SUR LE PROBLÈME DES TROIS CORPS.

Trajectoires le long desquelles deux au moins des trois corps se choquent. Conditions qui entraînent un choc

PAR

GIULIO BISCONCINI

à ROME.

Préface.

M. Painlevé, en étudiant le problème des trois corps, a démontré que le mouvement se poursuit indéfiniment régulier, pourvu que les conditions initiales ne soient pas telles qu'à un instant fini une au moins des distances mutuelles ne soit pas nulle.[1]

En d'autres termes, si, pour une valeur finie t_1 du temps, deux au moins des trois points coïncident, les équations différentielles du mouvement ne peuvent pas être intégrées à l'aide de séries convergentes pour $t \geqq t_1$. Les développements sont au contraire toujours valables pour $t < t_1$.

M. Painlevé ajoutait ensuite: »Il serait donc extrêmement important de définir avec précision les conditions initiales qui correspondent à un choc», et plus loin, en faisant allusion à une étude qu'il avait commencée, mais pas accomplie, il observait: »Cette discussion me donne lieu de penser que les conditions initiales qui entraînent un choc au bout d'un temps fini satisfont à deux relations analytiques distinctes (qui se réduisent à une dans le cas du mouvement plan)».

M. le prof. Levi-Civita, en envisageant le cas particulier du mouvement plan, se proposa cette question, que M. Painlevé n'avait pas résolue.

[1] *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles,* p. 583.

Dans son travail il démontra effectivement l'existence d'une relation analytique uniforme, et il en donna une expression développée en série de puissances de la distance des deux points, qui tendent à se choquer.[1]

Le chemin avait été tracé, et l'on n'avait qu'à le suivre pour résoudre le problème dans le cas général. Voici les résultats auxquels nous sommes parvenus. Soient P_0, P_1, P_2 les trois corps. Posons $\rho_1 = P_0P_1$, $\rho_2 = P_0P_2$, et faisons l'hypothèse que $\lim_{t=t_1} \rho_1 = 0$ et $\lim_{t=t_1} \rho_2 \neq 0$. Il s'agit de déterminer les relations, auxquelles doivent satisfaire les conditions initiales, pour que cela ait lieu. — Les deux hypothèses, que nous avons faites, doivent être évidemment suffisantes pour caractériser les chocs P_0P_1 et les conditions initiales, dont ils dépendent. Néanmoins, pour la résolution du problème, nous avons introduit une troisième hypothèse, que nous n'avons pas pu déduire des autres. Nous avons admis, que, dans le voisinage de P_0, la vitesse angulaire de P_0P_1 dans le mouvement relatif par rapport à P_0 soit finie.

Le raisonnement, qui nous a conduit à l'admettre, est tout à fait intuitif et on le trouvera dans le § 4, n° 2.

Quant aux différentes phases du procédé, elles peuvent être résumées en un mot.

Nous avons considéré le mouvement relatif des points P_1, P_2, par rapport à P_0 et, par un choix convenable des variables, nous avons conduit les équations du mouvement au type de celles de M. LEVI-CIVITA (v. § 4, n° 1). Nous avons alors démontré, que les trajectoires singulières du système, le long desquelles les deux points P_0, P_1 doivent se choquer, correspondent univoquement aux solutions, qui sont holomorphes dans le voisinage de la position de choc (v. § 5, n° 3). Nous avons déduit, selon les prévisions de M. PAINLEVÉ »deux relations analytiques distinctes» entre les conditions initiales, relations, qui nous permettent de décider, si le mouvement aura lieu le long d'une des ∞^8 trajectoires singulières.

Si nous indiquons ces deux relations par $u_1^{(1)} = 0$, $u_2^{(1)} = 0$, il est évident qu'une seconde couple $u_1^{(2)} = 0$, $u_2^{(2)} = 0$, analogue à la première, sera caractéristique pour les chocs P_0P_2, et une troisième $u_3^{(1)} = 0$, $u_3^{(2)} = 0$

[1] *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi.* Annali di Matematica. Tomo IX, serie III^a. — Une nouvelle rédaction de ce mémoire paraîtra sous peu dans les »Acta».

pour les chocs $P_1 P_2$. En résumé les deux équations

$$u_1^{(1)} u_1^{(2)} u_1^{(3)} = 0, \qquad u_2^{(1)} u_2^{(2)} u_2^{(3)} = 0$$

nous permettrons de caractériser tous les mouvements singuliers du système, dans lesquels deux quelconques des points se choquent.

Nous finirons ce court résumé de notre travail en ajoutant, que dans le dernier paragraphe nous nous sommes occupés de déterminer effectivement la forme analytique des équations $u_1^{(1)} = 0$, $u_2^{(1)} = 0$, en développant les premiers membres en séries de puissances de la distance $P_0 P_1$.

§ 1. *Équations du mouvement.*

I. *Mouvement des trois corps P_0, P_1, P_2 référé à des axes fixes.* — Considérons trois points P_0, P_1, P_2, dont les masses sont m_0, m_1, m_2, et supposons qu'ils s'attirent mutuellement selon la loi de Newton. Rapportons-les à un système d'axes cartésiens ξ, η, ζ, fixes dans l'espace, et appelons ξ_i, η_i, ζ_i les coordonnées d'un point quelconque entre eux, et $\bar{p}_i, \bar{q}_i, \bar{r}_i$ les composantes de sa quantité de mouvement.

Les équations du mouvement du système sont:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \bar{p}_i}, & \dfrac{d\eta_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \bar{q}_i}, & \dfrac{d\zeta_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \bar{r}_i}, \\[2ex] \dfrac{d\bar{p}_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi_i}, & \dfrac{d\bar{q}_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \eta_i}, & \dfrac{d\bar{r}_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \zeta_i}, \end{cases} \qquad {\scriptstyle (i=0,1,2)}$$

où l'on a posé:

$$(2) \qquad H \equiv T - U = \frac{1}{2} \sum_{0}^{2}{}_j \frac{1}{m_j} (\bar{p}_j^2 + \bar{q}_j^2 + \bar{r}_j^2) - \sum_{0}^{2}{}_{ij} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}},$$

et:

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2}.$$

Il va sans dire, que nous avons choisi l'unité de temps, de manière que la constante d'attraction universelle devienne égale à l'unité.

