SUR LA REPRÉSENTATION DES FONCTIONS MÉROMORPHES.

Par

A. BUHL

A TOULOUSE.

Le présent Mémoire est une contribution à l'étude du prolongement analytique. Les résultats fondamentaux dont je m'inspire sont ceux de M. G. MITTAG-LEFFLER dont on connaît les magnifiques travaux publiés ici même de 1898 à 1904.

J'ai eu en vue des méthodes beaucoup plus élémentaires que celles de M. MITTAG-LEFFLER. J'ai remarqué que si l'on cherchait à résoudre le problème du prolongement analytique pour les fonctions méromorphes — les plus simples pour lesquelles il se pose — on pouvait parvenir aux séries de polynômes dont le premier type est dû à M. BOREL, sans intervention du calcul intégral. De plus, l'usage de certaines fonctions sommatrices pourvues de zéros, telles la fonction σ, conduit à des résultats d'un caractère aussi étrange qu'intéressant. Il n'est nullement prouvé que ces résultats puissent s'étendre à des fonctions non méromorphes mais, même dans ce cas, la limitation serait remarquable, car elle constituerait alors de nouvelles propriétés particulières aux fonctions méromorphes. Ces premiers points constituent le Chapitre I.

Dans le Chapitre II j'essaie d'introduire la variable x dans les coefficients c_n des polynômes s_n et j'arrive à traiter complètement un cas particulier très élégant.

Dans le Chapitre III je retrouve rapidement l'une des intégrales curvilignes de M. MITTAG-LEFFLER; je montre que, dans le cas d'une fonction méromorphe, elle donne des résultats coïncidant pleinement avec ceux obtenus directement au Chapitre I et j'indique d'autres généralisations possibles de la formule fondamentale de ce Chapitre.

I. Séries de polynômes et séries de fractions rationnelles.[1]

1. L'origine étant un point régulier, supposons que nous connaissions les pôles d'une fonction méromorphe, les parties principales correspondantes et le développement taylorien valable dans le voisinage de l'origine. Je me propose de développer cette fonction en une série de polynômes augmentée d'une série de fractions rationnelles, ces deux séries pouvant converger dans tout le plan *et dépendant d'une fonction entière arbitraire.* Je me propose de montrer aussi que si, des connaissances précédentes, on retranche celle des parties principales on peut s'arranger à ne conserver que la série de polynômes qui n'en est pas moins propre à représenter la fonction méromorphe donnée.

Soient $F(x)$ la fonction méromorphe et $a_1, a_2, \ldots$ ses pôles rangés par ordre de modules croissants. Je suppose d'abord que ces pôles sont simples si bien que les parties principales correspondantes seront connues si l'on sait que a_i a pour résidu A_i. Soit un cercle C_k ayant l'origine pour centre et dont la circonférence passe entre a_k et a_{k+1}. Pour x dans ce cercle on aura

$$F(x) = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{A_i}{x-a_i} + a_{k0} + a_{k1}x + a_{k2}x^2 + \cdots \tag{1}$$

Si $F(x)$ se réduit à une fraction rationnelle *dont le degré du numérateur ne surpasse pas celui du dénominateur*[2] on peut supposer que le cercle C comprend tous les pôles et alors la série entière de (1) se réduit à son premier terme a_{k0} et peut même disparaître totalement si le degré du numérateur est inférieur d'une unité à celui du dénominateur. Quant au développement de $F(x)$ valable à l'origine et dans le voisinage on peut l'écrire

$$F(x) = \sum_{i=1}^{i=k} A_i \left(-\frac{1}{a_i} - \frac{x}{a_i^2} - \cdots \right) + a_{k0} + a_{k1}x + \cdots \tag{2}$$

et je désignerai par s_n la somme des $n+1$ premiers termes de ce développement. Donc s_n est le polynôme de degré n qui commence le développement taylorien précédent; je dirai que c'est un *polynôme taylorien.*

La formule (1) peut encore s'écrire

---

[1] Le titre choisi pour ce Chapitre rappelle intentionnellement celui d'un important Mémoire de M. E. Borel publié dans ce Recueil (T. 24, 1901) mais les points de vue sont différents. J'étudie ici une forme de développement particulière et peut-être spécialement remarquable à cause de son élégance.

[2] Dans mes publications précédentes cette hypothèse était faite implicitement toutes les fois qu'il s'agissait de fractions rationnelles.

$$(2') \quad \begin{cases} F(x) = \sum_{i=1}^{i=k} A_i \left[-\frac{1}{a_i} - \frac{x}{a_i^2} - \cdots - \frac{x^n}{a_i^{n+1}} + \frac{x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x-a_i)} \right] \\ + (a_{k0} + a_{k1}x + \cdots + a_{kn}x^n) + a_{k,n+1}x^{n+1} + \cdots \end{cases}$$

ou

$$(3) \quad F(x) = s_n + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{A_i x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x-a_i)} + a_{k,n+1}x^{n+1} + a_{k,n+2}x^{n+2} + \cdots$$

Soit maintenant

$$f(\xi) = \gamma_0 + \gamma_1\xi + \gamma_2\xi^2 + \cdots$$

une fonction *entière*. Je pose $c_n = \gamma_n \xi^n$ et aussi

$$\varphi_p(\xi) = f(\xi) - c_0 - c_1 - \cdots - c_{p-1} = \gamma_p \xi^p + \gamma_{p+1}\xi^{p+1} + \cdots$$

Si alors on multiplie tous les termes de la formule (3) par c_{n+p} et que l'on somme de $n = 0$ à $n = \infty$ il vient

$$(A) \quad \begin{cases} F(x)\varphi_p(\xi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+p}\, s_n + \sum_{i=1}^{i=k} \varphi_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)\left(\frac{a_i}{x}\right)^{p-1} \frac{A_i}{x-a_i} \\ \qquad + \sum_{n=0}^{n=\infty} (\gamma_p \xi^p + \cdots + \gamma_{p+n}\xi^{p+n})\, a_{k,n+1}x^{n+1}. \end{cases}$$

J'ai donné cette formule, pour $p = 0$, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (T. IV, 6^me série, 1908). On comprendra dans la suite pourquoi j'ai introduit ici l'indice p qui permet de déplacer les coefficients c par rapport aux sommes s; d'ailleurs la formule précédente n'a pas le maximum de simplicité pour $p = 0$ mais pour $p = 1$. Cette formule résulte aussi de la transformation de certaines intégrales étudiées par M. Mittag-Leffler puis par moi mais je reviendrai sur ce point dans le Chapitre III du présent travail. Il reste à la généraliser pour le cas où $F(x)$ présente non pas seulement des pôles simples mais des pôles d'ordre quelconque. Mais, avant d'en arriver là, je préfère montrer quelles sont ses propriétés essentielles.

2. Divisons par $\varphi_p(\xi)$ tous les termes de la formule (A). Etudions d'abord l'expression

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\gamma_p \xi^p + \cdots + \gamma_{p+n}\xi^{p+n}}{\varphi_p(\xi)}\, a_{k,n+1}x^{n+1}.$$

Il est toujours entendu que x est dans le cercle C_k et, par suite, la série dont le terme général est $a_{kn}x^n$ est convergente. Faisons maintenant cette *hypothèse* *fondamentale* que la variable ξ aille à l'infini suivant un chemin tel que $|f(\xi)|$ croisse indéfiniment et d'ailleurs plus vite que n'importe quel polynôme. Dans ces conditions l'expression (4) tend vers zéro. En effet, dans la série (4), on peut mettre à part les q premiers termes, q étant fini, et ceux-ci tendent manifestement vers zéro; pour les termes restant, qui sont en nombre infini, le coefficient en ξ peut tendre vers 1 mais alors, si q est suffisamment grand, la convergence de la série en x entraîne que ces termes ont aussi une somme qui peut devenir plus petite en module que toute quantité donnée.

