SUR LES FONDEMENTS DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET LE PROBLÈME DU CONTINU

PAR

I. KÖNIG

à BUDAPEST.

Après de longues hésitations, je me décide à publier cet article. Quel que soit l'accueil réservés aux vues que j'y expose, je crois que les questions qu'il soulève sont de celles que la théorie des ensembles ne saurait éluder dans ses développements ultérieurs.

Que le mot »ensemble» ait été employé indistinctement pour désigner des concepts très différents et que ce soit là origine des paradoxes apparents de la théorie des ensembles; que d'autre part cette théorie, comme toute science exacte, ne puisse se passer d'axiomes, et que le choix des axiomes, plus profond ici qu'ailleurs, soit dans une certaine mesure arbitraire (comme il arrive pour toutes les sciences): tout cela est bien connu. Néanmoins je pense présenter sur ces questions quelques points de vue nouveaux. En particulier, je crois que la théorie *spéciale* des ensembles bien ordonnées ne saurait être regardée comme entièrement fondée tant que l'on n'aura pas éclairci les questions soulevées au § 4.

1. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots,$ une série infinie dénombrable (de type ω) d'entiers positifs, et soit la suite

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$$

un élément de l'ensemble appelé »continu». Si l'on est préalablement parti d'une autre définition du continu, alors les $(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ sont des symboles qui, d'une part, déterminent univoquement chacun des éléments du continu, et d'autre part distinguent ces éléments les uns des autres.

Nous dirons qu'un élément du continu a une »définition finie» si (nous servant pour fixer notre pensée scientifique d'une langue appropriée) nous pouvons en un temps fini définir une opération (loi de formation) conduisant à distinguer spécifiquement l'élément donné d'un autre élément quelconque, c'est à dire démontrant pour un entier quelconque k l'existence d'un et d'un seul élément a_k.

Il faut observer que la distinction spécifique dont il est ici question n'implique pas que la *détermination* de a_k puisse être faite au moyen d'une opération bien définie ou même finie.

On montre facilement que les éléments du continu dont la définition est finie forment un ensemble partiel de puissance $\aleph_0$. Nous désignerons cet ensemble par E.

Une définition finie doit s'exprimer tout entière au moyen d'un nombre fini de mots et de signes de ponctuation. L'ensemble des définitions finies peut être ordonné de telle sorte qu'à l'une quelconque de ces définitions corresponde un et un seul entier positif comme nombre ordinal fini.

A tout élément du continu ayant une définition finie correspond une suite d'entiers positifs (puisqu'un tel élément peut admettre et admet en effet une pluralité de définitions finies). Dans cette suite il y a un entier qui est plus petit que tous les autres. Cet entier déterminera donc d'une manière univoque l'élément correspondant (à définition finie) du continu.

Ainsi l'ensemble E est équivalent à un ensemble partiel pris dans l'ensemble des entiers positifs. D'ailleurs si l'on se donne une suite

$$(a\,,\,a\,,\,\ldots\,,\,a\,,\,\ldots),$$

où a prend des valeurs entières positives quelconques, cette suite constitue un élément du continu à définition finie. On déduit de ces remarques que

$$e = \aleph_0\,,$$

en désignant par e la puissance de l'ensemble E.

Mais comme le continu, par définition, n'est pas dénombrable, il y a nécessairement des éléments du continu dont la définition n'est pas finie.

2. Quoique cette exposition ne puisse encore prétendre à une rigueur parfaite, il faut néanmoins préciser les axiomes qui sont intervenus jusqu'ici dans mon raisonnement.

a) En premier lieu nous admettons comme un fait que notre conscience est le théâtre de processus qui obéissent aux lois formelles de la logique et constituent la »pensée scientifique». Nous admettons aussi que parmi ces processus il s'en trouve qui correspondent univoquement aux processus par lesquels nous formons les suites de symboles définies plus haut.

»Comment» se produit cette correspondance et »jusqu'où» elle va, ce sont là des questions que nous ne soulevions pas. (*Axiome métalogique.*)

b) Le concept de »suite arbitraire (de type ω) de nombres entiers positifs», et le concept de »l'ensemble de toutes ces suites», que nous appelons »continu», sont des »concepts possibles», c'est-à-dire des concepts qui ne renferment aucune contradiction logique. (*Axiome du continu.*)

Une analyse plus approfondie de ces axiomes se trouve, je crois, dans le memoire qu'a présenté M. HILBERT au III[e] Congrès international des Mathématiciens (C. R. du Congrès, p. 174).