II. *Transformation de Poincaré.* — Envisageons maintenant le système d'axes x, y, z menés par P_0 et dont les directions sont constamment celles des axes ξ, η, ζ. Soient x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 les coordonnées des points

P_1, P_2 rapportés à ces axes. Les formules de transformation entre les deux systèmes sont:

$$(3)\qquad \begin{cases} x_0 = \xi_0, & y_0 = \eta_0, & z_0 = \zeta_0, \\ x_i = \xi_i - \xi_0, & y_i = \eta_i - \eta_0, & z_i = \zeta_i - \zeta_0. \end{cases} \qquad {\scriptstyle (i=1,2)}$$

Posons ensuite:

$$(3')\qquad \begin{cases} p_0 = \sum_0^2{}_j \bar{p}_j, & q_0 = \sum_0^2{}_j \bar{q}_j, & r_0 = \sum_0^2{}_j \bar{r}_j, \\ p_i = \bar{p}_i, & q_i = \bar{q}_i, & r_i = \bar{r}_i. \end{cases} \qquad {\scriptstyle (i=1,2)}$$

On aperçoit que, puisque $\sum_0^2{}_j p_j x_j = \sum_0^2{}_j \bar{p}_j \xi_j$, etc., les équations (3) et (3′) donnent entre les variables x_i, y_i, z_i; p_i, q_i, r_i et ξ_i, η_i, ζ_i; $\bar{p}_i, \bar{q}_i, r_i$ une transformation, qui conserve la forme canonique au système (1).

Nous pouvons maintenant remarquer que p_0, q_0, r_0 sont des constantes. Elles sont en effet, au multiplicateur $\sum_0^2{}_i m_i$ près, les composantes de la vitesse du centre de gravité des trois points, qui se meut uniformément sur une ligne droite. On pourra donc les supposer égales à zéro, sans rien ôter à la généralité du problème.

Les équations, qui définissent le mouvement relatif de P_1 et P_2 par rapport à P_0, sont donc:

$$(1')\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{dp_i}, & \dfrac{dy_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial q_i}, & \dfrac{dz_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial r_i}; \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}, & \dfrac{dq_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i}, & \dfrac{dr_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial z_i}, \end{cases} \qquad {\scriptstyle (i=1,2)}$$

où l'on a posé, en vertu des relations (2) et (3), (3′):

$$(2')\qquad H \equiv T - U =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \sum_1^2{}_i \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_i}\right)(p_i^2 + q_i^2 + r_i^2) + \frac{2}{m_0}(p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2) \right\} - \sum_0^2{}_{ij} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}},$$

et

$$\Delta_{0i} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2},$$

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}.$$

III. *Remplacement des composantes de la vitesse absolue de P_1 par les composantes de sa vitesse relative.* — Substituons maintenant à la place des composantes de la quantité de mouvement absolue de P_1 les composantes x_1', y_1', z_1' de sa vitesse relative.

Elles sont fournies par le premier groupe des équations (1′), dans lesquelles on doit supposer $i = 1$ et avoir égard à la relation (2′).

En posant:

$$\mu_1 = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1}, \qquad \mu_2 = \frac{1}{m_0 + m_1} + \frac{1}{m_2}, \tag{4}$$

on aura:

$$\begin{cases} x_1' = \mu_1 p_1 + \dfrac{p_2}{m_0}, \\ y_1' = \mu_1 q_1 + \dfrac{q_2}{m_0}, \\ z_1' = \mu_1 r_1 + \dfrac{r_2}{m_0}, \end{cases} \tag{5}$$

et par conséquent:

$$H = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\mu_1}(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) + \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right\} - \sum_0^2{}_{ij} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}. \tag{2$_a$}$$

Du premier groupe des équations (1′), en vertu des égalités (5), on tire donc:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial H}{\partial x_1'}\frac{\partial x_1'}{\partial p_1} = \mu_1 \frac{\partial H}{\partial x_1'}, \qquad \text{etc.};$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial H}{\partial x_1'}\frac{\partial x_1'}{\partial p_2} = \frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{x_1'}{m_0 \mu_1}, \qquad \text{etc.};$$

c'est-à-dire:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial(\mu_1 H)}{\partial x_1'}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial(\mu_1 H)}{\partial y_1'}, \qquad \frac{dz_1}{dt} = \frac{\partial(\mu_1 H)}{\partial z_1'};$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_2}\left(H + \frac{x_1' p_2}{m_0 \mu_1}\right), \qquad \frac{dy_2}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_2}\left(H + \frac{y_1' q_2}{m_0 \mu_1}\right), \qquad \frac{dz_2}{dt} = \frac{\partial}{\partial r_2}\left(H + \frac{z_1' r_2}{m_0 \mu_1}\right).$$

En dérivant les relations (5) par rapport à t on a:

$$\frac{dx_1'}{dt} = \mu_1 \frac{dp_1}{dt} + \frac{1}{m_0}\frac{dp_2}{dt}, \qquad \text{etc.},$$

ou bien, en vertu des équations (1'):

$$\frac{dx_1'}{dt} = -\mu_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{1}{m_0}\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\mu_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{m_2 x_2}{\Delta_{02}^3} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{m_1 m_2}{m_0 \Delta_{12}}\right)$$

$$= -\mu_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{m_2 x_2}{\Delta_{02}^3} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{m_1 m_2}{m_0 \Delta_{12}}\right), \quad \text{etc.}$$

On pourra donc remplacer le deuxième groupe du système (1') par les équations:

$$\frac{dx_1'}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu_1 H + \frac{m_2 x_1 x_2}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1 m_2}{m_0}\frac{1}{\Delta_{12}}\right), \quad \text{etc.,}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2}, \quad \text{etc.}$$

