ESSAIS SUR LE CALCUL DU NOMBRE DES CLASSES DE FORMES QUADRATIQUES BINAIRES AUX COEFFICIENTS ENTIERS

PAR

M. LERCH
à FRIBOURG.

CHAPITRE III.

Nous allons exposer les résultats de nature algébrique qui lient la théorie de l'équation binôme à la question qui nous occupe. GAUSS, dans la septième section des Disquisitiones, a montré l'existence de la décomposition suivante

$$4\frac{x^p - 1}{x - 1} = Y^2 \pm pZ^2,$$

p étant premier, et Y et Z des polynômes aux coefficients entiers. LEJEUNE-DIRICHLET[1] et JACOBI[2] ont généralisé les résultats de GAUSS au cas d'un discriminant fondamental positif, et ont découvert le rôle que jouent les polynômes Y et Z dans la détermination du nombre des classes d'un discriminant positif. CAUCHY[3] paraît le premier avoir reconnu nettement comment la décomposition de GAUSS généralisée dépende du discriminant (qui remplace alors le nombre p) supposé fondamental, positif ou négatif,

[1] *Sur la manière de résoudre l'équation $t^2 - pu^2 = 1$ au moyen des fonctions circulaires,* (Journal de Crelle, t. 17).

[2] *Über die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie* (Monatsberichte der kön. preussischen Akademie der Wiss. zu Berlin, 1837).

[3] Oeuvres de Cauchy, Ie série, vol. 5, p. 84.

pair ou impair. Parmi les continuateurs de ces grands inventeurs nous sont connus les travaux de J. LIOUVILLE,[1] O. SCHEMMEL,[2] de MM. ALEXANDER BERGER[3] et H. WEBER.[4] Si l'on compare les résultats obtenus par ces éminents géomètres avec ce qu'on lira dans ce chapitre, on remarquera qu'il n'y a pas grande chose qui nous soit personnelle; cette partie présente en effet un caractère de compilation. Cependant certains détails que nous croyons neufs et notre manière d'exposition me paraissent mériter l'attention. D'ailleurs, nous aidant par les besoins de la théorie de KRONECKER, nous avons retrouvé tout ce qui est exposé ici avant de connaître les mémoires originaux qui sont venus après le travail de DIRICHLET.

1. Soit D un discriminant fondamental, positif ou négatif, Δ sa valeur absolue et observons que l'expression suivante

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{\nu}\right)+\left(\frac{D^2}{\nu}\right)\right]$$

a pour valeur l'unité, si $\left(\frac{D}{\nu}\right) = 1$, et s'annule dans tous les autres cas. L'expression

$$(1^a) \qquad A(x, D) = \prod_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{\nu}\right)+\left(\frac{D^2}{\nu}\right)\right]}$$

est donc le produit des facteurs $x - e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}$ qu'on obtient en prenant pour a tous les nombres de la suite $1, 2, 3, \ldots, \Delta - 1$ qui satisfont à la condition

$$\left(\frac{D}{a}\right) = 1;$$

donc

$$A(x, D) = \prod_{a}\left(x - e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}\right).$$

[1] Journal de LIOUVILLE, 2e série, t. 2; 1857.

[2] *De multitudine formarum secundi gradus disquisitiones;* Vratislaviae, 1863.

[3] *Sur une application de la théorie des équations binômes à la sommation de quelques séries* (Nova Acta reg. Societatis scient. Upsaliensis, t. 13, 1886).

[4] Nachrichten der kön. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen, 1893.

Représentons de l'autre côté par b tous les entiers de la dite suite qui satisfont à la condition

$$\left(\frac{D}{b}\right) = -1;$$

alors la fonction

$$(1^b) \qquad B(x, D) = \prod_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}\right)^{\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{D}{\nu}\right)+\left(\frac{D^2}{\nu}\right)\right]}$$

n'est autre chose que le produit

$$B(x, D) = \prod_b \left(x - e^{\frac{2b\pi i}{\Delta}}\right).$$

L'identité

$$0 = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \sum \left(\frac{D}{a}\right) + \sum \left(\frac{D}{b}\right)$$

prouve que le nombre des éléments a est égal à celui des éléments b, et la valeur commune de ces nombres est, en employant l'écriture de Gauss, évidemment $\frac{1}{2}\varphi(\Delta)$.

Les polynômes $A(x)$ et $B(x)$ sont donc du degré $\frac{1}{2}\varphi(\Delta)$.

Les racines des équations $A(x) = 0$ et $B(x) = 0$ constituent la totalité des racines primitives d'ordre Δ de l'unité, et par conséquent, on aura

$$(2) \qquad A(x)B(x) = F(x),$$

$F(x)$ désignant le polynôme irréductible aux coefficients rationnels qui s'annule pour $x = e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}$. J'écrirai $F(x, \Delta)$ lorsqu'il faudra indiquer la valeur de Δ. On sait que

$$(3) \qquad F(x, \Delta) = \prod_d \left(x^{\frac{\Delta}{d}} - 1\right)^{\mu(d)},$$

le produit se rapportant à tous les diviseurs d du nombre Δ et $\mu(d)$ désignant les nombres de Moebius. Par exemple

$$F(x, 15) = \frac{(x^{15}-1)(x-1)}{(x^3-1)(x^5-1)} = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1.$$

Des définitions (1ª) et (1ᵇ) on tire l'équation formellement plus simple

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \prod_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}\right)^{\left(\frac{D}{\nu}\right)} \tag{4}$$

d'où en prenant les dérivées logarithmiques,

$$\frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{B'(x)}{B(x)} = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{1}{x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}}. \tag{5}$$

Posant, pour abréger,

$$\Phi(x) = \log\frac{A(x)}{B(x)},$$

l'équation (5) s'écrira

$$\Phi'(x) = \sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{1}{x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}},$$

J'y suppose $|x| < 1$ et j'emploie le développement en série géométrique

$$\frac{1}{e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} - x} = \sum_{\mu=1}^{\infty} e^{-\frac{2\mu\nu\pi i}{\Delta}} x^{\mu-1},$$

d'où

$$\Phi'(x) = -\sum_{\mu=1}^{\infty} x^{\mu-1}\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\nu}\right)e^{-\frac{2\mu\nu\pi i}{\Delta}}.$$

Or, D étant un discriminant fondamental, on a

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\nu}\right)e^{-\frac{2\mu\nu\pi i}{\Delta}} = \left(\frac{D}{\mu}\right)\sqrt{D}\,\operatorname{sgn} D,$$

de sorte qu'en substituant, il vient

$$\Phi'(x) = -\sqrt{D}\,\operatorname{sgn} D\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\mu}\right)x^{\mu-1},$$

ou bien

$$\frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{B'(x)}{B(x)} = -\sqrt{D}\,\operatorname{sgn} D\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\mu}\right)x^{\mu-1}, \qquad (|x| < 1). \tag{6}$$

Quant à la fonction $\Phi(x)$ elle-même, l'intégration donne

$$\Phi(x) = \log c - \sqrt{D}\operatorname{sgn} D \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{\mu}\right) \frac{x^\mu}{\mu},$$

où il faut encore déterminer la constante c. On a évidemment

$$\log c = \log \prod e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}\left(\frac{D}{\nu}\right)},$$

et puisque

$$\sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{\nu}{\Delta} = \begin{cases} 0 \text{ pour } D > 0, \\ -\frac{2}{\tau_\Delta} Cl(D) \text{ pour } D < 0, \end{cases}$$

on aura

$$c = \begin{cases} e^{-\frac{2\pi i}{3}} \text{ pour } D = -3, \\ -1 \text{ pour } D = -4, \\ 1 \text{ dans d'autres cas.} \end{cases}$$

Avec cette valeur de c, on a par conséquent la formule

$$\log \frac{A(x)}{B(x)} = \log c - \sqrt{D} \operatorname{sgn} D \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\mu}\right) \frac{x^\mu}{\mu}. \qquad (|x| < 1). \tag{7}$$

Quant à la fonction $F(x)$, il suffit de se rappeler la formule

$$F(x) = \prod_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}\right)^{\left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right)}$$

pour en tirer

$$\log F(x) = \log c' - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right) e^{\frac{2m\nu\pi i}{\Delta}}.$$

En observant que l'on a $c' = 1$, puisque

$$F(0) = 1,$$

et que la somme

$$\sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right) e^{\frac{2m\nu\pi i}{\Delta}} = -c_m$$

a pour valeur l'expression

$$\sum_{\delta} \mu(\Delta'\delta)\frac{\Delta_m}{\delta},$$

où Δ_m représente le plus grand commun diviseur des nombres m et Δ, puis Δ' signifie le quotient $\frac{\Delta}{\Delta_m}$ et δ parcourt tous les diviseurs du nombre Δ_m, on aura une série

$$\log F(x) = \sum_1^{\infty} \frac{c_m}{m} x^m$$

dont les coefficients sont des nombres rationnels, et en particulier les numérateurs c_m sont des nombres entiers.

Si Δ est impair, il n'admet aucun diviseur carré et il s'ensuit que $\mu(\Delta'\delta) = \mu(\Delta')\mu(\delta)$, et la formule

$$\Delta_m \sum_{\delta} \frac{\mu(\delta)}{\delta} = \varphi(\Delta_m)$$

fait voir que l'on a

$$c_m = -\mu(\Delta')\varphi(\Delta_m).$$

Si, au contraire, Δ est pair, on aura $c_m = 0$ pour m impair.

Des formules

$$\log A(x) = \frac{1}{2}[\Phi(x) + \log F(x)]$$

$$= \log\sqrt{c} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(c_m - \left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\operatorname{sgn} D\right)\frac{x^m}{2m},$$

$$\log B(x) = \frac{1}{2}[-\Phi(x) + \log F(x)]$$

$$= \log\sqrt{\frac{1}{c}} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(c_m + \left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\operatorname{sgn} D\right)\frac{x^m}{2m}$$

on tire

$$A(x) = \sqrt{c}\, e^{\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(c_m - \left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\operatorname{sgn} D\right)\frac{x^m}{2m}},$$

$$B(x) = \sqrt{\frac{1}{c}}\, e^{\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(c_m + \left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\operatorname{sgn} D\right)\frac{x^m}{2m}}.$$

Cela étant, observons qu'une expression exponentielle

$$e^{\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots}$$

se développe en une série

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

dont les coefficients a_m s'expriment en fonction rationnelle des éléments $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ dont le rang ne dépasse pas celui de a_m.

Les développements suivant les puissances de x des fonctions $A(x)$ et $B(x)$ seront alors de la forme

$$A(x) = \sqrt{c}\left[1 + (a_1 + b_1\sqrt{D})x + (a_2 + b_2\sqrt{D})x^2 + \dots\right],$$

$$B(x) = \frac{1}{\sqrt{c}}\left[1 + (a_1 - b_1\sqrt{D})x + (a_2 - b_2\sqrt{D})x^2 + \dots\right],$$

les a_ν ainsi que les b_ν étant des nombres rationnels. Mais ces fonctions-là étant des fonctions entières, les séries se réduiront à un nombre fini de termes, et il s'ensuit que les coefficients dans les polynômes $\frac{A(x)}{\sqrt{c}}$ et $B(x)\sqrt{c}$ sont des nombres algébriques de la forme $a + b\sqrt{D}$. Cela a lieu pour les coefficients de $A(x)$ et $B(x)$ elles-mêmes, si $\Delta > 4$, car alors on a $c = 1$.

Si $\Delta = 4$, on a $D = -4$, $\sqrt{D} = 2i$, $c = -1$, $\sqrt{c} = \pm i$, et les coefficients $\frac{a+b\sqrt{D}}{\sqrt{c}}$, $(a + b\sqrt{D})\sqrt{c}$ seront alors $\pm\left(2b - \frac{a}{2}\sqrt{D}\right)$, $\pm\left(-2b + \frac{a}{2}\sqrt{D}\right)$ et il est clair que la forme $a + b\sqrt{D}$ reste conservée.

La même chose a lieu dans le cas de $\Delta = 3$, $D = -\Delta$, puisque $\sqrt{c}$ est ici aussi de la forme $\alpha + \beta i\sqrt{D}$.

Donc, dans tous les cas, les coefficients des polynômes $A(x)$ et $B(x)$ appartiennent au domaine de rationalité $(1, \sqrt{D})$. Mais ils sont des sommes de produits des nombres algébriques entiers tels que $e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}$, et il faut qu'ils soient eux-mêmes des nombres algébriques entiers.

Deux nombres algébriques entiers de la forme

$$a + b\sqrt{D} \quad \text{et} \quad a - b\sqrt{D}$$

ont pour somme et pour différences $2a$ et $2b\sqrt{D}$ qui doivent aussi être entières. Si D est impair, il faut donc que $2a = m$ et $2b = n$ soient des entiers, et on aura la forme

$$a + b\sqrt{D} = \frac{m + n\sqrt{D}}{2},$$

m et n étant deux entiers ordinaires.

En cas de D pair, on peut rendre $(2b\sqrt{D})^2 = 4b^2D$ entier en supposant $16b^2$ entier, c'est à dire en prenant $b = \frac{1}{4}n$, n étant un entier. Si celui-ci est impair, on aura en faisant $2a = m$

$$a + b\sqrt{D} = \frac{m + n\sqrt{\frac{1}{4}D}}{2}, \qquad a - b\sqrt{D} = \frac{m - n\sqrt{\frac{1}{4}D}}{2};$$

le produit de ces expressions devant être un entier ordinaire

$$\frac{1}{4}\left(m^2 - n^2\frac{D}{4}\right),$$

on a la congruence (n étant impair)

$$m^2 \equiv \frac{D}{4} \pmod 4$$

chose impossible pour un discriminant fondamental. Donc toujours les deux nombres $2a$ et $2b$ sont entiers.

Les coefficients des polynômes $2A(x)$ et $2B(x)$ étant de la forme $m \pm n\sqrt{D}$ où m et n sont des entiers ordinaires, on peut séparer les parties contenant le radical $\sqrt{D}$ et il vient

$$2A(x) = Y(x) \pm \sqrt{D}\,Z(x),$$
$$2B(x) = Y(x) \mp \sqrt{D}\,Z(x),$$

Y et Z signifiant deux polynômes aux coefficients entiers. Le double signe qui figure aux seconds membres devient déterminé, si l'on choisit le signe du terme le plus élevé dans le polynôme $Z(x)$. On convient de prendre le coefficient de la puissance de x la plus élevée dans le polynôme $Z(x)$ positif.

Des équations (1^a) et (1^b) résulte que l'on a

$$A(x) = x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} - \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{\nu}\right) + \left(\frac{D^2}{\nu}\right)\right] e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + \dots,$$

$$B(x) = x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} - \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{D}{\nu}\right) + \left(\frac{D^2}{\nu}\right)\right] e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + \dots,$$

d'où

$$A(x) + B(x) = 2x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} - \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D^2}{\nu}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + \dots,$$

$$A(x) - B(x) = - \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + \dots.$$

La dernière expression commençant par le terme en $x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1}$ dont le coefficient est

$$- \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} = -\sqrt{D},$$

l'équation

$$A(x) - B(x) = \pm\sqrt{D}Z(x)$$

fait voir que le signe $\pm$ est $-$. On a donc en définitif

$$(8) \qquad \begin{cases} 2A(x, D) = Y(x, D) - \sqrt{D}Z(x, D), \\ 2B(x, D) = Y(x, D) + \sqrt{D}Z(x, D). \end{cases}$$

Les fonctions Y et Z sont de la forme

$$(9) \qquad \begin{cases} Y(x) = 2x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} + a_1 x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + a_2 x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-2} + \dots, \\ Z(x) = x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + b_1 x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-2} + \dots; \end{cases}$$

remarquons que le coefficient a_1 est

$$a_1 = - \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D^2}{\nu}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}},$$

c'est à dire qu'il est identique au coefficient de $x^{\varphi(\Delta)-1}$ dans la fonction $F(x, \Delta)$.

L'équation

$$A(x)B(x) = F(x)$$

s'écrira [1]

$$Y^2(x, D) - DZ^2(x, D) = 4F(x, \Delta). \tag{10}$$

Cette identité caractérise complètement les fonctions Y et Z, si l'on ajoute que leurs coefficients soient rationnels, celui de la plus haute puissance en Z étant supposé positif.

Car si l'on avait une autre décomposition analogue

$$4F = Y_1^2 - DZ_1^2,$$

la fonction $Y_1 - Z_1\sqrt{D}$ s'évanouirait pour certaines racines de l'une des deux équations

$$Y \pm Z\sqrt{D} = 0.$$

Le plus grand commun diviseur des premiers membres

$$Y_1 - Z_1\sqrt{D}, \qquad Y \pm Z\sqrt{D}$$

serait un polynôme de la forme $Y_2 - Z_2\sqrt{D}$, Y_2 et Z_2 étant deux polynômes aux coefficients rationnels des degrés inférieurs à $\frac{1}{2}\varphi(\Delta)$. Le polynôme aux coefficients rationnels

$$(Y_2 - Z_2\sqrt{D})(Y_2 + Z_2\sqrt{D}) = Y_2^2 - DZ_2^2$$

et du degré inférieur à $\varphi(\Delta)$ s'annulant pour une racine primitive de l'unité, la fonction $F(x)$ devrait être réductible, chose impossible. Donc les polynômes Y et Z sont complètement définis par l'identité (10).

2. Les équations (8) donnent tout de suite

$$\frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{B'(x)}{B(x)} = 2\sqrt{D}\,\frac{Z(x)Y'(x) - Y(x)Z'(x)}{Y^2(x) - DZ^2(x)}$$

[1] Le procédé le plus rapide pour le calcul des coefficients des polynômes Y et Z a été donné par LEGENDRE (*Mémoire sur la détermination des fonctions Y et Z etc.*, Mémoires de l'acad., t. 11, 1830); il repose sur ce que les sommes de puissances semblables des racines de $A(x) = 0$ et $B(x) = 0$ sont données immédiatement; les coefficients s'obtiennent à l'aide des formules de Newton.

ou en faisant usage de (10),

$$\frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{B'(x)}{B(x)} = \sqrt{D}\,\frac{Z(x)\,Y'(x) - Y(x)\,Z'(x)}{2F(x)}. \tag{11}$$

On parvient à une autre représentation du premier membre, si l'on emploie le développement (6).

La série qui y figure

$$S = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\mu}\right) x^{\mu-1}$$

peut se transformer en faisant $\mu = \rho + \Delta\nu$ ($\rho = 1, 2, \ldots, \Delta$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty$); on a

$$\left(\frac{D}{\mu}\right) = \left(\frac{D}{\rho}\right)$$

et par conséquent

$$S = \sum_{\rho=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\rho}\right) x^{\rho-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\Delta\nu} = \frac{1}{1 - x^{\Delta}} \sum_{\rho=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\rho}\right) x^{\rho-1}.$$

Nous sommes ainsi amenés à introduire la fonction entière

$$Q(x) = \sum_{\rho=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\rho}\right) x^{\rho} = Q(x, D). \tag{12}$$

Nous aurons alors

$$\frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{B'(x)}{B(x)} = \frac{\sqrt{D}\,\operatorname{sgn} D}{x(x^{\Delta} - 1)}\, Q(x). \tag{13}$$

En comparant avec (11) nous aurons

$$Q(x) \operatorname{sgn} D = \frac{1}{2}\, x\, \frac{x^{\Delta} - 1}{F(x)} \left[Z(x)\,Y'(x) - Y(x)\,Z'(x)\right]. \tag{14}$$

Représentons maintenant par Δ_ν tous les diviseurs du nombre Δ plus petits que Δ, y compris l'unité, et formons le produit[1]

$$\prod_{\nu} F(x, \Delta_\nu)$$

[1] Remarquons qu'il faut prendre, p. ex.

$$F(x, 1) = x - 1, \qquad F(x, 2) = x + 1, \qquad F(x, 4) = x^2 + 1, \quad \text{etc.}$$

de tous les polynômes $F(x, \Delta_\nu)$ correspondants. Alors le quotient

$$\frac{x^\Delta - 1}{F(x)}$$

aura pour valeur $\Pi F(x, \Delta_\nu)$ et l'équation (14) s'écrira comme il suit

$$(14^*) \qquad Q(x)\operatorname{sgn} D = \frac{1}{2} x[Z(x)Y'(x) - Y(x)Z'(x)] \prod_\nu F(x, \Delta_\nu).$$

Étant connues les fonctions $F(x)$ et $Q(x)$, on pourra caractériser les polynômes Y et Z d'une manière purement algébrique par une congruence que nous allons établir.

J'observe d'abord que pour les valeurs $x = e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}$ où ν est premier avec Δ, la quantité $Q^2(x)$ se réduit à D, de sorte que le polynôme $Q^2(x) - D$ est divisible par $F(x)$. Le quotient ayant de même les coefficients entiers, on aura la congruence

$$(15) \qquad Q^2(x) \equiv D \ [\operatorname{mod} F(x)].$$

Cela étant, j'observe que pour $x = e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}$ on a

$$Q(x) = \sqrt{D}, \qquad Y(x) - \sqrt{D}\, Z(x) = 0,$$

de sorte que la fonction entière aux coefficients rationnels

$$Y(x) - Q(x)Z(x)$$

s'annule pour $x = e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}$; elle doit donc admettre le diviseur irréductible $F(x)$, d'où la congruence

$$(16) \qquad Y(x) \equiv Q(x)Z(x) \ [\operatorname{mod} F(x)].$$

Pour prouver que cette congruence à deux inconnues algébriques Y et Z n'admet qu'une seule solution dont les développements soient de la forme (9), élevons au carré les deux membres et faisons usage de (15); on aura

$$Y^2 \equiv DZ^2 \ [\operatorname{mod} F(x)].$$

La fonction entière

$$\frac{Y^2 - DZ^2}{F(x)}$$

étant, d'après (9), du degré zéro, elle est une constante qui n'est autre chose que le nombre 4; on a donc

$$Y^2 - DZ^2 = 4F,$$

identité dont on sait qu'elle est caractéristique pour les fonctions Y et Z.

3. Revenons sur l'équation (14*). Le produit qui y figure

$$\Pi F(x, \Delta_\nu)$$

contient le facteur $F(x, 1) = x - 1$, et le quotient que j'appelle $G(x)$ ne s'annule plus pour $x = 1$. On aura

$$G(x) = \frac{x^\Delta - 1}{(x-1)F(x)}, \tag{a}$$

$$Q(x)\operatorname{sgn} D = \frac{1}{2}x(x-1)G(x)[Z(x)Y'(x) - Y(x)Z'(x)]. \tag{b}$$

En différentiant et prenant $x = 1$, il vient

$$Q'(1)\operatorname{sgn} D = G(1)\frac{ZY' - YZ'}{2},$$

en mettant pour un moment $Y^{(a)}$ et $Z^{(a)}$ au lieu de $Y^{(a)}(1)$ et $Z^{(a)}(1)$. L'équation (a) donne ensuite

$$G(1) = \frac{\Delta}{F(1)},$$

et nous savons que $F(1) = 1$ pour Δ composé, mais que $F(1) = \Delta$ pour Δ premier ou puissance d'un nombre premier. Observant que $\Delta \operatorname{sgn} D = D$, nous aurons donc

$$\sum_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\rho}\right)\rho = D\frac{ZY' - YZ'}{2F(1)}.$$

Dans le cas de $D > 0$ le premier membre s'évanouit et nous aurons

$$ZY' - YZ' = 0.$$

Nous verrons plus tard que, pour D positif, les deux quantités $Y(1)$ et $Z(1)$ sont différentes de zéro, de sorte qu'il vient

$$\frac{Y(1)}{Z(1)} = \frac{Y'(1)}{Z'(1)}, \quad (D > 0). \tag{17}$$

Soit en second lieu $D = -\Delta$ un discriminant négatif; on a comme on sait

$$\sum_{\rho=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\rho = -\frac{2\Delta}{\tau} Cl(-\Delta),$$

ensuite la relation

$$Y^2 + \Delta Z^2 = 4F, \qquad (x = 1),$$

fait connaître l'une des deux quantités Y et Z.