La définition du continu sur laquelle je m'appuie implique, en particulier, que la puissance du continu est $\aleph_0^{\aleph_0}$.

On a en outre $\aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_0$. Pour le prouver on peut se référer à ma note *Zum Kontinuum Problem,* publiée dans les Math. Annalen, t. 60, p. 177.

En admettant ces données, je me mets sciemment en opposition avec la doctrine d'après laquelle il serait interdit aux analystes de s'aventurer hors du domaine des »lois finies». Une telle doctrine entraîne selon moi la négation de l'existence du continu et du problème du continu. Mon point de vue consiste au contraire à admettre qu'il y a des éléments du continu que nous ne pouvons pas penser »jusqu'au bout», et qui, malgré cela, sont exempts de contradiction. Ce sont, si l'on me passe cette nouvelle acception du mot, des éléments »idéaux».

c) Les axiomes précédents nous donnant le droit de parler d'un élément »quelconque» du continu, nous invoquons en dernier lieu l'*Antithèse logique:* »Ou un élément quelconque du continu a une définition finie, ou ce n'est pas le cas.» Les axiomes a) et b) une fois admis, l'axiome c) ne saurait pas ne pas l'être. On peut d'ailleurs, sans rien changer à nos déductions, lui donner une forme subjective: »Pour un élément quelconque du continu, on peut sûrement trouver une définition finie, ou ce n'est pas le cas».

3. Les données admises ci-dessus vont me permettre de prouver, d'une manière extraordinairement simple, que *le continu ne peut pas être bien ordonné.*

Supposons que les éléments du continu forment un ensemble bien ordonné, et considérons parmi ces éléments ceux qui n'ont pas une définition finie. Ces derniers constituent un ensemble partiel de l'ensemble bien ordonné, et cet ensemble partiel, étant lui-même bien ordonné, a un et un seul premier élément.

Or, d'après les données admises plus haut, le continu, comme tout ensemble bien ordonné, définit une suite bien enchaînée (sans lacune, »lückenlos») de nombres ordinaux déterminés, en sorte qu'à chaque élément du continu correspond un et un seul nombre ordinal et inversement. Dès lors »le nombre ordinal correspondant à un élément à définition finie du continu», de même que »l'élément du continu correspondant à un nombre ordinal à définition finie de la suite considérée», a lui-même une définition finie. Notre raisonnement nous forcerait dès lors à conclure que dans une suite de nombres ordinaux il y a un nombre qui est le premier de la suite et qui n'a pas de définition finie. Cela est manifestement impossible.

On a en effet un ensemble déterminé, bien ordonné, de nombres ordinaux à définition finie qui forment une suite bien enchaînée (lückenlos). »Le nombre ordinal qui, d'après son ordre de grandeur, se range immédiatement après la suite en question» est bien un nombre à définition finie, et cependant notre hypothèse initiale conduit à conclure qu'il n'a pas de définition finie.

Ainsi l'hypothèse d'après laquelle le continu pourrait être bien ordonné conduit, comme je l'avais annoncé, à une contradiction.

4. On suspectera sans doute la valeur du raisonnement précédent en faisant observer qu'il s'applique mot pour mot à *tout* ensemble bien ordonné non dénombrable. Il équivaudrait donc à prouver qu'il n'existe pas de tels ensembles. Or on connait un ensemble bien ordonné non dénombrable défini sans contradiction: c'est la classe de nombres $Z(\aleph_0)$ de M. Cantor, ou »l'ensemble de tous les types ordinaux des ensembles bien ordonnés de puissance $\aleph_0$». On voudra arguer de ce paradoxe qu'une faute

a été commise dans le raisonnement que j'ai exposé. Il ne *faut* pas, qu'il en soit ainsi, comme je vais le montrer en entrant dans quelques détails.

L'acception du mot »ensemble» diffère totalement dans les deux cas.

Lorsque nous construisons le concept du continu, notre point de départ, notre base est la suite »arbitraire» $(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$. En tant que nous remplaçons $a_1, a_2, \ldots$ par des entiers positifs déterminés, nous faisons de cette suite une suite »déterminée», un élément du continu qui, s'il est défini, est dans notre entendement distingué de tous les autres éléments. En tant que nous nous représentons ensuite *l'ensemble* de tous ces éléments »bien distincts», nous sommes conduits au continu.