Posons enfin:

$$(2'')\quad \begin{cases} H_1 = \frac{1}{2}(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) - \mu_1 \sum_0^2{}_{ij} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} + m_2 \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1 m_2}{m_0}\frac{1}{\Delta_{12}}, \\ H_2 = \frac{\mu_2}{2}(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2) - \sum_0^2{}_{ij} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} + \frac{1}{m_0 \mu_1}(x_1' p_2 + y_1' q_2 + z_1' r_2). \end{cases}$$

D'après les équations (5) le système (1') sera équivalant au système:

$$(1'')\quad \begin{cases} \text{I}\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial x_1'}, & \frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial y_1'}, & \frac{dz_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial z_1'}, \\ \frac{dx_1'}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial x_1}, & \frac{dy_1'}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial y_1}, & \frac{dz_1'}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial z_1}; \end{cases} \\ \text{II}\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial p_2}, & \frac{dy_2}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial q_2}, & \frac{dz_2}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial r_2}, \\ \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial x_2}, & \frac{dq_2}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial y_2}, & \frac{dr_2}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial z_2}. \end{cases} \end{cases}$$

La transformation, que nous avons employée a fait donc perdre à notre système la forme canonique originaire, mais elle lui a donné une forme demi-canonique. De cette propriété nous allons profiter tout de suite.

IV. *Forme semi-canonique polaire pour les équations du premier groupe.* — Soient $\rho_1, \vartheta_1, \varphi_1$ les coordonnées polaires du point P_1, et $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{\Theta}_1, \boldsymbol{\Phi}_1$ leurs variables conjuguées. Nous entendons par cela, que, si l'on substitue dans le premier groupe du système (1″) aux deux séries de variables $x_1, y_1, z_1; x_1', y_1', z_1'$, les deux nouvelles séries, que nous venons d'indiquer, ce groupe doit maintenir la forme canonique.

Puisque on a:

$$(6)\qquad \begin{cases} x_1 = \rho_1 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1, \\ y_1 = \rho_1 \sin\vartheta_1 \sin\varphi_1, \\ z_1 = \rho_1 \cos\vartheta_1, \end{cases}$$

il faut poser:

$$(7)\begin{cases} P_1 = x_1'\frac{\partial x_1}{\partial \rho_1} + y_1'\frac{\partial y_1}{\partial \rho_1} + z_1'\frac{\partial z_1}{\partial \rho_1} = \quad x_1' \sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + y_1'\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + z_1'\cos\vartheta_1, \\ \Theta_1 = x_1'\frac{\partial x_1}{\partial \vartheta_1} + y_1'\frac{\partial y_1}{\partial \vartheta_1} + z_1'\frac{\partial z_1}{\partial \vartheta_1} = \rho_1(x_1'\cos\vartheta_1\cos\varphi_1 + y_1'\cos\vartheta_1\sin\varphi_1 - z_1'\sin\vartheta_1), \\ \Phi_1 = x_1'\frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} + y_1'\frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} + z_1'\frac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} = \rho_1(-x_1'\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + y_1'\sin\vartheta_1\cos\varphi_1). \end{cases}$$

On tirera identiquement:

$$P_1 d\rho_1 + \Theta_1 d\vartheta_1 + \Phi_1 d\varphi_1 = x_1' dx_1 + y_1' dy_1 + z_1' dz_1.$$

Cela nous suffit pour conclure, qu'il s'agit d'une transformation de contact. Par conséquent la forme canonique du premier groupe sera conservée.

Les relations (7) résolues par rapport à x_1', y_1', z_1' nous donnent en outre:

$$(7')\qquad \begin{cases} x_1' = P_1\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + \frac{\Theta_1}{\rho_1}\cos\vartheta_1\cos\varphi_1 - \frac{\Phi_1}{\rho_1\sin\vartheta_1}\sin\varphi_1, \\ y_1' = P_1\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + \frac{\Theta_1}{\rho_1}\cos\vartheta_1\sin\varphi_1 + \frac{\Phi_1}{\rho_1\sin\vartheta_1}\cos\varphi_1, \\ z_1' = P_1\cos\vartheta_1 \qquad - \frac{\Theta_1}{\rho_1}\sin\vartheta_1. \end{cases}$$

Les fonctions H_1 et H_2 pourront donc être mises sous la forme:

$$(2''')\quad \begin{cases} H_1 = \frac{1}{2}\left(P_1^2 + \frac{\Theta_1^2}{\rho_1^2} + \frac{\Phi_1^2}{\rho_1^2\sin^2\vartheta_1}\right) - \mu_1\left(\frac{m_0 m_1}{\rho_1} + \frac{m_0 m_2}{\rho_2} + \frac{m_1 m_2}{\Delta}\right) \\ \qquad\qquad + \frac{m_2\rho_1\nabla_1}{\rho_2^3} + \frac{m_1 m_2}{m_0}\frac{1}{\Delta}, \\ H_2 = \frac{\mu_2}{2}(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2) - \left(\frac{m_0 m_1}{\rho_1} + \frac{m_0 m_2}{\rho_2} + \frac{m_1 m_2}{\Delta}\right) + \frac{\nabla_2}{m_0\mu_1}. \end{cases}$$

Dans ces relations les symboles introduits ont, comme il est aisé de voir, les significations suivantes:

$$
(8)\qquad
\begin{cases}
\rho_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}, \\
\Delta \ = \sqrt{(\rho_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 - x_2)^2 + (\rho_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 - y_2)^2 + (\rho_1 \cos \vartheta_1 - z_2)^2}, \\
\nabla_1 = x_2 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + y_2 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + z_2 \cos \vartheta_1, \\
\nabla_2 = p_2\left(P_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + \dfrac{\Theta_1}{\rho_1} \cos \vartheta_1 \cos \varphi_1 - \dfrac{\Phi_1}{\rho_1 \sin \vartheta_1} \sin \varphi_1\right) \\
\quad + q_2\left(P_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + \dfrac{\Theta_1}{\rho_1} \cos \vartheta_1 \sin \varphi_1 + \dfrac{\Phi_1}{\rho_1 \sin \vartheta_1} \cos \varphi_1\right) \\
\quad + r_2\left(P_1 \cos \vartheta_1 \qquad - \dfrac{\Theta_1}{\rho_1} \sin \vartheta_1\right).
\end{cases}
$$

