=276,\ z=-647,\ u=102,\ v=-525$
1543	$2.3.257$	10	$z=681,\ u=136$
1549	$2^2.3^2.43$	10	$f=-88,\ z'=635,\ z=-276,\ u=507$
1553	$2^4.97$	10	$f''=251,\ f'=-672,\ f=-339,\ u=-388$
1559	$2.19.41$	-10	$u=-531,\ v=-102$
1567	$2.3^3.29$	10	$z''=-382,\ z'=-77,\ z=-536,\ u=775$
1571	$2.5.157$	10	$u=382,\ v=588$
1579	$2.3.263$	10	$z=-640,\ u=493$
1583	$2.7.113$	10	$u=274,\ v=-688$
1597	$2^2.3.7.19$	11	$f=610,\ z=222,\ u=-447,\ v=-414$
1601	$2^6.5^2$	3	$f^{IV}=-773,\ f'''=356,\ f''=257,\ f'=408,$ $f=-40,\ u'=-182,\ u=442$
1607	$2.11.73$	10	$u=-605,\ v=82$
1609	$2^3.3.67$	7	$f'=630,\ f=-523,\ z=250,\ u=-468$
1613	$2^2.13.31$	3	$f=127,\ u=775,\ v=-695$
1619	2.809	10	$u=100$
1621	$2^2.3^4.5$	10	$f=166,\ z'''=135,\ z''=-303,\ z'=-146,$ $z=184,\ u=-407$
1627	$2.3.271$	3	$z=-265,\ u=729$
1637	$2^2.409$	2	$f=316,\ u=16$
1657	$2^3.3^2.23$	15	$f'=239,\ f=783,\ z'=-12,\ z=-71,\ u=-4$

p	$p-1$	g	Caractères
1663	$2 \cdot 3 \cdot 277$	10	$z = -319,\ u = 537$
1667	$2 \cdot 7^2 \cdot 17$	-10	$u' = 595,\ u = 176,\ v = -544$
1669	$2^2 \cdot 3 \cdot 139$	2	$f = -220,\ z = 248,\ u = 758$
1693	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 47$	2	$f = 92,\ z' = 356,\ z = -434,\ u = 642$
1697	$2^5 \cdot 53$	10	$f''' = -283,\ f'' = 330,\ f' = 292,\ f = 414,\ u = 629$
1699	$2 \cdot 3 \cdot 283$	3	$z = 397,\ u = 729$
1709	$2^2 \cdot 7 \cdot 61$	10	$f = -390,\ u = 223,\ v = 305$
1721	$2^3 \cdot 5 \cdot 43$	3	$f' = -232,\ f = 473,\ u = 399,\ v = -328$
1723	$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 41$	3	$z = -42,\ u = 555,\ v = -261$
1733	$2^2 \cdot 433$	2	$f = -410,\ u = 16$
1741	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29$	10	$f = 59,\ z = -357,\ u = -277,\ v = -20$
1747	$2 \cdot 3^2 \cdot 97$	2	$z' = 472,\ z = 371,\ u = 94$
1753	$2^3 \cdot 3 \cdot 73$	7	$f' = 489,\ f = 713,\ z = -183,\ u = 348$
1759	$2 \cdot 3 \cdot 293$	-10	$z = -509,\ u = -871$
1777	$2^4 \cdot 3 \cdot 37$	10	$f'' = 865,\ f' = 108,\ f = -775,\ z = 629,\ u = -32$
1783	$2 \cdot 3^4 \cdot 11$	10	$z''' = 855,\ z'' = -709,\ z' = -525,$
			$z = -194,\ u = 367$
1787	$2 \cdot 19 \cdot 47$	-10	$u = 109,\ v = 90$
1789	$2^2 \cdot 3 \cdot 149$	10	$f = -724,\ z = -153,\ u = 812$
1801	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	11	$f' = 524,\ f = 824,\ z' = 144,\ z = \quad 74,$
			$u' = 256,\ u = 350$
1811	$2 \cdot 5 \cdot 181$	10	$u = -771,\ v = 279$
1823	$2 \cdot 911$	10	$u = 100$
1831	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 61$	7	$z = -673,\ u = 481,\ v = -588$
1847	$2 \cdot 13 \cdot 71$	10	$u = -459,\ v = 921$
1861	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31$	10	$f = 61,\ z = -455,\ u = 758,\ v = -87$
1867	$2 \cdot 3 \cdot 311$	-10	$z = 834,\ u = -712$
1871	$2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17$	-10	$u = 267,\ v = -323,\ w = 3$
1873	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 13$	10	$f'' = -780,\ f' = -325,\ f = 737,$
			$z' = -763,\ z = 114,\ u = 917$
1877	$2^2 \cdot 7 \cdot 67$	2	$f = 137,\ u = -747,\ v = 55$
1879	$2 \cdot 3 \cdot 313$	-2	$z = -489,\ u = 64$
1889	$2^5 \cdot 59$	3	$f''' = -433,\ f'' = 478,\ f' = -85,$
			$f = -331,\ u = -170$
1901	$2^2 \cdot 5^2 \cdot 19$	2	$f = 218,\ u' = 155,\ u = -775,\ v = -668$