Nous admettrons toujours qu'il existe un chemin allant à l'infini suivant lequel une fonction entière croît en module plus vite qu'un polynôme. Si un tel chemin n'existait pas, d'après le théorème fondamental de Liouville, la fonction se réduirait à un polynôme.[1] Bien entendu il pourra exister plusieurs chemins de la nature indiquée et même une infinité. Ainsi e^ξ croît incomparablement plus vite en module que n'importe quel polynôme en ξ quand la variable ξ va à l'infini en s'éloignant *à droite* de l'axe imaginaire.

Bref, ξ allant à l'infini dans une direction convenable, on a

$$\text{(B)} \qquad F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_n}{\varphi_p(\xi)} + \lim_{\xi=\infty} \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\varphi_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{\varphi_p(x)} \left(\frac{a_i}{x}\right)^{p-1} \frac{A_i}{x-a_i}.$$

Remarquons bien que le second sigma porte sur k termes et sur k seulement quand x est supposé dans C_k.

Une pareille formule, indépendamment des conclusions que nous allons en tirer, paraît déjà très importante en elle-même. La variable x partant de l'origine, c'est-à-dire passant de C_0, dans C_1, dans C_2, etc., la formule (B) met en évidence les pôles a_1, a_2, ... les uns après les autres. A ce point de vue elle est à rapprocher de la formule de décomposition de M. Mittag-Leffler; elle exige toutefois, pour former les polynômes s_n, la connaissance du développement taylorien de F dans le voisinage de l'origine. En revanche elle ne contient aucune expression qu'on ne sait pas déterminer, la fonction f ayant plutôt le rôle d'une fonction arbitraire.

3. Mais le plus grand intérêt, déjà signalé dans mes précédents travaux et sur lequel je vais revenir ici avec des résultats nouveaux, consiste à s'arranger à détruire le second sigma de (B).

[1] M. Mittag-Leffler (*Acta mathematica*, T. 29. p. 145) a réussi cependant à construire des fonctions entières ne devenant infinies dans aucune direction. Le paradoxe résulte de conventions sur les modes de croissance de deux fonctions associées d'une certaine manière, conventions qui n'ont rien à faire ici.

Pour cela il suffit de poser

$$\text{(C)} \qquad \lim_{\xi=\infty} \frac{\varphi_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{\varphi_p(\xi)} = 0 \text{ ou } \lim_{\xi=\infty} \frac{f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)} = 0, \; i = 1, 2, \ldots k.$$

Les deux expressions limites (C) sont évidemment les mêmes dans les conditions où doivent croître $|\xi|$ et $|f(\xi)|$ puisque f et φ_p ne différent que par des polynômes. Les conditions (C) en général ne seront réalisables que pour x dans de certaines régions du plan. C'est en s'arrangeant à étendre ces régions de plus en plus qu'on réalisera, au moyen de séries de polynômes en s_n, un prolongement analytique de plus en plus étendu.

Analysons les choses en détail.

Soit d'abord x dans C_0. On aura

$$F(x) = a_{00} + a_{01}x + a_{02}x^2 + \cdots,$$

$$F(x)\varphi_p(\xi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+p}\, s_n + \sum_{n=0}^{n=\infty} (\gamma_p \xi^p + \cdots + \gamma_{p+n} \xi^{p+n})\, a_{0,n+1}\, x^{n+1}.$$

Divisant par $\varphi_p(\xi)$ et faisant croître ξ conformément à l'hypothèse fondamentale du n° 2, il restera

$$(5) \qquad F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_n}{\varphi_p(\xi)},$$

formule qui n'est autre que (B) pour $k = 0$ et qui, à ce titre, aurait pu être écrite immédiatement. Si maintenant x sort de C_0 il faut compléter le second membre par le terme du second sigma de (B) qui correspond à $i = 1$ mais, d'autre part, ce terme complémentaire peut être immédiatement détruit par celle des conditions (C) qui correspond à $i = 1$. Cette condition, en général, ne laissera plus à x la liberté de circuler dans toute la couronne $C_1 - C_0$ mais seulement dans certaines régions de celle-ci. De même si x, sans pénétrer dans les régions précédemment interdites, peut passer dans la couronne $C_2 - C_1$, le terme du second sigma de (B) qui correspond à $i = 2$ va apparaître dans la formule (5) et on pourra le détruire par celle des conditions (C) qui correspond à $i = 2$; cela pourra interdire à x certaines régions de la couronne $C_2 - C_1$. Et ainsi de suite.

Le cas le plus important est celui où l'on se propose de faire circuler x dans tout le champ complexe. Mais alors, si l'on veut représenter $F(x)$ par des formules du type (5), toutes les conditions (C) interviennent à la fois. Chacune conduit, en général, à limiter par une certaine courbe le domaine de validité de la formule (5). L'ensemble des domaines acceptables forme la *région de sommabilité.*

Tout ceci s'éclaircira et se mettra facilement d'accord avec des résultats connus en prenant l'exemple particulier de $f(\xi) = e^{\xi}$.

4. *Sommabilité exponentielle.* — Si $f(\xi) = e^{\xi}$ et si l'on pose d'autre part

$$\xi = \varrho\, e^{i\omega},\ x = r e^{i\theta},\ a_i = \alpha_i e^{i\tau_i},$$

on trouve immédiatement que le rapport de $f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)$ à $f(\xi)$ est une exponentielle dont la partie réelle de l'exposant est

$$\varrho\left[\frac{r}{\alpha_i}\cos(\theta + \omega - \tau_i) - \cos\omega\right].$$

Réaliser les conditions (C) c'est faire tendre de telles exponentielles vers zéro, ce qui arrivera quand ϱ croîtra indéfiniment si le crochet précédent reste négatif. Géométriquement c'est faire rester la variable x toujours du même côté que l'origine par rapport à la droite

$$r\cos(\theta + \omega - \tau_i) = \alpha_i \cos\omega$$

qui passe par le point $a_i(\alpha_i, \tau_i)$ et fait en ce point un angle $\frac{\pi}{2} - \omega$ avec le rayon vecteur $O a_i$. Il ne faut pas oublier que ξ est tenu de croître en module à droite de l'axe imaginaire, donc ω est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Il est très important de remarquer que si ξ va à l'infini dans une direction donnée les droites précédentes font des angles constants et tous les mêmes avec les rayons vecteurs tels que $O a_i$. Si la direction où ξ croît change, c'est à dire si l'angle ω varie, les mêmes droites tournent autour des points a_i d'un angle égal à celui dont ω a varié, mais en sens contraire.

Ceci posé supposons x dans C_0; on doit avoir, pour représenter $F(x)$, une formule du type (5) laquelle est simplement équivalente à la formule de Taylor.

Si x sort de C_0, le terme qui s'ajoute à cette formule du type (5) ne peut disparaître que si x ne franchit pas la droite A_1 passant par a_1 et faisant avec $O a_1$ un angle constant (fig. 1). Sous cette restriction x peut circuler dans ce qui reste de la couronne $C_1 - C_0$; si cette variable sort de là ce ne peut être qu'à la condition de ne pas franchir la droite A_2, construite comme A_1, et ainsi de suite. On finit par obtenir comme région de sommabilité un contour mixtiligne qui devient le *polygone de sommabilité* de M. E. Borel si ξ croît par valeurs réelles car alors ω est nul et chaque droite A_i est perpendiculaire au rayon Oa_i.

Je ne m'arrêterai pas davantage sur ces méthodes;[1] j'ai seulement voulu prendre un exemple simple pour le comparer avec ce qui va suivre.