Les équations du mouvement relatif sont donc évidemment:

$$
(1''')\qquad
\begin{cases}
\mathrm{I}\begin{cases}
\dfrac{d\rho_1}{dt} = \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{d\vartheta_1}{dt} = \dfrac{\partial H_1}{\partial \Theta_1}, \quad \dfrac{d\varphi_1}{dt} = \dfrac{\partial H_1}{\partial \Phi_1}, \\
\dfrac{dP_1}{dt} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial \rho_1}, & \dfrac{d\Theta_1}{dt} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1}, \quad \dfrac{d\Phi_1}{dt} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial \varphi_1};
\end{cases} \\
\mathrm{II} \qquad \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{\partial H_2}{\partial p_2}, \quad \text{etc.}, \qquad \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial x_2}, \quad \text{etc.}
\end{cases}
$$

Il est aisé et en même temps intéressant, de mettre en évidence la signification cinématique des variables conjuguées aux coordonnées polaires du point P_1. Les égalités (7) nous montrent, que $P_1, \dfrac{\Theta_1}{\rho_1}, \dfrac{\Phi_1}{\rho_1 \sin \vartheta_1}$ se tirent de x_1', y_1', z_1' en ajoutant ces dernières, après les avoir multipliées par les cosinus de direction des tangentes aux lignes coordonnées polaires, qui passent par P_1. Les quantités $P_1, \dfrac{\Theta_1}{\rho_1}, \dfrac{\Phi_1}{\rho_1 \sin \vartheta_1}$ sont donc les projections sur ces lignes de la vitesse relative du point P_1.

§ 2. *Quelques conséquences, que l'on tire des équations du mouvement, dans l'hypothèse que* $\lim_{t=t_1} P_0P_1 = 0$.

La forme, que nous avons donnée aux équations du mouvement, nous permettra d'étudier le comportement des variables du problème, lorsque $\rho_1 \equiv P_0P_1$ tend vers zéro pour une certaine valeur finie du temps. Cette hypothèse analytique entraîne l'hypothèse physique, que les deux points P_0P_1 se choquent au bout du temps t_1. L'intuition nous fait voir, que s'il y aura, à cause de ce choc, des singularités dans les caractéristiques du mouvement relatif des deux points P_1, P_2, elles pourront se trouver seulement dans celles du point P_1. En effet on comprend que ce choc ne pourra exercer qu'une influence très petite sur le mouvement de P_2. En d'autres termes les coordonnées et les composantes de la *vitesse absolue* (ou, ce qui revient au même, les composantes de sa quantité de mouvement absolue), que nous devons supposer finies avant le choc, devront rester telles pour $t = t_1$.

Cela justifie la transformation, que nous avons employée au n° 3 du paragraphe précédent, qui pouvait sembler d'abord sinon illogique au moins peu symétrique. Il est évident, que si nous n'avions pas opéré comme cela, toute singularité dans la vitesse de P_0 aurait amené une singularité analogue dans celle de P_2. Nous trouverons tout à l'heure une confirmation rigoureuse de cela.

I. *Comportement de la vitesse absolue de* P_2. — Proposons-nous de démontrer d'abord que:

Si ρ_1, *pour* $t = t_1$, *tend vers zéro, les fonctions* p_2, q_2, r_2 *restent toujours finies (même pour* $\rho_1 = 0$*).*

Cette propriété ressort tout de suite de la forme analytique particulière des équations (1'''). Considérons en effet, parmi les équations du second groupe, celles qui fournissent les dérivées de p_2, q_2, r_2 par rapport à t, et substituons H_2 par son expression (2''').

Il vient ainsi, en nous bornant à la première:

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{m_0 m_2}{\rho_2^3} x_2 + \frac{m_1 m_2}{\Delta^3}(\rho_1 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1 - x_2),$$

ou bien:

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{m_0 m_2}{\rho_2^2}\cos \rho_2 x - \frac{m_1 m_2}{\Delta^3} x_2 + \rho_1 \frac{m_1 m_2 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1}{\Delta^3}.$$

Faisons maintenant l'hypothèse que $\lim\limits_{t=t_1} \rho_1 = 0$, et que la limite inférieure de ρ_2 soit plus grande que zéro. Ayant égard à la deuxième des relations (8), on conclut que $\lim\limits_{t=t_1} \Delta = \rho_2$, et que les deux fractions $\frac{x_2}{\Delta^3}$, $\frac{m_1 m_2 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1}{\Delta^3}$ restent finies. Nous aurons donc

$$\lim_{t=t_1} \rho_1 \frac{m_1 m_2 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1}{\Delta^3} = 0$$

et nous pourrons conclure qu'il y aura un intervalle (t', t_1) assez petit, dans lequel la fonction $\frac{dp_2}{dt}$ restera toujours finie.

Puisque nous avons identiquement:

$$p_2(t_1) - p_2(t') = \int_{t'}^{t_1} \frac{dp_2}{dt}\, dt,$$

nous pourrons écrire:

$$p_2(t_1) = p_2(t') + (t_1 - t')\left[\frac{dp_2}{dt}\right]_{t_1+\varepsilon(t_1-t)}. \qquad 0 < \varepsilon < 1.$$

Il suffira donc d'admettre, que dans le point t' la fonction p_2 ait une valeur finie[1] pour en tirer qu'elle restera finie même au moment du choc.

Un raisonnement identique peut être fait pour q_2 et r_2, par conséquent notre lemme reste démontré.

II. *Comportement de la vitesse relative de P_1.* — Nous sommes à même maintenant de déduire de l'intégrale des forces vives du système (1‴) d'autres propriétés pour les caractéristiques de P_1.