p	$p-1$	g	Caractères
1907	2.953	-10	$u=100$
1913	$2^3.239$	10	$f'=-922,\ f=712,\ u=-162$
1931	$2.5.193$	2	$u=-114,\ v=-907$
1933	$2^2.3.7.23$	5	$f=-598,\ z=-592,\ u=-121,\ v=325$
1949	$2^2.487$	10	$f=589,\ u=255$
1951	$2.3.5^2.13$	3	$z=76,\ u'=564,\ u=955,\ v=340$
1973	$2^2.17.29$	2	$f=259,\ u=-25,\ v=224$
1979	$2.23.43$	10	$u=-935,\ v=-928$
1987	$2.3.331$	2	$z=647,\ u=64$
1993	$2^3.3.83$	5	$f'=960,\ f=834,\ z=-313,\ u=-27$
1997	$2^2.499$	2	$f=-412,\ u=16$
1999	$2.3^3.37$	-10	$z''=920,\ z'=-461,\ z=808,\ u=189$
2003	$2.7.11.13$	-10	$u=874,\ v=-882,\ w=-443$
2011	$2.3.5.67$	3	$z=205,\ u=-683,\ v=-895$
2017	$2^5.3^2.7$	10	$f'''=593,\ f''=691,\ f'=-548,\ f=-229,$ $z'=-84,\ z=294,\ u=79$
2027	2.1013	-10	$u=100$
2029	$2^2.3.13^2$	10	$f=-992,\ z=-976,\ u'=962,\ u=306$
2039	2.1019	-10	$u=100$
2053	$2^2.3^3.19$	2	$f=244,\ z''=971,\ z'=215,\ z=-198,\ u=-124$
2063	2.1031	10	$u=100$
2069	$2^2.11.47$	10	$f=-164,\ u=647,\ v=-331$
2081	$2^5.5.13$	3	$f'''=888,\ f''=-155,\ f'=-947,\ f=-102,$ $u=844,\ v=-237$
2083	$2.3.347$	-10	$z=-450,\ u=160$
2087	$2.7.149$	5	$u=142,\ v=645$
2089	$2^3.3^2.29$	7	$f'=572,\ f=-789,\ z'=918,\ z=-827,\ u=914$
2099	2.1049	10	$u=100$
2111	$2.5.211$	-10	$u=-325,\ v=899$
2113	$2^6.3.11$	10	$f^{IV}=-276,\ f'''=108,\ f''=-1014,\ f'=-835,$ $f=-65,\ z=-439,\ u=16$
2129	$2^4.7.19$	3	$f''=-588,\ f'=846,\ f=372,\ u=-340,\ v=947$
2131	$2.3.5.71$	2	$z=468,\ u=-397,\ v=-884$
2137	$2^3.3.89$	10	$f'=-629,\ f=296,\ z=-202,\ u=200$
2141	$2^2.5.107$	10	$f=-419,\ u=997,\ v=515$

p	$p-1$	g	Caractères
2143	$2.3^2.7.17$	10	$z'=839,\ z=349,\ u=154,\ v=512$
2153	$2^3.269$	10	$f'=-1059,\ f=-232,\ u=-391$
2161	$2^4.3^3.5$	23	$f''=-954,\ f'=335,\ f=-147,\ z''=-96,$ $z'=-887,\ z=593,\ u=953$
2179	$2.3^2.11^2$	10	$z'=876,\ z=-124,\ u'=-496,\ u=-648$
2203	$2.3.367$	-10	$z=285,\ u=-162$
2207	2.1103	10	$u=100$
2213	$2^2.7.79$	2	$f=-1083,\ u=524,\ v=769$
2221	$2^2.3.5.37$	10	$f=-790,\ z=543,\ u=71,\ v=484$
2237	$2^2.13.43$	2	$f=1021,\ u=214,\ v=-253$
2239	$2.3.373$	-10	$z=-296,\ u=-833$
2243	$2.19.59$	-10	$u=433,\ v=-123$
2251	$2.3^2.5^3$	10	$z'=838,\ z=-709,\ u''=9,\ u'=523,\ u=361$
2267	$2.11.103$	-10	$u=-140,\ v=-945$
2269	$2^2.3^4.7$	10	$f=-982,\ z'''=999,\ z''=-139,$ $z'=877,\ z=82,\ u=729$
2273	$2^5.71$	10	$f'''=75,\ f''=1079,\ f'=465,\ f=290,\ u=-1064$
2281	$2^3.3.5.19$	7	$f'=1074,\ f=-710,\ z=663,\ u=633,\ v=518$
2287	$2.3^2.127$	-11	$z'=632,\ z=-805,\ u=335$
2293	$2^2.3.191$	2	$f=-600,\ z=-990,\ u=-490$
2297	$2^3.7.41$	10	$f'=-890,\ f=-365,\ u=-1058,\ v=988$
2309	$2^2.577$	10	$f=-688,\ u=764$
2311	$2.3.5.7.11$	3	$z=-883,\ u=585,\ v=850,\ w=-808$
2333	$2^2.11.53$	2	$f=-108,\ u=919,\ v=593$
2339	$2.7.167$	10	$u=1065,\ v=-498$
2341	$2^2.3^2.5.13$	10	$f=153,\ z'=132,\ z=1106,\ u=735,\ v=500$
2347	$2.3.17.23$	-10	$z=-1063,\ u=-855,\ v=-201$
2351	$2.5^2.47$	-10	$u'=-746,\ u=531,\ v=627$
2357	$2^2.19.31$	2	$f=633,\ u=-475,\ v=-793$
2371	$2.3.5.79$	10	$z=-465,\ u=971,\ v=83$
2377	$2^3.3^3.11$	5	$f'=-580,\ f=-1134,\ z''=576,\ z'=-693,$ $z=721,\ u=-144$
2381	$2^2.5.7.17$	3	$f=-69,\ u=-1034,\ v=-437,\ w=949$
2383	$2.3.397$	10	$z=-1104,\ u=-860$
2389	$2^2.3.199$	10	$f=285,\ z=689,\ u=202$