Il en est tout autrement de la classe de nombres $Z(\aleph_0)$. Les »éléments» de cette classe sont définis par la »propriété» qu'ils ont d'être les types ordinaux d'ensembles bien ordonnés de puissance $\aleph_0$. Nous connaissons à vrai dire de tels éléments, par exemple: $\omega, \omega + 1, \ldots$. Mais la propriété qui les définit n'est qu'une abstraction; à mettre les choses au mieux, elle fournit un moyen de distinguer entre les objets qui appartiennent à la classe considérée et les autres objets; mais elle ne donne aucune indication sur la manière dont on pourra effectivement former *chacun* des éléments de $Z(\aleph_0)$. C'est ici un »concept collectif» qui est notre base, et c'est en partant de ce concept que nous construisons *après coup* des éléments. C'est pourquoi je voudrais qu'avec M. Cantor on appelât $Z(\aleph_0)$ une »classe» en non un »ensemble».

Mais que la seconde classe de nombres $Z(\aleph_0)$ puisse être définie comme ensemble explicite formé d'éléments bien distingués (distincts par leur nature), cela ne saurait actuellement être regardé comme vraisemblable. Et précisément, si l'on accepte la démonstration que j'ai donnée plus haut, on en déduira que la seconde classe de nombres ne saurait être conçue comme étant un ensemble donné explicitement, c'est-à-dire comme ensemble d'éléments parfaitement distingués et séparés les uns des autres.[1]

---

[1] Là se trouve, je crois, l'origine des paradoxes de la théorie des nombres ordinaux, que M. Burali-Forti a signalés le premier.

J'ajouterai encore quelques remarques qui facilitent peut-être la compréhension du § 4.

L'ensemble des nombres entiers positifs n'est lui aussi originairement donné que comme »classe». C'est également ainsi que M. Hilbert définit (l. c.) le »plus petit

En terminant cet exposé fragmentaire, je me plais à reconnaître que, bien qu'opposés à certaines vues de M. CANTOR, mes résultats, s'ils sont exacts, ne mettent que mieux en lumière la haute valeur des créations géniales de l'illustre analyste. Ce ne sont d'ailleurs que certaines présomptions de M. CANTOR qui seraient infirmées par ce travail: le contenu des propositions *démontrées* par lui subsiste intact.

Je remarque enfin que la distinction établie ici entre les »ensembles» et les »classes» éclaircit entièrement les paradoxes bien connus de la théorie des ensembles (ensemble de tous les ensembles etc.).

Les principaux résultats exposés ci-dessus ont été présentés à l'Académie Hongroise des Sciences le 20 juin 1905.

---

infini». Mais il semble qu'ici le postulat qui consiste à assimiler la classe à un ensemble explicitement donné soit possible, c'est-à-dire exempt de contradiction.

Au contraire, d'après ce qui précède, on devrait regarder le continu comme étant exclusivement un »ensemble explicitement donné», et la seconde classe de nombres comme étant exclusivement une classe ou (si l'on me permet l'expression) un »ensemble en puissance», (werdende Menge).

Je veux encore signaler un concept collectif très élémentaire que sûrement on n'a pas le droit de considérer comme ensemble explicitement donné.

Partons de l'ensemble de tous les nombres décimaux finis, mais regardons ces nombres comme ayant une infinité de décimales, cela en ajoutant à leur droite une infinité de zéros.

Imaginons que dans les nombres ainsi écrits nous échangions deux chiffres quelconques. Toutes les places sont disponibles, c'est-à-dire que si nous remplaçons un chiffre quelconque par un autre chiffre quelconque, nous obtenons un nombre qui appartient encore à la classe considérée.

Et cependant il n'est aucunement permis de parler de l'ensemble de tous les places, comme places disposibles; car alors on omettrait manifestement de faire intervenir le principe restrictif auquel satisfait la loi de formation de nos nombres. Ce principe est le suivant: »La place de rang k est disponible; mais il existe nécessairement un entier positif $l > k$, tel qu'à partir de la place de rang l toutes les places soient occupées par le chiffre 0.»

Pour répondre à la question: »Combien y a-t-il de places disponibles simultanément?» les nombres cardinaux (au sens de M. CANTOR) sont inadéquats: il faut créer un nouveau concept.