5. *La fonction sommatrice* σ. — Sans insister sur les méthodes de sommabilité telles que celles du numéro précédent on peut cependant remarquer que les premières fonctions sommatrices employées furent des fonctions entières dépourvues de zéros. Si l'on prend des fonctions possédant une infinité de

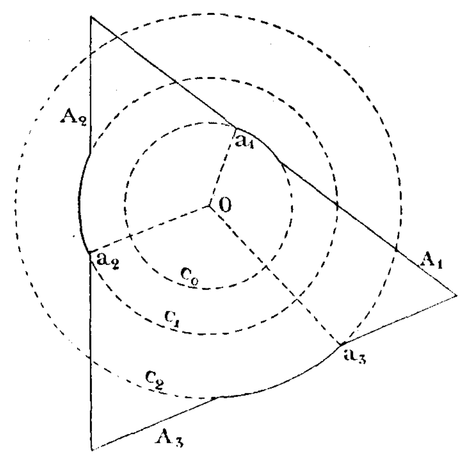

Fig. 1.

zéros on se trouve en présence de résultats complètement différents des précédents sur lesquels j'ai d'abord attiré l'attention dans une Note aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (16 Mars 1908) puis dans un article du *Bulletin des Sciences mathématiques* (Juillet 1908).

Dans ces premières publications je supposais toujours $p = 0$; ici, au contraire, je conserverai la latitude, en laissant à p une valeur entière quelconque, de pouvoir déplacer les coefficients c_{n+p} par rapport aux polynômes tayloriens s_n, ce qui aura grande importance quand on étudiera la dérivation des séries obtenues (n° 8).

Considérons la fonction σ admettant pour zéros tous les sommets du

---

[1] Pour plus de développements on peut se reporter à un article de M. A. Costabel: Sur le prolongement analytique d'une fonction méromorphe (Enseignement mathématique, 1908, p. 377).

quadrillage orthogonal formé par les axes et des parallèles à ceux-ci d'abscisses et d'ordonnées ± 2, ± 4, $\pm 6, \ldots$. On aura

$$\sigma\xi = \xi + * - \frac{g_2\xi^5}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{g_3\xi^7}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{g_2^2\xi^9}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} - \cdots, \tag{6}$$

les invariants g_2 et g_3 étant réels. Si 2ω et $2\omega'$ sont les périodes de la fonction $p\xi$, on a ici $2\omega = 2$, $2\omega' = 2i$ et une formule bien connue nous donne pour cas particulier

$$\sigma(\xi + 2m\omega) = (-1)^m e^{2m\eta(\xi+m\omega)}\sigma\xi,$$

m étant un entier et η un nombre *réel et positif*.[1] Dans ces conditions, si nous donnons à ξ les valeurs entières *impaires* $1, 3, 5, \ldots$, la fonction $\sigma\xi$ croît en valeur absolue d'une manière exponentielle, c'est à dire incomparablement plus vite que n'importe quel polynôme en ξ pour la même suite de valeurs de la variable, ce qui est ici l'essentiel.

Donc on peut faire un raisonnement exactement identique à celui qui, au n° 3, a donné la formule (5) et réobtenir d'ailleurs cette formule (5), la fonction f contenue dans φ_p étant la fonction σ qui vient d'être définie; il est toujours entendu que ξ croît indéfiniment en prenant la suite des valeurs entières, positives et impaires. Naturellement représenter $F(x)$ par cette formule (5) n'a toujours pas plus de valeur que l'usage pur et simple de la formule de Taylor dans le cercle C_0. C'est maintenant, lorsqu'il va falloir sortir x de C_0 avec $\sigma\xi$ comme fonction sommatrice, que des considérations d'une toute autre nature vont s'introduire. Il s'agit toujours de transporter les conditions (C) dans la formule (B). Ici les deux formes données à la condition (C) sont encore équivalentes car φ_p ne diffère de $f = \sigma$ que par des polynômes. Cela dit posons

$$a_k = \frac{1}{p}(a_{k1} + i\,a_{k2}),\ x = \frac{1}{p}(x_1 + i\,x_2),\ \xi_n = \prod_1^n (a_{k1}^2 + a_{k2}^2); \tag{7}$$

p est un entier réel et positif; a_{k1} et a_{k2} sont des entiers réels dont l'un est pair, l'autre impair; x_1 et x_2 sont des entiers pairs. Alors ξ, *pris égal à* ξ_n, croît indéfiniment par valeurs toujours impaires; $\frac{\xi x}{a_i}$ est un entier complexe dont

---

[1] J. Tannery et J. Molk. *Fonctions elliptiques.* T. I. pp. 165 et 201. P. Appell et E. Lacour. *id.* pp. 68 et 402.

les deux parties sont paires si bien que $\sigma \frac{\xi x}{a_i}$ est toujours nul.

Alors la formule (B) se réduit bien à

$$F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_n}{\varphi_p(\xi)}, \tag{8}$$

ξ croissant indéfiniment par les valeurs entières impaires ξ_n données par la dernière des formules (7). (*Bulletin des Sciences mathématiques.* Juillet 1908.)

Un pareil résultat ne peut paraître valable, en dehors du cercle C_0, que si x et les points singuliers a_k de $F(x)$ ont des cordonnées satisfaisant aux conditions énoncées à propos des formules (7). Mais, comme l'entier p qui figure[1] dans les formules (7) est aussi grand qu'on veut, les x et les a_k sont simplement assujettis à être des nombres rationnels qui peuvent s'approcher autant qu'on le voudra de toutes valeurs données à l'avance.

A ce point de vue la solution ici proposée pour le prolongement analytique d'une fonction méromorphe n'a aucune infériorité sur celles où x peut varier d'une manière continue. Même lorsque nous croyons considérer des ensembles continus nous n'y atteignons *pratiquement* que les ensembles dénombrables qui peuvent y être contenus; c'est là «la seule réalité accessible» (E. BOREL, Les probabilités dénombrables, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1909, premier semestre). En général une formule à variable continue n'est *calculable* que pour des valeurs rationnelles de la variable. On ne perd donc rien à remplacer une telle formule par une autre à variable discontinue pourvu, bien entendu, qu'il ne s'agisse pas de discontinuités finies.

6. *Cas où $F(x)$ présente des pôles multiples.* — Comme on l'a déjà indiqué à la fin du numéro 1, il faut étendre les résultats précédents aux fonctions méromorphes ayant des pôles d'ordre quelconque. On rencontre ainsi de nouvelles propriétés du plus haut intérêt. Je rappelle d'abord quelques généralités.

Dans le voisinage d'un pôle d'ordre m la fonction $F(x)$ est développable par la formule de LAURENT sous la forme

$$F(x) = \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-a} + a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots$$

Désignant par le symbole D une dérivation par rapport à x, on a sans peine

[1] Il est à peine besoin de faire remarquer que cet entier p n'a rien de commun avec l'indice p du second membre de (8).

$$(9)\qquad \begin{cases} {}_{x=a}[F(x)(x-a)^m] = \quad A_m, \\ D_{x=a}[F(x)(x-a)^m] = 1\,!\,A_{m-1}, \\ D^2_{x=a}[F(x)(x-a)^m] = 2\,!\,A_{m-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ D^{m-1}_{x=a}[F(x)(x-a)^m] = (m-1)\,!\,A_1; \end{cases}$$

quant à la partie principale du développement précédent on peut l'écrire

$$\frac{A_1}{x-a} - \frac{D}{1!}\frac{A_2}{x-a} + \frac{D^2}{2!}\frac{A_3}{x-a} - \dots + (-1)^{m-1}\frac{D^{m-1}}{(m-1)!}\frac{A_m}{x-a}.$$