p	$p-1$	g	Caractères
2393	$2^3 . 13 . 23$	3	$f'=58,\ f=971,\ u=135,\ v=-87$
2399	$2 . 11 . 109$	-10	$u=551,\ v=1225$
2411	$2 . 5 . 241$	10	$u=-371,\ v=-1027$
2417	$2^4 . 151$	10	$f''=1055,\ f'=1205,\ f=-592,\ u=-696$
2423	$2 . 7 . 173$	10	$u=155,\ v=305$
2437	$2^2 . 3 . 7 . 29$	2	$f=-398,\ z=-86,\ u=801,\ v=433$
2441	$2^3 . 5 . 61$	6	$f'=1122,\ f=-672,\ u=590,\ v=739$
2447	$2 . 1223$	10	$u=100$
2459	$2 . 1229$	10	$u=100$
2467	$2 . 3^2 . 137$	3	$z'=-411,\ z=-217,\ u=342$
2473	$2^3 . 3 . 103$	10	$f'=-978,\ f=-567,\ z=1015,\ u=-512$
2477	$2^2 . 619$	2	$f=915,\ u=16$
2503	$2 . 3^2 . 139$	3	$z'=-331,\ z=-1227,\ u=-1360$
2521	$2^3 . 3^2 . 5 . 7$	17	$f'=-1205,\ f=-71,\ z'=1081,\ z=-676,$ $u=-461,\ v=-499$
2531	$2 . 5 . 11 . 23$	2	$u=232,\ v=1055,\ w=217$
2539	$2 . 3^3 . 47$	10	$z''=-118,\ z'=-299,\ z=-307,\ u=-780$
2543	$2 . 31 . 41$	10	$u=-799,\ v=-40$
2549	$2^2 . 7^2 . 13$	10	$f=-357,\ u'=-629,\ u=-658,\ v=400$
2551	$2 . 3 . 5^2 . 17$	-2	$z=-51,\ u'=17,\ u=-1050,\ v=-462$
2557	$2^2 . 3^2 . 71$	2	$f=-611,\ z'=821,\ z=-836,\ u=-544$
2579	$2 . 1289$	10	$u=100$
2591	$2 . 5 . 7 . 37$	7	$u=670,\ v=-741,\ w=-187$
2593	$2^5 . 3^4$	10	$f'''=-5,\ f''=25,\ f'=625,\ f=-918,$ $z'''=-114,\ z''=-941,\ z'=-408,\ z=1137$
2609	$2^4 . 163$	3	$f''=-743,\ f'=-1059,\ f=-389,\ u=830$
2617	$2^3 . 3 . 109$	10	$f'=99,\ f=-667,\ z=1064,\ u=-583$
2621	$2^2 . 5 . 131$	10	$f=472,\ u=-761,\ v=-864$
2633	$2^3 . 7 . 47$	10	$f'=885,\ f=1224,\ u=-660,\ v=86$
2647	$2 . 3^3 . 7^2$	-2	$z''=-495,\ z'=812,\ z=-186,$ $u'=-824,\ u=391$
2657	$2^5 . 83$	10	$f'''=13,\ f''=169,\ f'=-666,\ f=-163,\ u=1024$
2659	$2 . 3 . 443$	2	$z=903,\ u=64$
2663	$2 . 11^3$	-2	$u''=4,\ u'=79,\ u=-142$
2671	$2 . 3 . 5 . 89$	-10	$z=-545,\ u=-96,\ v=968$

p	$p-1$	g	Caractères
2677	$2^2 . 3 . 223$	2	$f=550,\ z=-1034,\ u=-1258$
2683	$2 . 3^2 . 149$	2	$z'=-779,\ z=-637,\ u=-790$
2687	$2 . 17 . 19$	10	$u=612,\ v=168$
2689	$2^7 . 3 . 7$	19	$f^{V}=-362,\ f^{IV}=-717,\ f'''=490,\ f''=779,$ $f'=-873,\ f=1142,\ z=391,\ u=749$
2693	$2^2 . 673$	2	$f=-859,\ u=16$
2699	$2 . 19 . 71$	2	$u=944,\ v=896$
2707	$2 . 3 . 11 . 41$	-10	$z=1327,\ u=-704,\ v=135$
2711	$2 . 5 . 271$	-10	$u=324,\ v=-636$
2713	$2^3 . 3 . 113$	10	$f'=1040,\ f=-887,\ z=1211,\ u=-1218$
2719	$2 . 3^2 . 151$	-10	$z'=-59,\ z=1265,\ u=1326$
2729	$2^3 . 11 . 31$	7	$f'=-66,\ f=-1102,\ u=-239,\ v=-13$
2731	$2 . 3 . 5 . 7 . 13$	10	$z=-447,\ u=1233,\ v=-63,\ w=1365$
2741	$2^2 . 5 . 137$	10	$f=-656,\ u=-966,\ v=-307$
2749	$2^2 . 3 . 229$	6	$f=640,\ z=-596,\ u=431$
2753	$2^6 . 43$	10	$f^{IV}=-488,\ f'''=-1367,\ f''=-598,$ $f'=-286,\ f=-794,\ u=828$
2767	$2 . 3 . 461$	10	$z=-329,\ u=1113$
2777	$2^3 . 347$	10	$f'=-224,\ f=190,\ u=230$
2789	$2^2 . 17 . 41$	10	$f=167,\ u=-132,\ v=-354$
2791	$2 . 3^2 . 5 . 31$	6	$z'=-1195,\ z=91,\ u=800,\ v=-1164$
2797	$2^2 . 3 . 233$	2	$f=-603,\ z=-1101,\ u=1299$
2801	$2^4 . 5^2 . 7$	3	$f''=24,\ f'=576,\ f=1258,\ u'=-1314,$ $u=-400,\ v=-930$
2803	$2 . 3 . 467$	-10	$z=-414,\ u=-671$
2819	$2 . 1409$	10	$u=100$
2833	$2^4 . 3 . 59$	10	$f''=-423,\ f'=450,\ f=1357,\ z=-1301,$ $u=664$
2837	$2^2 . 709$	2	$f=416,\ u=16$
2843	$2 . 7^2 . 29$	-10	$u'=-1018,\ u=1275,\ v=-857$
2851	$2 . 3 . 5^2 . 19$	2	$z=1014,\ u'=1107,\ u=-107,\ v=-27$
2857	$2^3 . 3 . 7 . 17$	11	$f'=1133, f=896, z=-351, u=-678, v=1275$
2861	$2^2 . 5 . 11 . 13$	10	$f=1202,\ u=633,\ u=-669,\ w=559$
2879	$2 . 1439$	-10	$u=100$
2887	$2 . 3 . 13 . 37$	10	$z=-699,\ u=1390,\ v=-707$