Si h est la valeur de l'énergie totale des trois points, l'intégrale de Jacobi, exprimée par les variables $x_i, y_i, z_i (i = 1, 2)$; x_1', y_1', z_1'; p_2, q_2, r_2,

[1] Cela se vérifie, si nous supposons, que le mouvement soit régulier pour toute valeur du temps, qui ne correspond pas à un choc. Cette hypothèse est justifiée par le théorème de Painlevé (v. la préface).

sera, d'après l'égalité (2_a):

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\mu_1}(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) + \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right\} - \sum_1^2{}_{ij}\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} = h.$$

Si l'on emploie la transformation fournie par les relations (6) et (7), on a:

$$(2_b)\qquad \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\mu_1}\left(P_1^2 + \frac{\Theta_1^2}{\rho_1^2} + \frac{\Phi_1^2}{\rho_1^2 \sin^2\vartheta_1}\right) + \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right\}$$
$$- \frac{m_0 m_1}{\rho_1} - \frac{m_0 m_2}{\rho_2} - \frac{m_1 m_2}{\Delta} = h,$$

et de suite:

$$\rho_1 P_1^2 + \frac{\Theta_1^2}{\rho_1} + \frac{\Phi_1^2}{\rho_1 \sin^2\vartheta_1} =$$
$$= 2 m_0 m_1 \mu_1 + \rho_1\mu_1\left\{2\left(h + \frac{m_0 m_2}{\rho_2} + \frac{m_1 m_2}{\Delta}\right) - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right\}.$$

En posant enfin:

$$(9)\qquad \mathbf{P} = \mu_1\left\{2\left(h + \frac{m_0 m_2}{\rho_2} + \frac{m_1 m_2}{\Delta}\right) - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right\},$$

et en remarquant, que $m_0 m_1 \mu_1 = m_0 + m_1$, on arrivera à l'égalité:

$$(10)\qquad \rho_1 P_1^2 + \frac{\Theta_1^2}{\rho_1} + \frac{\Phi_1^2}{\rho_1 \sin^2\vartheta_1} = 2(m_0 + m_1) + \rho_1 \mathbf{P}.$$

Si ρ_1 tend vers zéro, la fonction $\mathbf{P}$ ne peut pas croître indéfiniment, car ρ_2 ne s'annule pas, par hypothèse, et p_2, q_2, r_2 restent finies à cause du lemme démontré.

Le second membre de l'égalité précédente aura donc, pour ρ_1 aussi petite que l'on veut, une valeur très voisine à $2(m_0 + m_1)$. Mais, comme le premier membre est une somme de quantités essentiellement positives, chacune d'elles sera finie dans le voisinage de $\rho_1 = 0$.

Nous pouvons donc énoncer ce nouveau lemme:

Si ρ_1, pour $t = t_1$, tend vers zéro les fonctions $\sqrt{\rho_1}\,P_1$, $\frac{\Theta_1}{\sqrt{\rho_1}}$, $\frac{\Phi_1}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\vartheta_1}$ définies par les équations (1'''), ne peuvent pas croître indéfiniment, lorsque t s'approche à t_1.

Si nous envisageons maintenant l'identité:

$$\frac{d(\rho_1 P_1)}{dt} \equiv P_1 \frac{d\rho_1}{dt} + \rho_1 \frac{dP_1}{dt},$$

nous pouvons écrire, en vertu des équations différentielles:

$$\frac{d(\rho_1 P_1)}{dt} = P_1 \frac{\partial H_1}{\partial P_1} - \rho_1 \frac{\partial H_1}{\partial \rho_1}.$$

Ayant égard à l'expression analytique de H_1, donnée par la première des relations (2'''), nous avons donc:

$$\frac{d(\rho_1 P_1)}{dt} = P_1^2 - \rho_1 \Big\{ -\frac{\Theta_1^2}{\rho_1^3} - \frac{\Phi_1^2}{\rho_1^3 \sin^2 \vartheta_1}$$
$$+ \mu_1 \Big(\frac{m_0 m_1}{\rho_1^2} + \frac{m_1 m_2}{\Delta^2} \frac{\partial \Delta}{\partial \rho_1} \Big) + \frac{m_2 \nabla_1}{\rho_2^3} - \frac{m_1 m_2}{m_0 \Delta^2} \frac{\partial \Delta}{\partial \rho_1} \Big\}.$$

Mais, comme on a:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \rho_1} = \frac{1}{\Delta} \{ (\rho_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 - x_2) \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1$$
$$+ (\rho_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 - y_2) \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + (\rho_1 \cos \vartheta_1 - z_2) \cos \vartheta_1 \}$$
$$= \frac{1}{\Delta} (\rho_1 - x_2 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 - y_2 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 - z_2 \cos \vartheta_1) = \frac{\rho_1 - \nabla_1}{\Delta},$$

la dernière relation s'écrira:

$$\frac{d(\rho_1 P_1)}{dt} = P_1^2 + \frac{\Theta_1^2}{\rho_1^2} + \frac{\Phi_1^2}{\rho_1^2 \sin^2 \vartheta_1} - \frac{m_0 + m_1}{\rho_1}$$
$$- \rho_1 \Big(\frac{\mu_1 m_1 m_2 (\rho_1 - \nabla_1)}{\Delta^3} + \frac{m_2 \nabla_1}{\rho_2^3} - \frac{m_1 m_2 (\rho_1 - \nabla_1)}{m_0 \Delta^3} \Big).$$

En se servant en outre de l'égalité (10) et en faisant quelques réductions on aura:

$$\frac{d(\rho_1 P_1)}{dt} = \frac{m_0 + m_1}{\rho_1} + \mathsf{P} - m_2 \rho_1 \Big(\frac{\rho_1 - \nabla_1}{\Delta^3} + \frac{\nabla_1}{\rho_2^3} \Big).$$

Enfin, en posant:

$$\mathsf{Q} = \mathsf{P} - m_2 \rho_1 \Big(\frac{\rho_1 - \nabla_1}{\Delta^3} + \frac{\nabla_1}{\rho_2^3} \Big),$$

il viendra:

$$\frac{d(\rho_1 P_1)}{dt} = \frac{m_0 + m_1}{\rho_1} + \mathbf{Q}. \tag{11}$$

Rappelons-nous maintenant, que la fonction $\mathbf{P}$ reste finie pour toute valeur de t dans le domaine de t_1, et remarquons, que l'expression $m_2\rho_1\left(\frac{\rho_1 - \nabla_1}{\Delta^3} + \frac{\nabla_1}{\rho_2^3}\right)$ tend vers zéro en même temps que $t_1 - t$. Nous en tirons que $\mathbf{Q}$ reste finie dans le domaine de t_1.