Dans ces conditions, là où $F(x)$ possèdera un pôle a_i d'ordre m, la fraction rationnelle $\frac{A_i}{x-a_i}$ qui figure sous le sigma dans l'égalité (1) devra être remplacée par

$$\frac{A_{i1}}{x-a_i} - \frac{D}{1!}\frac{A_{i2}}{x-a_i} + \frac{D^2}{2!}\frac{A_{i3}}{x-a_i} - \dots + (-1)^{m-1}\frac{D^{m-1}}{(m-1)!}\frac{A_{im}}{x-a_i}.$$

Si, pour simplifier l'écriture, on pose

$$\sigma_{i,n} = -\frac{1}{a_i} - \frac{x}{a_i^2} - \frac{x^2}{a_i^3} - \dots - \frac{x^n}{a_i^{n+1}},$$

on voit de même que l'expression

$$A_i\left[\sigma_{i,n} + \frac{x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x-a_i)}\right]$$

qui figure dans (2') doit être remplacée par

$$(10)\qquad \begin{cases} A_{i1}\left[\sigma_{i,n} + \frac{x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x-a_i)}\right] \\ -A_{i2}\frac{D}{1!}\left[\sigma_{i,n+1} + \frac{x^{n+2}}{a_i^{n+2}(x-a_i)}\right] \\ +A_{i3}\frac{D^2}{2!}\left[\sigma_{i,n+2} + \frac{x^{n+3}}{a_i^{n+3}(x-a_i)}\right] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ +(-1)^{m-1}A_{im}\frac{D^{m-1}}{(m-1)!}\left[\sigma_{i,n+m-1} + \frac{x^{n+m}}{a_i^{n+m}(x-a_i)}\right]. \end{cases}$$

Ceci entraîne que le terme

$$(11)\qquad \varphi_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)\left(\frac{a_i}{x}\right)^{p-1}\frac{A_i}{x-a_i}$$

qui figure sous le second sigma de (A) doit être remplacé sous ce sigma par

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \gamma_{n+p}\,\xi^{n+p}\left[\frac{A_{i1}\,x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x-a_i)} - \frac{D}{1!}\frac{A_{i2}\,x^{n+2}}{a_i^{n+2}(x-a_i)} + \frac{D^2}{2!}\frac{A_{i3}\,x^{n+3}}{a_i^{n+3}(x-a_i)} - \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^{m-1}\frac{D^{m-1}}{(m-1)!}\frac{A_{im}\,x^{n+m}}{a_i^{n+m}(x-a_i)}\right].$$

En s'appuyant sur l'identité

$$(12)\qquad (-1)^{p-1} D_x^{p-1}\frac{x^{n+p}}{a^{n+p}(x-a)} = D_{z=a}^{p-1}\frac{x^{n+1}}{z^{n+1}(x-z)},$$

dont la vérification est immédiate en l'écrivant

$$(-1)^{p-1} D_x^{p-1}\left[\frac{1}{x-a} + \frac{1}{a} + \cdots + \frac{x^{n+p-1}}{a^{n+p}}\right] = D_a^{p-1}\left[\frac{1}{x-a} + \frac{1}{a} + \cdots + \frac{x^n}{a^{n+1}}\right],$$

le résultat précédent peut se considérer comme la valeur pour $z = a_i$ de l'expression suivante où les D sont des dérivations par rapport à z

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \gamma_{n+p}\,\xi^{n+p}\left[\frac{A_{i1}\,x^{n+1}}{z^{n+1}(x-z)} + \frac{D}{1!}\frac{A_{i2}\,x^{n+1}}{z^{n+1}(x-z)} + \cdots + \frac{D^{m-1}}{(m-1)!}\frac{A_{im}\,x^{n+1}}{z^{n+1}(x-z)}\right].$$

Finalement cela peut s'écrire

$$(13)\qquad \left[A_{i1} + A_{i2}\frac{D}{1!} + A_{i3}\frac{D^2}{2!} + \cdots + A_{im}\frac{D^{m-1}}{(m-1)!}\right]\left[\varphi_p\left(\frac{\xi x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}\right)^{p-1}\frac{1}{x-z}\right],$$

le premier crochet contenant un opérateur, combinaison linéaire de dérivations, que l'on appliquera sans aucune confusion possible à la fonction de z contenue dans le second crochet. Dans le cas du pôle d'ordre 1, tous les A sauf A_{i1} sont nuls dans le premier crochet et on retombe sur l'expression (11) ainsi que cela doit être. En résumé, si l'on pose

$$\varDelta_i^{m-1}\Phi(z) = A_{i1}\,\Phi(z) + \frac{A_{i2}}{1!}D\Phi(z) + \frac{A_{i3}}{2!}D^2\Phi(z) + \cdots + \frac{A_{im}}{(m-1)!}D^{m-1}\Phi(z),$$

la formule (A) s'écrit maintenant

$$(\mathrm{D})\qquad \left\{\begin{aligned} F(x)\,\varphi_p(\xi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+p}\,s_n + \sum_{i=1}^{i=k} \varDelta_{i\; z=a_i}^{m-1}\left[\varphi_p\left(\frac{\xi x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}\right)^{p-1}\frac{1}{x-z}\right] \\ + \sum_{n=0}^{n=\infty}(\gamma_p\,\xi^p + \cdots + \gamma_{p+n}\,\xi^{p+n})\,a_{k,n+1}\,x^{n+1}. \end{aligned}\right.$$

Il ne sera pas utile de développer davantage le $\varDelta$. On remarquera simplement que c'est une forme linéaire et homogène par rapport à

$$\varphi_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right),\ \xi\varphi'_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right),\ \ldots,\ \xi^{m-1}\varphi_p^{(m-1)}\left(\frac{\xi x}{a_i}\right). \tag{14}$$

Dans ce cas si l'on veut raisonner comme sur la formule (A) et notamment faire disparaître le second sigma de (D) on retombera sur des conditions du type (C) mais plus nombreuses puisqu'il faudra y considérer non seulement le numérateur égal au premier terme de la suite (14) mais y remplacer succesivement ce numérateur par tous les termes de cette suite.

Nous allons réexaminer, pour le cas des pôles multiples de $F(x)$, l'emploi des fonctions sommatrices e^ξ et $\sigma\xi$.

7. Tout d'abord et d'une manière générale si l'on considère que $\varphi_p(\xi)$ ne diffère de $f(\xi)$ que par un polynôme, on voit immédiatement que, pour ξ croissant dans une direction où $f(\xi)$ croît incomparablement plus vite que n'importe quel polynôme, le rapport d'une des expressions (14), soit $\xi^k\varphi_p^{(k)}\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)$, à $\varphi_p(\xi)$ se comporte exactement comme $\xi^k f^{(k)}\left(\frac{\xi x}{a_i}\right) : f(\xi)$.

Les conditions (C) sont donc à remplacer par les expressions

$$\frac{f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)},\ \frac{\xi f'\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)},\ \ldots,\ \frac{\xi^{m-1}f^{(m-1)}\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)};\quad i=1,2,\ldots \tag{E}$$

dont la limite, pour ξ croissant toujours comme plus haut, doit être égalée à zéro. Si $f(\xi)=e^\xi$ ces conditions ne sont pas distinctes et ne diffèrent pas de la première déjà étudiée au n° 4. Donc *le procédé de sommabilité exponentielle,* dû à M. E. Borel, *appliqué à une fonction méromorphe, n'a besoin d'aucune modification quel que soit l'ordre des pôles de cette fonction.*

La conclusion va être toute différente avec $f(\xi)=\sigma\xi$ pour fonction sommatrice. Si, procédant comme au n° 5, on suppose toujours que les coordonnées de x, de ξ et des pôles a_i sont représentables par les formules (7), la première des expressions (E) est bien nulle, puisque $\frac{\xi x}{a_i}$ est toujours un zéro de σ, mais il n'y a aucune raison pour qu'il en soit de même des suivantes, les zéros de σ n'étant nullement tenus d'être des zéros pour toutes les dérivées de cette fonction. On tournera la difficulté en remplaçant $\sigma\xi$ par $(\sigma\xi)^m$, m étant un entier positif. Donc *la fonction sommatrice $\sigma\xi$ servant à la représentation d'une fonction méromorphe $F(x)$ à pôles simples,* comme il a été expliqué au n° 5, *il faut, pour étendre le procédé à une fonction ayant des pôles d'ordre m, que l'on remplace $\sigma\xi$ par $(\sigma\xi)^m$.*

Il est facile de voir que les développements (8) ainsi obtenus peuvent encore être variées d'une infinité de manières ce que j'ai déjà indiqué dans mon Mémoire du *Bulletin des Sciences mathématiques* (1908). Comme idée plus nouvelle on peut remarquer qu'on pourrait remplacer $\sigma\xi$ par $\tau\xi = e^{\sigma\xi} - 1$, fonction qui a évidemment les mêmes zéros que $\sigma\xi$ et qui, pour ξ réel, croît encore plus vite. De même $\tau\xi$ pourrait être remplacée par $e^{\tau\xi} - 1$ et ainsi de suite indéfiniment.