Si le nombre Δ est composé et plus grand que huit on a $F = 1$, et par conséquent $Z = 0$. On a donc

$$\text{(c)} \qquad Z(1, -\Delta) = 0, \qquad Y(1, -\Delta) = \pm 2 \quad (\Delta \text{ composé} > 8).$$

et il s'ensuit que

$$\text{(d)} \qquad -Y(1, -\Delta)Z'(1, -\Delta) = 2Cl(-\Delta), \quad (\Delta \text{ composé} > 8).$$

Cette équation se simplifiera plus tard, lorsque nous aurons déterminé le signe de la quantité $Y(1)$. Dans le cas de $\Delta = 8$ on a

$$F(1) = 2, \qquad Y(1) = 0, \qquad Z(1) = 1, \qquad Y'(1) = 4,$$

d'où il suit

$$Cl(-8) = \frac{Z(1)Y'(1)}{4} = 1.$$

Pour $\Delta = 4$ on a de même

$$F(1) = 2, \quad \text{mais} \quad Z'(x) = 0, \qquad Y'(x) = 2,$$

et il vient

$$Z(1)Y'(1) = 4\frac{2}{\tau} Cl(-4) = 2.$$

Si en second lieu Δ est premier, on a $F(1) = \Delta$ et nous aurons, pour $x = 1$,

$$Y^2 + \Delta Z^2 = 4\Delta;$$

cela exige que Y admet le facteur Δ, de sorte qu'on aura $Y = \Delta y$; il vient

$$Z^2 + \Delta y^2 = 4,$$

de sorte que pour $\Delta > 3$, on aura $y = 0$, $Z = \pm 2$.

Par conséquent, ces formules

$$(c') \qquad Y(1, -\Delta) = 0, \qquad Z(1, -\Delta) = \pm 2, \quad (\Delta \text{ premier} > 3)$$

donnent

$$(d') \qquad Z(1, -\Delta)\, Y'(1, -\Delta) = 2\Delta\, Cl(-\Delta).$$

Nous parviendrons plus tard à la détermination du signe de $Z(1)$.

4. Quant aux propriétés des fonctions $A(x)$ et $B(x)$ remarquons d'abord que les définitions donnent

$$A(0) = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} \prod_a e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}, \qquad B(0) = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} \prod e^{\frac{2b\pi i}{\Delta}}$$

$$\left(a, b = 1, 2, 3, \ldots, \Delta - 1;\ \left(\frac{D}{a}\right) = 1,\ \left(\frac{D}{b}\right) = -1\right),$$

d'où l'on tire aisément, pour $D > 0$, les résultats $A(0) = B(0) = 1$, ou bien

$$(18^a) \qquad Y(0) = 2, \qquad Z(0) = 0, \quad \text{pour} \quad D > 0.$$

Dans le cas de discriminant négatif on trouve d'abord

$$\frac{2}{\Delta}\Sigma a = \frac{1}{2}\varphi(\Delta) - \frac{2}{\tau}Cl(-\Delta), \qquad \frac{2}{\Delta}\Sigma b = \frac{1}{2}\varphi(\Delta) + \frac{2}{\tau}Cl(-\Delta);$$

on aura donc, pour $\Delta > 4$, $D = -\Delta$:

$$A(0) = B(0) = (-1)^{Cl(-\Delta)},$$

mais si $\Delta = 3$ ou 4 on aura respectivement $\tau = 6$ et $\tau = 4$, de sorte qu'il vient comme cela se voit d'ailleurs directement:

$$\text{pour } D = -3: \qquad A(0) = e^{-\frac{\pi i}{3}}, \qquad B(0) = e^{\frac{\pi i}{3}},$$

$$\text{pour } D = -4: \qquad A(0) = -i, \qquad B(0) = i.$$

Il s'ensuit, en résumé, les formules suivantes:

$$(18^b) \quad \begin{cases} Y(0) = 2(-1)^{Cl(-\Delta)}, & Z(0) = 0 \text{ pour } D = -\Delta, \quad \Delta > 4, \\ Y(0) = Z(0) = 1 & \text{pour } D = -3, \\ Y(0) = 0, & Z(0) = 1 \text{ pour } D = -4. \end{cases}$$

En observant que, pour $\Delta > 8$, le nombre $Cl(-\Delta)$ est impair ou pair selon que Δ est premier ou composé, ce dernier résultat peut s'énoncer comme il suit:

$$(18^c)\qquad Y(0) = \begin{cases} -2, \text{ pour } \Delta \text{ premier et pour } \Delta = 8, \\ \ \ 2, \text{ pour } \Delta \text{ composé } > 8; \end{cases}$$

$$Z(0) = 0 \text{ pour } \Delta > 4; \qquad D = -\Delta.$$

Dans la formule (1^a) changeons x en $\frac{1}{x}$; nous aurons

$$A\left(\frac{1}{x}\right) = \left(-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} \prod_a e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}} \prod_a \left(x - e^{-\frac{2a\pi i}{\Delta}}\right).$$

Dans le cas de D positif, on a comme nous venons de le remarquer

$$(-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} \prod e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}} = 1,$$

puis les quantités

$$e^{-\frac{2a\pi i}{\Delta}} = e^{\frac{2\pi i(\Delta - a)}{\Delta}}$$

reconstituent, dans leur ensemble, les quantités $e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}$; le second membre de notre formule sera donc

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}} A(x),$$

ce qui donne

$$x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} A\left(\frac{1}{x}\right) = A(x),$$

ce qui donne, pour un discriminant fondamental positif D, les relations connues

$$(19^a)\qquad x^{\frac{1}{2}\varphi(D)} Y\left(\frac{1}{x}, D\right) = Y(x, D), \qquad x^{\frac{1}{2}\varphi(D)} Z\left(\frac{1}{x}, D\right) = Z(x, D).$$

Dans le cas d'un discriminant négatif $D = -\Delta$ où $\Delta > 4$, nous savons que

$$(-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} \prod_a e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}} = (-1)^{Cl(-\Delta)},$$

puis les quantités $e^{-\frac{2a\pi i}{\Delta}} = e^{\frac{2\pi i(\Delta - a)}{\Delta}}$ reproduisent, dans leur ensemble, les quantités $e^{\frac{2b\pi i}{\Delta}}$, et on aura donc

$$x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} A\left(\frac{1}{x}\right) = \quad (-1)^{Cl(-\Delta)} B(x),$$

d'où il suit

$$x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} Y\left(\frac{1}{x}\right) = \quad (-1)^{Cl(-\Delta)} Y(x),$$

$$x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} Z\left(\frac{1}{x}\right) = -(-1)^{Cl(-\Delta)} Z(x).$$

ou bien

$$(19^{b}) \qquad \begin{cases} x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} Y\left(\frac{1}{x}, -\Delta\right) = \quad \varepsilon Y(x, -\Delta), \\ x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} Z\left(\frac{1}{x}, -\Delta\right) = -\varepsilon Z(x, -\Delta), \qquad \Delta > 4, \end{cases}$$

où $\varepsilon = 1$, si Δ est un nombre composé supérieur à 8, et $\varepsilon = -1$, si Δ est un nombre premier ou si $\Delta = 8$.

Dans les équations (19^{a}) et (19^{b}) je pose $x = i$, en excluant les cas particuliers $D = -3, -4, -8$.

Si le discriminant $D = -\Delta$ est négatif et composé, on a alors

$$\frac{1}{2}\varphi(\Delta) \equiv 0 \pmod 4,$$

le discriminant étant fondamental, bien entendu.

Si, en second lieu, le discriminant D est positif et composé, on a, en général,

$$\frac{1}{2}\varphi(D) \equiv 0 \pmod 4,$$

deux exceptions étant à signaler. D'abord pour $D = 4P$, P étant premier, naturellement de la forme $4k + 3$, puis si $D = p_1 p_2$, les deux nombres premiers p_1 et p_2 ayant la forme $4k + 3$. Dans ces cas exceptionnels on a

$$\frac{1}{2}\varphi(D) \equiv 2 \pmod 4.$$

On a par conséquent les faits suivants à remarquer:

Si D est un discriminant fondamental positif qui n'est ni premier ni le quadruple d'un nombre premier, ni le produit de deux nombres premiers de la forme $4k+3$, on aura

$$Y(-i, D) = Y(i, D), \qquad Z(-i, D) = Z(i, D).$$

Les quantités $Y(i)$ et $Z(i)$ seront donc *réelles*.

Dans les cas de $D = 4p$, $D = p_1 p_2 (p \equiv p_1 \equiv p_2 \equiv 3 \pmod 4)$ on a, au contraire,

$$Y(-i) = -Y(i), \qquad Z(-i) = -Z(i),$$

d'où il suit que les quantités $Y(i)$ et $Z(i)$ sont ou purement imaginaires ou nulles, en partie.

Pour un discriminant négatif composé différent de -4 et -8, on a, d'après (19^b)

$$Y(-i) = Y(i), \qquad Z(-i) = -Z(i),$$

donc $Y(i)$ est réel et $Z(i)$ purement imaginaire ou nul.

Passons aux discriminants premiers.

Si $D > 0$ est premier, on aura

$$Y(-i) = (-1)^{\frac{D-1}{4}}\, Y(i), \qquad Z(-i) = (-1)^{\frac{D-1}{4}}\, Z(i),$$

d'où il suit que $Y(i)$ et $Z(i)$ seront réelles ou purement imaginaires selon que $D \equiv 1 \pmod 8$ ou $D \equiv 5 \pmod 8$; les cas des valeurs égales à zéro étant sous-entendus comme des valeurs réelles ou imaginaires.

Si le discriminant est négatif et premier $-\Delta$, le nombre

$$\frac{1}{2}\varphi(\Delta) = \frac{1}{2}(\Delta - 1)$$

est impair, et les quantités $Y(i)$ et $Z(i)$ seront essentiellement complexes; mais on trouve aisément

$$Y(i) = \left(1 + (-1)^{\frac{\Delta+1}{4}}\, i\right) M, \qquad Z(i) = \left(1 - (-1)^{\frac{\Delta+1}{4}}\, i\right) N,$$

M et N étant des entiers réels.

5. Passons à la détermination des quantités $Y(1)$ et $Z(1)$ pour un discriminant négatif; nous savons que, si Δ est composé et plus grand que 8, on a $Z(1)=0$, $Y(1)=\pm 2$; il ne reste qu'à déterminer le signe de cette dernière quantité qui est égale à $2A(1)$. La définition (1^a) donne immédiatement

$$A(1)=\prod_a\left(1-e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}\right),$$

et si l'on remplace la quantité $1-e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}$ par sa valeur $-2ie^{\frac{a\pi i}{\Delta}}\sin\frac{a\pi}{\Delta}$, nous aurons

(a) $$A(1)=(-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}e^{\frac{\pi i}{\Delta}\Sigma a}\prod_a\left(2\sin\frac{a\pi}{\Delta}\right).$$

La quantité réelle et positive

$$\prod_a\left(2\sin\frac{a\pi}{\Delta}\right)$$

représente la valeur absolue de $A(1)$ et sera, par conséquent, égale à un, si Δ est composé. Il s'ensuit

$$A(1)=(-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}e^{\frac{\pi i}{\Delta}\Sigma a}.$$

Or nous savons que (puisque ici $\tau=2$)

$$\frac{1}{\Delta}\Sigma a=\frac{1}{4}\varphi(\Delta)-\frac{1}{2}Cl(-\Delta),$$

donc

$$A(1)=(-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}e^{\frac{\pi i}{4}\varphi(\Delta)-\frac{\pi i}{2}Cl(-\Delta)},$$

ou bien, $\frac{1}{2}Cl(-\Delta)$ étant un entier pour le discriminant composé,

$$A(1)=(-1)^{\frac{1}{2}Cl(-\Delta)}.$$

Supposons en second lieu Δ premier. Dans ce cas on a

$$Y(1)=0,\qquad Z(1)=\pm 2,\qquad A(1)=-\frac{i\sqrt{\Delta}}{2}Z(1).$$

La valeur absolue de la quantité $A(1)$ sera alors $\sqrt{\Delta}$ et la formule (a) donne

$$\frac{A(1)}{|A(1)|} = (-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} e^{\frac{\pi i}{\Delta}\Sigma a};$$

cette quantité étant égale à $-\frac{1}{2} i Z(1)$, on conclut

$$Z(1) = 2(-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} e^{\frac{\pi i}{\Delta}\Sigma a},$$

ou bien

$$Z(1) = 2(-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} e^{\frac{\pi i}{4}\varphi(\Delta) - \frac{\pi i}{2} Cl(-\Delta)},$$

ce qui se simplifie comme il suit

$$Z(1) = 2(-1)^{\frac{Cl(-\Delta)-1}{2}}.$$

On a donc les résultats suivants:

$$(20^a) \qquad Z(1, -\Delta) = 2(-1)^{\frac{1}{2}[Cl(-\Delta)-1]}, \qquad Y(1, -\Delta) = 0,$$
$$(\Delta \text{ premier } > 3),$$

$$(20^b) \qquad Y(1, -\Delta) = 2(-1)^{\frac{1}{2}Cl(-\Delta)}, \qquad Z(1, -\Delta) = 0,$$
$$(\Delta \text{ composé } > 8).$$

En substituant ces valeurs dans les formules (d) et (d') du n° 3, nous aurons ces formes définitives des résultats y indiqués

$$(21^a) \qquad Y'(1) = (-1)^{\frac{1}{2}[Cl(-\Delta)-1]} \Delta\, Cl(-\Delta); \quad (\Delta \text{ premier } > 3),$$

$$(21^b) \qquad Z'(1) = -(-1)^{\frac{1}{2}Cl(-\Delta)} Cl(-\Delta); \quad (\Delta \text{ composé } > 8).$$

En représentant par H le nombre impair $Cl(-\Delta)$ dans le cas de Δ premier, nous aurons

$$\Delta \equiv -1, \qquad (-1)^{\frac{1}{2}(H-1)} H \equiv 1 \pmod 4,$$

et par conséquent

$$(21^c) \qquad Y'(1) \equiv -1 \pmod 4, \qquad (\Delta \text{ premier } > 3).$$

Si Δ n'est aucune des valeurs exceptés, $3, 4, 8$, on aura toujours $F(-1) = 1$, ce qui donne des résultats plus simples pour la valeur particulière $x = -1$. L'équation

$$Y^2(-1) + \Delta Z^2(-1) = 4$$

donne

$$Z(-1) = 0, \qquad Y(-1) = \pm 2 = 2A(-1).$$

La formule immédiate

$$A(-1) = \prod_a \left(-1 - e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}\right)$$

donne d'abord

$$A(-1) = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} e^{\frac{\pi i}{\Delta}\Sigma a} \prod_a \left(2 \cos\frac{a\pi}{\Delta}\right);$$

la valeur absolue de cette quantité devant être un, on conclut, en substituant la valeur connue de Σa,

$$A(-1) = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} e^{\frac{\pi i}{4}\varphi(\Delta) - \frac{\pi i}{\tau} Cl(-\Delta)} (-1)^N,$$

N désignant le nombre des éléments a plus grands que $\frac{1}{2}\Delta$. Évidemment

$$2N = \sum_{\nu=\left[\frac{\Delta}{2}\right]+1}^{\Delta-1}{}^{*} \left(1 + \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\right),$$

ν parcourant des nombres premiers avec Δ; il s'ensuit

$$2N = \frac{1}{2}\varphi(\Delta) + \sum_{\nu=\left[\frac{\Delta}{2}\right]+1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\varphi(\Delta) - \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)$$

ou d'après une formule connue,

$$N = \frac{1}{4}\varphi(\Delta) - \frac{1}{\tau}\left[2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right] Cl(-\Delta).$$

On a donc

$$(-1)^N = e^{-\frac{\pi i}{4}\varphi(\Delta) + \frac{\pi i}{\tau}\left[2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right] Cl(-\Delta)}$$

et la formule obtenue plus haut devient

$$\text{(b)} \qquad A(-1) = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} e^{\frac{\pi i}{\tau}\left[1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right] Cl(-\Delta)}.$$

Si Δ est premier et plus grand que 3, on a $\tau = 2$ et il vient

$$A(-1) = -(-1)^{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)} = -\left(\frac{2}{\Delta}\right).$$

Si Δ est composé et supérieur à 8, le nombre des classes est pair et nous aurons

$$A(-1) = 1;$$

une exception pourra se présenter pour les discriminants pairs, car alors $\left(\frac{2}{\Delta}\right) = 0$, et la formule (b) donnera

$$A(-1) = (-1)^{\frac{1}{2} Cl(-\Delta)}, \qquad (\Delta \text{ pair } > 8).$$

Or de la théorie de la repartition des classes en genres on sait que le nombre $\frac{1}{2} Cl(-\Delta)$ ne sera impair que si le discriminant a la forme $-4m$ ou $-8m$, m étant un nombre premier. Dans le cas de $\Delta = 4m$, le nombre premier impair m est un discriminant positif, et la formule (45) du chapitre II donne

$$\frac{1}{2} Cl(-4m) = \sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{4}m\right]} \left(\frac{m}{a}\right);$$

le second membre se compose de $\frac{m-1}{4}$ unités, positives ou négatives, et par conséquent

$$\frac{1}{2} Cl(-4m) \equiv \frac{m-1}{4} \pmod 2,$$

pourvu que m soit premier. On vérifie aisément que

$$(-1)^{\frac{m-1}{4}} = \left(\frac{2}{m}\right),$$

et le résultat obtenu plus haut devient

$$A(-1, -4m) = \left(\frac{2}{m}\right), \quad (m \text{ premier}).$$

Soit maintenant $\Delta = 8m$, les deux cas $m \equiv 1$ et $m \equiv 3 \pmod 4$ sont possibles et il faut les distinguer.

Pour $m \equiv 1 \pmod 4$ la formule (47) du chap. II donne

$$\frac{1}{2} Cl(-8m) = \sum_{1}^{\left[\frac{1}{8}m\right]} \left(\frac{m}{\nu}\right) - \sum_{\left[\frac{3}{8}m\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}m\right]} \left(\frac{m}{\nu}\right),$$

et par conséquent

$$\text{(c)} \qquad \frac{1}{2} Cl(-8m) \equiv \left[\frac{m}{8}\right] + \left[\frac{m}{2}\right] - \left[\frac{3m}{8}\right] \pmod 2.$$

Dans le deuxième cas où $m \equiv 3 \pmod 4$ la formule (42) du même chapitre donne

$$\frac{1}{2} Cl(-8m) = \sum_{\left[\frac{1}{8}m\right]+1}^{\left[\frac{3}{8}m\right]} \left(\frac{-m}{\nu}\right)$$

d'où il suit

$$\text{(d)} \qquad \frac{1}{2} Cl(-8m) \equiv \left[\frac{3m}{8}\right] - \left[\frac{m}{8}\right] \pmod 2.$$

Au moyen de ces résultats (c) et (d) on trouve le tableau suivant (m étant toujours supposé premier) des congruences au module deux,

$$\frac{1}{2} Cl(-8m) \equiv \begin{cases} 0, \text{ pour } m = 8k+1, \\ 1, \text{ pour } m = 8k+5, \\ 1, \text{ pour } m = 8k+3, \\ 0, \text{ pour } m = 8k+7, \end{cases}$$

ce qui se résume par l'équation

$$(-1)^{\frac{1}{2} Cl(-8m)} = \left(\frac{2}{m}\right), \quad (m \text{ premier}).$$

Nous avons par conséquent le résultat suivant:

Pour le discriminant fondamental négatif $-\Delta$, différent de -3, -4, -8, ont lieu des formules

$$
(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z(-1, -\Delta) = 0, \\ \frac{1}{2} Y(-1, -\Delta) = \left\{ \begin{array}{ll} -\left(\frac{2}{\Delta}\right), & \Delta \text{ premier}, \\ \left(\frac{2}{m}\right), & \Delta = 4m \text{ ou } 8m,\ m \text{ premier}, \\ 1, & \Delta \text{ composé, des autres formes.} \end{array} \right. \end{array} \right.
$$

6. Une question des plus intéressantes serait d'obtenir des relations entre les fonctions Y et Z provenant des discriminants différents. Nous allons montrer comment ces fonctions peuvent s'obtenir pour un discriminant produit, si on les connait pour les discriminants facteurs.

Soient à cet effet D_1 et D_2 deux discriminants fondamentaux premiers entre eux, Δ_1 et Δ_2 leur valeurs absolues; le produit $D_1 D_2$ sera, lui aussi, un discriminant fondamental et l'on aura

$$
A(x, D_1 D_2) = \prod_{\nu=1}^{\Delta_1 \Delta_2} \left(x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_1 \Delta_2}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D_1 D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_1 D_2}{\nu}\right)^2\right]}.
$$

Le nombre $a = \Delta_1 + \Delta_2$ est premier avec $\Delta_1 \Delta_2$, et on pourra donc remplacer ν par $a\nu$; il vient de la sorte

$$
A(x, D_1 D_2) = \prod_{\nu=1}^{\Delta_1 \Delta_2} \left(x - e^{\frac{2a\nu\pi i}{\Delta_1 \Delta_2}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D_1 D_2}{a\nu}\right) + \left(\frac{D_1 D_2}{a\nu}\right)^2\right]}.
$$

L'un des deux discriminants, p. ex. D_1, sera toujours impair; on aura alors

$$
\left(\frac{D_1}{\Delta_2}\right) = \left(\frac{\Delta_2}{D_1}\right) = \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right),
$$

et l'expression

$$
\left(\frac{D_1 D_2}{a}\right) = \left(\frac{D_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right)\left(\frac{D_2}{\Delta_1 + \Delta_2}\right) = \left(\frac{D_1}{\Delta_2}\right)\left(\frac{D_2}{\Delta_1}\right)
$$

sera égale à la suivante

$$
\left(\frac{D_1 D_2}{a}\right) = \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)\left(\frac{D_2}{\Delta_1}\right) = \left(\frac{\Delta_2^2 \operatorname{sgn} D_2}{\Delta_1}\right) = \left(\frac{\operatorname{sgn} D_2}{\Delta_1}\right),
$$

ce qu'on peut mettre sous la forme suivante, symétrique en D_1 et D_2,

$$\left(\frac{D_1 D_2}{a}\right) = (-1)^{\frac{1-\operatorname{sgn} D_1}{2}\frac{1-\operatorname{sgn} D_2}{2}} = \varepsilon.$$

A cause de l'identité

$$\frac{a}{\Delta_1 \Delta_2} = \frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_2}$$

la dernière expression de $A(x, D_1 D_2)$ devient

$$A(x, D_1 D_2) = \prod_{\nu=1}^{\Delta_1 \Delta_2} \left(x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_1} + \frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\varepsilon\left(\frac{D_1 D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_1 D_2}{\nu}\right)^2\right]}.$$

Posons $\nu = \rho + \mu\Delta_1$ $(\rho = 1, 2, \ldots, \Delta_1;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, \Delta_2 - 1)$, il vient

$$A(x, D_1 D_2) = \prod_{\rho=1}^{\Delta_1} \prod_{\mu=0}^{\Delta_2-1} \left(x - e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1} + \frac{2\pi i}{\Delta_2}(\rho + \mu\Delta_1)}\right)^{\sigma_{\rho,\mu}}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$2\sigma_{\rho,\mu} = \varepsilon\left(\frac{D_1}{\rho}\right)\left(\frac{D_2}{\rho + \mu\Delta_1}\right) + \left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)\left(\frac{D_2^2}{\rho + \mu\Delta_1}\right).$$

Laissant ρ constant, effectuons la multiplication relative à μ; la quantité $\rho + \mu\Delta_1$ parcourt le système complet de restes pour le module Δ_2, et nous aurons

$$A(x, D_1 D_2) = \prod_{\rho=1}^{\Delta_1} \prod_{\nu=1}^{\Delta_2} \left(x - e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1} + \frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\varepsilon\left(\frac{D_1}{\rho}\right)\left(\frac{D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)\left(\frac{D_2^2}{\nu}\right)\right]}$$