p	$p-1$	g	Caractères
2897	$2^4 . 181$	10	$f'' = 286,\ f' = 680,\ f = -1120,\ u = -485$
2903	$2 . 1451$	10	$u = 100$
2909	$2^2 . 727$	10	$f = 878,\ u = 1273$
2917	$2^2 . 3^6$	6	$f = 54,\ z^{V} = 1296,\ z^{IV} = 256,\ z''' = -1368,$ $z'' = -65,\ z' = -427,\ z = 247$
2927	$2 . 7 . 11 . 19$	10	$u = -419,\ v = 119,\ w = -1090$
2939	$2 . 13 . 113$	10	$u = -1386,\ v = -950$
2953	$2^3 . 3^2 . 41$	13	$f' = 456,\ f = 1226,\ z' = -407,\ z = 800$
2957	$2^2 . 739$	2	$f = 1222,\ u = 16$
2963	$2 . 1481$	-10	$u = 100$
2969	$2^3 . 7 . 53$	3	$f' = -544,\ f = -964,\ u = 529,\ v = 1038$
2971	$2 . 3^3 . 5 . 11$	10	$z'' = 1379,\ z' = 876,\ z = -55,\ u = -748,\ v = 1414$
2999	$2 . 1499$	-10	$u = 100$
3001	$2^3 . 3 . 5^3$	14	$f' = -1338,\ f = -1353,\ z = 934,\ u'' = 264,$ $u' = 1412,\ u = -1003$
3011	$2 . 5 . 7 . 43$	10	$u = -1113,\ v = 561,\ w = 1471$
3019	$2 . 3 . 503$	10	$z = -240,\ u = 711$
3023	$2 . 1511$	10	$u = 100$
3037	$2^2 . 3 . 11 . 23$	2	$f = 281,\ z = -746,\ u = -148,\ v = -126$
3041	$2^5 . 5 . 19$	3	$f''' = -1161,\ f'' = 758,\ f' = -185,$ $f = 774,\ u = 1046,\ v = 1058$
3049	$2^3 . 3 . 127$	11	$f' = 1046,\ f = -475,\ z = -533,\ u = -8$
3061	$2^2 . 3^2 . 5 . 17$	13	$f = -501,\ z' = -1406,\ z = -562,$ $u = -472,\ v = -125$
3067	$2 . 3 . 7 . 73$	-10	$z = 973,\ u = 1495,\ v = 347$
3079	$2 . 3^4 . 19$	-2	$z''' = 283,\ z'' = 668,\ z' = -358,\ z = 546,\ u = 1247$
3083	$2 . 23 . 67$	-10	$u = 773,\ v = 254$
3089	$2^4 . 193$	3	$f'' = 709,\ f' = -826,\ f = -393,\ u = 1506$
3109	$2^2 . 3 . 7 . 37$	11	$f = 727,\ z = 1085,\ u = 766,\ v = 860$
3119	$2 . 1559$	-10	$u = 100$
3121	$2^4 . 3 . 5 . 13$	7	$f'' = 436,\ f' = -285,\ f = 79,\ z = -1122,$ $u = -958,\ v = 829$
3137	$2^6 . 7^2$	10	$f^{IV} = 507,\ f''' = -185,\ f'' = -282,\ f' = 1099,$ $f = 56,\ u' = -161,\ u = -1548$
3163	$2 . 3 . 17 . 31$	5	$z = -537,\ u = 985,\ v = -109$