Il sera donc possible d'envisager une certaine valeur t' de t, telle que, dans l'intervalle (t', t), on ait $\frac{m_0 + m_1}{\rho_1} + \mathbf{Q} > 0$. Dans cet intervalle $\frac{d(\rho_1 P_1)}{dt}$ restera positive et la fonction $\rho_1 P_1$ sera par conséquent toujours croissante. Comme elle ne peut pas donc s'annuler pour ces valeurs du temps (t_1 au plus exceptée), ni l'un ni l'autre de ses facteurs pourra être égal à zéro.

Mais, puisqu'on a déjà vu que $P_1 = \frac{\partial H_1}{\partial P_1} = \frac{d\rho_1}{dt}$, on peut conclure, que la fonction $\rho_1(t)$ tendra vers zéro toujours de la même manière, c'est-à-dire en décroissant.

En résumé on a:

Si ρ_1, pour $t = t_1$, tend vers zéro, la fonction $P_1 = \frac{d\rho_1}{dt}$ ne peut pas s'annuler dans le voisinage de t_1.

Nous démontrerons enfin que:

Dans le voisinage de t_1 la limite inférieure des valeurs de $\rho_1 P_1^2$ ne peut pas être zéro.

Remarquons, à ce but, que la relation (11) nous donne:

$$\rho_1 \frac{dP_1}{dt} = - P_1 \frac{d\rho_1}{dt} + \frac{m_0 m_1}{\rho_1} + \mathbf{Q}.$$

L'identité:

$$\frac{d(\rho_1 P_1^2)}{dt} \equiv 2\rho_1 P_1 \frac{dP_1}{dt} + P_1^2 \frac{d\rho_1}{dt}$$

pourra donc être écrite:

$$\frac{d(\rho_1 P_1^2)}{dt} = 2P_1\left(\frac{m_0 + m_1}{\rho_1} + \mathbf{Q}\right) - P_1^2 \frac{d\rho_1}{dt}.$$

Ou bien, puisque $P_1 = \frac{d\rho_1}{dt}$:

$$\frac{d(\rho_1 P_1^2)}{dt} = \frac{2}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt}\left(m_0 + m_1 - \frac{1}{2}\rho_1 P_1^2 + \rho_1 \mathfrak{Q}\right). \tag{12}$$

Si nous admettons, que dans le voisinage de t_1 la limite inférieure des valeurs de $\rho_1 P_1^2$ soit zéro, nous pourrons conclure qu'il y aura une valeur t', suffisamment près de t_1, pour laquelle $\rho_1 P_1^2$ deviendra aussi petite que l'on veut. En particulier nous pourrons supposer, que, pour $t = t'$, soit $\rho_1 P_1^2 < \frac{m_0 + m_1}{2}$. Nous pouvons encore supposer que, pour $t = t'$, on ait $\rho_1 \mathfrak{Q} < \frac{m_0 + m_1}{4}$, car nous avons vu dans la démontration du lemme précédent, que $\rho_1 \mathfrak{Q}$ tend vers zéro en même temps que $t_1 - t$. On tire de tout cela, que la valeur de $\frac{1}{2}\rho_1 P_1^2 - \rho_1 \mathfrak{Q}$, pour $t = t_1$, sera moindre que $\frac{m_0 + m_1}{2}$ et, par conséquent, que l'inégalité

$$m_0 + m_1 - \frac{1}{2}\rho_1 P_1^2 + \rho_1 \mathfrak{Q} > \frac{m_0 + m_1}{2} \tag{13}$$

sera verifiée.

Le premier membre de la relation (12) aura donc le même signe que $\frac{d\rho_1}{dt}$, c'est-à-dire qu'il sera négatif.

En d'autres termes la fonction $\rho_1 P_1^2$ sera décroissante dans le point t_1.

Envisageons alors une valeur t'' comprise dans l'intervalle (t', t_1) et qui soit suffisamment voisine à t'.

Puisque l'inégalité (13) reste *a fortiori* satisfaite, nous en tirons, que même à l'instant t'' la fonction $\rho_1 P_1^2$ sera décroissante.

Comme nous pouvons répéter ce raisonnement pour chaque point de (t', t_1), il faudra que l'on ait:

$$\lim_{t=t_1} \rho_1 P_1^2 = 0. \tag{14}$$

Il est cependant aisé de montrer, que cette conclusion est absurde. Écrivons en effet d'après (12):

$$-d(\rho_1 P_1^2) = -2\frac{d\rho_1}{\rho_1}\left(m_0 + m_1 - \frac{1}{2}\rho_1 P_1^2 + \rho_1 \mathfrak{Q}\right).$$

Puisque $-d(\rho_1 P_1^2)$ et $-d\rho_1$ sont des quantités positives, cette égalité donne lieu, en vertu de (13), à l'inégalité:

$$-d(\rho_1 P_1^2) > -(m_0 + m_1) d \log \rho_1 .$$

De celle-ci on tire, en intégrant tous les deux membres entre deux limites t', t'', qui vérifient l'inégalité (13):

$$(\rho_1 P_1^2)_{t'} - (\rho_1 P_1^2)_{t''} > (m_0 + m_1) \{ (\log \rho_1)_{t'} - (\log \rho_1)_{t''} \} .$$

Faisons maintenant tendre t'' vers t_1. Le premier membre, en vertu de l'égalité (14), aura la limite finie $(\rho_1 P_1^2)_{t'}$, tandis que le second croîtra indéfiniment. Ce résultat nous montre, que l'hypothèse, d'où nous sommes partis, est fausse.

§ 3. *Changement de la variable indépendante.*

I. *Remplacement de t par ρ_1.* — Dans une remarque au commencement du paragraphe précédent nous avons employé implicitement une propriété, qui à été enoncée par M. Painlevé (v. aussi la préface). Ce théorème dit, au fond, que le mouvement de trois points matériaux, qui s'attirent selon la loi de Newton se poursuit régulièrement et les équations se laissent intégrer par une approximation aussi grande que l'on veut, pourvu qu'il n'y ait pas un choc au bout d'un temps fini. A partir de cet instant on ne peut rien affirmer.