Mettant la différence qui figure au facteur sous la forme

$$x - e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1} + \frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}} = e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}}\left(x e^{-\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}} - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right),$$

on obtient

$$A(x, D_1 D_2) = e^{\varphi(\Delta_2)\frac{\pi i}{\Delta_1}\sum_\rho \rho\left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)} \prod_\rho \prod_\nu \left(x e^{-\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}} - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right)^{\sigma'}$$

où

$$2\sigma' = \varepsilon\left(\frac{D_1}{\rho}\right)\left(\frac{D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)\left(\frac{D_2^2}{\nu}\right).$$

J'observe que la somme

$$\sum_{\rho=1}^{\Delta_1} \rho \left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)$$

a pour valeur $\frac{1}{2}\Delta_1 \varphi(\Delta_1)$, puis je change ρ en $\Delta_1 - \rho$; la quantité σ' change en σ'', où

$$2\sigma'' = \varepsilon\left(\frac{D_1}{\rho}\right)\left(\frac{D_2}{\nu}\right)\operatorname{sgn} D_1 + \left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)\left(\frac{D_2^2}{\nu}\right),$$

et nous aurons

$$A(x\,,\,D_1 D_2) = \prod_{\rho=1}^{\Delta_1-1}\prod_{\nu=1}^{\Delta_2-1}\left(xe^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}} - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right)^{\sigma''}.$$

Dans le deuxième membre, les facteurs où $\left(\frac{D_1}{\rho}\right) = 0$ peuvent être supprimés; les autres peuvent être rangés en deux groupes, celui des nombres $\rho = \alpha$ et le groupe des nombres $\rho = \beta$; on désigne par α et β les nombres de la suite $1, 2, \ldots, \Delta_1 - 1$ qui satisfont aux conditions respectives

$$(23) \qquad \left(\frac{D_1}{\alpha}\right) = \varepsilon \operatorname{sgn} D_1, \qquad \left(\frac{D_1}{\beta}\right) = -\varepsilon \operatorname{sgn} D_1, \qquad \begin{pmatrix} 0 < \alpha < \Delta_1 \\ 0 < \beta < \Delta_1 \end{pmatrix};$$

à ces nombres α et β correspondent respectivement les valeurs suivantes du symbole σ''

$$\left(\frac{D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_2^2}{\nu}\right), \quad -\left(\frac{D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_2^2}{\nu}\right).$$

En posant $\rho = \alpha$, le produit partiel correspondant

$$\prod_{\nu=1}^{\Delta_2}\left(xe^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}} - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_2^2}{\nu}\right)\right]}$$

n'est autre chose que la fonction

$$A\left(xe^{\frac{2\alpha\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right);$$

il serait égal à

$$B\left(xe^{\frac{2\beta\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right),$$

si l'on prenait $\rho = \beta$. Cela permet d'écrire notre résultat sous la forme suivante

$$(23^*) \qquad A(x, D_1 D_2) = \prod_\alpha A\left(xe^{\frac{2\alpha\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right) \prod_\beta B\left(xe^{\frac{2\beta\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right),$$

où les indices α et β sont définis par les conditions (23), ε désignant l'unité

$$(23^a) \qquad \varepsilon = (-1)^{\frac{1-\operatorname{sgn} D_1}{2} \frac{1-\operatorname{sgn} D_2}{2}}.$$

On trouve de la même manière

$$(\overline{23}^*) \qquad B(x, D_1 D_2) = \prod_\alpha B\left(xe^{\frac{2\alpha\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right) \prod_\beta A\left(xe^{\frac{2\beta\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right).$$

Ces deux formules (23^*) et $(\overline{23}^*)$ résolvent le problème proposé; on peut s'en servir pour ramener tous les cas à celui des discriminants impairs.

Prenons $D_2 = -\Delta$, $D_1 = -4$, $-\Delta$ étant un discriminant fondamental négatif impair; ici $\varepsilon = -1$, $\operatorname{sgn} D_1 = -1$, et les conditions (23) donnent $\alpha = 1$, $\beta = 3$. On aura

$$(24) \qquad \begin{cases} A(x, 4\Delta) = A(ix, -\Delta) B(-ix, -\Delta), \\ B(x, 4\Delta) = A(-ix, -\Delta) B(ix, -\Delta). \end{cases}$$

Soit ensuite D un discriminant fondamental positif impair, posons $D_2 = D$, $D_1 = -4$; on a $\varepsilon = 1$, et les conditions (26)

$$\left(\frac{-4}{\alpha}\right) = -1, \qquad \left(\frac{-4}{\beta}\right) = 1$$

donnent $\alpha = 3$, $\beta = 1$; nous aurons

$$(25) \qquad \begin{cases} A(x, -4D) = A(-ix, D) B(ix, D), \\ B(x, -4D) = A(ix, D) B(-ix, D). \end{cases}$$

Soit maintenant, $D_2 = D$ étant toujours positif impair, $D_1 = 8$; on a $\varepsilon = 1$, puis

$$\left(\frac{D_1}{\alpha}\right) = 1, \qquad \left(\frac{D_1}{\beta}\right) = -1,$$

d'où $\alpha = 1, 7$ et $\beta = 3, 5$; en employant l'écriture

$$j = \frac{1 + i}{\sqrt{2}},$$

on a les relations

$$(26) \qquad \begin{cases} A(x, 8D) = A(jx, D)A(j^{-1}x, D)B(j^3x, D)B(j^{-3}x, D), \\ B(x, 8D) = B(jx, D)B(j^{-1}x, D)A(j^3x, D)A(j^{-3}x, D), \end{cases}$$

et puis, en prenant $D_1 = -8$, on trouve

$$(27) \qquad \begin{cases} A(x, -8D) = A(j^{-1}x, D)A(j^{-3}x, D)B(jx, D)B(j^3x, D), \\ B(x, -8D) = B(j^{-1}x, D)B(j^{-3}x, D)A(jx, D)A(j^3x, D). \end{cases}$$

Si l'on fait $D_2 = -\Delta$, $D_1 = -8$, on a $\varepsilon = -1$, $\operatorname{sgn} D_1 = -1$, $\left(\frac{D_1}{\alpha}\right) = 1$, $\left(\frac{D_1}{\beta}\right) = -1$; $\alpha = 1, 3$; $\beta = 5, 7$; les résultats sont

$$(28) \qquad \begin{cases} A(x, 8\Delta) = A(jx, -\Delta)A(j^3x, -\Delta)B(j^{-1}x, -\Delta)B(j^{-3}x, -\Delta), \\ B(x, 8\Delta) = B(jx, -\Delta)B(j^3x, -\Delta)A(j^{-1}x, -\Delta)A(j^{-3}x, -\Delta), \end{cases}$$

enfin on trouve

$$(26^a) \quad A(x, -8\Delta) = A(jx, -\Delta)A(j^{-1}x, -\Delta)B(j^3x, -\Delta)B(j^{-3}x, -\Delta)$$

et une expression analogue pour $B(x, -8\Delta)$.

Cette formule (26^a) se trouve contenue dans (26) si l'on y écrit $D = -\Delta$; cette formule-là subsiste donc pour tous les discriminants impairs D, positifs ou négatifs.

Nous verrons que la détermination du nombre des classes d'un discriminant positif exige le calcul du quotient $B(1):A(1)$. La formule (23^*) ramène le calcul de cette quantité à la détermination des quantités de la forme

$$A\left(e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right),$$

sans avoir besoin de l'expression explicite des polynômes $Y(x, D_1D_2)$ et $Z(x, D_1D_2)$; le calcul des dites quantités est relativement facile. Mais on peut mettre le problème qui nous occupe en relation avec la théorie de l'élimination.

Posons, pour abréger

$$A_1 = A(x, D_1), \qquad A_2 = A(x, D_2), \text{ etc.},$$

et représentons par $R(A_1, A_2)$ le résultant des polynômes A_1 et A_2. Cela étant, supposons $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, de sorte que les conditions (23) deviennent

$$\left(\frac{D_1}{\alpha}\right) = 1, \qquad \left(\frac{D_1}{\beta}\right) = -1;$$

les quantités $e^{\frac{2\alpha\pi i}{\Delta_1}}$ sont racines de l'équation $A_1(x) = 0$, les $e^{\frac{2\beta\pi i}{\Delta_1}}$ celles de $B_1(x) = 0$; or on a

$$R(A_1, A_2) = \prod_\alpha A\left(e^{\frac{2\alpha\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right),$$

$$R(B_1, B_2) = \prod_\beta B\left(e^{\frac{2\beta\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right),$$

et l'équation (23*) permet de conclure

$$(29^a) \qquad A(1, D_1D_2) = R(A_1, A_2)R(B_1, B_2).$$

On trouverait de même

$$(29^b) \qquad B(1, D_1D_2) = R(A_1, B_2)R(A_2, B_1),$$

et les mêmes formules s'obtiendraient en supposant $D_1 = -\Delta_1$, $D_2 = -\Delta_2$.

Ces formules, intéressantes en théorie, ne contribuent rien à simplifier la pratique.

7. Reprenons l'équation (7) pour D positif, en supprimant le terme nul $\log c$:

$$\text{(a)} \qquad \log\frac{B(x)}{A(x)} = \sqrt{D}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\mu}\right)\frac{x^\mu}{\mu}.$$

En passant à la limite pour $x = 1$, le second membre devient

$$\sqrt{D}\sum_1^\infty \left(\frac{D}{\mu}\right)\frac{1}{\mu} = Cl(D)\log E(D);$$

donc nous aurons la formule connue

$$(30)\qquad Cl(D)\log E(D) = \log\frac{B(1)}{A(1)},$$

ou bien

$$(30^*)\qquad Cl(D)\log E(D) = \log\frac{Y(1\,,\,D) + \sqrt{D}\,Z(1\,,\,D)}{Y(1\,,\,D) - \sqrt{D}\,Z(1\,,\,D)}.$$

Ce résultat ramène le calcul du nombre des classes à la détermination de l'exposant H dans l'équation

$$\frac{Y + \sqrt{D}\,Z}{Y - \sqrt{D}\,Z} = \left(\frac{T + U\sqrt{D}}{2}\right)^H, \qquad \begin{pmatrix} Y = Y(1\,,\,D) \text{ et} \\ Z = Z(1\,,\,D) \end{pmatrix};$$

c'est donc un résultat d'une très haute importance théorique; car il n'y reste aucune trace de l'origine transcendante qui la fait naître, tous les nombres qui y figurent pouvant s'obtenir par des procédés purement algébriques.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème connu que le nombre des classes, aussi pour les discriminants fondamentaux positifs, est impair, si le discriminant est un nombre premier, et qu'il est pair, si le discriminant est un nombre composé plus grand que 8.

Si le discriminant est un nombre premier, on a $F(1) = D$, et puis $Y^2 - DZ^2 = 4D$, en posant pour abréger, $Y = Y(1)$, $Z = Z(1)$. On voit que Y est nécessairement divisible par D, et en faisant $Y = Dz$, $Z = y$, il vient l'équation

$$y^2 - Dz^2 = -4;$$

ces nombres y et z ne satisfont pas à l'équation de Fermat, d'où il suit que le quotient

$$\log\frac{|y| + |z|\sqrt{D}}{2} : \log\frac{T + U\sqrt{D}}{2}$$

n'est pas un entier. Or on a

$$Cl(D)\log E(D) = 2\log\frac{|Y + Z\sqrt{D}|}{\sqrt{4F(1)}} = 2\log\frac{|Y + Z\sqrt{D}|}{2\sqrt{D}},$$

d'où il suit que Y et Z sont du même signe et que

$$\frac{1}{2} Cl(D) = \log \frac{|y + z\sqrt{D}|}{2} : \log \frac{T + U\sqrt{D}}{2};$$

le second membre n'étant pas entier, il faut que $Cl(D)$ soit impair.

Si au contraire D est composé et plus grand que 8, on a $F(1) = 1$ et par conséquent

$$Y^2 - DZ^2 = 4,$$

d'où il suit que le quotient

$$\log \left| \frac{Y + Z\sqrt{D}}{2} \right| : \log E(D) = \mu$$

est un entier; par conséquent le nombre des classes

$$Cl(D) = 2 \log \left| \frac{Y + Z\sqrt{D}}{2} \right| : \log E(D) = 2\mu$$

sera pair.

Pour $D = 8$ on trouve aisément que le nombre des classes est égal à un.

8. Dans l'équation (7) pour $D = D_1$ qui s'écrit

$$\sqrt{D_1} \operatorname{sgn} D_1 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{D_1}{\mu}\right) \frac{x^\mu}{\mu} = \log \frac{Y_1(x) + \sqrt{D_1} Z_1(x)}{Y_1(x) - \sqrt{D_1} Z_1(x)} + \log c,$$

où l'on emploie la notation

$$Y_1(x) = Y(x, D_1), \qquad Z_1(x) = Z(x, D_1),$$

posons

$$xe^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}} \text{ au lieu de } x,$$

Δ_2 désignant la valeur absolue d'un discriminant fondamental D_2; multiplions les deux membres de l'équation ainsi obtenue par $\left(\frac{D_2}{h}\right)$ et ajoutons les résultats pour $h = 1, 2, 3, \ldots, \Delta_2 - 1$; il vient

$$(31) \quad \sqrt{D_1}\sqrt{D_2} \operatorname{sgn} D_1 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{D_1 D_2}{\mu}\right) \frac{x^\mu}{\mu} = \sum_{h=1}^{\Delta_2 - 1} \left(\frac{D_2}{h}\right) \log \frac{Y_1\left(xe^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) + \sqrt{D_1} Z_1\left(xe^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}{Y_1\left(xe^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) - \sqrt{D_1} Z_1\left(xe^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}.$$

Cette formule donnerait à peine quelque chose d'utile, si le produit $D_1 D_2$ était négatif, à cause de l'indétermination du logarithme; mais si ce produit-là est positif, le premier membre est réel en même temps que x et on pourra se borner aux valeurs réelles des logarithmes qui figurent au second membre.

Le produit $\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\operatorname{sgn} D_1$ étant positif toutes les fois que $D_1 D_2$ le soit, le premier membre aura, pour $x = 1$, la valeur

$$Cl(D_1 D_2) \log E(D_1 D_2)$$

et il s'ensuit:

$$(31^*) \qquad Cl(D_1 D_2) \log E(D_1 D_2) = \sum_{h=1}^{\Delta_2 - 1} \left(\frac{D_2}{h}\right) \log \frac{Y_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) + \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}{Y_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) - \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}$$

(D_1 et D_2 étant deux discriminants fondamentaux du même signe, $\Delta_1 = |D_1|$, $\Delta_2 = |D_2|$, puis $Y_1(x)$ et $Z_1(x)$ désignant les quantités $Y(x, D)$ et $Z(x, D)$).

On pourra rendre à la moitié le nombre des termes du second membre, si l'on observe que la quantité $e^{\frac{2\pi i}{\Delta_2}(\Delta_2 - h)}$ est l'inverse de $e^{\frac{2\pi i}{\Delta_2}h}$ de sorte qu'en employant les relations (19^a) ou (19^b), la quantité

$$\frac{Y_1\left(e^{\frac{2k\pi i}{\Delta_2}}\right) + \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2k\pi i}{\Delta_2}}\right)}{Y_1\left(e^{\frac{2k\pi i}{\Delta_2}}\right) - \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2k\pi i}{\Delta_2}}\right)}$$

en y faisant $k = \Delta_2 - h$, devient

$$\frac{Y_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) + \operatorname{sgn} D_1 \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}{Y_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) - \operatorname{sgn} D_1 \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}.$$

9. Considérons l'équation

$$(\mathrm{a}) \qquad \sum_{k=1}^{\Delta - 1} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \frac{1}{1 - e^{\frac{2k\pi i}{\Delta}}} = \frac{2i\sqrt{\Delta}}{\tau} Cl(-\Delta),$$

conséquence immédiate de la formule

$$\sum_{k=1}^{\Delta - 1} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \cot\frac{k\pi}{\Delta} = \frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau} Cl(-\Delta)$$

qui a lieu pour tous les discriminants négatifs.

La fonction entière irréductible $F(z)$ pouvant s'écrire

$$\prod_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(z-e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta}}\right)^{\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)},$$

on aura

$$F(1)=\prod_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(1-e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta}}\right)^{\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)},$$

et aussi, pour un entier h premier avec Δ,

$$F(1)=\prod_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(1-e^{\frac{2h\rho\pi i}{\Delta}}\right)^{\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)}.$$

On tire ensuite de (a)

$$\sum_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\frac{1}{1-e^{\frac{2h\rho\pi i}{\Delta}}}=\frac{2i\sqrt{\Delta}}{\tau}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)Cl(-\Delta).$$

Il s'ensuit que la fonction entière

$$\left[\prod_{\rho=1}^{\Delta-1}(1-x^\rho)^{\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)}\sum_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\frac{1}{1-x^\rho}\right]^2+\frac{4\Delta}{\tau^2}F(1)^2Cl(-\Delta)^2$$

s'évanouit toutes les fois que x devient racine de l'équation irréductible $F(x)=0$. On a donc la congruence

(32)
$$\prod_{\rho=1}^{\Delta-1}(1-x^\rho)^{2\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)}\left(\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\frac{1}{1-x^\rho}\right)^2$$
$$\equiv-\frac{4\Delta}{\tau^2}F(1\,,\,\Delta)^2Cl(-\Delta)^2 \pmod{F(x\,,\,\Delta)}.$$

Ce résultat est susceptible d'une forme plus simple, si le discriminant $-\Delta$ est fondamental. Dans ce cas on a en effet, pour le même module, la congruence

$$-\Delta\equiv Q(x)^2,$$

et il vient

$$\prod_{\rho}(1-x^\rho)^{\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)}\sum_{\rho}\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\frac{1}{1-x^\rho}\equiv\pm\frac{2}{\tau}F(1)Cl(-\Delta)Q(x\,,\,-\Delta).$$

Pour déterminer le signe, posons $x = e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}$, ce qui change la congruence en égalité; le premier membre ayant alors pour valeur l'expression

$$F(1)\frac{2i\sqrt{\Delta}}{\tau}Cl(-\Delta)$$

qui est égale à la suivante

$$\frac{2}{\tau}F(1)Cl(-\Delta)Q\left(e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}\right),$$

il faudra prendre le signe supérieur et par conséquent

$$\prod_{\rho=1}^{\Delta-1}(1-x^{\rho})^{\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)}\sum_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\frac{1}{1-x^{\rho}} \tag{33}$$

$$\equiv \frac{2}{\tau}F(1, \Delta)Cl(-\Delta)Q(x, -\Delta) \pmod{F(x, \Delta)},$$

$-\Delta$ étant un discriminant fondamental.

Il y a un résultat analogue pour des discriminants fondamentaux positifs. Soit en effet, pour abréger l'écriture,

$$Cl(D) = K.$$

on a la formule

$$\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^{K} = \frac{B(1)}{A(1)} = \frac{B^2(1)}{F(1)},$$

puis

$$B(1) = \prod_b\left(1-e^{\frac{2b\pi i}{D}}\right), \qquad \left(\frac{D}{b}\right) = -1.$$

Posant donc

$$G(x) = \prod_b(1-x^b), \qquad \left(\begin{matrix} 0 < b < D \\ \left(\frac{D}{b}\right) = -1 \end{matrix}\right),$$

on aura en vertu de la relation

$$Q\left(e^{\frac{2\pi i}{D}}\right) = \sqrt{D},$$

la congruence suivante:

$$(34)\qquad \left[\frac{T + UQ(x)}{2}\right]^K \equiv \frac{G^2(x)}{F(1)} \pmod{F(x)}.$$

10. L'équation suivante qui résulte de (5) et (11)

$$(35)\qquad \sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}} = i\sqrt{\Delta}\,\frac{Z(x)Y'(x) - Y(x)Z'(x)}{2F(x)}$$

permet d'établir plusieurs formules dans lesquelles intervient le nombre des classes d'un discriminant négatif fondamental; on les obtient en posant $x = 1, -1, \pm i, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; pour ces valeurs de x la transformation du premier membre n'a aucune difficulté, je me borne donc à signaler le résultat.

En prenant $x = e^{\frac{2r\pi i}{s}}$, le premier membre devient

$$\frac{i}{2}e^{-\frac{2r\pi i}{s}}\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\cot\left(\frac{\nu}{\Delta} - \frac{r}{s}\right)\pi,$$

ce qui donne l'équation

$$(35^*)\qquad x\frac{Z(x)Y'(x) - Y(x)Z'(x)}{F(x)} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\cot\left(\frac{\nu}{\Delta} - \frac{r}{s}\right)\pi,$$

où $x = e^{\frac{2r\pi i}{s}}$, et $-\Delta$ désignant un discriminant fondamental. Le cas de $r = 0$ ou bien $x = 1$ a été établi au n° 3, et je me borne donc aux autres cas. Pour $\frac{r}{s} = \frac{1}{2}$ ou $x = -1$ on est conduit à la fonction

$$\cot\left(\frac{\nu}{\Delta} - \frac{1}{2}\right)\pi = -\operatorname{tg}\frac{\nu\pi}{\Delta}$$

pour laquelle on trouve la formule suivante

$$(36)\qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta} = \frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\left(1 - 2\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)Cl(-\Delta)$$

qui a lieu pour *tous* les discriminants impairs et aussi pour des discriminants pairs fondamentaux.

Il s'ensuit

$$\frac{Z(-1)Y'(-1)-Y(-1)Z'(-1)}{F(-1)}=4\frac{1-2\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}Cl(-\Delta);$$

or, comme nous avons vu plus haut, on a à l'exception des cas peu intéressants $\Delta=3, 4, 8$, les formules

$$F(-1)=1, \qquad Z(-1)=0, \qquad Y(-1)=\pm 2,$$

ce qui permet d'écrire

$$Z'(-1, -\Delta)=\varepsilon\left(1-2\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)Cl(-\Delta), \tag{37}$$

où $\varepsilon=-\frac{1}{2}Y(-1, -\Delta)$ est l'unité positive ou négative qui se trouve déterminée par les formules (22).

Il peut présenter quelque intérêt de posséder la valeur de la somme qui figure au premier membre de la formule (36) aussi dans le cas où $-\Delta$ est un discriminant pair, pas nécessairement fondamental. On y répond par les deux formules aisées à obtenir

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta}=\pm\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}Cl(-\Delta), \qquad (\Delta\equiv\pm 4 \pmod{16}), \tag{36^a}$$

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta}=(-1)^{\frac{\Delta}{8}-1}\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}Cl(-\Delta), \qquad (\Delta\equiv 0 \pmod 8). \tag{36^b}$$

On a ensuite pour les discriminants fondamentaux

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\left(\frac{h}{\Delta}-\frac{r}{3}\right)\pi=-\left(1+3\left(\frac{\Delta}{3}\right)\right)\frac{2\sqrt{\Delta}}{\tau}Cl(-\Delta), \tag{38}$$

où $r=1$ ou $r=2$, puis, pour les discriminants fondamentaux impairs

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\left(\frac{h}{\Delta}-\frac{r}{4}\right)\pi=\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}Cl(-\Delta), \tag{39}$$

où $r=1$ ou $r=3$. Pour les discriminants fondamentaux pairs le premier membre est nul.

11. En désignant par $\psi(n, m)$ le nombre des solutions de la congruence quadratique

$$x^2 \equiv n \pmod{m},$$

je suppose que le module m soit la valeur absolue d'un discriminant fondamental, dont les facteurs premiers impairs p sont pris avec un signe déterminé, tel que l'on ait toujours $p \equiv 1 \pmod 4$, de sorte qu'ils auront la forme des discriminants.

Une discussion bien connue donne les résultats suivants:

I. m impair, n quelconque; $m = \pm \Pi p$,

$$\psi(n, m) = \prod_p \left(1 + \left(\frac{p}{n}\right)\right).$$

II. m pair, n impair.

1. $m = \pm 4 \Pi p$, $\psi(n, m) = \left(1 + \left(\frac{-4}{n}\right)\right) \prod \left(1 + \left(\frac{p}{n}\right)\right)$.