8. *Dérivabilité. Rôle des indices p.* — Puisque ξ est toujours supposé aller à l'infini dans une direction où $f(\xi)$ croît incomparablement plus vite que n'importe quel polynôme, il suit immédiatement de là que $\frac{\varphi_p(\xi)}{f(\xi)}$ tend vers 1 (du moins si p est fini) et que la formule (5) peut aussi bien s'écrire

$$F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_n}{f(\xi)}. \tag{15}$$

Cette forme est particulièrement commode pour étudier sa dérivation. Supposons pour fixer les idées, que $F(x)$ soit une fonction méromorphe à pôles simples; sa dérivée $m^{\text{ième}}$ a des pôles d'ordre $m+1$. Les polynômes tayloriens qui sont $s_0, s_1, s_2, \ldots$ pour la fonction primitive sont $s_m^{(m)}, s_{m+1}^{(m)}, s_{m+2}^{(m)}, \ldots$ pour cette dérivée. Avec la méthode de sommation exponentielle, $f(\xi) = e^{\xi}$, nous avons alors sans précautions spéciales

$$F^{(m)}(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_{n+m}^{(m)}}{f(\xi)} \tag{16}$$

et, comme p est un entier arbitraire, il est indifférent d'écrire

$$F^{(m)}(x) = \lim_{\xi=0} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p+m}\, s_{n+m}^{(m)}}{f(\xi)} = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_n^{(m)}}{f(\xi)}. \tag{17}$$

C'est dire que la série de polynômes tayloriens (15) peut être dérivée terme à terme. Ce résultat est dû à M. Borel qui paraît l'avoir prévu avant d'effectuer de véritables calculs (*Sur l'extension du théorème d'Abel aux séries sommables. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.* 13 Janvier 1896.)

Supposons maintenant que la formule (15) soit l'analogue de la formule (8) c'est à dire qu'on emploie la fonction $\sigma\xi$ et les relations (7) comme il a été expliqué au n° 5. Alors (n° 7) on peut encore passer de (15) à (16) mais à conditon de substituer $(\sigma\xi)^{m+1}$ à $\sigma\xi$ puis, par le même raisonnement que précédemment, on obtiendra la formule (17). Donc *la formule* (15) *est* m *fois dérivable si* $f(\xi) = (\sigma\,\xi)^{m+1}$ *et elle ne l'est que* m *fois.*

On a donc un exemple précis de séries de polynômes spécialement construites pour être dérivables m fois et m fois seulement; dans l'état actuel de la théorie des séries de polynômes à variable complexe ce résultat me semble extrêmement remarquable.

9. *Cas où* $F(x)$ *est une fraction rationnelle.* — Il est intéressant de voir comment dégénèrent les résultats précédents quand $F(x)$ dégénère en une fraction rationnelle.

En commençant, s'il est nécessaire, par effectuer une division, on peut toujours admettre que le degré du numérateur ne surpassera pas celui du dénominateur. Alors, comme on l'a déjà remarqué au n° 1, le cercle C_k contenant tous les pôles, les coefficients $a_{k0}, a_{k1}, a_{k2}, \ldots$ disparaissent dans (1) ou se réduisent au premier d'entre eux. Dans ces conditions le dernier sigma des formules (A) ou (D) n'a plus de raison d'être. Par suite il n'est plus nécessaire de faire croître ξ indéfiniment *pour détruire ce sigma.* Mais, si l'on adopte la méthode de sommabilité de M. Borel ou une méthode analogue, la croissance indéfinie de ξ reste nécessaire pour satisfaire aux conditions du type (C). Il en est autrement avec la fonction sommatrice σ. Comme on a

$$\varphi_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right) = \sigma\left(\frac{\xi x}{a_i}\right) - \gamma_0 - \gamma_1\frac{\xi x}{a_i} - \cdots - \gamma_{p-1}\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)^{p-1},$$

les coefficients γ étant ceux de la formule (6), on voit que, *si* p *est nul ou égal à* 1, cette expression sera nulle en vertu des égalités (7). Et alors (A) donnera simplement

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n\, s_n}{\sigma\,\xi}.$$

Les dérivées de φ_p sont dans les mêmes conditions que φ_p, si l'on remplace σ par une puissance convenable de cette fonction. Donc la formule précédente s'étend facilement au cas où la fraction rationnelle $F(x)$ a des pôles d'ordre quelconque. Mais on ne peut donner exactement la même physionomie aux règles de dérivation puisqu'on ne peut plus disposer de l'indice p.

II. Séries où les coefficients c_n dépendent de la variable x.

10. La théorie des séries de polynômes tayloriens, malgré les si importants travaux de M. G. Mittag-Leffler et à laquelle ce qui précède n'apporte qu'une

modeste contribution, paraît déjà pouvoir être généralisée de diverses manières.

Dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (Juin 1907) j'avais déjà essayé de construire des formules assez générales pour que les coefficients c des polynômes s soient fonctions de ξ et de x et, en terminant l'article précité, j'avais même donné une formule pour la représentation de $\frac{1}{1-x}$ laquelle, à vrai dire, était plutôt une identité. Etant revenu depuis sur la question d'une manière plus profonde et en me bornant toujours au cas des fonctions méromorphes, j'ai obtenu d'autres résultats qui, cette fois, semblent nouveaux et bien remarquables par leur élégance.

Le cas tout à fait général, où l'on veut que c_n contienne x de façon quelconque, est trop vaste pour qu'on puisse le traiter immédiatement. Je me bornerai au cas très particulier mais très intéressant où $c_n = \gamma_n \xi^n$ est partout remplacé par $\frac{c_n}{x^n}$. Alors les notations restent les mêmes qu'au Chapitre précédent et le raisonnement qui nous a conduit à la formule (A) conduit à une formule toute semblable à cela près que ξ y est remplacé par $\frac{\xi}{x}$, savoir

$$\text{(F)} \quad \begin{cases} F(x)\varphi_p\left(\frac{\xi}{x}\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}}{x^{n+p}} s_n + \sum_{i=1}^{i=k} \varphi_p\left(\frac{\xi}{a_i}\right)\left(\frac{a_i}{x}\right)^{p-1} \frac{A_i}{x-a_i} \\ \qquad + \sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\gamma_p \frac{\xi^p}{x^p} + \cdots + \gamma_{p+n}\frac{\xi^{p+n}}{x^{p+n}}\right) a_{k,n+1}\, x^{n+1} . \end{cases}$$

Cette formule suppose que $F(x)$ n'a que des pôles simples. Dans le cas des pôles d'ordre m le raisonnement du n° 6 peut encore être refait mot pour mot et l'on est conduit à modifier la formule précédente en y remplaçant le second sigma par

$$\sum_{i=1}^{i=k} \mathop{\varDelta_i^{m-1}}_{z=a_i}\left[\varphi_p\left(\frac{\xi}{z}\right)\left(\frac{z}{x}\right)^{p-1}\frac{1}{x-z}\right]$$

ce qui est une forme linéaire et homogène par rapport à

$$\varphi_p\left(\frac{\xi}{a_i}\right),\ \xi\varphi'_p\left(\frac{\xi}{a_i}\right),\ldots,\xi^{m-1}\varphi_p^{(m-1)}\left(\frac{\xi}{a_i}\right).$$

Si x ne sort pas du cercle taylorien C_0 le second sigma de (F) est inutile et il est à peine besoin de remarquer que la formule, abstraction faite de ce terme, peut être établie directement tout comme (5) au n° 3. Pour faire disparaître le troisième sigma de la formule (F) on peut encore diviser tous les termes par

$\varphi_p\left(\frac{\xi}{x}\right)$ et chercher à ce que cette expression croisse en module incomparablement plus vite que n'importe quel polynôme en $\frac{\xi}{x}$.