p	$p-1$	g	Caractères
3167	$2 . 1583$	10	$u=100$
3169	$2^5 . 3^2 . 11$	7	$f'''=233,\ f''=416,\ f'=-1239,\ f=1325,$ $z'=1562,\ z=97,\ u=-1383$
3181	$2^2 . 3 . 5 . 53$	7	$f=-282,\ z=440,\ u=425,\ v=-901$
3187	$2 . 3^3 . 59$	2	$z''=781,\ z'=-471,\ z=-1316,\ u=-811$
3191	$2 . 5 . 11 . 29$	11	$u=1330,\ v=1024,\ w=1079$
3203	$2 . 1601$	-10	$u=100$
3209	$2^3 . 401$	3	$f'=22,\ f=484,\ u=143$
3217	$2^4 . 3 . 67$	5	$f''=279,\ f'=633,\ f=-1436,\ z=-205,\ u=815$
3221	$2^2 . 5 . 7 . 23$	10	$f=234,\ u=-1464,\ v=1106,\ w=763$
3229	$2^2 . 3 . 269$	6	$f=-839,\ z=914,\ u=421$
3251	$2 . 5^3 . 13$	6	$u''=670,\ u'=-417,\ u=-1237,\ v=1252$
3253	$2^2 . 3 . 271$	2	$f=-1598,\ z=-1440,\ u=843$
3257	$2^3 . 11 . 37$	10	$f'=904,\ f=-291,\ u=-164,\ v=-465$
3259	$2 . 3^2 . 181$	10	$z'=-231,\ z=-853,\ u=-1622$
3271	$2 . 3 . 5 . 109$	3	$z=-843,\ u=1096,\ v=-1148$
3299	$2 . 17 . 97$	10	$u=-1585,\ v=911$
3301	$2^2 . 3 . 5^2 . 11$	10	$f=1212,\ z=-1575,\ u'=94,\ u=454,\ v=-1550$
3307	$2 . 3 . 19 . 29$	2	$z=57,\ u=-237,\ v=265$
3313	$2^4 . 3^2 . 23$	10	$f''=-536,\ f'=-935,\ f=-407,$ $z'=-1001,\ z=1123,\ u=98$
3319	$2 . 3 . 7 . 79$	6	$z=1527,\ u=21,\ v=1306$
3323	$2 . 11 . 151$	2	$u=73,\ v=678$
3329	$2^8 . 13$	3	$f^{VI}=-268,\ f^{V}=-1414,\ f^{IV}=-1333,$ $f'''=-797,\ f''=-630,\ f'=749,$ $f=-1600,\ u=-359$
3331	$2 . 3^2 . 5 . 37$	10	$z'=-548,\ z=1463,\ u=1177,\ v=491$
3343	$2 . 3 . 557$	10	$z=-1425,\ u=443$
3347	$2 . 7 . 239$	2	$u=-899,\ v=-351$
3359	$2 . 23 . 73$	-10	$u=-1138,\ v=1491$
3361	$2^5 . 3 . 5 . 7$	22	$f'''=1630,\ f''=1710,\ f'=30,\ f=900,$ $z=-893,\ u=200,\ v=844$
3371	$2 . 5 . 337$	10	$u=-1303,\ v=-709$
3373	$2^2 . 3 . 281$	5	$f=1105,\ z=-655,\ u=-488$
3389	$2^2 . 7 . 11^2$	10	$f=1344,\ u=883,\ v'=-1339,\ v=-495$

p	$p-1$	g	Caractères
3391	$2.3.5.113$	-10	$z=555,\ u=926,\ v=-449$
3407	$2.13.131$	10	$u=-540,\ v=572$
3413	$2^2.853$	2	$f=-1471,\ u=16$
3433	$2^3.3.11.13$	10	$f'=-1338,\ f=1651,\ z=-269,$ $u=-1521,\ v=6$
3449	$2^3.431$	3	$f'=953,\ f=1122,\ u=-337$
3457	$2^7.3^3$	7	$f^{V}=540,\ f^{IV}=1212,\ f'''=-281,\ f''=-550,$ $f'=-1716,\ f=-708,\ z''=392,\ z'=1520,$ $z=722$
3461	$2^2.5.173$	10	$f=-1453,\ u=1292,\ v=-1120$
3463	$2.3.577$	10	$z=367,\ u=-807$
3467	2.1733	-10	$u=100$
3469	$2^2.3.17^2$	10	$f=1003,\ z=1683,\ u'=872,\ u=-1249$
3491	$2.5.349$	6	$u=1469,\ v=-1435$
3499	$2.3.11.53$	2	$z=156,\ u=223,\ v=-1704$
3511	$2.3^3.5.13$	-10	$z''=-638,\ z'=554,\ z=756,\ u=-1711,$ $v=-1556$
3517	$2^2.3.293$	2	$f=-596,\ z=258,\ u=579$
3527	$2.41.43$	10	$u=234,\ v=-826$
3529	$2^3.3^2.7^2$	17	$f'=1396,\ f=808,\ z'=-1042,\ z=-449,$ $u'=-1050,\ u=-1482$
3533	$2^2.883$	2	$f=548,\ u=16$
3539	$2.29.61$	10	$u=-1606,\ v=-450$
3541	$2^2.3.5.59$	7	$f=852,\ z=59,\ u=-1381,\ v=-42$
3547	$2.3^2.197$	-10	$z'=1177,\ z=1162,\ u=76$
3557	$2^2.7.127$	2	$f=-943,\ u=-1583,\ v=-663$
3559	$2.3.593$	-10	$z=-1436,\ u=-79$
3571	$2.3.5.7.17$	10	$z=103,\ u=-443,\ v=65,\ w=1105$
3581	$2^2.5.79$	10	$f=364,\ u=-1362,\ v=-1356$
3583	$2.3^2.199$	3	$z'=95,\ z=1038,\ u=1448$
3593	$2^3.449$	10	$f'=-799,\ f=-1153,\ u=-376$
3607	$2.3.601$	10	$z=1399,\ u=861$
3613	$2^2.3.7.43$	2	$f=85,\ z=-1676,\ u=268,\ v=-679$
3617	$2^5.113$	10	$f'''=793,\ f''=-509,\ f'=-1343,$ $f=-1234,\ u=-1048$