2. $m = \pm 8 \Pi p$, $\psi(n, m) = \left(1 + \left(\frac{-4}{n}\right)\right)\left(1 + \left(\frac{8}{n}\right)\right) \prod \left(1 + \left(\frac{p}{n}\right)\right)$.

III. m pair

$$\frac{1}{2}\psi(4n, m) = \prod \left(1 + \left(\frac{p}{n}\right)\right),$$

p parcourant les facteurs premiers impairs de m.

Ces résultats se résument d'une manière plus simple comme il suit, en introduisant une sommation relative à tous les diviseurs d positifs ou négatifs du nombre m qui ont la forme d'un discriminant fondamental, en prenant parmi eux aussi la valeur $d = 1$, et les deux diviseurs $8k$ et $-8k$, lorsqu'ils sont possibles, devant être considérés comme différents. Sous ces conventions, on a:

(A) $$\psi(m, n) = \sum_{m:d} \left(\frac{d}{n}\right),$$

si un au moins des deux entiers m et n est impair, puis

(B) $$\frac{1}{2}\psi(4n, m) = \sum_{m:d} \left(\frac{d}{4n}\right),$$

si m est pair.

Ces préliminaires posés, il sera aisé d'évaluer les sommes telles que

$$\sum_{k=1}^{m-1} f\left(\frac{k^2}{m}\right),$$

où $f(x)$ signifie une fonction admettant la période 1.

Supposons d'abord que m soit impair, on aura, grâce à la périodicité de $f(z)$

$$f\left(\frac{k^2}{m}\right) = f\left(\frac{n}{m}\right), \quad \text{si} \quad k^2 \equiv n \pmod{m},$$

et la quantité $f\left(\frac{n}{m}\right)$ figure exactement au nombre de $\psi(n, m)$ de fois dans la suite $\sum f\left(\frac{k^2}{m}\right)$. On a donc

$$\sum_{k=1}^{m-1} f\left(\frac{k^2}{m}\right) = \sum_{n=1}^{m-1} \psi(n, m) f\left(\frac{n}{m}\right);$$

en employant la formule (A), cette quantité s'exprime sous la forme

$$\sum_{n=1}^{m-1} \sum_{m:d} \left(\frac{d}{n}\right) f\left(\frac{n}{m}\right) = \sum_{m:d} \sum_{n=1}^{m-1} \left(\frac{d}{n}\right) f\left(\frac{n}{m}\right).$$

Par conséquent, on a le théorème

$$\text{(C)} \qquad \sum_{k=1}^{m-1} f\left(\frac{k^2}{m}\right) = \sum_{d} \sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) f\left(\frac{\nu}{m}\right)$$

(m étant un produit de nombres premiers impairs différents, puis

$$f(x+1) = f(x)$$

et d parcourant tous les diviseurs de m pris avec le signe convenable pour que $d \equiv 1 \pmod 4$).

Si m est pair (divisible par 4 et non plus par 16), on aura de même

$$\sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{k^2}{m}\right) = \sum_{n=0}^{m-1} \psi(n, m) f\left(\frac{n}{m}\right),$$

où l'on avait admis aussi la valeur $k = 0$, sans quoi on serait obligé de supprimer aussi le terme $k = \frac{m}{2}$; mais la formule qui donne $\psi(n, m)$ varie avec la parité de n, puis on a $\psi(n, m) = 0$ pour $n \equiv 2 \pmod 4$, et on peut se borner aux valeurs impaires de n et à celles qui sont des multiples de 4. Puisque

$$\psi(n, m) = \sum_d \left(\frac{d}{n}\right) \quad \text{pour } n \text{ impair,}$$

et

$$\psi(n, m) = 2\sum \left(\frac{d}{n}\right) \quad \text{pour } n \text{ pair,}$$

nous aurons

$$\text{(D)} \qquad \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{k^2}{m}\right) = \sum_{m:d} \sum_{\lambda} \left(\frac{d}{\lambda}\right) f\left(\frac{\lambda}{m}\right) + 2\sum_{m:d} \sum_{\nu=0}^{\frac{1}{4}m-1} \left(\frac{d}{4\nu}\right) f\left(\frac{4\nu}{m}\right),$$

où il faut prendre $\left(\frac{1}{0}\right) = 1$, puis $\lambda = 1, 3, 5, \ldots, \lambda < m$. ($m$ est la valeur absolue d'un discriminant fondamental pair, d parcourt les diviseurs de m, positifs où négatifs, qui ont la forme de discriminant, et aussi la valeur $d = 1$; $f(x+1) = f(x)$.)

Comme application, prenons $f(x) = \Re(rx)$, où le symbole $\Re(z)$ a la même signification que plus haut $z - E(z)$, et r signifie un entier. En supposant l'entier positif m premier avec r, puis impair et sans diviseurs carrés, la formule (C) sera applicable et donnera

$$\sum_{\nu=1}^{m-1} \Re\left(\frac{r\nu^2}{m}\right) = \sum_d \sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \Re\left(\frac{r\nu}{m}\right).$$

Grâce à l'hypothèse que r et m soient premiers entre eux, on peut écrire

$$\sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \Re\left(\frac{r\nu}{m}\right) = \left(\frac{d}{r}\right) \sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{r\nu}\right) \Re\left(\frac{r\nu}{m}\right),$$

et la dernière quantité sera identique avec la suivante

$$\left(\frac{d}{r}\right) \sum_{\mu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{\mu}\right) \Re\left(\frac{\mu}{m}\right) = \left(\frac{d}{r}\right) \sum_{\mu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{\mu}\right) \frac{\mu}{m}.$$

Si d est un discriminant positif, la dernière somme est nulle, elle se réduit à

$$\sum_{1}^{m-1} \frac{\mu}{m} = \frac{m-1}{2}, \quad \text{pour} \quad d = 1,$$

puis à

$$-\left(\frac{-\delta}{r}\right)\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta), \quad \text{si} \quad d=-\delta$$

est un discriminant négatif. Il vient par conséquent

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}\Re\left(\frac{r\nu^2}{m}\right)=\frac{m-1}{2}-\sum_{\delta}\left(\frac{-\delta}{r}\right)\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta) \tag{40}$$

(m étant un produit de nombres premiers impairs différents, et δ parcourant tous les diviseurs positifs de m qui ont la forme $4k+3$; r signifie un entier premier avec m).

Le symbole τ_δ a naturellement la même signification pour la discriminant $-\delta$ que τ avait pour le discriminant Δ.

Si en particulier le nombre m est le produit de nombres premiers (positifs) de la forme $4k+1$, on aura

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}\Re\left(\frac{r\nu^2}{m}\right)=\frac{m-1}{2}.$$

Cette formule (40) permet d'évaluer les sommes

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}E\left(\frac{r\nu^2}{m}\right)$$

d'une manière assez commode; si en particulier $m=\Delta$ est un nombre premier de la forme $4k+3$, on aura

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}E\left(\frac{r\nu^2}{\Delta}\right)=\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\frac{r\nu^2}{\Delta}-\frac{\Delta-1}{2}+\frac{2}{\tau}\left(\frac{-\Delta}{r}\right)Cl(-\Delta),$$

et on pourra faire usage d'un raisonnement habituel depuis EISENSTEIN, pour transformer le premier membre. Des résultats de cette espèce pourront cependant à peine avoir quelque importance.

Passons au cas de m pair qui donne

$$\sum_{k=1}^{m-1}\Re\left(\frac{rk^2}{m}\right)=\sum_{d}\sum_{\lambda}\left(\frac{d}{\lambda}\right)\Re\left(\frac{r\lambda}{m}\right)+2\sum_{d}\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\Re\left(\frac{4r\nu}{m}\right).$$

Les restes des entiers $r\lambda$ suivant le module m reproduisant l'ensemble des λ, on a comme plus haut

$$\text{(a)}\qquad \sum_\lambda \left(\frac{d}{\lambda}\right)\Re\left(\frac{r\lambda}{m}\right) = \left(\frac{d}{r}\right)\sum \left(\frac{d}{\lambda}\right)\Re\left(\frac{\lambda}{m}\right) = \left(\frac{d}{r}\right)\sum_\lambda \left(\frac{d}{\lambda}\right)\frac{\lambda}{m},$$

r devant toujours rester premier avec m. On a aussi

$$\text{(b)}\qquad \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1} \left(\frac{d}{4\nu}\right)\Re\left(\frac{4r\nu}{m}\right) = \left(\frac{d}{r}\right)\sum_{1}^{\frac{1}{4}m-1} \left(\frac{d}{4\nu}\right)\Re\left(\frac{4\nu}{m}\right) = \left(\frac{d}{r}\right)\sum_{1}^{\frac{1}{4}m-1} \left(\frac{d}{4\nu}\right)\frac{4\nu}{m}.$$

Si d est un discriminant positif, les expressions (a) et (b) s'évanouiront, et il ne reste que les cas où $d = 1$ et où $d = -\delta$ est un discriminant négatif.

Posons

$$S = \sum_{\lambda < m} \left(\frac{-\delta}{\lambda}\right)\lambda, \qquad S' = \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1} \left(\frac{-\delta}{4\nu}\right)\nu;$$

la somme S' ne peut différer de zéro que lorsque δ est impair, on trouve aisément comme plus haut

$$S' = \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right)\nu = -\frac{m}{4}\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta),$$

et il ne reste que la somme S. Si δ est pair, elle est identique avec la suivante

$$S = \sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right)\nu$$

dont la valeur est

$$-m\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta),$$

et il faut étudier le seul cas, où δ est impair. Je pose

$$\lambda = \rho + 2\delta\mu, \qquad \left(\rho = 1, 3, \ldots, 2\delta - 1;\ \mu = 0, 1, \ldots, \frac{m}{2\delta} - 1\right),$$

nous aurons

$$S = \sum_{\rho} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right) \sum_{\mu=0}^{\frac{m}{2\delta}-1} (\rho + 2\delta\mu) = \frac{m}{2\delta} \sum_{\rho<2\delta} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\rho + A \sum_{\rho<2\delta} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right)$$

où l'on a désigné par A un entier indépendant de ρ et dont la valeur est inutile à signaler, puisque

$$\sum_{\rho} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right) = 0 \quad (\rho = 1, 3, 5, \ldots, 2\delta - 1).$$

La somme suivante qui seule reste à obtenir

$$S_0 = \sum_{\rho<2\delta} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\rho$$

contient des termes où $\rho = 1, 3, \ldots, \delta - 2$, puis les termes $\rho = \delta + \sigma$, $\sigma = 2, 4, 6, \ldots, \delta - 1$, de sorte que

$$S_0 = \sum_{\rho<\delta} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\rho + \sum_{\sigma} \left(\frac{-\delta}{\sigma}\right)(\sigma + \delta),$$

et en observant que la quantité

$$\sum_{\rho<\delta} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\rho + \sum_{\sigma} \left(\frac{-\delta}{\sigma}\right)\sigma$$

se compose des mêmes termes que la suivante

$$\sum_{1}^{\delta-1} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right)\nu = -\delta \frac{2}{\tau_\delta} Cl(-\delta),$$

il vient:

$$S_0 = -\delta \frac{2}{\tau_\delta} Cl(-\delta) + \delta \sum_{\nu=1}^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{-\delta}{2\nu}\right)$$

ou bien

$$S_0 = 2\delta \frac{2}{\tau_\delta} \left[\left(\frac{2}{\delta}\right) - 1\right] Cl(-\delta),$$

ce qui donne pour la somme considérée

$$S = m \frac{2}{\tau_\delta} \left[\left(\frac{2}{\delta}\right) - 1\right] Cl(-\delta),$$

lorsque δ est impair; cette formule reproduit celle qu'on a établie pour δ pair et est donc générale.

Cela étant, les formules qu'on vient de prouver

$$\sum_{\lambda}\left(\frac{d}{\lambda}\right)\Re\left(\frac{r\lambda}{m}\right)=\begin{cases} \text{o pour } d>\text{1}, \\ \frac{\text{1}}{4}m \text{ pour } d=\text{1}, \\ -\left(\frac{-\delta}{r}\right)\left(\text{1}-\left(\frac{2}{\delta}\right)\right)\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta) \text{ pour } d=-\delta, \end{cases}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\Re\left(\frac{4r\nu}{m}\right)=\begin{cases} \text{o pour } d>\text{1 ou pour } d \text{ pair}, \\ \frac{\text{1}}{2}\left(\frac{m}{4}-\text{1}\right) \text{ pour } d=\text{1}, \\ -\left(\frac{-\delta}{r}\right)\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta) \text{ pour } d=-\delta \text{ et impair} \end{cases}$$

permettent de conclure

$$\sum_{k=1}^{m-1}\Re\left(\frac{rk^2}{m}\right)=\frac{\text{1}}{2}m-\text{1}-\sum_{\delta}\left(\frac{-\delta}{r}\right)\left(\text{1}-\left(\frac{2}{\delta}\right)\right)\frac{2}{\tau_{\delta'}}Cl(-\delta)$$
$$-2\sum_{\delta'}\left(\frac{-\delta'}{r}\right)\frac{2}{\tau_{\delta'}}Cl(-\delta')$$

où δ parcourt tous les diviseurs de m qui rendent $-\delta$ un discriminant fondamental, tandis que δ' ne parcourt que des diviseurs impairs. On peut écrire d'une manière plus simple

$$(41)\qquad \sum_{\nu=1}^{m-1}\Re\left(\frac{r\nu^2}{m}\right)=\frac{\text{1}}{2}m-\text{1}-\sum_{\delta}\left(\frac{-\delta}{r}\right)\left[\text{1}-\left(\frac{2}{\delta}\right)+2\left(\frac{4}{\delta}\right)\right]\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta)$$

(m étant la valeur absolue d'un discriminant fondamental pair, r un entier premier avec m, et δ parcourant tous les diviseurs de m qui rendent $-\delta$ un discriminant fondamental).

Nous avons établi la formule (40), avec d'autres analogues, d'une autre manière et sous des hypothèses plus générales, dans un mémoire qui a paru dans les écrits de l'académie de Prague.[1] Ainsi, en supposant dans

[1] *O součtu celých v lomené arithmetické posloupnosti druhého stupně, etc.*, (Rozpravy české Akademie, VII[e] année, n° 7; 1898). V. aussi Annali di Matematica, 3[e] série, t. II.

la formule (40) m impair et d'ailleurs quelconque, il faudra introduire le plus grand diviseur carré q^2 de m; le premier terme au second membre sera alors $\frac{m-q}{2}$ au lieu de $\frac{m-1}{2}$.

Le deuxième exemple que je veux traiter de la formule (C) consiste à prendre $f(x) = \operatorname{sgn}. R^*(rx)$. En me bornant au cas de m impair, j'aurai d'abord

$$\sum_{k=1}^{m-1} \operatorname{sgn}. R^*\left(\frac{rk^2}{m}\right) = \sum_d \sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \operatorname{sgn}. R^*\left(\frac{r\nu}{m}\right).$$

Les sommes

$$\sum_1^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \operatorname{sgn}. R^*\left(\frac{r\nu}{m}\right) = \left(\frac{d}{r}\right) \sum_1^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \operatorname{sgn}. R^*\left(\frac{\nu}{m}\right)$$

sont nulles pour $d \geqq 1$, puis on a

$$\operatorname{sgn}. R^*\left(\frac{\nu}{m}\right) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \nu < \frac{1}{2} m, \\ -1 & \text{pour } \nu > \frac{1}{2} m, \end{cases}$$

donc pour $d = -\delta$

$$\sum_1^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \operatorname{sgn}. R^*\left(\frac{\nu}{m}\right) = \sum_1^{\frac{1}{2}(m-1)} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right) - \sum_{\frac{1}{2}(m+1)}^{m-1} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right);$$

en prenant, dans la seconde somme, $\nu = m - \mu$, il vient comme valeur du deuxième membre

$$2 \sum_1^{\frac{1}{2}(m-1)} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right).$$

faisant $m = \delta'\delta$, on aura $\frac{1}{2}(m-1) = \frac{\delta'-1}{2}\delta + \frac{\delta-1}{2}$ et par conséquent, notre quantité sera

$$2 \sum_1^{\frac{1}{2}(\delta-1)} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right) = 2\left(2 - \left(\frac{2}{\delta}\right)\right) \frac{2}{\tau_\delta} Cl(-\delta)$$

et il vient

$$(42)\qquad \sum_{\nu=1}^{m-1} \operatorname{sgn.} R^*\left(\frac{r\nu^2}{m}\right) = 2\sum_{\delta}\left(2-\left(\frac{2}{\delta}\right)\right)\left(\frac{-\delta}{r}\right)\frac{2}{\tau_\delta} Cl(-\delta)$$

(m étant le produit de nombres premiers impairs différents, r premier avec m, δ parcourant les diviseurs positifs de m qui ont la forme $4k+3$).

Les formules qu'on vient d'établir peuvent être considérées comme des analogies arithmétiques des sommes de Gauss. Nous en allons donner une analogie algébrique, en prenant, dans la formule (C), pour $f(x)$ la fonction $\cot x\pi$; des termes infinis ne se présenteront pas, puisque la congruence $\nu^2 \equiv 0 \pmod m$ exige $\nu \equiv 0 \pmod m$. On aura d'abord

$$\sum_{k=1}^{m-1} \cot\frac{k^2\pi}{m} = \sum_{d}\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{d}{\nu}\right)\cot\frac{\nu\pi}{m},$$

d parcourant les diviseurs de m, affectés des signes convenables.

Pour d positif, la somme partielle

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{d}{\nu}\right)\cot\frac{\nu\pi}{m}$$

est identiquement nulle, et il ne reste à considérer que des valeurs négatives $d=-\delta$. La somme à laquelle nous sommes ainsi amenés

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{-\delta}{\nu}\right)\cot\frac{\nu\pi}{m} = S_\delta$$

se transforme en faisant $\nu = \rho + \delta\mu$, $(\rho = 1, 2, 3, \ldots, \delta - 1;\ \mu = 0, 1, \ldots, m'-1)$, où $m' = \frac{m}{\delta}$. Il vient

$$S_\delta = \sum_{\rho=1}^{\delta-1}\left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\sum_{\mu=0}^{m'-1}\cot\left(\frac{\rho\pi}{m}+\frac{\mu\pi}{m'}\right),$$

ou en faisant usage de la relation

$$\sum_{\mu=0}^{m'-1}\cot\left(x+\frac{\mu}{m'}\right)\pi = m'\cot m'x\pi,$$

$$S_\delta = \frac{m}{\delta}\sum_{\rho=1}^{\delta-1}\left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\cot\frac{\rho\pi}{\delta},$$

d'où en substituant la valeur

$$\sum_{1}^{\delta-1}\left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\cot\frac{\rho\pi}{\delta}=\frac{4\sqrt{\delta}}{\tau_\delta}Cl(-\delta)$$

il suit

$$S_\delta=\frac{4m}{\tau_\delta\sqrt{\delta}}Cl(-\delta),$$

et on a la formule cherchée

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}\cot\frac{\nu^2\pi}{m}=4m\sum_{\delta}\frac{1}{\tau_\delta\sqrt{\delta}}Cl(-\delta) \tag{43}$$

(m désignant la valeur absolue d'un discriminant fondamental impair, et δ parcourant les diviseurs de m qui ont la forme $4k+3$).

Dans le cas de m pair ($m\equiv 0 \pmod 4$), dans la somme

$$\sum_{k=1}^{m-1}\cot\frac{k^2\pi}{m}$$

se trouve un terme infini, celui où $k=\frac{m}{2}$. Nou sconvenons donc de prendre $f(x)=\cot x\pi$ pour x fractionnaire, mais $f(x)=0$ pour x entier. La formule (D) nous donnera alors

$$\sum_{k=1}^{m-1}{}^{*}\cot\frac{k^2\pi}{m}=\sum_{d}\sum_{\lambda}\left(\frac{d}{\lambda}\right)\cot\frac{\lambda\pi}{m}+2\sum_{d}\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\cot\frac{4\nu\pi}{m},$$

où l'astérisque indique la suppression du terme $k=\frac{1}{2}m$ qui est infini; on peut écrire d'une manière plus commode

$$\sum_{k=1}^{m-1}{}^{*}\cot\frac{k^2\pi}{m}=\sum_{d}\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{4d}{\nu}\right)\cot\frac{\nu\pi}{m}+2\sum_{d}\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\cot\frac{4\nu\pi}{m}.$$

Pour $d\geqq 1$. les sommes

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{4d}{\nu}\right)\cot\frac{\nu\pi}{m},\qquad \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\cot\frac{4\nu\pi}{m}$$

sont nulles, et il ne reste que des sommes où $d=-\delta$ est négatif.

Considérons d'abord la quantité

$$S = \sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{-4\delta}{\nu}\right) \cot\frac{\nu\pi}{m}, \quad (\delta \text{ impair});$$

en faisant $\nu = \rho + 4\delta\mu$, $m' = \frac{m}{4\delta}$, nous aurons

$$S = \sum_{\rho=1}^{4\delta-1} \left(\frac{-4\delta}{\rho}\right) \sum_{\mu=0}^{m'-1} \cot\left(\frac{\rho\pi}{m} + \frac{\mu\pi}{m'}\right)$$

ou bien

$$S = m' \sum_{\rho=1}^{4\delta-1} \left(\frac{-4\delta}{\rho}\right) \cot\frac{\rho\pi}{4\delta},$$

et en faisant usage de la valeur

$$\sum_{\rho=1}^{4\delta-1} \left(\frac{-4\delta}{\rho}\right) \cot\frac{\rho\pi}{4\delta} = 2\sqrt{4\delta}\, Cl(-4\delta),$$

$$S = \frac{m}{\sqrt{\delta}} Cl(-4\delta) = \frac{m}{\sqrt{\delta}} \frac{2}{\tau_\delta} \left(2 - \left(\frac{2}{\delta}\right)\right) Cl(-\delta).$$

La formule qu'on vient d'obtenir

$$(\alpha) \qquad \sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{-4\delta}{\nu}\right) \cot\frac{\nu\pi}{m} = \frac{m}{\sqrt{\delta}} \frac{2}{\tau_\delta} \left(2 - \left(\frac{2}{\delta}\right)\right) Cl(-\delta)$$

simplifie la première partie de l'expression qui nous occupe, mais seulement pour des δ impairs. Si δ est pair, on a identiquement

$$\sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{-4\delta}{\nu}\right) \cot\frac{\nu\pi}{m} = \sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right) \cot\frac{\nu\pi}{m} = \frac{m}{\sqrt{\delta}} \frac{4}{\tau_\delta} Cl(-\delta),$$

et ce résultat est d'accord avec le précédent, puisque le symbole de LEGENDRE $\left(\frac{2}{\delta}\right)$ est nul pour δ pair.

Il reste encore les sommes

$$S' = \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1} \left(\frac{-\delta}{4\nu}\right) \cot\frac{4\nu\pi}{m};$$

elles sont nulles pour δ pair, et il s'agit donc du cas de δ impair.