Les cas, qui peuvent se présenter sont évidemment deux: *a*) une seule des trois distances tend pour $t = t_1$ vers zéro, tandis que les deux autres restent supérieures à zéro, *b*) tous les trois corps tendent en même temps vers une position déterminée de l'espace.

Nous étudierons seulement le premier et nous supposerons, que ce soit la distance $P_0 P_1$ qui s'annule pour la valeur t_1 du temps.

Comme nous n'avons fait aucune hypothèse à l'égard des masses des trois corps, il est bien évident, que nous pourrons donner aux résultats, que nous atteindrons, une interprétation plus générale. Il suffira que l'on change convenablement la signification donnée aux symboles, pour avoir des propriétés identiques relatives à un choc entre deux autres points.

Faisons donc l'hypothèse: $\lim_{t=t_1} \rho_1 = 0$. D'après le théorème de PAINLEVÉ, pour toute valeur de t près de t_1 les fonctions $\rho_1, \vartheta_1, \varphi_1; P_1, \Theta_1, \Phi_1; x_2, y_2, z_2; p_2, q_2, r_2$ dépendent régulièrement de t_1. Nous avons de plus démontré (v. § 2, n° 2, II lemme) que $\left(\frac{d\rho_1}{dt_1}\right)_{t=t_1}$ est négative. On tire par conséquent, que t pourra être considérée une fonction de ρ_1 régulière dans le domaine $\rho_1 = 0$. Nous avons donc:

Si ρ_1, pour $t = t_1$, tend vers zéro, les fonctions $\vartheta_1, \ldots, \Phi_1; x_2, y_2, \ldots, r_2$ dépendent régulièrement de ρ_1 dans le voisinage de t_1 (cette valeur au plus exceptée).

Pour avoir les équations, qui définissent ces fonctions au moyen de ρ_1, il faudra évidemment éliminer dt entre les équations (1‴). A ce but écrivons la première sous la forme

$$\frac{dt}{d\rho_1} = \frac{1}{\frac{\partial H_1}{\partial P_1}}.$$

La quatrième du premier groupe nous donne par conséquent:

$$\frac{dP_1}{d\rho_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial \rho_1} : \frac{\partial H_1}{\partial P_1}.$$

Cependant, comme il est possible de tirer de l'intégrale $H = h$ la fonction P_1, nous pourrons remplacer l'équation précédente par $H = h$, et envisager, dans toutes les autres, P_1 comme une fonction connue.

En résumé le système auquel doivent satisfaire $\vartheta_1(\rho_1), \varphi_1(\rho_1); \ldots; q_2(\rho_1), r_2(\rho_1)$ sera:

$$(1^{\text{IV}}) \begin{cases} \text{I} \begin{cases} \dfrac{d\vartheta_1}{d\rho_1} = \dfrac{\partial H_1}{\partial \Theta_1} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{d\varphi_1}{d\rho_1} = \dfrac{\partial H_1}{\partial \Phi_1} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}; \\[2ex] \dfrac{d\Theta_1}{d\rho_1} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{d\Phi_1}{d\rho_1} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial \varphi_1} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}; \end{cases} \\[4ex] \text{II} \begin{cases} \dfrac{dx_2}{d\rho_1} = \dfrac{\partial H_2}{\partial p_2} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{dy_2}{d\rho_1} = \dfrac{\partial H_2}{\partial q_2} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{dz_2}{d\rho_1} = \dfrac{\partial H_2}{\partial r_2} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}; \\[2ex] \dfrac{dp_2}{d\rho_1} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial x_2} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{dq_2}{d\rho_1} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial y_2} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{dr_2}{d\rho_1} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial z_2} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}. \end{cases} \end{cases}$$

II. *Remarques générales à l'égard des équations obtenues.* — Après avoir intégré ces équations, on pourra, d'après l'intégrale $H = h$, exprimer P_1 par ρ_1. Enfin, en remplaçant toutes les fonctions, dont dépend le second membre de l'équation $\frac{dt}{d\rho_1} = 1 : \frac{\partial H_1}{\partial P_1}$, par leurs valeurs obtenues, nous pourrons avoir, par une seule quadrature, la fonction ρ_1 et toutes les autres caractéristiques du mouvement exprimées au moyen de t.

Ce qui nous importe le plus c'est de mettre en évidence le caractère analytique des intégrales dans le voisinage de $\rho_1 = 0$.

D'après le théorème de M. Painlevé on est assuré, que le long de toute trajectoire (où $\frac{d\rho_1}{dt}$ ne soit pas identiquement nulle) le mouvement ne cesse pas d'être régulier, c'est-à-dire, les intégrales sont toujours des fonctions holomorphes. Au contraire, on ne sait rien, si les points se meuvent le long des trajectoires singulières. Dans le paragraphe suivant nous verrons, qu'elles sont caractérisées univoquement par les intégrales du système (1^{IV}), qui sont holomorphes dans le domaine de $\rho_1 = 0$ (bien entendu, ce point au plus excepté).

§ 4. *Forme définitive des équations.*

I. *Nouvelle transformation de variables.* — Dans le système (1^{IV}) remplaçons les variables $\rho_1, P_1, \Theta_1, \Phi_1$ par des nouvelles $r, R, \vartheta_1', \varphi_1'$, liées aux premières par les relations:

$$(15) \qquad r = \sqrt{\rho_1}, \qquad R = -rP_1, \qquad \vartheta_1' = \frac{\Theta_1}{r^4}, \qquad \varphi_1' = \frac{\Phi_1}{r^4 \sin^2 \vartheta_1}.$$

La signification des variables ϑ_1', φ_1' est bien simple.