p	$p-1$	g	Caractères
3623	$2 \cdot 1811$	10	$u = 100$
3631	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2$	-10	$z = -336,\ u = -1529,\ v' = -403,\ v = -1662$
3637	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 101$	2	$f = 1027,\ z' = 961,\ z = -696,\ u = -1614$
3643	$2 \cdot 3 \cdot 607$	-10	$z = -423,\ u = 1818$
3659	$2 \cdot 31 \cdot 59$	10	$u = -1818,\ v = 564$
3671	$2 \cdot 5 \cdot 367$	13	$u = 846,\ v = 830$
3673	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 17$	10	$f' = 1010,\ f = -994,\ z'' = 1587,\ z' = -616,$ $z = 1151,\ u = -763$
3677	$2^2 \cdot 919$	2	$f = 1309,\ u = 16$
3691	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 41$	2	$z' = -47,\ z = -475,\ u = 643,\ v = 1752$
3697	$2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$	5	$f'' = -643,\ f' = -615,\ f = 1131,\ z = 519,$ $u = -1400,\ v = -1446$
3701	$2^2 \cdot 5^2 \cdot 37$	10	$f = 1279,\ u' = -781,\ u = 391,\ v = 1380$
3709	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 103$	10	$f = 1609,\ z' = -541,\ z = 498,\ u = 239$
3719	$2 \cdot 11 \cdot 13^2$	-10	$u = 768,\ v' = 1317,\ v = 2250$
3727	$2 \cdot 3^4 \cdot 23$	10	$z''' = 832,\ z'' = 785,\ z' = 1841,\ z = 1188,\ u = 1614$
3733	$2^2 \cdot 3 \cdot 311$	2	$f = -851,\ z = 948,\ u = 363$
3739	$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 89$	7	$z = -695,\ u = 929,\ v = 357$
3761	$2^4 \cdot 5 \cdot 47$	3	$f'' = -693,\ f' = -1159,\ f = 604,$ $u = -806,\ v = -1071$
3767	$2 \cdot 7 \cdot 269$	10	$u = 743,\ v = 822$
3769	$2^3 \cdot 3 \cdot 157$	7	$f' = 409,\ f = 1445,\ z = -464,\ u = -251$
3779	$2 \cdot 1889$	10	$u = 100$
3793	$2^4 \cdot 3 \cdot 79$	7	$f'' = 141,\ f' = 916,\ f = 803,\ z = 1068,\ u = -1167$
3797	$2^2 \cdot 13 \cdot 73$	2	$f = -742,\ u = -827,\ v = -232$
3803	$2 \cdot 1901$	-10	$u = 100$
3821	$2^2 \cdot 5 \cdot 191$	10	$f = 376,\ u = 1421,\ v = -1619$
3823	$2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 13$	3	$z = -1185,\ u' = 1551,\ u = 1123,\ v = -348$
3833	$2^3 \cdot 479$	10	$f' = 19,\ f = 361,\ u = 863$
3847	$2 \cdot 3 \cdot 641$	10	$z = 1892,\ u = -220$
3851	$2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$	2	$u' = 518,\ u = -1042,\ v = 1192,\ w = 9$
3853	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 107$	2	$f = 1305,\ z' = -501,\ z = -1140,\ u = 335$
3863	$2 \cdot 1931$	10	$u = 100$
3877	$2^2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19$	2	$f = -502,\ z = 224,\ u = 1039,\ v = -1038$
3881	$2^3 \cdot 5 \cdot 97$	13	$f' = 1581,\ f = 197,\ u = 1107,\ v = 18$

p	$p-1$	g	Caractères
3889	$2^4 . 3^5$	11	$f'' = 1925,\ f' = -592,\ f = 454,\ z^{IV} = 1955,$ $z''' = -1273,\ z'' = -1700,\ z' = 923,\ z = 1890$
3907	$2 . 3^2 . 7 . 31$	2	$z' = -978,\ z = -63,\ u = 739,\ v = -802$
3911	$2 . 5 . 17 . 23$	-10	$u = 1190,\ v = 841,\ w = 1415$
3917	$2^2 . 11 . 89$	2	$f = -835,\ u = -1267,\ v = -1496$
3919	$2 . 3 . 653$	3	$z = -1170,\ u = 729$
3923	$2 . 37 . 53$	-10	$u = 1240,\ v = 344$
3929	$2^3 . 491$	3	$f' = -1643,\ f = 226,\ u = -1297$
3931	$2 . 3 . 5 . 131$	2	$z = -618,\ u = 1547,\ v = 967$
3943	$2 . 3^3 . 73$	10	$z'' = 334,\ z' = -1646,\ z = -1136,\ u = 64$
3947	$2 . 1973$	-10	$u = 100$
3967	$2 . 3 . 661$	10	$z = 888,\ u = 316$
3989	$2^2 . 997$	10	$f = -481,\ u = -1967$

Table des racines primitives et des caractères, qui s'y rapportent pour les nombres premiers entre 4000 et 5000.

p	$p-1$	g	Caractères
4001	$2^5 . 5^3$	3	$f''' = -662,\ f'' = -1866,\ f' = 1086,\ f = -899,$ $u'' = 1444,\ u' = 395,\ u = 1401$
4003	$2 . 3 . 23 . 29$	2	$z = 822,\ u = -938,\ v = -224$
4007	$2 . 2003$	10	$u = 100$
4013	$2^2 . 17 . 59$	2	$f = -1230,\ u = -10,\ v = -547$
4019	$2 . 7^2 . 41$	10	$u' = 27,\ u = 1428,\ v = -112$