En y faisant $\nu = \rho + \delta\mu$, $\frac{m}{4\delta} = m'$, nous aurons

$$S' = \sum_{\rho=1}^{\delta-1} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right) \sum_{\mu=0}^{m'-1} \cot\left(\frac{4\rho\pi}{m} + \frac{\mu\pi}{m'}\right) = m' \sum_{\rho=1}^{\delta-1} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right) \cot\frac{\rho\pi}{\delta}$$

ou bien

$$(\beta) \qquad \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1} \left(\frac{-\delta}{4\nu}\right) \cot\frac{4\nu\pi}{m} = \frac{m}{\tau_\delta\sqrt{\delta}} Cl(-\delta).$$

Ces résultats (α) et (β) permettent d'écrire

$$\sum_{k=1}^{m-1}{}^{*} \cot\frac{k^2\pi}{m} = \sum_{\delta} \frac{m}{\sqrt{\delta}} \frac{2}{\tau_\delta} \left(2 - \left(\frac{2}{\delta}\right)\right) Cl(-\delta) + \sum_{\delta'} \frac{m}{\sqrt{\delta'}} \frac{2}{\tau_{\delta'}} Cl(-\delta'),$$

où δ' ne parcourt que des diviseurs impairs. En séparant, dans la première partie, les diviseurs pairs δ'' des diviseurs impairs δ', on aura, après réduction, la formule suivante

$$\sum_{k=1}^{m-1}{}^{*} \cot\frac{k^2\pi}{m} = \sum_{\delta'} \frac{m}{\sqrt{\delta'}} \frac{2}{\tau_{\delta'}} \left(3 - \left(\frac{2}{\delta'}\right)\right) Cl(-\delta') + \sum_{\delta''} \frac{m}{\sqrt{\delta''}} \frac{4}{\tau_{\delta''}} Cl(-\delta'')$$

ce qu'on peut écrire d'une manière plus simple

$$(44) \qquad \sum_{k=1}^{m-1}{}^{*} \cot\frac{k^2\pi}{m} = m \sum_{\delta} \left[2 - \left(\frac{2}{\delta}\right) + \left(\frac{4}{\delta}\right)\right] \frac{2Cl(-\delta)}{\tau_\delta\sqrt{\delta}}$$

(m étant la valeur absolue d'un discriminant fondamental pair, et δ parcourant les diviseurs de m tels que $-\delta$ soit un discriminant; dans la somme au premier membre on supprime le terme infini $k = \frac{m}{2}$).

12. Soient $p_1, p_2, p_3 \ldots.$ des nombres premiers impairs, différents entre eux, et positifs, puis $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ des signes donnés par la formule générale

$$\varepsilon_\nu = \left(\frac{-4}{p_\nu}\right) = (-1)^{\frac{p_\nu-1}{2}},$$

et considérons la quantité

$$(45^a)\qquad \varpi_s = \left(\frac{\varepsilon_1 p_1}{s}\right)^{\frac{(-1)^{\alpha_1}+\left(\frac{\varepsilon_1 p_1}{s}\right)}{2}} \left(\frac{\varepsilon_2 p_2}{s}\right)^{\frac{(-1)^{\alpha_2}+\left(\frac{\varepsilon_2 p_2}{s}\right)}{2}} \cdots \left(\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{s}\right)^{\frac{(-1)^{\alpha_\nu}+\left(\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{s}\right)}{2}},$$

dans laquelle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ signifie un système donné d'entiers qui peuvent être remplacés par 0 ou par 1. Cette quantité ϖ_s est égale à un, si l'on a en même temps

$$\left(\frac{\varepsilon_1 p_1}{s}\right) = (-1)^{\alpha_1}, \qquad \left(\frac{\varepsilon_2 p_2}{s}\right) = (-1)^{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{s}\right) = (-1)^{\alpha_\nu},$$

tandis qu'elle est nulle dans tout autre cas.

Cela étant, considérons le produit

$$(45)\qquad \theta\left(x \left| \begin{matrix} p_1, p_2, \ldots, p_\nu \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \end{matrix} \right.\right) = \prod_{s=1}^{\Delta} \left(x - e^{\frac{2s\pi i}{\Delta}}\right)^{\varpi_s},$$

où $\Delta = p_1 p_2 \ldots p_\nu$ est évidemment la valeur absolue d'un discriminant fondamental impair.

Soit N le nombre effectif des facteurs du produit $\theta(x)$, on a évidemment

$$N = \sum_{s=1}^{\Delta} \varpi_s = \frac{1}{2^\nu} \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{p_1^2}{s}\right)\left(\frac{p_2^2}{s}\right) \cdots \left(\frac{p_\nu^2}{s}\right)$$
$$+ \frac{1}{2^\nu} \sum_{\rho_1\rho_2\ldots} (-1)^{\alpha_{\rho_1}+\alpha_{\rho_2}+\cdots} \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\varepsilon_{\rho_1}\varepsilon_{\rho_2}\cdots p_{\rho_1}p_{\rho_2}\cdots}{s}\right)\left(\frac{p_{\sigma_1}^2 p_{\sigma_2}^2\cdots}{s}\right)$$

où $\rho_1\rho_2\ldots$ signifient toutes les combinaisons véritables des entiers 1, 2, 3, ..., ν, et $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ les combinaisons de ces nombres, autres que les nombres ρ. Pour une combinaison fixe $\rho_1\rho_2\ldots\sigma_1\sigma_2\ldots$, posons

$$\varepsilon_{\rho_1}\varepsilon_{\rho_2}\ldots p_{\rho_1}p_{\rho_2}\ldots = D', \qquad p_{\sigma_1}p_{\sigma_2}\ldots = Q, \qquad |D'| = \Delta'.$$

D' étant un discriminant, on vérifie aisément que la somme

$$\sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\varepsilon_{\rho_1}p_{\rho_1}\varepsilon_{\rho_2}p_{\rho_2}\cdots}{s}\right)\left(\frac{p_{\sigma_1}^2 p_{\sigma_2}^2\cdots}{s}\right) = \sum_{s=1}^{\Delta' Q} \left(\frac{D'}{s}\right)\left(\frac{Q^2}{s}\right)$$

est nulle; parmi les sommes dont se compose N la première seule étant différente de zéro, il s'ensuit

$$N = \frac{1}{2^\nu} \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{p_1^2}{s}\right)\left(\frac{p_2^2}{s}\right) \cdots \left(\frac{p_\nu^2}{s}\right) = \frac{1}{2^\nu} \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\Delta^2}{s}\right).$$

ce qui n'est autre chose que

$$N = \frac{1}{2^\nu} \varphi(\Delta),$$

en employant l'écriture habituelle de GAUSS.

Prenons maintenant les logarithmes dans (45); il vient, en supposant $|x| > 1$,

$$\log \theta(x \mid \alpha) = N \log x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n x^n} \sum_{s=1}^{\Delta} \varpi_s e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}}.$$

Pour obtenir les coefficients de cette série, c'est à dire les quantités

$$G_n = 2^\nu \sum_{s=1}^{\Delta} \varpi_s e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}},$$

sous une forme plus simple, observons que l'on a, en développant le produit (45^a), l'aggrégat suivant

$$G_n = H_0 + \sum_{\alpha} H_1(\alpha) + \sum_{\alpha', \alpha''} H_2(\alpha', \alpha'') + \cdots,$$

où l'on a posé, pour abréger

$$H_0 = \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\Delta^2}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}},$$

puis, p. ex.

$$H_1(\alpha_1) = (-1)^{\alpha_1} \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\varepsilon_1 p_1}{s}\right)\left(\frac{p_2^2 p_3^2 \cdots p_\nu^2}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}},$$

$$H_2(\alpha_1, \alpha_2) = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2} \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2}{s}\right)\left(\frac{p_3^2 \cdots p_\nu^2}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}},$$

etc. Dans les sommes dont se compose G_n, il faut remplacer successivement α par tous les nombres de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, puis α_1, α_2 par toutes les combinaisons du second ordre $\alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \ldots, \alpha_{\nu-1}\alpha_\nu$ des mêmes nombres, et ainsi de suite.

Nous allons évaluer la quantité

$$(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\mu} H_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu) = \mathfrak{H}_\mu;$$

en posant pour abréger

$$\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2 \dots \varepsilon_\mu p_\mu = D_0, \qquad p_1 p_2 \dots p_\mu = \Delta_0,$$
$$p_{\mu+1} p_{\mu+2} \dots p_\nu = Q,$$

on aura

$$\mathfrak{H}_\mu = \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{D_0}{s}\right)\left(\frac{Q^2}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta_0 Q}}.$$

Cette expression s'évalue à l'aide de l'identité (2)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{m}\right) f(m) = \sum_d \mu(d) \sum_{m=1}^{\infty} f(md),$$

où d parcourt les diviseurs de Q, et il vient

$$\mathfrak{H}_\mu = \sum_d \mu(d) \left(\frac{D_0}{d}\right) \sum_{m=1}^{\Delta_0 Q_d} \left(\frac{D_0}{m}\right) e^{\frac{2mn\pi i}{\Delta_0 Q_d}},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$Q_d = \frac{Q}{d}.$$

Pour simplifier la somme intérieure, posons $m = s + k\Delta_0$, $(s = 1, 2, \dots, \Delta_0;$ $k = 0, 1, \dots, Q_d - 1)$, elle devient

$$a = \sum_{s=1}^{\Delta_0} \left(\frac{D_0}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta_0 Q_d}} \sum_{k=0}^{Q_d-1} e^{\frac{2kn\pi i}{Q_d}};$$

elle est donc nulle toutes les fois que $\frac{n}{Q_d} = n'$ ne soit pas un entier, et il ne reste qu'à considérer les termes où n' est entier, pour lesquels elle est égale à

$$a = Q_d \sum_{s=1}^{\Delta_0} \left(\frac{D_0}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta_0 Q_d}}$$

ou bien

$$a = Q_d \sum_{s=1}^{\Delta_0} \left(\frac{D_0}{s}\right) e^{\frac{2n's\pi i}{\Delta_0}} = Q_d \sqrt{D_0} \left(\frac{D_0}{n'}\right).$$

Pour obtenir le signe de LEGENDRE qui figure au second membre, observons que

$$\left(\frac{D_0}{n'}\right)\left(\frac{D_0}{Q_d}\right) = \left(\frac{D_0}{n}\right),$$

d'où il suit, D_0 étant premier avec Q_d,

$$\left(\frac{D_0}{n'}\right) = \left(\frac{D_0}{Q_d}\right)\left(\frac{D_0}{n}\right).$$

Ensuite

$$\left(\frac{D_0}{Q_d}\right)\left(\frac{D_0}{d}\right) = \left(\frac{D_0}{Q}\right),$$

d'où

$$\left(\frac{D_0}{Q_d}\right) = \left(\frac{D_0}{d}\right)\left(\frac{D_0}{Q}\right);$$

en substituant cette valeur, il vient

$$\left(\frac{D_0}{n'}\right) = \left(\frac{D_0}{d}\right)\left(\frac{D_0}{Q}\right)\left(\frac{D_0}{n}\right) = \left(\frac{D_0}{nQ}\right)\left(\frac{D_0}{d}\right),$$

et par conséquent

$$a = \left(\frac{D_0}{d}\right)\frac{Q}{d}\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\sqrt{D_0}.$$

Les entiers d sont assujettis à la condition que les quotients $\frac{nd}{Q}$ et $\frac{Q}{d}$ soient entiers. En représentant par ϑ le plus grand commun diviseur des deux nombres n et Q, on aura

$$n = n_1\vartheta, \qquad Q = Q_1\vartheta, \qquad (n_1, Q_1) \sim 1,$$

et les quotients en question seront

$$\frac{n_1 d}{Q_1}, \frac{Q_1\vartheta}{d}.$$

Le premier ne sera entier que si $\frac{d}{Q_1} = \delta$ est un entier, et le second

$$\frac{Q_1\vartheta}{d} = \frac{\vartheta}{\delta}$$

exige que ϑ soit un multiple de δ.

Le nombre ϑ étant fixé, on fera parcourir à δ les diviseurs de ϑ, et on posera $d = Q_1\delta$, c'est à dire $d = \frac{Q\delta}{\vartheta}$. La valeur obtenue de la somme

$$a = \left(\frac{D_0}{d}\right)\frac{Q}{d}\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\sqrt{D_0} \quad \text{prouve que} \quad \left(\frac{D_0}{d}\right)a = \frac{Q}{d}\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\sqrt{D_0}$$

ou bien

$$\left(\frac{D_0}{d}\right)a = \frac{1}{\delta}\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\vartheta\sqrt{D_0}.$$

Il faut encore évaluer le signe $\mu(d)$. Les équations

$$d = Q_1\delta, \qquad Q = Q_1\vartheta$$

donnent tout de suite

$$\mu(d) = \mu(Q_1)\mu(\delta), \qquad \mu(Q) = \mu(Q_1)\mu(\vartheta),$$

d'où

$$\mu(d) = \mu(\delta)\mu(Q)\mu(\vartheta);$$

et substituant, il vient

$$\mathfrak{H}_\mu = \sum_\delta \frac{\mu(\delta)}{\delta}\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\mu(Q)\mu(\vartheta)\vartheta\sqrt{D_0}$$

ou bien

$$\mathfrak{H}_\mu = \left(\frac{D_0}{nQ}\right)\mu(Q)\mu(\vartheta)\varphi(\vartheta)\sqrt{D_0},$$

ce qui donne le résultat voulu

$$H_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_\mu) = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\mu}\mu(Q)\mu(\vartheta)\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\varphi(\vartheta)\sqrt{D_0}.$$

On peut remarquer encore que $\mu(Q) = (-1)^{\nu-\mu}$, et il vient

$$H_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu) = (-1)^{(\alpha_1-1)+(\alpha_2-1)+\ldots+(\alpha_\mu-1)+\nu}\mu(\vartheta)\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\varphi(\vartheta)\sqrt{D_0}$$

ϑ désignant le plus grand commun diviseur des nombres n et Q.

Il s'agit encore d'exprimer la quantité $\sqrt{D_0}$ au moyen des racines $\sqrt{\varepsilon_1 p_1}$, $\sqrt{\varepsilon_2 p_2}$, ...

On a évidemment

$$\sqrt{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2} = \sqrt{\varepsilon_1 p_1}\sqrt{\varepsilon_2 p_2}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{p_2}{p_1}\right),$$

puis

$$\sqrt{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2 \cdot \varepsilon_3 p_3} = \sqrt{\varepsilon_1 p_1}\sqrt{\varepsilon_2 p_2}\sqrt{\varepsilon_3 p_3}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\cdot\left(\frac{p_1 p_2}{p_3}\right)\left(\frac{p_3}{p_1 p_2}\right)$$

ou bien

$$\sqrt{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2 \cdot \varepsilon_3 p_3} = \sqrt{\varepsilon_1 p_1}\sqrt{\varepsilon_2 p_2}\sqrt{\varepsilon_3 p_3}\left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right)\left(\frac{p_3 p_1}{p_2}\right)\left(\frac{p_1 p_2}{p_3}\right)$$

et d'une manière générale

$$\sqrt{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2 \cdots \varepsilon_\mu p_\mu} = \left(\frac{p_2 p_3 \cdots p_\mu}{p_1}\right)\left(\frac{p_1 p_3 \cdots p_\mu}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{p_1 p_2 \cdots p_{\mu-1}}{p_\mu}\right)$$
$$\times \sqrt{\varepsilon_1 p_1}\sqrt{\varepsilon_2 p_2}\sqrt{\varepsilon_3 p_3}\cdots\sqrt{\varepsilon_\mu p_\mu}.$$

Grâce à la loi de réciprocité, on a

$$\left(\frac{D_0}{nQ}\right) = \left(\frac{nQ}{p_1 p_2 \cdots p_\mu}\right) = \left(\frac{nQ}{p_1}\right)\left(\frac{nQ}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{nQ}{p_\mu}\right),$$

de sorte que le produit

$$\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\left(\frac{p_2 p_3 \cdots p_\mu}{p_1}\right)\left(\frac{p_1 p_3 \cdots p_\mu}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{p_1 p_2 \cdots p_{\mu-1}}{p_\mu}\right)$$

s'écrira

$$\left(\frac{np_2 p_3 \cdots p_\nu}{p_1}\right)\left(\frac{np_1 p_3 \cdots p_\nu}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{np_1 p_2 \cdots p_{\mu-1} p_{\mu+1} \cdots p_\nu}{p_\mu}\right)$$

et il vient

$$(-1)^\nu H_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu) = (-1)^{\alpha_1-1}\left(\frac{nP_1'}{p_1}\right)\sqrt{\varepsilon_1 p_1}(-1)^{\alpha_2-1}\left(\frac{nP_2'}{p_2}\right)\sqrt{\varepsilon_2 p_2}$$
$$\ldots(-1)^{\alpha_\mu-1}\left(\frac{nP_\mu'}{p_\mu}\right)\sqrt{\varepsilon_\mu p_\mu}\,\mu(\vartheta)\varphi(\vartheta)$$

en posant

$$P_1' = \frac{\Delta}{p_1}, \qquad P_2' = \frac{\Delta}{p_2}, \quad \text{etc.},$$

et ϑ désignant le produit des nombres $p_{\mu+1}, p_{\mu+2}, \ldots, p_\nu$ qui divisent le nombre n.

Si en particulier n est premier avec Δ, on aura l'expression plus simple

$$(-1)^\nu H_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu) = \prod_{\rho=1}^{\mu}\left\{(-1)^{\alpha_\rho-1}\left(\frac{nP_\rho'}{p_\rho}\right)\sqrt{\varepsilon_\rho p_\rho}\right\}.$$

Dans ce qui précède on a supposé $\mu > 0$; pour obtenir la quantité

$$H_0 = \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\Delta^2}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}}$$

le même procédé donne d'abord

$$H_0 = \sum_d \mu(d) \sum_{m=1}^{\Delta_d} e^{\frac{2nm\pi i}{\Delta_d}}, \qquad \Delta_d = \frac{\Delta}{d}.$$

et l'on aura

$$H_0 = \mu(\Delta) = (-1)^\nu,$$

si n est premier avec Δ; le cas plus général s'établit d'une manière analogue.

En posant pour abréger

$$\Phi(\alpha_\rho) = (-1)^{\alpha_\rho - 1}\left(\frac{nP'_\rho}{p_\rho}\right)\sqrt{\varepsilon_\rho p_\rho},$$

l'équation

$$G_n = H_0 + \sum_\alpha H_1(\alpha) + \sum_{\alpha_1, \alpha_2} H_2(\alpha_1, \alpha_2) + \ldots$$

s'eérira

$$(-1)^\nu G_n = 1 + \sum \Phi(\alpha) + \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \Phi(\alpha_1)\Phi(\alpha_2) + \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \Phi(\alpha_1)\Phi(\alpha_2)\Phi(\alpha_3) + \ldots$$

ou bien

$$(-1)^\nu G_n = (1 + \Phi(\alpha_1))(1 + \Phi(\alpha_2))(1 + \Phi(\alpha_3)) \ldots (1 + \Phi(\alpha_\nu))$$

pourvu que, bien entendu, n soit premier avec Δ.

En substituant l'expression primitive de G_n, on aura la relation cherchée

$$(46) \qquad \sum_{s=1}^{\Delta-1} \varpi_s e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}} = (-1)^\nu \prod_{\rho=1}^{\nu} \frac{1 - (-1)^{\alpha_\rho}\left(\frac{nP'_\rho}{p_\rho}\right)\sqrt{\varepsilon_\rho p_\rho}}{2},$$

où $\Delta = p_1 p_2 \ldots p_\nu$, $P'_\rho = \frac{\Delta}{p_\rho}$, et l'expression ϖ_s est définie par (45^a); le nombre n est supposé positif et premier avec Δ.

Le premier membre de cette équation n'est autre chose que la somme

$$\sum e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}},$$

dans laquelle l'indice sommatoire s satisfait aux conditions $0 < s < \Delta$;

$$\left(\frac{s}{p_1}\right) = (-1)^{\alpha_1}, \qquad \left(\frac{s}{p_2}\right) = (-1)^{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad \left(\frac{s}{p_\nu}\right) = (-1)^{\alpha_\nu}$$

et qui se compose donc de $\frac{1}{2^\nu}\varphi(\Delta)$ termes. Si en particulier on fait $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = 0$, les s seront les résidus quadratiques de Δ, premiers avec Δ.

Je vais considérer maintenant la quantité (46) dans le cas où l'entier n a un facteur commun avec Δ; soit $n = m\Delta''$, $\Delta = \Delta'\Delta''$, les deux nombres m et Δ' étant premiers entre eux. La somme

$$S = \sum_{s=1}^{\Delta} \varpi_s e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}}$$

devient

$$S = \sum_{s=1}^{\Delta'\Delta''} \varpi_s e^{\frac{2ms\pi i}{\Delta'}},$$

et on peut la transformer en faisant $s = r + k\Delta'$; il vient

$$S = \sum_{r=1}^{\Delta'} \sum_{k=0}^{\Delta''-1} \varpi_{r+k\Delta'} e^{\frac{2mr\pi i}{\Delta'}}.$$

Cela étant, représentons par $p_1, p_2, \ldots, p_\gamma$ les facteurs de Δ', et posons pour abréger

$$\varpi'_s = \prod_{\rho=1}^{\gamma} \left\{ \left(\frac{\varepsilon_\rho p_\rho}{s}\right) \frac{(-1)^{\alpha_\rho} + \left(\frac{\varepsilon_\rho p_\rho}{s}\right)}{2} \right\},$$

$$\varpi''_s = \prod_{\rho=\gamma+1}^{\nu} \left\{ \left(\frac{\varepsilon_\rho p_\rho}{s}\right) \frac{(-1)^{\alpha_\rho} + \left(\frac{\varepsilon_\rho p_\rho}{s}\right)}{2} \right\}.$$

On a, par définition,

$$\varpi_s = \varpi'_s \varpi''_s,$$

puis comme cela se voit aisément

$$\varpi'_{s+\Delta'} = \varpi'_s, \qquad \varpi''_{s+\Delta''} = \varpi''_s,$$

d'où

$$\varpi_{r+k\Delta'} = \varpi'_{r+k\Delta'}\varpi''_{r+k\Delta'} = \varpi'_r\varpi''_{r+k\Delta'},$$

et notre somme prend la forme

$$S = \sum_{r=1}^{\Delta'} \varpi'_r e^{\frac{2mr\pi i}{\Delta'}} \sum_{k=0}^{\Delta''-1} \varpi''_{r+k\Delta'}.$$

Les deux entiers Δ' et Δ'' étant premiers entre eux, les nombres $r + k\Delta'$ $(k = 0, 1, \ldots, \Delta'' - 1)$ parcourent un système complet de restes du module Δ'', et il vient

$$\sum_{k=0}^{\Delta''-1} \varpi''_{r+k\Delta'} = \sum_{s=1}^{\Delta''} \varpi''_s = \frac{\varphi(\Delta'')}{2^{\nu-\gamma}}.$$

Donc enfin

$$S = \frac{\varphi(\Delta'')}{2^{\nu-\gamma}} \sum_{r=1}^{\Delta'} \varpi'_r e^{\frac{2mr\pi i}{\Delta'}},$$

ou en faisant usage de (46),

$$(47) \qquad \sum_{s=1}^{\Delta'\Delta''} \varpi_s e^{\frac{2ms\pi i}{\Delta'}} = (-1)^{\gamma} \frac{\varphi(\Delta'')}{2^{\nu-\gamma}} \prod_{\rho=1}^{\gamma} \frac{1 - (-1)^{\alpha_\rho}\left(\frac{m\Delta'_\rho}{p_\rho}\right)\sqrt{\varepsilon_\rho p_\rho}}{2},$$

$\left(\Delta' = p_1 p_2 \ldots p_\gamma, \quad \Delta'' = p_{\gamma+1} \ldots p_\nu, \quad \Delta'\Delta'' = \Delta, \quad \Delta'_\rho = \frac{\Delta'}{p_\rho};\right.$ m positif et premier avec $\left.\Delta'\right)$.

Les formules (46) et (47) prouvent que les sommes

$$\sum_{s=1}^{\Delta} \varpi_s e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}}$$

sont des quantités de la forme

$$\frac{1 \pm \sqrt{\varepsilon p}}{2} \, \frac{1 \pm \sqrt{\varepsilon' p'}}{2} \, \frac{1 \pm \sqrt{\varepsilon'' p''}}{2} \ldots,$$

et il s'ensuit que les coefficients du polynôme

$$\theta\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} p_1 p_2 \ldots p_\nu \\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu \end{matrix}\right) = x^N + a_1 x^{N-1} + a_2 x^{N-2} + \ldots$$

sont des nombres algébriques entiers du domaine de rationalité

$$(\sqrt{\varepsilon_1 p_1}, \sqrt{\varepsilon_2 p_2}, \ldots, \sqrt{\varepsilon_\nu p_\nu}).$$

En appelant *type* de la fonction entière

$$\theta\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} p_1 \ldots p_\nu \\ \alpha_1 \ldots \alpha_\nu \end{matrix}\right) = \theta_a(x)$$

le système des signes

$$(-1)^{\alpha_1}, (-1)^{\alpha_2}, \ldots, (-1)^{\alpha_\nu},$$

il y aura 2^ν types distinctes.