11. *Nouvel emploi de la fonction exponentielle.* — Si l'on prend $f\left(\frac{\xi}{x}\right) = e^{\frac{\xi}{x}}$, le module de cette expression est une exponentielle dont l'exposant est $\frac{\varrho}{r}\cos(\omega-\theta)$, les notations étant celles du début du n° 4. Si r est quelconque et si ϱ croît

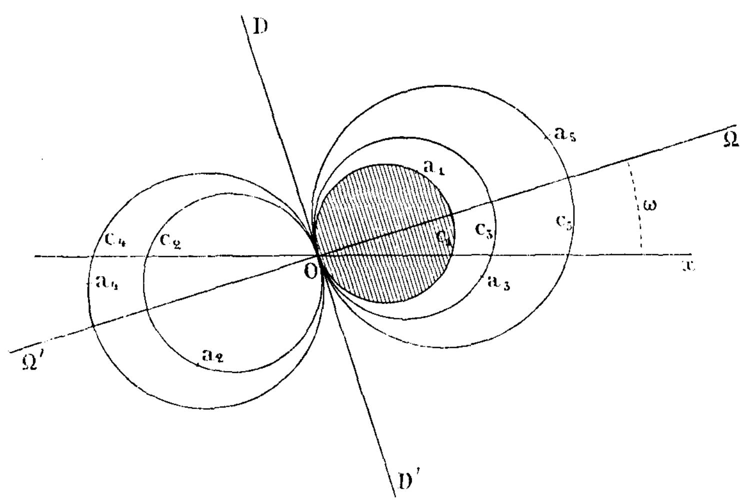

Fig. 2.

indéfiniment cette exponentielle croîtra de manière convenable si $\cos(\omega-\theta)$ est positif. Géométriquement si ξ part de l'origine suivant une demi-droite $O\Omega$ à laquelle on mène la perpendiculaire DOD', x doit circuler dans le demi-plan $D\Omega D'$. Voyons maintenant si l'on ne peut pas astreindre x à de nouvelles conditions de manière à faire disparaître aussi le second sigma de (F). Il faudrait pour cela que le rapport de $\varphi_p\left(\frac{\xi}{a_i}\right)$ à $\varphi_p\left(\frac{\xi}{x}\right)$ ou de $f\left(\frac{\xi}{a_i}\right)$ à $f\left(\frac{\xi}{x}\right)$ tende toujours vers zéro quand ξ va à l'infini le long de $O\Omega$. Or, toujours avec les notations du n° 4, on calcule immédiatement que ce rapport a pour module une exponentielle dont l'exposant est

$$\varrho\left[\frac{\cos(\omega-\tau_i)}{\alpha_i}-\frac{\cos(\omega-\theta)}{r}\right].$$

Quand ϱ croîtra indéfiniment ce module tendra vers zéro si le crochet qui multiplie ϱ est constamment négatif. Or considérons l'équation (fig. 2)

$$\frac{\cos(\omega - \tau_i)}{\alpha_i} - \frac{\cos(\omega - \theta)}{r} = 0;$$

c'est, en coordonnées polaires r et θ, l'équation d'une circonférence passant par l'origine O, par le point $a_i(\alpha_i, \tau_i)$ et dont le centre se trouve sur la droite $\Omega' O \Omega$ d'argument ω. Pour les circonférences du demi plan $D\Omega D'$ l'intérieur est la région négative; c'est au contraire l'extérieur pour celles de $D\Omega' D'$. Donc la variable $x(r, \theta)$ doit être assujettie à rester dans une région intérieure à toutes les circonférences C de $D\Omega D'$ et extérieure à toutes celles de $D\Omega' D'$. Il n'y a en évidence sur la figure qu'une seule région satisfaisant à de telles conditions; c'est le cercle, couvert de hachures, contenu dans la circonférence C_1 passant par a_1. Finalement, pour x dans ce cercle et ξ allant à l'infini sur $O\Omega$, on a

$$\text{(G)} \qquad F(x) = \lim_{\xi = \infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_n}{x^{n+p}\, \varphi_p\!\left(\frac{\xi}{x}\right)} = \lim_{\xi = \infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_n}{x^{n+p}\, f\!\left(\frac{\xi}{x}\right)}.$$

La conclusion serait la même avec la formule (F) complétée pour le cas des pôles a_i multiples, du moins tant que f serait la fonction exponentielle.

Cette formule (G) et le domaine C_1 qui lui correspond entraînent des réflexions dignes de remarque. Tout d'abord l'aire C_1 peut, dans certains cas, s'étendre beaucoup et, précisément faute de place, la figure n'a pas été faite dans une hypothèse avantageuse. Supposons, par exemple, que les pôles $a_1, a_3, a_5, \ldots$ soient à peu près rangés sur une droite passant par O; alors en faisant jouer à cette droite le rôle de DOD' on voit que la région de sommabilité pourra s'étendre sur presque tout le demi-plan $D\Omega D'$.

En outre il est intéressant de remarquer que la formule (G) et l'aire C_1 ont des propriétés plus proches de celles de la série de Taylor et de son cercle de convergence que de celles des séries sommables et du polygone de sommabilité de M. Borel. Le polygone borélien a, en général, un point singulier a_i sur chaque côté et ne peut être tracé que par la considération d'autant de points singuliers qu'il a de côtés utiles. Pour la formule de Taylor, au contraire, le cercle de convergence ne dépend que de la connaissance d'un seul point singulier, savoir celui qui est le plus proche de l'origine. Il se passe quelque chose de tout à fait analogue pour la formule (G). On détermine l'aire C_1 correspondante en partant d'un cercle passant par O et dont le centre part de O sur $O\Omega$; dès que la circonférence d'un tel cercle mobile rencontre un point singulier, tel a_1, l'aire C_1 est déterminée.

12. *Dérivabilité.* — Si $F(x)$ n'a que des pôles simples, $F^{(m)}(x)$ a des pôles d'ordre $m + 1$; les polynômes tayloriens sont $s_m^{(m)}, s_{m+1}^{(m)}, s_{m+2}^{(m)}, \ldots$ Donc

$$F^{(m)}(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_{m+n}^{(m)}}{x^{n+p} f\left(\frac{\xi}{x}\right)}.$$

Comme p est arbitraire on peut remplacer p par $p + m$, ce qui finalement revient à

$$F^{(m)}(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+p}\, s_n^{(m)}}{x^{n+p} f\left(\frac{\xi}{x}\right)}.$$

Evidemment nous ne sommes plus dans le même cas qu'au n° 8 et ceci ne résulte plus d'une dérivation terme à terme de (G) mais c'est encore formuler pour (G) une règle de dérivation simple que de dire que, dans chaque terme, on doit dériver le numérateur seulement.