p	$p-1$	g	Caractères
4021	$2^2.3.5.67$	2	$f=-723,\ z=-1813,\ u=-1313,\ v=1452$
4027	$2.3.11.61$	-10	$z=1820,\ u=-1724,\ v=224$
4049	$2^4.11.23$	3	$f''=1881,\ f'=-665,\ f=884,\ u=920,\ v=-596$
4051	$2.3^4.5^2$	10	$z'''=-43,\ z''=1513,\ z'=870,\ z=797,\ u'=2003,\ u=-32$
4057	$2^3.3.13^2$	10	$f'=-315,\ f=-2200,\ z=-1409,\ u'=-1878,\ u=751$
4073	$2^3.509$	10	$f'=-1149,\ f=549,\ u=-296$
4079	2.2039	11	$u=121$
4091	$2.5.409$	10	$u=641,\ v=510$
4093	$2^2.3.11.31$	2	$f=1059,\ z=902,\ u=100,\ v=1148$
4099	$2.3.683$	10	$z=-2018,\ u=-156$
4111	$2.3.5.137$	-10	$z=1055,\ u=1504,\ v=887$
4127	2.2063	10	$u=100$
4129	$2^5.3.43$	13	$f'''=1392,\ f''=1163,\ f'=-1743,\ f=-895,\ z=-1980,\ u=898$
4133	$2^2.1033$	2	$f=-733,\ u=16$
4139	2.2069	10	$u=100$
4153	$2^3.3.173$	10	$f'=599,\ f=1643,\ z=-171,\ u=1824$
4157	$2^2.1039$	2	$f=1761,\ u=16$
4159	$2.3^3.7.11$	3	$z''=321,\ z'=366,\ z=1604,\ u=970,\ v=2045$
4177	$2^4.3^2.29$	10	$f''=236,\ f'=1395,\ f=-457,\ z'=678,\ z=-1103,\ u=658$
4201	$2^3.3.5^2.7$	11	$f'=1649,\ f=1154,\ z=-1125,\ u'=943,\ u=353,\ v=-1076$
4211	$2.5.421$	10	$u=872,\ v=-663$
4217	$2^3.17.31$	10	$f'=-1551,\ f=1911,\ u=-1700,\ v=792$
4219	$2.3.19.37$	10	$z=112,\ u=1516,\ v=-214$
4229	$2^2.7.151$	10	$f=-2082,\ u=1595,\ v=1540$
4231	$2.3^2.5.47$	-10	$z'=1078,\ z=-621,\ u=280,\ v=1756,$
4241	$2^4.5.53$	3	$f''=-783,\ f'=-1856,\ f=1044,\ u=1395,\ v=808$
4243	$2.3.7.101$	2	$z=298,\ u=1860,\ v=1630$

p	$p-1$	g	Caractères
4253	$2^2.1063$	2	$f=561,\ u=16$
4259	2.2129	10	$u=100$
4261	$2^2.3.5.71$	10	$f=721,\ z=-1647,\ u=398,\ v=-1419$
4271	$2.5.7.61$	-10	$u=1369,\ v=-1975,\ w=-1533$
4273	$2^4.3.89$	5	$f''=-582,\ f'=1157,\ f=1200,\ z=-1611,$
			$u=-208$
4283	2.2141	2	$u=4$
4289	$2^6.67$	3	$f^{IV}=-1076,\ f'''=-254,\ f''-181$
			$f'=-1551,\ f=-528,\ u=119$
4297	$2^3.3.179$	5	$f'=1008,\ f=1972,\ z=1410,\ u=1535$
4327	$2.3.7.103$	10	$z=-628,\ u=359,\ v=-1626$
4337	$2^4.271$	10	$f''=1945,\ f'=1161,\ f=886,\ u=-1699$
4339	$2.3^2.241$	10	$z'=-2350,\ z=237,\ u=-118$
4349	$2^2.1087$	10	$f=-608,\ u=1302$
4357	$2^2.3^2.11^2$	2	$f=-66,\ z'=-303,\ z=-1318,$
			$u'=1336,\ u=-758$
4363	$2.3.727$	2	$z=412,\ u=64$
4373	$2^2.1093$	2	$f=1904,\ u=16$
4391	$2.5.439$	-10	$u=1263,\ v=-1926$
4397	$2^2.7.157$	2	$f=505,\ u=-1387,\ v=-1394$
4409	$2^3.19.29$	3	$f'=-693,\ f=-332,\ u=209,\ v=-444$
4421	$2^2.5.13.17$	10	$f=-952,\ u=-235,\ v=1033,\ w=1135$
4423	$2.3.11.67$	10	$z=-67,\ u=-980,\ v=-785$
4441	$2^3.3.5.37$	21	$f'=1096,\ f=2146,\ z=-902,$
			$u=-890,\ v=-460$
4447	$2.3^2.13.19$	10	$z'=-624,\ z=115,\ u=-477,\ v=1403$
4451	$2.5^2.89$	10	$u'=1349,\ u=-686,\ v=1017$
4457	$2^3.557$	10	$f'=-711,\ f=880,\ u=-1709$
4463	$2.23.97$	10	$u=-706,\ v=-1844$
4481	$2^7.5.7$	3	$f^{V}=1937,\ f^{IV}=1372,\ f'''=364,\ f''=-1934,$
			$f'=-1279,\ f=276,\ u=475,\ v=1591$
4483	$2.3^3.83$	2	$z''=-1592,\ z'=-817,\ z=505,\ u=1853$
4493	$2^2.1123$	2	$f=2280,\ u=16$
4507	$2.3.751$	2	$z=-792,\ u=64$
4513	$2^5.3.47$	7	$f'''=1972,\ f''=-1422,\ f'=260$
			$f=-95,\ z=-815,\ u=-1296$