Le produit de polynômes

$$\prod_{(a)} \theta_a(x),$$

étendu à tous les 2^ν types différents, donne l'équation irréductible d'ordre $\varphi(\Delta)$ à laquelle satisfait la quantité $e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}$. En effectuant le produit

$$\prod_{(a)}{}' \theta_a(x)$$

étendu aux polynômes dont les types satisfont à la condition

$$(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu} = 1 \quad \text{(types pairs)},$$

on reçoit l'expression de Gauss

$$\frac{Y(x) - \sqrt{D}\, Z(x)}{2}, \qquad D = \varepsilon_1 p_1\, \varepsilon_2 p_2 \ldots \varepsilon_\nu p_\nu.$$

Il parait que cette formation des polynômes de Gauss puisse donner l'occasion à des conclusions intéressantes.

13. Nous allons considérer un nombre quelconque (m) des discriminants fondamentaux premiers entre eux, soient $D_1, D_2, \ldots, D_m$, dont les valeurs absolues respectives soient désignées par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$. Posons pour abréger $D = D_1 D_2 \ldots D_m$, $\Delta = |D|$, puis formons tous les produits possibles

$$D_{r_1} D_{r_2} \ldots D_{r_n} = D', \qquad \Delta' = |D'|,$$

$r_1, r_2, \ldots, r_a$ désignant une combinaison quelconque des indices $1, 2, \ldots, m$. En désignant par $r_{a+1} \ldots r_m$ la combinaison complémentaire, le produit

$$Q' = \Delta_{r_{a+1}} \ldots \Delta_{r_m}$$

sera tel que $|D'Q'| = \Delta'Q' = \Delta$; les produits D' sont évidemment des discriminants fondamentaux; je conviens d'écrire

$$F(D') = \frac{2}{\tau'} Cl(D'), \text{ si } D' \text{ est négatif, et}$$

$$F(D') = 0, \text{ si } D' \text{ est positif.}$$

En introduisant encore le symbole

$$(D', Q') = \prod_q \left(1 - \left(\frac{D'}{q}\right)\right)$$

où le produit se rattache à tous les diviseurs premiers différents q du nombre Q', et en convenant d'écrire

$$(D', 1) = 1,$$

j'aurai la formule suivante qui sera démontrée tout à l'heure

$$\frac{1}{2}\varphi(\Delta) - \frac{2^m}{\Delta}\sum{}^* s = \sum_{D'} (D', Q') F(D'); \tag{48}$$

dans le premier membre le symbole $\sum^* s$ signifie la somme de ceux des nombres $s = 1, 2, 3, \ldots, \Delta$ qui satisfont à des conditions simultanées

$$\left(\frac{D_1}{s}\right) = \left(\frac{D_2}{s}\right) = \ldots = \left(\frac{D_m}{s}\right) = 1;$$

dans le second membre, D' parcourt tous les produits $D_{r_1} \ldots D_{r_a}$ dont il a été question plus haut.

Afin de démontrer la formule (48), j'observe que l'on a

$$\sum{}^* s = \sum_{s=1}^{\Delta} \frac{1 + \left(\frac{D_1}{s}\right)}{2} \, \frac{1 + \left(\frac{D_2}{s}\right)}{2} \cdots \frac{1 + \left(\frac{D_m}{s}\right)}{2} \left(\frac{D}{s}\right) s,$$

d'où

$$2^m \sum{}^* s = \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{D_1}{s}\right)\left(1 + \left(\frac{D_1}{s}\right)\right)\left(1 + \left(\frac{D_2}{s}\right)\right)\left(1 + \left(\frac{D_m}{s}\right)\right) s.$$

Or le produit

$$\left(\frac{D}{s}\right)\left(1+\left(\frac{D_1}{s}\right)\right)\left(1+\left(\frac{D_2}{s}\right)\right)\cdots\left(1+\left(\frac{D_m}{s}\right)\right)$$

est égal à la somme

$$\left(\frac{D^2}{s}\right)+\sum_{D'}\left(\frac{D'}{s}\right)\left(\frac{Q'^2}{s}\right),$$

D' parcourt tous les discriminants formés de la manière indiquée plus haut. Il vient donc d'abord

$$2^m\sum{}^* s=\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{\Delta^2}{s}\right)s+\sum_{D'}\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{D'}{s}\right)\left(\frac{Q'^2}{s}\right)s;$$

la première somme

$$\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{\Delta^2}{s}\right)s$$

est la somme des entiers premiers avec Δ et plus petits que Δ, et a pour valeur l'expression $\frac{1}{2}\Delta\varphi(\Delta)$.

Ensuite, si $D'=D$, $Q'=1$, la somme

$$\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{D}{s}\right)s$$

a pour valeur la quantité $-\Delta F(D)$, et il ne s'agit que des expressions

$$S=\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{D'}{s}\right)\left(\frac{Q'^2}{s}\right)s,$$

où $Q'>1$. On les obtient au moyen de l'identité

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{Q^2}{h}\right)f(h)=\sum_{d}\mu(d)\sum_{h=1}^{\infty}f(hd),$$

où d parcourt les diviseurs de Q. Il vient, en posant $Q'_d=\frac{Q'}{d}$,

$$S=\sum_{Q':d}\mu(d)\left(\frac{D'}{d}\right)\sum_{s=1}^{\Delta' Q'_d}\left(\frac{D'}{s}\right)ds.$$

Or, on a la formule générale

$$\sum_{s=1}^{n\Delta_0}\left(\frac{D_0}{s}\right)s = n\sum_{r=1}^{\Delta_0}\left(\frac{D_0}{r}\right)r = -n\Delta_0 F(D_0),$$

qui donne

$$S = -\sum_d \mu(d)\left(\frac{D'}{d}\right)dQ'_d\,\Delta' F(D') = -\Delta F(D')\sum_d \mu(d)\left(\frac{D'}{d}\right).$$

La somme

$$\sum_d \mu(d)\left(\frac{D'}{d}\right),$$

étendue à tous les diviseurs d du nombre Q', est égale au produit

$$\prod_q\left(1-\left(\frac{D'}{q}\right)\right),$$

q parcourant les différents facteurs premiers de Q'; ce produit étant désignée par (D', Q'), nous avons

$$S = -\Delta(D', Q')F(D'),$$

ce qui vérifie l'équation (48) dont nous allons signaler quelques cas particuliers

I. $\qquad m = 2; \qquad D_1 = -p, \qquad D_2 = -q,$

p et q étant deux nombres premiers de la forme $4k+3$. Parmi les produits D' qu'ont peut former des facteurs D_1 et D_2, l'un est positif; les autres sont D_1 et D_2 eux-mêmes, et il vient

$$\frac{(p-1)(q-1)}{2} - \frac{4}{pq}\sum_1^{pq}{}^{*} s = \left(1-\left(\frac{q}{p}\right)\right)\frac{2}{\tau_p}Cl(-p) + \left(1-\left(\frac{p}{q}\right)\right)\frac{2}{\tau_q}Cl(-q); \tag{49}$$

nous y avons remplacé le symbole $\left(\frac{-p}{q}\right)$ par son équivalent $\left(\frac{q}{p}\right)$. Les deux signes $\left(\frac{p}{q}\right)$ et $\left(\frac{q}{p}\right)$ étant opposés, d'après la loi de réciprocité, l'une des deux différences

$$1-\left(\frac{p}{q}\right),\qquad 1-\left(\frac{q}{p}\right)$$

sera nulle et le second membre se réduit toujours à un seul terme

II. $\qquad m=2,\qquad D_1=-p,\qquad D_2=q,$

p et q étant deux nombres premiers, $p\equiv 3$, $q\equiv 1 \pmod 4$.

Il y a deux produits négatifs, $D'=-p$ et $D'=-pq$. La formule (48) devient

$$(50)\qquad \frac{(p-1)(q-1)}{2}-\frac{4}{pq}\sum_{1}^{pq}{}^{*} s = Cl(-pq)+\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)\right)\frac{2}{\tau_p}\,Cl(-p),$$

les entiers s parcourent, comme dans (49), les résidus quadratiques du module pq, premiers avec le module. En observant que l'on a

$$\frac{1}{2}(p-1)(q-1)\equiv 0 \pmod 4,$$

$$Cl(-p)\equiv 1 \pmod 2,$$

il vient, pour $p>3$,

$$(51)\qquad Cl(-pq)\equiv 1-\left(\frac{q}{p}\right) \pmod 4.$$

Pour $p=3$, multiplions les deux membres par 3, et il vient d'abord

$$3Cl(-pq)\equiv 1-\left(\frac{q}{p}\right) \pmod 4$$

d'où immédiatement la congruence précédente. La congruence (51) est donc générale, lorsque p et q sont deux nombres premiers, l'un de la forme $4k+1$, l'autre de la forme $4k+3$.

III. $\qquad m=3,\quad D_1=-p_1,\quad D_2=-p_2,\quad D_3=-p_3,$

les p étant des nombres premiers de la forme $4k+3$. Dans ce cas on a les valeurs suivantes des discriminants négatifs D': $-p_1$, $-p_2$, $-p_3$, $-p_1p_2p_3$; le résultat (48) devient alors

(52)
$$\frac{1}{2}(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)-\frac{8}{p_1p_2p_3}\sum_{1}^{p_1p_2p_3}{}^{*}s$$
$$=Cl(-p_1p_2p_3)+\sum_{\alpha=1,2,3}\left(1-\left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha}\right)\right)\frac{2}{\tau_{p_\alpha}}Cl(-p_\alpha)$$

où s parcourt les résidus quadratiques du module $p_1p_2p_3$, et les indices α, β, γ signifient les chiffres $1, 2, 3$ pris dans un ordre quelconque.

Si les nombres p_1, p_2, p_3 sont différents de 3, le quotient $\frac{2}{\tau_{p_\alpha}}$ sera l'unité, et il vient la congruence suivante

$$(\alpha)\quad Cl(-p_1p_2p_3)\equiv\left(1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_3}{p_1}\right)\right)+\left(1-\left(\frac{p_3}{p_2}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right)$$
$$+\left(1-\left(\frac{p_1}{p_3}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_2}{p_3}\right)\right)+4 \pmod 8,$$

qui peut encore se simplifier considérablement. Elle a lieu encore si $p_1=3$, car il suffit, dans ce cas, de multiplier les deux membres par 9 et on parvient au même résultat.

Les trois membres p ayant la forme $4k+3$, on a, d'après la loi de réciprocité
$$\left(\frac{p_1p_2}{p_3}\right)\left(\frac{p_2p_3}{p_1}\right)\left(\frac{p_3p_1}{p_2}\right)=-1$$

et cette égalité n'a lieu que sous l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes:

a) $$\left(\frac{p_1p_2}{p_3}\right)=\left(\frac{p_2p_3}{p_1}\right)=\left(\frac{p_3p_1}{p_2}\right)=-1,$$

b) $$\left(\frac{p_1p_3}{p_2}\right)=-1,\qquad \left(\frac{p_2p_3}{p_1}\right)=\left(\frac{p_1p_2}{p_3}\right)=1,$$

où nous avons admis que dans le second cas les nombres p soient pris dans un ordre convenable.

Le cas de a) exige que

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)=-\left(\frac{p_3}{p_2}\right),\qquad \left(\frac{p_2}{p_3}\right)=-\left(\frac{p_1}{p_3}\right),\qquad \left(\frac{p_2}{p_1}\right)=-\left(\frac{p_3}{p_1}\right),$$

l'ordre des p étant ici arbitraire, je le fixerai par la condition $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 1$; on aura alors

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \left(\frac{p_2}{p_3}\right) = \left(\frac{p_3}{p_1}\right) = 1, \qquad \left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \left(\frac{p_3}{p_2}\right) = \left(\frac{p_1}{p_3}\right) = -1.$$

L'une des deux différences $1 - \left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right)$, $1 - \left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha}\right)$ sera donc toujours nulle et la congruence (α) devient

$$Cl(-p_1 p_2 p_3) \equiv 4 \pmod 8.$$

Passons au second cas; les égalités b) donnent

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -\left(\frac{p_3}{p_2}\right), \qquad \left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \left(\frac{p_3}{p_1}\right), \qquad \left(\frac{p_1}{p_3}\right) = \left(\frac{p_2}{p_3}\right),$$

et le second membre de la congruence (α) sera alors

$$\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{p_1}{p_3}\right)\right)^2 + 4,$$

et puisque

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\left(\frac{p_1}{p_3}\right) = -\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\left(\frac{p_3}{p_1}\right) = -\left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right) = -1,$$

l'une des deux différences $1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)$ et $1 - \left(\frac{p_1}{p_3}\right)$ sera nulle, l'autre étant égale à deux, il vient, dans ce cas, la congruence

$$Cl(-p_1 p_2 p_3) \equiv 0 \pmod 8.$$

Les deux cas se résument par la congruence générale

$$(53) \qquad Cl(-p_1 p_2 p_3) \equiv \left(\frac{p_1 p_2}{p_3}\right) + \left(\frac{p_1 p_3}{p_2}\right) + \left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right) - 1 \pmod 8,$$

où p_1, p_2, p_3 signifient trois nombres premiers différents de la forme $4k+3$

IV. $\quad m = 3; \qquad D_1 = p, \qquad D_2 = q, \qquad D_3 = -r,$

p, q, r étant des nombres premiers, les deux premiers de la forme $4k+1$, le dernier de la forme $4k+3$. On a ici les valeurs suivantes des discriminants D' négatifs

$$D = -pqr,\ -pr,\ -qr,\ -r,$$

et la formule (48) devient

$$(54)\qquad \frac{1}{2}(p-1)(q-1)(r-1)-\frac{8}{pqr}\sum_{1}^{pqr}{}^{*} s$$

$$= Cl(-pqr)+\left(1-\left(\frac{q}{pr}\right)\right)Cl(-pr)+\left(1-\left(\frac{p}{qr}\right)\right)Cl(-qr)$$

$$+\left(1-\left(\frac{p}{r}\right)\right)\left(1-\left(\frac{q}{r}\right)\right)\frac{2}{\tau_r}Cl(-r).$$

On en tire une congruence pour le module 8, en faisant usage du résultat (51). On aura

$$Cl(-pqr)\equiv\left(1-\left(\frac{p}{r}\right)\right)\left(1-\left(\frac{q}{pr}\right)\right)+\left(1-\left(\frac{q}{r}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p}{qr}\right)\right)$$

$$+\left(1-\left(\frac{p}{r}\right)\right)\left(1-\left(\frac{q}{r}\right)\right)\pmod 8.$$

Pour simplifier, distinguons deux cas:

a) $\qquad \left(\frac{p}{r}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)=\varepsilon,\qquad \left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)=\varepsilon',$

b) $\qquad \left(\frac{p}{r}\right)=-\left(\frac{q}{r}\right)=\varepsilon,\qquad \left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)=\varepsilon'.$

Dans le premier cas le second membre prend la forme

$$2(1-\varepsilon)(1-\varepsilon\varepsilon')+(1-\varepsilon)^2$$

et ce nombre est toujours congru à $(1-\varepsilon)^2=2(1-\varepsilon)$, suivant le module 8.

Dans le cas b) le second membre de la congruence en question s'écrira

$$(1-\varepsilon)(1+\varepsilon\varepsilon')+(1+\varepsilon)(1-\varepsilon\varepsilon')+(1-\varepsilon)(1+\varepsilon);$$

le dernier terme est nul et les deux premiers donnent

$$2(1-\varepsilon').$$

Le résultat est donc le suivant:

»Soient p, q, r trois nombres premiers tels que

$$p\equiv q\equiv -r\equiv 1 \pmod 4,$$

alors on a, *pour le module 8*,

$$(55)\qquad Cl(-pqr) \equiv \begin{cases} 2\left(1-\left(\frac{p}{r}\right)\right), & \text{si } \left(\frac{pq}{r}\right) = 1, \\ 2\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)\right), & \text{si } \left(\frac{pq}{r}\right) = -1, \end{cases}$$

V. $m = 4,\quad D_1 = -p_1,\quad D_2 = -p_2,\quad D_3 = -p_3,\quad D_4 = q.$

Les nombres p sont premiers de la forme $4k+3$, q est également premier mais de la forme $4k+1$. Il y a huit discriminants D' négatifs, à savoir $-p_1p_3p_3q$, $-p_1p_2p_3$, puis trois discriminants de la forme $-p_aq$ et trois discriminants $-p_a$. La formule (48) devient alors

$$\frac{1}{2}(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)(q-1) - \frac{16}{p_1p_2p_3q}\sum{}^{*} s$$

$$= Cl(-p_1p_2p_3q) + \left(1-\left(\frac{q}{p_1p_2p_3}\right)\right)Cl(-p_1p_2p_3)$$

$$+ \sum_{a=1,2,3}\left(1-\left(\frac{p_\beta}{p_aq}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_\gamma}{p_aq}\right)\right)Cl(-p_aq)$$

$$+ \sum_{a=1,2,3}\left(1-\left(\frac{p_\beta}{p_a}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_\gamma}{p_a}\right)\right)\left(1-\left(\frac{q}{p_a}\right)\right)\frac{2}{\tau_{p_a}}Cl(-p_a).$$

On en déduit une congruence pour le module 16; si l'on fait usage des formules (51) et (53), elle prend la forme suivante

$$\text{(a)}\qquad Cl(-p_1p_2p_3q) \equiv \left(1-\left(\frac{p_1p_2p_3}{q}\right)\right)\left[\sum_{a=1,2,3}\left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_a}\right) - 1\right]$$

$$+ \sum_{a=1,2,3}\left(1-\left(\frac{p_a}{q}\right)\right)\left[\left(1-\left(\frac{p_\beta}{p_a}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_\gamma}{p_a}\right)\right) + \left(1-\left(\frac{p_\beta}{qp_a}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_\gamma}{qp_a}\right)\right)\right].$$

On en tire plusieurs conséquences:

1° Si $\left(\frac{p_1}{q}\right) = \left(\frac{p_2}{q}\right) = \left(\frac{p_3}{q}\right) = 1$, on a $Cl(-p_1p_2p_3q) \equiv 0 \pmod{16}$.

2° Si $\left(\frac{p_1}{q}\right) = \left(\frac{p_2}{q}\right) = \left(\frac{p_3}{q}\right) = -1$, la parenthèse [ ] dans la seconde somme devient

$$\left(1 - \left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha}\right)\right) + \left(1 + \left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right)\right)\left(1 + \left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha}\right)\right) = A;$$

il est clair que $A = 0$, si les deux signes $\left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right)$, $\left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha}\right)$ sont opposés; un des deux termes dont A se compose, sera différent de zéro et aura pour valeur 4, si les deux signes en question sont égaux. Donc on a, en résumé,

$$A = 2\left[\left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_\alpha}\right) + 1\right],$$

et nous aurons le résultat

$$Cl(-p_1 p_2 p_3 q) \equiv -2\left[\sum_\alpha \left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_\alpha}\right) - 1\right] + 4\sum_\alpha \left[\left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_\alpha}\right) + 1\right]$$

$$\equiv 2\sum_\alpha \left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_\alpha}\right) + 14,$$

ou bien

$$Cl(-p_1 p_2 p_3 q) \equiv 2\left[\sum_\alpha \left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_\alpha}\right) - 1\right] \pmod{16}.$$

Dans le cas où

3° $\left(\frac{p_1}{q}\right) = \left(\frac{p_2}{q}\right) = 1, \qquad \left(\frac{p_3}{q}\right) = -1,$

la deuxième partie du second membre dans la formule (a) se réduit à un seul terme, celui où $\alpha = 3$; la parenthèse [ ] se compose alors de deux termes égaux, et le total sera toujours divisible par 16; donc ici il vient

$$Cl(-p_1 p_2 p_3 q) \equiv 2\left[\sum_\alpha \left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_\alpha}\right) - 1\right].$$

Enfin, l'hypothèse

4° $\left(\frac{p_1}{q}\right) = 1, \qquad \left(\frac{p_2}{q}\right) = \left(\frac{p_3}{q}\right) = -1$

ramène le second membre de (a) à deux termes, ceux qui résultent de la somme en y faisant $\alpha = 2$ et $\alpha = 3$; on a alors l'expression

$$2\left[\left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_3}{p_2}\right)\right)+\left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right)\left(1+\left(\frac{p_3}{p_2}\right)\right)\right]$$
$$+\,2\left[\left(1-\left(\frac{p_1}{p_3}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_2}{p_3}\right)\right)+\left(1-\left(\frac{p_1}{p_3}\right)\right)\left(1+\left(\frac{p_2}{p_3}\right)\right)\right].$$

L'un des deux termes dont se compose l'une ou l'autre parenthèse, est nul, puisque y figurent les facteurs tels que $1 \mp \left(\frac{p_3}{p_2}\right)$; l'expression se réduit donc à la quantité

$$4\left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right)+4\left(1-\left(\frac{p_1}{p_3}\right)\right) \equiv -4\left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right)+4\left(1-\left(\frac{p_1}{p_3}\right)\right)$$
$$\equiv \pm\, 4\left(1-\left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right)\right)$$

et il vient

$$Cl(-p_1 p_2 p_3 q) \equiv 4\left(1-\left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right)\right) \pmod{16}.$$

En résumé, on a le théorème suivant:

Soient p_1, p_2, p_3, q les nombres premiers différents qui satisfont à la congruence $p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv -q \equiv -1 \pmod 4$, on a pour le module seize la congruence

(56) $$Cl(-p_1 p_2 p_3 q)$$
$$\equiv \begin{cases} 2\left[\left(\frac{p_1 p_2}{p_3}\right)+\left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right)+\left(\frac{p_3 p_1}{p_2}\right)-1\right], & \text{si } \left(\frac{p_1 p_2 p_3}{q}\right) = -1, \\ 4\left(1-\left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right)\right), & \text{si } \left(\frac{p_1}{q}\right) = 1,\ \left(\frac{p_2}{q}\right) = \left(\frac{p_3}{q}\right) = -1, \\ 0, & \text{si } \left(\frac{p_1}{q}\right) = \left(\frac{p_2}{q}\right) = \left(\frac{p_3}{q}\right) = 1. \end{cases}$$

Considérons enfin le cas

VI. $m = 4;\quad D_1 = p_1,\quad D_2 = p_2,\quad D_3 = p_3,\quad D_4 = -q,$

les nombres premiers p et q satisfaisant aux conditions

$$p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv -q \equiv 1 \pmod 4.$$

On trouve d'abord la congruence pour le module seize

$$Cl(-p_1 p_2 p_3 q) \equiv \sum_\alpha \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{p_\beta p_\gamma q}\right)\right) Cl(-p_\beta p_\gamma q)$$

$$+ \sum_\alpha \left(1 - \left(\frac{p_\beta}{p_\alpha q}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha q}\right)\right) Cl(-p_\alpha q) + \prod_\alpha \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{q}\right)\right),$$

ou en faisant usage du résultat (51) et posant, pour abréger,

$$Cl(-p_1 p_2 p_3 q) = C, \qquad \left(\frac{p_\alpha}{p_\beta}\right) = \eta_\gamma, \qquad {\scriptstyle (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)}$$

(b)
$$C \equiv \sum_\alpha \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{q}\right)\eta_\beta \eta_\gamma\right) Cl(-p_\beta p_\gamma q)$$

$$+ \sum_\alpha \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{q}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p_\beta}{q}\right)\eta_\gamma\right)\left(1 - \left(\frac{p_\gamma}{q}\right)\varepsilon_\beta\right) + \prod_\alpha \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{q}\right)\right).$$

Pour distinguer, considérons le cas

A. $$\left(\frac{p_1}{q}\right) = \left(\frac{p_2}{q}\right) = \left(\frac{p_3}{q}\right) = \varepsilon;$$

les produits $\left(\frac{p_\beta p_\gamma}{q}\right)$ étant positifs, on tire de (55)

$$Cl(-p_\beta p_\gamma q) \equiv 2\left(1 - \left(\frac{p_\beta}{q}\right)\right) = 2(1 - \varepsilon) \pmod 8,$$

et il vient, pour le module seize,

$$C \equiv 4(1 - \varepsilon) + 2(1 - \varepsilon) \sum_\alpha (1 - \varepsilon \eta_\beta \eta_\gamma) + (1 - \varepsilon) \sum_\alpha (1 - \varepsilon \eta_\beta)(1 - \varepsilon \eta_\gamma).$$

Pour $\varepsilon = 1$ on a évidemment $C \equiv 0 \pmod{16}$, et il ne reste que le cas de $\varepsilon = -1$, où on aura

$$C \equiv 8 + 4 \sum_\alpha (1 + \eta_\beta \eta_\gamma) + 2 \sum_\alpha (1 + \eta_\beta)(1 + \eta_\gamma).$$

On peut changer le signe de la troisième partie puisqu'elle est divisible par 8 et il s'ensuit

$$C \equiv 8 + 2 \sum_\alpha (1 - \eta_\beta)(1 - \eta_\gamma) \pmod 8,$$

Si maintenant $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$, il vient

$$C \equiv 8 + 6(1 - \eta)^2 \equiv 8 - 4(1 + \eta) \equiv 4(1 + \eta).$$

Dans le cas où $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, $\eta_3 = -\eta$, il vient le même résultat

$$C \equiv 4(1 + \eta);$$

donc on a d'une manière générale

$$C \equiv 2(1 - \varepsilon)(1 + \eta),$$

η désignant le signe de la somme $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3$.