III. Le rôle des intégrales curvilignes.

13. Je considère comme très important d'avoir pu étudier le prolongement analytique des fonctions méromorphes, au moyen des expressions dont la première idée est due à MM. Mittag-Leffler et Borel, sans avoir eu recours au calcul intégral. La chose cesse probablement d'être possible pour des fonctions plus compliquées, notamment pour les fonctions non uniformes. Il importe alors de retrouver rapidement les formules dépendant d'intégrales curvilignes dues à M. Mittag-Leffler, de montrer comment elles donnent pour cas particuliers des formules telles que (A) et (D) et de chercher ensuite si ces formules ne sont pas susceptibles de généralisations pour des fonctions admettant d'autres singularités que des pôles. Cette dernière question me paraît tellement vaste que je me bornerai ici à quelques indications.

Soit toujours

$$\varphi_p(\xi) = f(\xi) - (c_0 + c_1 + \cdots + c_{p-1}), \quad \varphi_0(\xi) = f(\xi);$$

on aura

$$c_{n+p} = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \varphi_p(\zeta) \frac{\xi^{n+p}}{\zeta^{n+p+1}} d\zeta,$$

Γ étant un contour qui peut être une circonférence ayant l'origine pour centre et un rayon aussi grand qu'on veut. D'autre part on trouve facilement que

$$s_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C F(z)\,\frac{z^{n+1}-x^{n+1}}{z-x}\,\frac{dz}{z^{n+1}};$$

ici le contour C entoure d'abord l'origine puis peut grandir autant qu'on veut *à condition de ne franchir aucun des points singuliers a_i de $F(x)$.* On peut alors imaginer tout de suite une forme canonique pour ce contour C, laquelle d'ailleurs est souvent employée. Traçons l'étoile de M. MITTAG-LEFFLER formée de demi-droites issues des a_i, opposées à l'origine et figurées en pointillé sur la figure 3; alors C sera le contour figuré par un trait plein. Ces définitions posées, on a

$$c_{n+p}\,s_n = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int\limits_C\int\limits_\Gamma F(z)\,\varphi_p(\zeta)\,\frac{z^{n+1}-x^{n+1}}{z-x}\,\frac{\xi^{n+p}\,d\zeta\,dz}{\zeta^{n+p+1}\,z^{n+1}}.$$

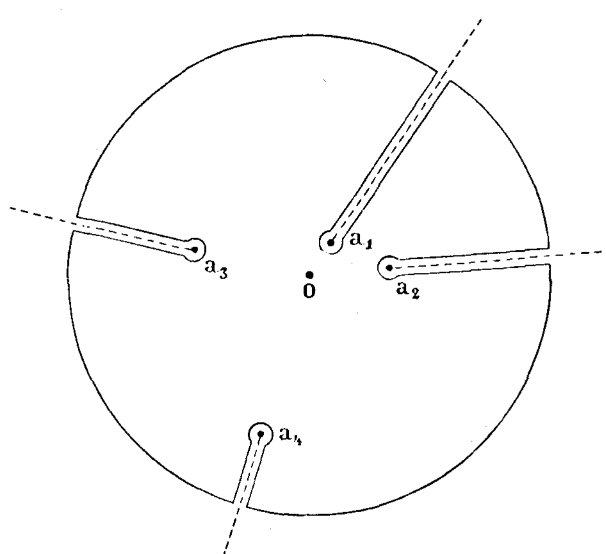

Fig. 3.

Sommons de $n=0$ à $n=\infty$; en s'appuyant sur les identités

$$\sum \frac{z^{n+1}-x^{n+1}}{\zeta^{n+p+1}\,z^{n+1}}\,\xi^{n+p} = \frac{\xi^p}{\zeta^p}\left[\sum \frac{\xi^n}{\zeta^{n+1}} - x\sum\frac{(\xi x)^n}{(\zeta z)^{n+1}}\right]$$

$$= \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^p \left(\frac{1}{\zeta-\xi} - \frac{x}{\zeta z-\xi x}\right) = \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^p \frac{\zeta(z-x)}{(\zeta-\xi)(\zeta z-\xi x)},$$

il vient finalement

$$\text{(H)}\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+p}\,s_n = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_C\int\limits_\Gamma \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^p \frac{F(z)\,\varphi_p(\zeta)}{(\zeta-\xi)\left(z-\frac{\xi x}{\zeta}\right)}\,d\zeta\,dz.$$

Les identités sur lesquelles on vient de s'appuyer ne sont vraies que si $|\xi| < |\zeta|$, $|\xi x| < |\zeta z|$ mais ici on peut les considérer comme toujours vraies car, quels que soient ξ et x, on peut toujours prendre le rayon $|\zeta|$ de Γ assez grand pour que les inégalités qu'on vient d'écrire soient satisfaites.

14. On peut étudier le second membre de (H) en considérant comme première variable d'intégration soit z, soit ζ. Je prends ζ. L'intégrale double peut s'écrire

$$\int\!\!\int \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^p \frac{F(z)\,\varphi_p(\zeta)}{(\zeta-\xi)(z-x)}\,dz\,d\zeta - \int\!\!\int \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^p \frac{x}{z}\,\frac{F(z)\,\varphi_p(\zeta)}{\left(\zeta-\frac{\xi x}{z}\right)(z-x)}\,dz\,d\zeta.$$

D'après la remarque qui termine le n° précédent ξ et $\frac{\xi x}{z}$ sont toujours dans Γ. On pourrait croire d'autre part que le dénominateur ζ^p qui figure dans les intégrales précédentes doive faire considérer l'origine du plan de Γ comme un pôle d'ordre p. Il n'en est rien car $\varphi_p(\zeta)$ contient ζ^p en facteur. Donc l'intégration en ζ conduit à remplacer (H) par

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+p}\,s_n = \frac{1}{2i\pi}\varphi_p(\xi)\int_C \frac{F(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2i\pi}\int_C \left(\frac{z}{x}\right)^{p-1}\varphi_p\left(\frac{\xi x}{z}\right)\frac{F(z)\,dz}{z-x}$$

d'où finalement

$$\text{(I)} \qquad \varphi_p(\xi)\,F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+p}\,s_n + \frac{1}{2i\pi}\int_C \left(\frac{z}{x}\right)^{p-1}\varphi_p\left(\frac{\xi x}{z}\right)\frac{F(z)\,dz}{z-x}.$$

Cette formule est du même type que celles formées par M. Mittag-Leffler dans ses dernières recherches (*Acta mathematica.* T. 29). Pour $p = 1$ elle coïncide même complètement avec l'une des formules du célèbre géomètre (*loc. cit.* p. 174) à cela près que ce dernier a considéré une étoile ayant pour centre un point régulier quelconque a. Ici $a = 0$.

15. *Cas où $F(x)$ est méromorphe.* — Depuis le début de ce Chapitre on n'a fait aucune hypothèse sur la nature des points singuliers a_i de la fonction $F(x)$. Observons d'abord que si $F(x)$ est méromorphe la formule (I) doit redonner les formules (A) et (D); c'est ce qu'on va vérifier.

Le contour C se compose d'une part de lacets enfermant chacun un a_i, d'autre part des arcs de cercle qui joignent les entrées des lacets et qui appartiennent tous à une même circonférence de centre O; si cette circonférence passe entre a_k et a_{k+1}, c'est celle qui a été désignée par C_k, au nº 1. Considérons d'abord les lacets. Toutes les fois qu'il s'agira d'une fonction $F(x)$ *uniforme*, ils n'interviendront que par les boucles de rayon infiniment petit qui entourent immédiatement les a_i et qui sont parcourues dans le sens inverse. Si a_i est un pôle d'ordre m il donnera le résidu

$$\frac{1}{(m-1)!} D_{z=a_i}^{m-1} \left[\left(\frac{z}{x}\right)^{p-1} \varphi_p\left(\frac{\xi x}{z}\right) \frac{F(z)}{x-z} (z-a_i)^m \right]$$

qui, convenablement développé par l'emploi des formules (9), n'est autre chose que le Δ du second sigma de (D). D'ailleurs, si a_i est un pôle simple, ce résidu se réduit immédiatement à l'expression qui est sous le second sigma de (A).

