SUR LES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE.

Extrait d'une seconde lettre adressée à l'éditeur

PAR

LEO KÖNIGSBERGER
à HEIDELBERG.

[Traduit par L. Laugel.]

Puisque vous attachez un certain intérêt à mes recherches sur la mécanique, je prends la liberté de vous communiquer encore les quelques résultats suivants, qui paraîtront prochainement dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin.

Si l'on nomme *potentiel* la fonction des forces correspondant à une force $f(r, r', r'', \ldots, r^{(2\nu)})$, qui dépend de la distance et de ses dérivées prises par rapport au temps jusqu'à l'ordre 2ν inclus — à supposer qu'une telle fonction existe — lorsque cette fonction des forces W, dépendant de r et des ν premières dérivées et définie par l'équation

$$f(r, r', r'', \ldots, r^{(2\nu)}) = \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial r'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial W}{\partial r''} - \ldots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial W}{\partial r^{(\nu)}},$$

renferme comme terme le plus élevé une expression de la forme

$$r^{(\nu)\alpha_\nu} r^{(\nu-1)\alpha_{\nu-1}} \ldots r''^{\alpha_2} r'^{\alpha_1}\left(\frac{c}{r} + c_1\right) \quad \text{ou} \quad r^{(\nu)\alpha_\nu} r^{(\nu-1)\alpha_{\nu-1}} \ldots r''^{\alpha_2} r'^{\alpha_1}\left(\frac{c}{r^2} + c_1 r + c_2\right),$$

selon que la grandeur

$$\varepsilon_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \ldots + (-1)^{\nu-1}\alpha_\nu \pmod{2}$$

déterminée par les équations

$$\alpha_\nu = 2k_\nu + \varepsilon_\nu, \qquad \alpha_{\nu-1} - \varepsilon_\nu = 2k_{\nu-1} + \varepsilon_{\nu-1}, \quad \ldots, \quad \alpha_2 - \varepsilon_3 = 2k_2 + \varepsilon_2,$$
$$\alpha_1 - \varepsilon_2 = 2k_1 + \varepsilon_1,$$

où les grandeurs ε désignent les nombres 0 ou 1, a pour valeur 0 ou 1, alors l'équation de Laplace généralisée pour le potentiel général sera

$$\Delta_{00}\Delta_{10}^{\varepsilon_1}\Delta_{11}^{k_1}\Delta_{21}^{\varepsilon_2}\Delta_{22}^{k_2}\ldots\Delta_{\nu-1\,\nu-2}^{\varepsilon_{\nu-1}}\Delta_{\nu-1\,\nu-1}^{k_{\nu-1}}\Delta_{\nu\,\nu-1}^{\varepsilon_\nu}\Delta_{\nu\nu}^{k_\nu}W = 0$$

pour une masse quelconque et pour un point situé en dehors de celle-ci, où

$$\Delta_{\varkappa\lambda}^{\mu} V$$

désigne l'expression μ fois itérée

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^{(\varkappa)}\partial x^{(\lambda)}} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^{(\varkappa)}\partial y^{(\lambda)}} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^{(\varkappa)}\partial z^{(\lambda)}},$$

et l'on a par conséquent pour la loi de Weber

$$\Delta_{00}\Delta_{11}W = 0.$$

Ensuite pour obtenir pour des potentiels qui dépendent de la distance et de ses dérivées premières la loi de Poisson généralisée pour un point situé à l'intérieur de la masse, je développe le potentiel d'une sphère creuse dont les couches concentriques sont homogènes et de rayons R_0 et R_1, et je trouve dans l'hypothèse de la loi de Weber pour le potentiel d'un point situé à l'extérieur de la sphère ou à l'intérieur de l'espace creux, l désignant la distance au centre de la sphère, v la vitesse du point, l' la projection de v sur la direction l, et σ la densité

$$W_a = M\left(\frac{1}{l} + \frac{l'^2}{k^2 l}\right) - \frac{4\pi}{3k^2}\frac{3l'^2 - v^2}{l^3}\int_{R_0}^{R_1}\sigma\rho^4 d\rho$$

et

$$W_i = 4\pi\int_{R_0}^{R_1}\sigma\rho\, d\rho + \frac{4\pi}{3k^2}v^2\int_{R_0}^{R_1}\sigma\rho\, d\rho;$$

le potentiel pour un point situé dans l'espace creux est donc indépendant de la situation du point et de la direction de la vitesse et a la forme

$a + bv^2$, où a et b sont des constantes. Si le point est situé dans l'espace sphérique annullaire, l'on a

$$W_m = 4\pi\left(\frac{1}{l} + \frac{l'^2}{k^2 l}\right)\int_{R_0}^{l} \sigma\rho^2 d\rho - \frac{4\pi}{3k^2}\frac{3l'^2 - v^2}{l^2}\int_{R_0}^{l} \sigma\rho^4 d\rho$$

$$+ 4\pi\int_{l}^{R_1} \sigma\rho d\rho + \frac{4\pi}{3k^2}v^2\int_{l}^{R_1} \sigma\rho d\rho$$

et par conséquent pour une sphère complète homogène

$$W_m = 2\pi\sigma\left(R^2 - \frac{l^2}{3}\right) + \frac{8\pi\sigma}{15k^2}l^2 l'^2 + \frac{2\pi\sigma}{3k}R^2 v^2 - \frac{2\pi\sigma}{5k^2}l^2 v^2.$$

D'où l'on conclut après une courte recherche, que l'équation de Poisson généralisée dans l'hypothèse de la loi de Weber est

$$\Delta_{00}\Delta_{11} W = -\frac{8\pi}{k^2}\sigma,$$

où σ désigne la densité de la masse attirante au point considéré.

Le mouvement d'un point compris dans l'espace annullaire sphérique, dans l'hypothèse de la loi de Weber, conduit à des intégrales hyperelliptiques simples.

Heidelberg le 5 janvier 1898.