Il nous reste encore le second cas, où

B. $$\left(\frac{p_1}{q}\right) = \left(\frac{p_2}{q}\right) = -\left(\frac{p_3}{q}\right) = \varepsilon;$$

on aura, d'après (55),

$$Cl(-p_1 p_2 q) \equiv 2(1 - \varepsilon), \qquad Cl(-p_1 p_3 q) \equiv 2(1 - \eta_2),$$
$$Cl(-p_2 p_3 q) \equiv 2(1 - \eta_1) \pmod 8,$$

et la congruence (b) devient

$$\begin{aligned} C \equiv\ & 2(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon\eta_1\eta_2) + 2(1 - \eta_2)(1 - \varepsilon\eta_1\eta_3) + 2(1 - \eta_1)(1 - \varepsilon\eta_2\eta_3) \\ & + (1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon\eta_2)(1 - \varepsilon\eta_3) + (1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon\eta_1)(1 - \varepsilon\eta_3) \\ & + (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon\eta_1)(1 - \varepsilon\eta_2). \end{aligned}$$

Si l'on a $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$, cette expression se simplifie comme il suit

$$4(1 - \eta)(1 - \varepsilon) + (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon\eta)^2 \equiv 2(1 + \varepsilon)(1 - \eta).$$

Si l'on a $\eta_1 = \eta_2 = -\eta_3 = \eta$, il vient

$$\begin{aligned} C &\equiv 4(1 - \eta)(1 + \varepsilon) + 2(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon\eta)^2 + (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon\eta)^2 \\ &\equiv 2(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon\eta) \equiv 2(1 + \varepsilon)(1 - \eta). \end{aligned}$$

Si enfin $\eta_1 = \eta_3 = \eta$, $\eta_2 = -\eta$, on trouve pour le module 16

$$C \equiv 2(1 - \varepsilon)[2 + (1 + \eta) + (1 - \varepsilon\eta)] + 2(1 + \varepsilon)(1 - \eta).$$

On n'altère pas la congruence en remplaçant la parenthèse [ ] par

$$-2+(1+\eta)+(1+\eta)=2\eta,$$

ou simplement par le nombre deux. Il vient ainsi

$$C\equiv 8+2(1+\varepsilon)(1+\eta) \pmod{16},$$

ce qu'on peut écrire, en vertu de la circonstance $\eta_1\eta_2=-1$,

$$C\equiv 2(1+\varepsilon)(1-\eta\eta_1\eta_2)+4(1-\eta_1\eta_2).$$

Cette dernière formule reproduit les deux éventualités précédentes et reste définitive pour le cas B. On a ainsi le théorème suivant:

»Les quatre nombres premiers p_1, p_2, p_3, q satisfaisant à la condition $p_1\equiv p_2\equiv p_3\equiv -q\equiv 1 \pmod 4$, posons

$$\left(\frac{p_2}{p_3}\right)=\eta_1,\quad \left(\frac{p_3}{p_1}\right)=\eta_2,\quad \left(\frac{p_1}{p_2}\right)=\eta_3,\qquad \eta=\operatorname{sgn}(\eta_1+\eta_2+\eta_3);$$

on aura alors, pour le module seize

$$(57)\quad Cl(-p_1p_2p_3q)\equiv\begin{cases} 2(1-\varepsilon)(1+\eta), & \text{si } \left(\frac{p_1}{q}\right)=\left(\frac{p_2}{q}\right)=\left(\frac{p_3}{q}\right)=\varepsilon;\\ 2(1+\varepsilon)(1-\eta\eta_1\eta_2)+4(1-\eta_1\eta_2), & \\ \qquad \text{si } \left(\frac{p_1}{q}\right)=\left(\frac{p_2}{q}\right)=-\left(\frac{p_3}{q}\right)=\varepsilon. & \end{cases}$$

14. La formule de Dirichlet (chap. II, (45))

$$\sum_1^{\frac{1}{4}D}\left(\frac{D}{\nu}\right)=\frac{1}{2}Cl(-4D)$$

permet d'étudier les restes, suivant les modules $4, 8, 16, \ldots$, des nombres de classes des discriminants pairs négatifs. Soient d'abord p, q deux nombres premiers qui satisfont à la condition $pq\equiv 1 \pmod 4$, et considérons la somme

$$A=\sum_{s=1}^{\frac{1}{4}pq}\frac{1+\left(\frac{s}{p}\right)}{2}\,\frac{1+\left(\frac{s}{q}\right)}{2}\,\left(\frac{s}{pq}\right)$$

qui évidemment est un entier. On a

$$4A = \sum_{1}^{\frac{1}{4}pq} \left(\frac{s}{pq}\right) + \sum_{1}^{\frac{1}{4}pq} \left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s}{q^2}\right) + \sum_{1}^{\frac{1}{4}pq} \left(\frac{s}{q}\right)\left(\frac{s}{p^2}\right) + \sum_{1}^{\frac{1}{4}pq} \left(\frac{s}{p^2q^2}\right),$$

et la première somme a pour valeur

$$\sum_{1}^{\frac{1}{4}pq} \left(\frac{s}{pq}\right) = \frac{1}{2} Cl(-4pq);$$

pour évaluer les autres, on doit distinguer les deux formes des nombres p, q, à savoir $4k+1$ et $4k+3$.

a) Soit d'abord $p \equiv q \equiv 1 \pmod 4$, on trouve aisément

$$\sum_{1}^{\frac{1}{4}pq} \left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s}{q^2}\right) = \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)}{2} Cl(-4p), \qquad \sum_{1}^{\frac{1}{4}pq} \left(\frac{s}{p^2q^2}\right) = \frac{(p-1)(q-1)}{4},$$

et par conséquent

$$4A = \frac{1}{2} Cl(-4pq) + \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)}{2}[Cl(-4p) + Cl(-4q)] + \frac{(p-1)(q-1)}{4};$$

en prenant les restes suivant le module 4, et faisant usage de la congruence connue

$$(58) \qquad Cl(-4p) \equiv \frac{p-1}{2} \equiv 1 - \left(\frac{2}{p}\right) \pmod 4,$$

on aura le théorème

$$(59) \quad \frac{1}{2} Cl(-4pq) \equiv \frac{p-q}{4}\left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)\right) \equiv \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{2}{pq}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)\right) \pmod 4,$$

(p et q deux nombres premiers de la forme $4k+1$).

b) Soit maintenant $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$. On a d'abord

$$\sum_{1}^{\frac{1}{4}pq} \left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s}{q^2}\right) = \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)\right) \sum_{1}^{\frac{1}{4}p} \left(\frac{s}{p}\right),$$

et la formule suivante (chap. II, (31*))

$$\sum_{1}^{\frac{1}{4}\Delta}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)=\frac{2+\left(\frac{2}{\Delta}\right)-\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{\tau}Cl(-\Delta)$$

donne, pour $\Delta=p$,

$$\sum_{1}^{\frac{1}{4}p}\left(\frac{s}{p}\right)=\frac{1+\left(\frac{2}{p}\right)}{2}Cl(-p),$$

formule exacte aussi pour $p=3$. Donc

$$\sum_{1}^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s}{q^2}\right)=\frac{1+\left(\frac{2}{p}\right)}{2}\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)\right)Cl(-p).$$

Enfin

$$\sum_{1}^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{p^2q^2}\right)=\frac{(p-1)(q-1)}{4}+1,$$

et nous aurons

$$(60)\qquad \frac{1}{2}Cl(-4pq)\equiv\frac{1+\left(\frac{2}{p}\right)}{2}\left[1-\left(\frac{q}{p}\right)\right]+\frac{1+\left(\frac{2}{q}\right)}{2}\left[1-\left(\frac{p}{q}\right)\right]$$
$$+\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}+1 \pmod 4$$

(p, q premiers de la forme $4k+3$).

Passons maintenant aux discriminants divisibles par huit. On a pour ce but la formule (42) du chap. II,

$$\sum_{\nu=\left[\frac{1}{8}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{3}{8}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=\frac{1}{2}Cl(-8\Delta),$$

lorsque $-\Delta$ est un discriminant fondamental, puis une formule équivalente à la formule (47) du même chapitre

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{8}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right)+\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{3}{8}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right)=\frac{1}{2}Cl(-8D),$$

pourvu que D soit un discriminant fondamental positif. On peut remplacer les deux formules par une seule

$$\text{(A)} \qquad \sum_{1}^{\frac{3}{8}P} \left(\frac{\nu}{P}\right) + \left(\frac{-4}{P}\right) \sum_{1}^{\frac{1}{8}P} \left(\frac{\nu}{P}\right) = \frac{1}{2} Cl(-8P),$$

P désignant un produit de nombre premiers impairs différents et positifs.

Rappelons encore le théorème établi à la fin de § 5

$$Cl(-8p) \equiv 1 - \left(\frac{2}{p}\right) \pmod 4,$$

p étant un nombre premier impair.

Cela étant, considérons la somme

$$A = \sum_{1}^{\frac{3}{8}pq} \frac{1 + \left(\frac{s}{p}\right)}{2} \frac{1 + \left(\frac{s}{q}\right)}{2} \left(\frac{s}{pq}\right) + \left(\frac{-4}{pq}\right) \sum_{1}^{\frac{1}{8}pq} \frac{1 + \left(\frac{s}{p}\right)}{2} \frac{1 + \left(\frac{s}{q}\right)}{2} \left(\frac{s}{pq}\right),$$

p et q étant deux nombres premiers impairs; cette somme se simplifie comme plus haut, et on a en particulier, faisant usage d'une écriture symbolique,

$$\left(\sum_{1}^{\frac{3}{8}pq} + \left(\frac{-4}{pq}\right) \sum_{1}^{\frac{1}{8}pq}\right) \left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s}{q^2}\right) = S\left(\frac{3q}{8}, \pm p\right) + \left(\frac{-4}{pq}\right) S\left(\frac{q}{8}, \pm p\right)$$
$$- \left(\frac{q}{p}\right)\left[S\left(\frac{3}{8}, \pm p\right) + \left(\frac{-4}{pq}\right) S\left(\frac{1}{8}, \pm p\right)\right],$$

le signe $\pm$ étant celui de $\left(\frac{-4}{p}\right)$. Je désigne par $B(p, q)$ le deuxième membre, puis j'emploie la formule

$$\left(\sum_{1}^{\frac{3}{8}pq} + \left(\frac{-4}{pq}\right) \sum_{1}^{\frac{1}{8}pq}\right) \left(\frac{s}{p^2 q^2}\right) = \left[\frac{3pq}{8}\right] - \left[\frac{3p}{8}\right] - \left[\frac{3q}{8}\right]$$
$$+ \left(\frac{-4}{pq}\right) \left\{ \left[\frac{pq}{8}\right] - \left[\frac{p}{8}\right] - \left[\frac{q}{8}\right] \right\} = C,$$

pour obtenir la formule

$$4A = \frac{1}{2}Cl(-8pq) + B(p, q) + B(q, p) + C,$$

et nous allons déterminer les restes suivant le module quatre, des différents termes dont se compose le deuxième membre.

Soit d'abord $q \equiv 1 \pmod 8$, on aura, en écrivant simplement $S(x)$ au lieu de $S(x, \pm p)$, évidemment

$$B(p, q) = \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)\right)\frac{1}{2}Cl(-8p) \equiv \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right]\left[1 - \left(\frac{q}{p}\right)\right] \pmod 4.$$

Dans le cas, où $q \equiv 3 \pmod 8$, il vient

$$B(p, q) = -\left[\left(\frac{-4}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)\right]\left[S\left(\frac{3}{8}\right) - \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right];$$

or, $S\left(\frac{1}{8}\right)$ étant un entier, on n'altère pas la congruence en changeant son signe et on a

$$\begin{aligned} B(p, q) &\equiv \left[\left(\frac{-4}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)\right]\left[S\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right] \\ &\equiv \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right]\left[\left(\frac{-4}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)\right] \pmod 4 \end{aligned}$$

ou bien

$$B(p, q) \equiv \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right]\left[1 + \left(\frac{-q}{p}\right)\right] \pmod 4.$$

Si l'on a $q \equiv 5 \pmod 8$, il vient d'abord

$$B(p, q) = S\left(\frac{7}{8}\right) + \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{5}{8}\right) - \left(\frac{q}{p}\right)\left[S\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right],$$

et si l'on fait usage de la relation (29) chap. II, à savoir

$$S(x) = - S(1 - x)\operatorname{sgn} D,$$

nous aurons dans notre cas

$$S(x) = -\left(\frac{-4}{p}\right)S(1 - x),$$

de sorte que

$$B(p\,,q) = -\left(1 + \left(\frac{q}{p}\right)\right)\left[S\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right]$$

d'où

$$B(p\,,q) = -\left[1 + \left(\frac{q}{p}\right)\right]\frac{1}{2}Cl(-8p) \equiv \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right]\left[1 + \left(\frac{q}{p}\right)\right] \pmod{4}.$$

Soit enfin $q \equiv 7 \pmod{8}$, nous aurons

$$\begin{aligned} B(p\,,q) &= S\left(\frac{5}{8}\right) - \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{7}{8}\right) - \left(\frac{q}{p}\right)\left[S\left(\frac{3}{8}\right) - \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right] \\ &= -\left[\left(\frac{-4}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)\right]\left[S\left(\frac{3}{8}\right) - \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right], \end{aligned}$$

d'où il suit

$$\begin{aligned} B(p\,,q) &\equiv \left[1 + \left(\frac{-q}{p}\right)\right]\left[S\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right] \\ &\equiv \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right]\left[1 + \left(\frac{-q}{p}\right)\right] \pmod{4}. \end{aligned}$$

En résumé, on a la congruence

$$B(p\,,q) \equiv \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right]\left[1 + \varepsilon_q\left(\frac{p}{q}\right)\right] \pmod{4},$$

où

$$\varepsilon_q = -1 \quad \text{pour} \quad q \equiv 1 \pmod{8}, \quad \text{et} \quad \varepsilon_q = 1 \quad \text{dans d'autres cas.}$$

Quant au nombre C, l'examen des différents cas vérifie les congruences suivantes, relatives au module quatre

$$C_{p,2} \equiv \begin{cases} 1 - \left(\frac{-1}{p}\right), & \text{si } p \equiv q + 4 \pmod{8} \\ 1 - \left(\frac{2}{p}\right), & \text{si ou } p \equiv q \pmod{8}, \text{ ou } p \equiv -q \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Si l'on a $p \equiv \rho$, $q \equiv \sigma \pmod{8}$, soit

$$\frac{1}{2}Cl(-8pq) \equiv J_{\rho,\sigma} \pmod{4};$$

on aura alors le tableau suivant des J:

$$
\begin{array}{llll}
J_{1,1}=0, & J_{1,3}=1-\left(\frac{p}{q}\right), & J_{1,5}=1-\left(\frac{p}{q}\right), & J_{1,7}=0, \\
 & J_{3,3}=0, & J_{3,5}=2, & J_{3,7}=1-\left(\frac{p}{q}\right), \\
 & & J_{5,5}=2, & J_{5,7}=1-\left(\frac{p}{q}\right), \\
 & & & J_{7,7}=0.
\end{array}
$$

Notons comme résultats particulièrement simples, relatifs au module huit,

$$
Cl(-8pq)\equiv\begin{cases} 2\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)\right), \text{ si } p\equiv q+4,\ \left(\frac{2}{p}\right)=1; \\ \left(1-\left(\frac{2}{p}\right)\right)\left(1+\left(\frac{-1}{p}\right)\right), \text{ si } p\equiv q. \end{cases}
$$

Ces résultats, ainsi que ceux qu'on tire des formules (51), (59) et (60), ont été donnés par M. HURWITZ.[1] On pourrait continuer cette voie pour parvenir à des restes des nombres $Cl(-4pqr)$ et $Cl(-8pqr)$ pour le module seize, mais je me réserve d'y revenir à une autre occasion.

CHAPITRE IV.

1. Soient ξ, η, ξ_0, η_0 des quantités réelles et fractionnaires, qu'on peut supposer entre zéro et l'unité, alors les séries à double entrée qui figurent dans l'identité suivante

$$
(1)\quad \begin{cases} v\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i[(\eta+n)\xi_0-(\xi+m)\eta_0]}}{(\eta+n)[(\xi+m)v+(\eta+n)w]} \\ +w\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i[(\eta+n)\xi_0-(\xi+m)\eta_0]}}{(\xi+m)[(\xi+m)v+(\eta+n)w]} \\ =\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i(\xi+m)\eta_0}}{\xi+m}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(\eta+n)\xi_0}}{\eta+n} \end{cases}
$$

[1] Acta, t. 19.

seront convergentes, si v et w sont des quantités complexes dont le rapport ne soit pas réel.

La formule élémentaire

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2k\sigma\pi i}}{u-k} = 2\pi i \frac{e^{2\sigma u\pi i}}{e^{2u\pi i}-1}, \qquad (0 < \sigma < 1), \tag{2}$$

permet de transformer les dites séries à double entrée en séries simples et à convergence rapide, en admettant toutefois que l'on peut, dans les séries doubles, intervertir l'ordre de sommation. Des considérations élémentaires que je me dispense de développer vérifient que cette dernière opération est légitime, et en remplaçant la formule (2) par la formule équivalente

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\sigma\pi i(u+k)}}{u+k} = \frac{2\pi i}{1-e^{-2u\pi i}}, \tag{2'}$$

nous concluons

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi+m} \frac{e^{2\eta\pi i+\frac{2\pi i}{w}(v-\xi_0 v-\eta_0 w)(\xi+m)}}{e^{\frac{2v\pi i}{w}(\xi+m)+2\eta\pi i}-1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta+n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{v}(\xi_0 v+\eta_0 w)(\eta+n)}}{e^{\frac{2w\pi i}{v}(\eta+n)+2\xi\pi i}-1} \tag{3}$$

$$= \frac{2\pi i e^{2\eta\pi i}}{(e^{2\xi\pi i}-1)(e^{2\eta\pi i}-1)}.$$

Pour l'exactitude de cette relation les conditions $0 < \xi_0 < 1$, $0 < \eta_0 < 1$ sont encore nécessaires, mais les quantités ξ et η peuvent être quelconques.

Cette relation (3) n'est qu'un cas très particulier d'une formule de transformation de la transcendante qui figure au premier membre et dont la théorie a été ébauchée par KRONECKER. Avant d'avoir eu l'occasion d'étudier le mémoire du grand géomètre, nous avons établi la formule (3) d'une manière différente [1] que je me permets de reproduire ici.

Soient v_1, v_2 deux quantités complexes dont le rapport ne soit pas réel, puis u_1 et u_2 deux quantités réelles contenues entre zéro et l'unité, enfin w_1, w_2, a des quantités complexes quelconques, et considérons l'intégrale

$$\int_C \frac{e^{2x\pi i(u_1 v_1+u_2 v_2)}}{(e^{2\pi i(v_1 x-w_1)}-1)(e^{2\pi i(v_2 x-w_2)}-1)} \frac{dx}{x+a}$$

[1] Rozpravy české Akademie, II[e] année, n° 23, p. 22 (1893).

prise le long d'une ligne fermée C ne passant par aucun des pôles de la fonction sous le signe somme. Ces pôles sont

$$x = -a\,,\ \frac{n + w_1}{v_1}\,,\ \frac{n + w_2}{v_2}\,,\qquad (n = 0\,,\ \pm 1\,,\ \pm 2\,,\ldots)$$

et on peut admettre qu'ils sont différents entre eux et simples, par conséquent. Une digression tout-à-fait simple permet de voir que l'on peut faire s'éloigner à l'infini la ligne C de la sorte que la fonction sous le signe somme devient infiniment petite le long de cette ligne-là, et que par conséquent, l'intégrale tend vers zéro. D'après le théorème de CAUCHY, la somme des résidus de la fonction intégrée tendra vers zéro et l'on a ainsi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{w_1 + av_1 + n} \frac{e^{\frac{2s\pi i}{v_1}(w_1+n)}}{e^{\frac{2\pi i}{v_1}(w_1v_2 - w_2v_1 + nv_2)} - 1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{w_2 + av_2 + n} \frac{e^{\frac{2s\pi i}{v_2}(w_2+n)}}{e^{\frac{2\pi i}{v_2}(w_2v_1 - w_1v_2 + nv_1)} - 1}$$

$$+ \frac{2\pi i e^{-2sa\pi i}}{(e^{-2\pi i(w_1+av_1)} - 1)(e^{-2\pi i(w_2+av_2)} - 1)} = 0,$$

où l'on a posé, pour abréger, $s = u_1v_1 + u_2v_2$.