16. Considérons maintenant les arcs de C_k dont l'ensemble équivaut à cette circonférence entière. La fonction F étant uniforme le long de C_k, on peut considérer cette circonférence comme une couronne de Laurent aussi étroite qu'on veut et écrire

$$F(z) = \frac{1}{2 i \pi} \int_{C_k} F(u) \left(\frac{1}{u} + \frac{z}{u^2} + \cdots\right) du + \frac{1}{2 i \pi} \int_{C_k} F(u) \left(\frac{1}{z} + \frac{u}{z^2} + \cdots\right) du.$$

D'ailleurs

$$\left(\frac{z}{x}\right)^{p-1} \varphi_p\left(\frac{\xi x}{z}\right) = \gamma_p \xi^p \frac{x}{z} + \gamma_{p+1} \xi^{p+1} \frac{x^2}{z^2} + \gamma_{p+2} \xi^{p+2} \frac{x^3}{z^3} + \cdots$$

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \cdots.$$

C'est le produit de ces trois expressions qu'il s'agit d'intégrer le long de C_k; or ce produit est une série ordonnée suivant les puissances négatives et positives de z dont tous les termes, dans l'intégration indiquée, donnent des résultats nuls sauf celui qui contient z à la puissance -1. Il vient finalement

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (\gamma_p \xi^p + \cdots + \gamma_{p+n} \xi^{p+n}) \frac{x^{n+1}}{2 i \pi} \int_{C_k} \frac{F(u)\, du}{u^{n+2}},$$

ce qui est bien le dernier sigma de la formule (A) ou de la formule (D).

Si F se réduisait à une fraction rationnelle dont le degré du numérateur ne dépassât pas celui du dénominateur ce sigma pourrait disparaître; on pourrait prendre C_k assez grand pour contenir tous les pôles et l'intégrale de (I) relative à C_k, contenant non seulement $F(z)$ mais z et $(z-x)$ à la puissance -1, serait nulle quand le rayon de C_k croîtrait indéfiniment. C'est bien le résultat trouvé directement au n° 9.

17. *Généralisations des formules du type* (A). — Les derniers travaux sur le prolongement analytique aux moyen de séries de polynômes tayloriens, dûs à M. MITTAG-LEFFLER, s'appuient surtout sur des formules du type (I) dont on cherche à faire disparaître le dernier terme, d'où la création de fonctions entières telles que le rapport de $f\left(\frac{\xi x}{z}\right)$ à $f(\xi)$ tende vers zéro quand ξ va à l'infini. On peut dire que le problème ainsi limité est complètement résolu à l'heure actuelle par l'éminent géomètre à cela près qu'on pourra toujours introduire quelque nouveauté dans le choix des fonctions f, ces dernières étant en nombre illimité.

Mais il est visible que les formules (I) peuvent faire naître d'autres problèmes; prenons par exemple (A) qui n'est qu'un cas très particulier de (I); cette formule (A) conserve un très grand intérêt pour la représentation d'une fonction méromorphe sans qu'on ait besoin d'en détruire les derniers sigmas. On pourrait donc se proposer d'étudier l'intégrale curviligne qui figure dans (I) pour en connaître la nature intime et pas seulement pour la détruire.

Pour le moment je me bornerai, je le répète, à quelques indications.

Cette intégrale, du moins pour les fonctions à points singuliers isolés à distance finie, doit pouvoir se scinder en deux parties, l'une relative aux lacets du contour C (fig. 3), l'autre aux arcs de la circonférence C_k qui joignent les pieds des lacets.

Si $F(x)$ est uniforme le raisonnement du n° 16 est encore applicable; ainsi si parmi les a_i se trouvaient des points essentiels il faudrait sans doute modifier profondément les seconds sigmas des formules (A) ou (D) mais le troisième ne changerait pas.

Si $F(x)$ n'est pas uniforme on sort des lacets sur C_k avec une détermination qui n'est pas la même qu'à l'entrée et le raisonnement du n° 16 n'est plus applicable directement mais il semble alors qu'on puisse dans des cas très généraux modifier la figure 3 en y combinant les lacets de manière à rendre la fonction uniforme sur C_k. Je prends un exemple. Posons

$$u^2 = A(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)$$

et soit $F(z, u)$ une fonction algébrique du point analytique (z, u). En dehors des points de branchement a_1, a_2, a_3, a_4, la fonction $F(z, u)$ ne peut admettre que des pôles où elle est uniforme. Dans ces conditions on peut donner au contour C la forme I de la figure 4 car il est visible que celui-ci peut être engendré par un contour très petit qui entoure d'abord l'origine O et qui grandit sans franchir aucun point singulier. On peut ensuite passer de la forme I à la forme II car on ne supprime ainsi que des chemins qui se détruisent. Enfin prenant les lacets de la figure II par un point de leur partie rectiligne et amenant ce point en O on arrive à la forme III, les lacets et le contour circulaire devant être parcourus comme les flèches l'indiquent.

Le long du contour circulaire la fonction $F(z, u)$ est uniforme et, par suite,

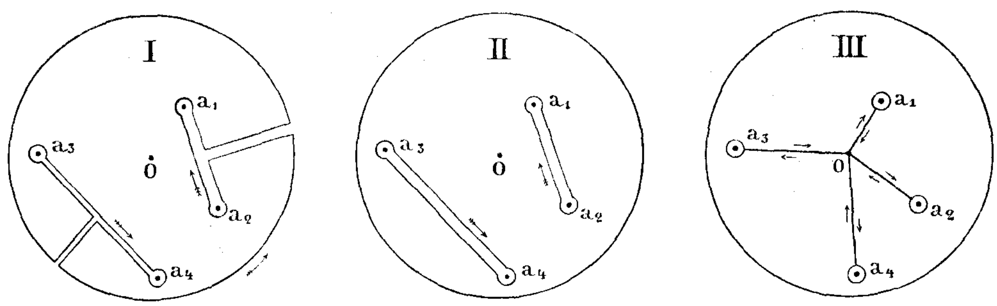

Fig. 4.

développable par la formule de LAURENT. Le raisonnement du n° 16 est encore applicable et l'intégrale de la formule (I) contient encore le sigma terminal des formules (A) ou (D). Quant au second sigma de ces formules il serait à remplacer par la somme de quatre intégrales égales à

$$\frac{1}{2 i \pi} \int \left(\frac{z}{x}\right)^{p-1} \varphi_p \left(\frac{\xi x}{z}\right) \frac{F(z, u)\, dz}{z - x}$$

prise suivant les lacets Oa.

Quant aux termes provenant des pôles uniformes ils ne donneraient lieu à aucun raisonnement nouveau.

Toulouse, le 31 Mars 1909.[1]

---

[1] Depuis que ce Mémoire est écrit j'ai réalisé quelques progrès quant aux théories y contenues. J'ai pu notamment représenter, par des séries de polynômes S_n et en faisant usage de fonctions sommatrices pourvues de zéros, des fonctions dont les développements tayloriens ne peuvent avoir qu'un rayon de convergence nul. Ces fonctions sont analogues à celles que M. H. POINCARÉ introduit en Mécanique Céleste en les représentant par des séries asymptotiques. On trouvera une Note sur ce sujet dans les *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* du 13 juin 1910.