p	$p-1$	g	Caractères
4517	$2^2.1129$	2	$f=1474,\ u=16$
4519	$2.3^2.251$	3	$z'=-862,\ z=1056,\ u=2100$
4523	$2.7.17.19$	-10	$u=1036,\ v=-164,\ w=-1708$
4547	2.2273	2	$u=4$
4549	$2^2.3.379$	6	$f=-1260,\ z=1744,\ u=-595$
4561	$2^4.3.5.19$	11	$f''=-1221,\ f'=-606,\ f=-2205,$ $z=-244,\ u=1439,\ v=-1947$
4567	$2.3.761$	10	$z=1112,\ u=-173$
4583	$2.29.79$	10	$u=-1626,\ v=-111$
4591	$2.3^3.5.17$	-10	$z''=2117,\ z'=-2032,\ z=-311,$ $u=-2274.\ v=1678$
4597	$2^2.3.383$	5	$f=2129,\ z=377,\ u=-1448$
4603	$2.3.13.59$	2	$z=-180,\ u=2104,\ v=1538$
4621	$2^2.3.5.7.11$	2	$f=-152,\ z=-1764,\ u=1153,$ $v=1159,\ w=2132$
4637	$2^2.19.61$	2	$f=-2044,\ u=2107,\ v=314$
4639	$2.3.773$	-10	$z=1360,\ u=-2024$
4643	$2.11.211$	-10	$u=2162,\ v=2160$
4649	$2^3.7.83$	3	$f'=-2124,\ f=1846,\ u=1000,\ v=-1406$
4651	$2.3.5^2.31$	10	$z=-787,\ u'=-1109,\ u=-2045,\ v=1945$
4657	$2^4.3.97$	15	$f''=-2202,\ f'=867,\ f=1912,\ z=967,\ u=1458$
4663	$2.3^2.7.37$	3	$z'=-1971,\ z=2092,\ u=-591,\ v=-412$
4673	$2^6.73$	10	$f^{IV}=-668,\ f'''=2289,\ f''=1088$ $f'=1475,\ f=-1993,\ u=2057$
4679	2.2339	11	$u=121$
4691	$2.5.7.67$	10	$u=1740,\ v=59,\ w=676$
4703	2.2351	10	$u=100$
4721	$2^4.5.59$	6	$f''=-2244,\ f'=-1771,\ f=1697.$ $u=950,\ v=32$
4723	$2.3.787$	2	$z=717,\ u=64$
4729	$2^3.3.197$	17	$f'=58,\ f=-1365,\ z=2036,\ u=-422$
4733	$2^2.7.13^2$	5	$f=-897,\ u=343,\ v'=2480,\ v=-2185$
4751	$2.5^3.19$	-10	$u''=-2110,\ u'=1913,\ u=-2323,\ v=2134$
4759	$2.3.13.61$	-10	$z=-1526,\ u=1792,\ v=1649$
4783	$2.3.797$	10	$z=1745,\ u=353$
4787	2.2393	2	$u=4$

p	$p-1$	g	Caractères
4789	$2^2.3^2.7.19$	2	$f=-1481,\ z'=-540,\ z=-1680,$ $u=-317,\ v=-405$
4793	$2^3.599$	10	$f'=-192,\ f=1480,\ u=-1152$
4799	2.2399	7	$u=49$
4801	$2^6.3.5^2$	7	$f^{IV}=-985,\ f'''=423,\ f''=1292,\ f'=-1484,$ $f=-1403,\ z=2340,\ u'=-2038,\ u=-450$
4813	$2^2.3.401$	2	$f=-1868,\ z=1888,\ u=-717$
4817	$2^4.7.43$	10	$f''=550,\ f'=-971,\ f=-1291,$ $u=-1237,\ v=1470$
4831	$2.3.5.7.23$	3	$z=-70,\ u=-703,\ v=1975,\ w=-543$
4861	$2^2.3^5.5$	11	$f=-493,\ z^{IV}=243,\ z'''=-765,\ z''=975,$ $z'=-2078,\ z=-320,\ u=-1601$
4871	$2.5.487$	-10	$u=-178,\ v=-2257$
4877	$2^2.23.53$	2	$f=-719,\ u=1276,\ v=-373$
4889	$2^3.13.47$	3	$f'=-1616,\ f=730,\ u=-1801,\ v=-2200$
4903	$2.3.19.43$	3	$z=-2417,\ u=-655,\ v=57$
4909	$2^2.3.409$	6	$f=-1613,\ z=-574,\ u=-807$
4919	2.2459	13	$u=169$
4931	$2.5.17.29$	10	$u=1315,\ v=906,\ w=-270$
4933	$2^2.3^2.137$	2	$f=-1194,\ z'=402,\ z=2131,\ u=-409$
4937	$2^3.617$	10	$f'=95,\ f=-849,\ u=1065$
4943	$2.7.353$	10	$u=144,\ v=2804$
4951	$2.3^2.5^2.11$	6	$z'=-1703,\ z=2261,\ u'=-468$ $u=-2428,\ v=1378$
4957	$2^2.3.7.59$	2	$f=359,\ z=-2283,\ u=-2262,\ v=-2380$
4967	$2.13.191$	10	$u=1782,\ v=1264$
4969	$2^3.3^3.23$	11	$f'=161,\ f=1076,\ z''=-1600,$ $z'=1359,\ z=-187,\ u=-2160$
4973	$2^2.11.113$	2	$f=223,\ u=-1210,\ v=2364$
4987	$2.3^2.277$	2	$z'=-2353,\ z=-1137,\ u=2820$
4993	$2^7.3.13$	5	$f^{V}=-2201,\ f^{IV}=1191,\ f'''=469,\ f''=269,$ $f'=2459,\ f=158,\ z=2650,\ u=1122$
4999	$2.3.7^2.17$	3	$z=-2238,\ u'=2293,\ u=227,\ v=2420$