Les lettres u_1 et u_2 n'entrent pas directement en cette relation, d'où il suit que s est une variable indépendante assujettie à la condition que le point s soit à l'intérieur du parallélogramme $(0\,, v_1\,, v_1 + v_2\,, v_2)$. Faisant $a = 0$, changeons w_2 en $-w_2$ et, dans la seconde série, n en $-n$; il vient

$$\text{(a)}\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{w_1 + n} \frac{e^{\frac{2s\pi i}{v_1}(w_1+n)}}{e^{\frac{2v_2\pi i}{v_1}(w_1+n) + 2w_2\pi i} - 1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{w_2 + n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{v_2}(v_1 - s)(w_2+n) + 2w_1\pi i}}{e^{\frac{2v_1\pi i}{v_2}(w_2+n) + 2w_1\pi i} - 1}$$

$$= \frac{2\pi i}{(e^{2w_2\pi i} - 1)(1 - e^{-2w_1\pi i})}.$$

Or l'équation (3), si l'on y fait $\xi_0 v + \eta_0 w = s$, s'écrira

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi + m} \frac{e^{2\eta\pi i + \frac{2\pi i}{w}(v - s)(\xi + m)}}{e^{\frac{2v\pi i}{w}(\xi+m) + 2\eta\pi i} - 1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta + n} \frac{e^{\frac{2s\pi i}{v}(\eta+n)}}{e^{\frac{2w\pi i}{v}(\eta+n) + 2\xi\pi i} - 1}$$

$$= \frac{2\pi i e^{2\eta\pi i}}{(e^{2\xi\pi i} - 1)(e^{2\eta\pi i} - 1)}$$

et elle devient identique avec l'équation (a), en faisant

$$w_2 = \xi, \qquad w_1 = \eta, \qquad v_1 = v, \qquad v_2 = w.$$

J'introduirai maintenant les variables

$$\omega = \frac{w}{v}, \qquad \frac{s}{v} = u,$$

en supposant que la *partie imaginaire de ω soit positive;* la quantité u est supposée telle que le point qui la représente soit à l'intérieur du parallélogramme aux sommets $(0, 1, 1+\omega, \omega)$. On aura, sous la forme définitive, la relation

$$(3^*) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta+n} \frac{e^{2u\pi i(\eta+n)}}{e^{2\omega\pi i(\eta+n)+2\xi\pi i}-1} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi+m} \frac{e^{2\eta\pi i+\frac{2\pi i}{\omega}(1-u)(\xi+m)}}{e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\xi+m)+2\eta\pi i}-1}$$
$$= -\frac{\pi i}{2} \frac{e^{\eta\pi i}}{\sin \eta\pi} \frac{e^{-\xi\pi i}}{\sin \xi\pi}.$$

Nous allons nous en servir dans les cas où ξ et η sont réelles et contenues entre zéro et l'unité; sous cette hypothèse on pourra décomposer la seconde série qui figure au premier membre de (3^*),

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi+m} \frac{e^{2\eta\pi i+\frac{2\pi i}{\omega}(1-u)(\xi+m)}}{e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\xi+m)+2\eta\pi i}-1},$$

en séparant les termes $m \geqq 0$ des termes $m < 0$; en écrivant $-m$ au lieu de m dans ces derniers, nous aurons les deux séries

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\xi+m} \frac{e^{-\frac{2\pi i}{\omega}u(\xi+m)}}{1-e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(\xi+m)-2\eta\pi i}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m-\xi} \frac{e^{2\eta\pi i-\frac{2\pi i}{\omega}(1-u)(m-\xi)}}{1-e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)+2\eta\pi i}}.$$

Nous allons les remplacer par des séries à double entrée qui résultent en remplaçant la quantité

$$\frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m\pm\xi)\mp 2\eta\pi i}}$$

par la série géométrique, convergente dans les conditions admises,

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m\pm\xi)n\mp 2n\eta\pi i}.$$

Si, dans la seconde série ainsi obtenue, on met n au lieu de $n + 1$, le résultat s'écrira

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi + m} \frac{e^{2\eta\pi i + \frac{2\pi i}{\omega}(1-u)(\xi+m)}}{e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\xi+m)+2\eta\pi i} - 1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m+\xi} e^{-2n\eta\pi i - \frac{2\pi i}{\omega}(m+\sigma)(n+u)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m-\xi} e^{2n\eta\pi i - \frac{2\pi i}{\omega}(m-\sigma)(n-u)}.$$

C'est sous la forme suivante ainsi vérifiée que nous allons employer la formule (3^*):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta + n} \frac{e^{2u\pi i(\eta+n)}}{e^{2\omega\pi i(\eta+n)+2\xi\pi i} - 1} \tag{4}$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m+\xi} e^{-2n\eta\pi i - \frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(n+u)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m-\xi} e^{2n\eta\pi i - \frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)(n-u)}$$

$$= -\frac{\pi i}{2} \frac{e^{-\xi\pi i}}{\sin \xi\pi} (\cot \eta\pi + i).$$

J'y pose $\eta = \frac{h}{\Delta}$, en désignant par Δ la valeur absolue d'un discriminant fondamental négatif, je multiplie de part et d'autre par le signe de Legendre $\left(\frac{-\Delta}{h}\right)$ et j'ajoute les résultats pour $h = 1, 2, \ldots, \Delta - 1$.

Les sommations relatives à h dans les deux séries à double entrées s'effectuent directement au moyen des sommes de Gauss

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) e^{\pm \frac{2nh\pi i}{\Delta}} = \pm \left(\frac{-\Delta}{n}\right) i\sqrt{\Delta},$$

et pour obtenir sous forme simple la somme engendrée par la première série qui est à simple entrée, j'effectue la substitution $h + n\Delta = m$; on aura ainsi

$$\left(\frac{-\Delta}{h}\right) = \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{sgn} m \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{1}{m} = \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{|m|},$$

et le résultat suivant

$$-\frac{\pi i}{2}\frac{e^{-\xi\pi i}}{\sin\xi\pi}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\frac{h\pi}{\Delta}$$

$$=\Delta\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{|m|}\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta}}}{e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}+2\xi\pi i}-1}-i\sqrt{\Delta}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{m+\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(n+u)}$$

$$+i\sqrt{\Delta}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{m-\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)(n-u)}.$$

En faisant usage de la formule de LEBESGUE

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\frac{h\pi}{\Delta}=\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}Cl(-\Delta),$$

nous aurons donc la relation suivante

$$\text{(I)}\qquad -\frac{2\pi i}{\tau}Cl(-\Delta)\frac{e^{-\xi\pi i}}{\sin\xi\pi}$$

$$=\sqrt{\Delta}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{|m|}\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta}}}{e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}+2\xi\pi i}-1}-i\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{m+\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(n+u)}$$

$$+i\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{m-\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)(n-u)}$$

dont nous allons tirer plusieurs conséquences.

Je remplace Δ par Δ_1, τ par τ_1 en introduisant un nouveau discriminant fondamental négatif $-\Delta_2$ avec l'indice correspondant τ_2. Mais avant de commencer les calculs, nous devons transformer la première série qui figure au second membre. En l'écrivant d'abord

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta}}}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}+2\xi\pi i}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}\frac{e^{-\frac{2mu\pi i}{\Delta}+\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}-2\xi\pi i}}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}-2\xi\pi i}}$$

on la transforme en des séries à double entrée, au moyen de l'identité

$$\frac{1}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}\pm 2\xi\pi i}}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{2mn\frac{\omega\pi i}{\Delta}\pm 2n\xi\pi i}.$$

On aura ainsi au lieu de (I)

$$(\mathrm{I}^\circ)\qquad \begin{cases} -\dfrac{2\pi i}{\tau_1} Cl(-\Delta_1)(\cot\xi\pi - i) \\ = -\sqrt{\Delta_1}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\frac{1}{m}e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}+2n\xi\pi i+\frac{2mn\omega\pi i}{\Delta_1}} \\ \quad +\sqrt{\Delta_1}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\frac{1}{m}e^{-\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}-2n\xi\pi i+\frac{2mn\omega\pi i}{\Delta_1}} \\ \quad - i\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{n}\right)\frac{1}{m+\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(n+u)} \\ \quad + i\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{n}\right)\frac{1}{m-\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)(n-u)}. \end{cases}$$

Je pose maintenant $\xi = \dfrac{h}{\Delta_2}$, et après avoir multiplié les deux membres par le signe de Legendre $\left(\dfrac{-\Delta_2}{h}\right)$, j'ajoute les résultats pour

$$h = 1,\ 2,\ \ldots,\ \Delta_2 - 1.$$

En effectuant la sommation dans les deux dernières séries au moyen de la substitution $h + m\Delta_2 = k$, resp. $-h + m\Delta_2 = k$, nous aurons la relation

$$\frac{4\pi}{\tau_1\tau_2} Cl(-\Delta_1)\, Cl(-\Delta_2) = \sqrt{\Delta_1}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\left(\frac{-\Delta_2}{n}\right)e^{\frac{2mn\omega\pi i}{\Delta_1}}\,\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}}+e^{-\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}}}{2m}$$
$$+\sqrt{\Delta_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{n}\right)\left(\frac{-\Delta_2}{k}\right)e^{-\frac{2nk\pi i}{\Delta_2\omega}}\,\frac{e^{\frac{2ku\pi i}{\Delta_2\omega}}+e^{-\frac{2ku\pi i}{\Delta_2\omega}}}{2k}$$

ou en mettant $\Delta_1\omega$ et $\Delta_1 u$ au lieu de ω et u,

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} \dfrac{4\pi}{\tau_1\tau_2} Cl(-\Delta_1)\, Cl(-\Delta_2) \\ = \sqrt{\Delta_1}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\left(\frac{-\Delta_2}{n}\right)e^{2mn\omega\pi i}\,\frac{e^{2mu\pi i}+e^{-2mu\pi i}}{2m} \\ \quad + \sqrt{\Delta_2}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\left(\frac{-\Delta_2}{n}\right)e^{-\frac{2mn\pi i}{\Delta_1\Delta_2\omega}}\,\frac{e^{\frac{2nu\pi i}{\Delta_2\omega}}+e^{-\frac{2nu\pi i}{\Delta_2\omega}}}{2n}. \end{cases}$$

Ici on peut passer à la limite pour $u = 0$, je pose ensuite $\Delta_1 = \Delta_2$; la formule se simplifie comme il suit

$$\left(\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta)\right)^2 \pi = \sqrt{\Delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{mn}\right) \frac{1}{m} \left(e^{\frac{2mn\omega\pi i}{\Delta}} + e^{-\frac{2mn\pi i}{\Delta\omega}}\right)$$

où nous avons mis $\frac{\omega}{\Delta}$ au lieu de ω. En grouppant les termes suivant les valeurs du produit $m.n = k$, la somme $\sum \frac{1}{m}$ devient $\frac{1}{k} \Sigma n = \frac{\theta_1(k)}{k}$, si l'on convient de représenter par $\theta_1(k)$ la somme des diviseurs du nombre k.

On aura alors, en faisant pour abréger $\omega = ix$, la relation

$$\text{(III)} \qquad Cl(-\Delta)^2 = \frac{\tau^2 \sqrt{\Delta}}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{\theta_1(n)}{n} \left(e^{-\frac{2nx\pi}{\Delta}} + e^{-\frac{2n\pi}{\Delta x}}\right),$$

d'où pour $x = 1$ la formule encore plus simple

$$\text{(III}^\circ) \qquad Cl(-\Delta)^2 = \frac{\tau^2 \sqrt{\Delta}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{\theta_1(n)}{n} e^{-\frac{2n\pi}{\Delta}}.$$

L'importance pratique de cette relation n'est point considérable, puisque pour de grandes valeurs de Δ la convergence devient lente; mais cela ne veut pas dire qu'elle ne mérite pas d'intérêt.

Revenons sur la formule (II) en remettant les valeurs primitives ω et u des variables, à savoir

$$\frac{4\pi}{\tau_1 \tau_2} Cl(-\Delta_1) Cl(-\Delta_2)$$
$$= \sqrt{\Delta_1} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\left(\frac{-\Delta_2}{n}\right) e^{\frac{2mn\omega\pi i}{\Delta_1}} \frac{e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}} + e^{-\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}}}{2m}$$
$$+ \sqrt{\Delta_2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\left(\frac{-\Delta_2}{n}\right) e^{-\frac{2mn\pi i}{\Delta_2 \omega}} \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{\Delta_2 \omega}} + e^{-\frac{2nu\pi i}{\Delta_2 \omega}}}{2n};$$

on peut effectuer l'une des deux sommations en faisant usage de la formule

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) x^\mu = \frac{Q(x)}{1 - x^\Delta},$$

$Q(x)$ étant le polynôme dont il a été question dans le chapitre III; il vient ainsi

$$
\text{(IV)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{4\pi}{\tau_1\tau_2} Cl(-\Delta_1) Cl(-\Delta_2) \\
&= \sqrt{\Delta_1} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_1}{m}\right) \frac{e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}} + e^{-\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}}}{2m} \frac{Q\left(e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta_1}}, -\Delta_2\right)}{1 - e^{\frac{2m\Delta_2\omega\pi i}{\Delta_1}}} \\
&+ \sqrt{\Delta_2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_2}{n}\right) \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{\Delta_2\omega}} + e^{-\frac{2nu\pi i}{\Delta_2\omega}}}{2n} \frac{Q\left(e^{-\frac{2n\pi i}{\Delta_2\omega}}, -\Delta_1\right)}{1 - e^{-\frac{2n\pi\Delta_1\pi i}{\Delta_2\omega}}},
\end{aligned}
\right.
$$

où l'on peut prendre $u = 0$. Posant par exemple $\Delta_1 = \Delta_2$, $\omega = i$, nous aurons

$$
Cl(-\Delta)^2 = \frac{\tau^2\sqrt{\Delta}}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_1}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{Q\left(e^{-\frac{2m\pi}{\Delta}}\right)}{1 - e^{-2m\pi}}.
$$

Mais on parvient à des formules plus importantes, si l'on effectue les sommations au moyen des relations

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_2}{n}\right) x^n = \frac{Q(x, -\Delta_2)}{1 - x^{\Delta_2}},
$$

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_2}{n}\right) \frac{x^n}{n} = \frac{1}{i\sqrt{\Delta_2}} \left(-\log c + \log \frac{A(x, -\Delta_2)}{B(x, -\Delta_2)}\right),
$$

où $\log c$ est une constante numérique connue. Or

$$
\frac{1}{i} \log \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{1}{i} \log \frac{Y - i\sqrt{\Delta}\, Z}{Y + i\sqrt{\Delta}\, Z} = -2 \operatorname{arctg} \frac{Z\sqrt{\Delta}}{Y},
$$

et on aura

$$
\sqrt{\Delta_2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_2}{n}\right) \frac{x^n}{n} = \gamma - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_2}\, Z(x, -\Delta_2)}{Y(x, -\Delta_2)},
$$

en faisant $i \log c = \gamma$. La formule (II) donne alors pour $u = 0$, $\omega = ix$

$$
(\mathrm{V}) \quad \left\{
\begin{aligned}
& \frac{4\pi}{\tau_1\tau_2} Cl(-\Delta_1) Cl(-\Delta_2) \\
& = \sqrt{\Delta_1} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_1}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{Q\left(e^{-\frac{2mx\pi}{\Delta_1}}, -\Delta_2\right)}{1 - e^{-\frac{2m\Delta_2 x\pi}{\Delta_1}}} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_1}{m}\right) \left\{ \gamma - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_2}\, Z\left(e^{-\frac{2m\pi}{\Delta_2 x}}, -\Delta_1\right)}{Y\left(e^{-\frac{2m\pi}{\Delta_2 x}}, -\Delta_1\right)} \right\},
\end{aligned}
\right.
$$

où la constante γ doit évidemment avoir la valeur

$$
\gamma = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_2}\, Z(0, -\Delta_2)}{Y(0, -\Delta_2)},
$$

c'est à dire

$$
\gamma = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad \Delta_2 > 4, \\ \frac{2\pi}{3} & \text{pour} \quad \Delta_2 = 3, \\ \pi & \text{pour} \quad \Delta_2 = 4. \end{cases}
$$

En spécialisant Δ_2 on aura autant de formules pour le calcul de $Cl(-\Delta_1)$ que l'on voudra. Pour $\Delta_2 = 4$ on a

$$
Q(z) = z - z^3, \qquad Y = 2z, \qquad Z = 1,
$$

de sorte que

$$
\frac{Q(z)}{1 - z^{\Delta_2}} = \frac{z}{1 + z^2}, \qquad \gamma - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_2}\, Z}{Y} = \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{z} = 2 \operatorname{arctg} z,
$$

et par conséquent, la formule (V) donne en changeant x en $\frac{1}{2x}$,

$$
(\mathrm{V}^\circ) \qquad \frac{\pi}{2\tau} Cl(-\Delta) = \sum_1^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} e^{-\frac{mx\pi}{\Delta}}
$$
$$
+ \frac{1}{4}\sqrt{\Delta} \sum_1^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m \cos \operatorname{hyp} \frac{m\pi}{x}},
$$

x désignant une quantité positive arbitraire.

Si l'on fait $\Delta_2 = 3$, on aura $Q(z) = z - z^2$, $Y = 2z + 1$, $Z = 1$, de sorte que

$$\frac{Q(z)}{1 - z^3} = \frac{z - z^2}{1 - z^3},$$

$$\gamma - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_2}\, Z}{Y} = \frac{2\pi}{3} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2z + 1} = 2 \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{3}}{2 + z}$$

et la formule (V) donne

$$\frac{2\pi}{3\tau} Cl(-\Delta) = \sqrt{\Delta} \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{e^{-\frac{2mx\pi}{\Delta}} - e^{-\frac{4mx\pi}{\Delta}}}{1 - e^{-\frac{6mx\pi}{\Delta}}}$$

$$+ 2 \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} \frac{e^{-\frac{2m\pi}{3x}} \sqrt{3}}{2 + e^{-\frac{2m\pi}{3x}}}$$

ou bien

$$(\mathrm{V}^1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2\pi}{3\tau} Cl(-\Delta) &= \sqrt{\Delta} \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{\sin \operatorname{hyp} \dfrac{mx\pi}{\Delta}}{\sin \operatorname{hyp} \dfrac{3mx\pi}{\Delta}} \\ &+ 2 \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1 + 2e^{\frac{2m\pi}{3x}}}. \end{aligned} \right.$$

Prenons encore $\Delta_2 = 8$, où l'on a

$$Q = z + z^3 - z^5 - z^7, \qquad Y = 2(z^2 - 1), \qquad Z = z,$$

et

$$\frac{Q}{1 - z^8} = \frac{z + z^3}{1 + z^4}.$$

Il s'ensuit

$$\frac{2\pi}{\tau} Cl(-\Delta) = \sqrt{\Delta} \sum \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{e^{-\frac{2mx\pi}{\Delta}} + e^{-\frac{6mx\pi}{\Delta}}}{1 + e^{-\frac{8mx\pi}{\Delta}}}$$

$$+ 2 \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\, e^{-\frac{m\pi}{4x}}}{1 - e^{-\frac{m\pi}{2x}}}$$

ou bien, en changeant x en $\frac{x}{2}$,

$$
(\mathrm{V}^2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{2\pi}{\tau} Cl(-\Delta) &= \sqrt{\Delta}\sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}\,\frac{\cos\operatorname{hyp}\dfrac{mx\pi}{\Delta}}{\cos\operatorname{hyp}\dfrac{2mx\pi}{\Delta}}\\
&+ 2\sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{m\pi}{2x}} - e^{-\frac{m\pi}{2x}}}.
\end{aligned}\right.
$$

2. Revenons sur l'équation (4). En représentant par D une discriminant fondamental positif, posons-y $\eta = \frac{h}{D}$, multiplions de part et d'autre par $\left(\frac{D}{h}\right)$ et ajoutons les résultats pour $h = 1, 2, \ldots, D-1$. Il vient

$$
D\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\,\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{D}}}{e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}+2\xi\pi i}-1} + \sqrt{D}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{m+\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(n+u)}
$$

$$
+ \sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{m-\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)(n-u)} = 0.
$$

Séparons, dans la première somme, les termes à m positif, et faisons usage de l'identité

$$
\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{D}}}{e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}+2\xi\pi i}-1} = -e^{\frac{2mu\pi i}{D}} - \frac{e^{\frac{2m\pi i}{D}(\omega+u)+2\xi\pi i}}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}+2\xi\pi i}};
$$

cette transformation permettra de mettre la relation obtenue sous la forme suivante

$$
(\mathrm{VI})\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}e^{\frac{2mu\pi i}{D}}\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{m+\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(n+u)} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{m-\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)(n-u)}\\
&-\sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\,\frac{e^{\frac{2m\pi i}{D}(\omega+u)+2\xi\pi i}}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}+2\xi\pi i}} - \sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\,\frac{e^{\frac{2m\pi i}{D}(\omega-u)-2\xi\pi i}}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}-2\xi\pi i}}.
\end{aligned}\right.
$$

(D un discriminant positif fondamental, ω ayant sa partie imaginaire positive, puis $0 < \xi < 1$, et enfin u désignant une quantité de la forme $\sigma + \sigma'\omega$, où $0 < \sigma < 1$, $0 < \sigma' < 1$).

En passant à la limite pour $u = 0$, cette équation devient

$$(\mathrm{VI}^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{m+\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}n(m+\xi)} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{m-\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}n(m-\xi)} \\ &-\sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}}\left(\frac{e^{2\xi\pi i}}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}+2\xi\pi i}} + \frac{e^{-2\xi\pi i}}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}-2\xi\pi i}}\right). \end{aligned}\right.$$

La première série à double entrée qui figure au second membre contient des termes qui pour $\xi = 0$ deviennent infinis; ce sont les termes où $m = 0$ et leur somme est

$$(\mathrm{a})\qquad \frac{1}{\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)e^{-\frac{2n\xi\pi i}{\omega}} = \frac{1}{\xi}\frac{Q\left(e^{-\frac{2\xi\pi i}{\omega}}, D\right)}{1-e^{-\frac{2D\xi\pi i}{\omega}}}.$$

On peut passer à la limite pour $\xi = 0$ dans les termes qui restent, et il ne s'agit que de la limite de la quantité (a). Nous savons que pour les discriminants positifs la fonction $Q(x)$ a cette propriété que $Q(1) = 0$, $Q'(1) = 0$, et il s'ensuit que l'on aura

$$\lim_{\xi=0}\left\{\frac{1}{\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)e^{-\frac{2n\xi\pi i}{\omega}}\right\} = \frac{\pi i}{D\omega}Q''(1, D) = \frac{\pi i}{D\omega}\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)h(h-1).$$

A cause de la relation

$$\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)h = 0$$

cette quantité s'écrira

$$\frac{\pi i}{D\omega}\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)h^2,$$

et notre conséquence de l'équation (VI°), relative au cas de $\xi = 0$, prend la forme

$$\sqrt{D}\sum_1^\infty \left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m} = \frac{\pi i}{D\omega}\sum_1^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)h^2 + 2\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{m}e^{-\frac{2mn\pi i}{\omega}}$$

$$-2\sqrt{D}\sum_{m=1}^\infty \left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\frac{e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}}}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}}}.$$

Le premier membre a pour valeur la quantité $Cl(D)\log E(D)$, et au second membre la série à double entrée devient une série simple, si l'on effectue la sommation relative à m, en faisant usage de la série logarithmique. Posant enfin $\omega = ix$, on aura la relation

$$\text{(VI}^1\text{)}\quad Cl(D)\log E(D) = \frac{\pi}{Dx}\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)h^2 - 2\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{D}{n}\right)\log\left(1-e^{-\frac{2n\pi}{x}}\right)$$

$$-2\sqrt{D}\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}\frac{1}{e^{\frac{2n x\pi}{D}}-1},$$

x désignant une quantité positive arbitraire.

L'équation (VI°) fournit une formule plus commode pour le calcul numérique, si l'on y prend $\xi = \frac{1}{2}$; écrivant $2m+1=\lambda$, resp. $2m-1=\lambda$, elle devient d'abord

$$\sqrt{D}\sum_{m=1}^\infty\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m} = 4\sum_{n=1}^\infty\sum_\lambda\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{\lambda n\pi i}{\omega}}$$

$$+2\sqrt{D}\sum_{m=1}^\infty\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\frac{e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}}}{1+e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}}},$$

où $\lambda = 1, 3, 5, 7, \ldots$. En faisant usage de la formule

$$2\sum_\lambda \frac{x^\lambda}{\lambda} = \log\frac{1+x}{1-x}$$

le second membre se simplifie et on aura, en posant comme précédemment $\omega = ix$, la formule cherchée

$$Cl(D)\log E(D) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\log\frac{1+e^{-\frac{n\pi}{x}}}{1-e^{-\frac{n\pi}{x}}}$$

$$+ 2\sqrt{D}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}\frac{1}{e^{\frac{2n x\pi}{D}}-1}.$$

Le mémoire présenté à l'Académie contient encore quelques applications de certains développements demiconvergents. Si je les supprime ici, c'est puisque j'ai en vue d'y revenir bientôt en leur ajoutant d'autres détails que j'ai dû supprimer dans le mémoire primitif.

ERRATA T. 29.

Page 344 et 345. Remplacer dans les symboles

$$\left(\frac{-\Delta}{ax^2+bxy+cy^2}\right) \text{ et } \left(\frac{-\Delta}{a\,,\,b\,,\,c}\right)$$

le numérateur $-\Delta$ par $-\Delta_1$.

Page 403, formule (31), mettre le signe »moins» devant $\left(\frac{4}{\Delta}\right)$.