Écrivons à cet effet:

$$\vartheta_1' = \frac{\Theta_1}{\rho_1} : \rho_1, \qquad \varphi_1' = \frac{\Phi_1}{\rho_1 \sin \vartheta_1} : \rho_1 \sin \vartheta_1,$$

et rappelons-nous que $\frac{\Theta_1}{\rho_1}$ et $\frac{\Phi_1}{\rho_1 \sin \vartheta_1}$ sont les composantes de la vitesse relative de P_1 selon les lignes polaires ϑ_1, φ_1 (v. § 1, n° 4).

Nous tirerons tout court, que ϑ_1' et φ_1' sont respectivement les vitesses angulaires des projections de P_0P_1 sur les plans $\varphi_1 = \text{const.}$, $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$.

La première des (15) nous donne:

$$(16) \qquad d\rho_1 = 2r dr.$$

En outre, ayant égard aux expressions (2''') de H_1 et H_2:

$$(17_a) \qquad \frac{\partial H_1}{\partial P_1} = P_1 = -\frac{R}{r},$$

$$(17_b) \qquad \frac{\partial H_1}{\partial \Theta_1} = \frac{\Theta_1}{\rho_1^2} = \frac{\Theta_1}{r^4} = \vartheta_1',$$

$$(17_c) \qquad \frac{\partial H_1}{\partial \Phi_1} = \frac{\Phi_1}{\rho_1^2 \sin^2 \vartheta_1} = \frac{\Phi_1}{r^4 \sin^2 \vartheta_1} = \varphi_1'.$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1} = -\frac{\Phi_1^2 \cos \vartheta_1}{\rho_1^2 \sin^3 \vartheta_1} + \mu_1 m_1 m_2 \frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta_1} + \frac{m_2 \rho_1}{\rho_2^3}\frac{\partial \nabla_1}{\partial \vartheta_1} - \frac{m_1 m_2}{m_0}\frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta_1}.$$

Si nous calculons $\frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta_1}$, en nous servant des (8), nous trouvons:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta_1} = \frac{1}{\Delta}\{(\rho_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 - x_2)\rho_1 \cos \vartheta_1 \cos \varphi_1 + (\rho_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 - y_2)\rho_1 \cos \vartheta_1 \sin \varphi_1$$
$$- (\rho_1 \cos \vartheta_1 - z_2) \sin \vartheta_1\}$$
$$= -\frac{1}{\Delta}\rho_1\{x_2 \cos \vartheta_1 \cos \varphi_1 + y_2 \cos \vartheta_1 \sin \varphi_1 - z_2 \sin \vartheta_1\} = -\frac{\rho_1}{\Delta}\frac{\partial \nabla_1}{\partial \vartheta_1}.$$

Par conséquent:

$$\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1} = -\frac{\Phi_1^2 \cos \vartheta_1}{\rho_1^2 \sin^3 \vartheta_1} + m_2 \frac{\partial \nabla_1}{\partial \vartheta_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2^3} - \frac{\rho_1}{\Delta^3}\right),$$

ou même, d'après (15):

$$(17_d) \qquad \frac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1} = r^4\left\{-\varphi_1'^2 \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 + \frac{m_2}{r^2}\left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right)\frac{\partial \nabla_1}{\partial \vartheta_1}\right\}.$$

Par un calcul analogue on pourrait obtenir:

$$(17_e) \qquad \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_1} = m_2 r^2 \left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right)\frac{\partial \nabla_1}{\partial \varphi_1}.$$

En envisageant les dérivées de H_2 par rapport aux variables du second point, on a:

$$\frac{\partial H_2}{\partial p_2} = \mu_2 p_2 + \frac{1}{m_0\mu_1}\frac{\partial \nabla_2}{\partial p_2}$$

$$= \mu_2 p_2 + \frac{1}{m_0\mu_1}\left(P_1 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1 + \frac{\Theta_1}{\rho_1}\cos\vartheta_1\cos\varphi_1 - \frac{\Phi_1}{\rho_1 \sin\vartheta_1}\sin\varphi_1\right).$$

$$(17_f)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H_2}{\partial p_2} = \dfrac{1}{r}\left\{r\mu_2 p_2 + \dfrac{1}{m_0\mu_1}(-R\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + r^3\vartheta_1'\cos\vartheta_1\cos\varphi_1 \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - r^3\varphi_1'\sin\vartheta_1\sin\varphi_1)\right\}, \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial q_2} = \dfrac{1}{r}\left\{r\mu_2 q_2 + \dfrac{1}{m_0\mu_1}(-R\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + r^3\vartheta_1'\cos\vartheta_1\sin\varphi_1 \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + r^3\varphi_1'\sin\vartheta_1\cos\varphi_1)\right\}, \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial r_2} = \dfrac{1}{r}\left\{r\mu_2 r_2 + \dfrac{1}{m_0\mu_1}(-R\cos\vartheta_1 - r^3\vartheta_1'\sin\vartheta_1)\right\}; \end{cases}$$

$$(17_g)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H_2}{\partial x_2} = \dfrac{m_0 m_2}{\rho_2^3}x_2 - \dfrac{m_1 m_2(r^2\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 - x_2)}{\Delta^3}, \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial y_2} = \dfrac{m_0 m_2}{\rho_2^3}y_2 - \dfrac{m_1 m_2(r^2\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 - y_2)}{\Delta^3}, \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial z_2} = \dfrac{m_0 m_2}{\rho_2^3}z_2 - \dfrac{m_1 m_2(r^2\cos\vartheta_1 - z_2)}{\Delta^3}. \end{cases}$$

En vertu de l'égalité (16) et des relations (17_a), (17_b), la première des équations du mouvement peut s'écrire:

$$\frac{d\vartheta_1}{2r\,dr} = \frac{\vartheta_1'}{-\dfrac{R}{r}},$$

ou bien:

$$(18_a)\qquad \frac{d\vartheta_1}{dr} = -2r^2\frac{\vartheta_1'}{R}.$$

D'une manière analogue la deuxième s'écrit:

$$(18_b)\qquad \frac{d\varphi_1}{dr} = -2r^2\frac{\varphi_1'}{R}.$$

En dérivant la quatrième des (15) par rapport à r, et en se servant de (16), on a:

$$\frac{d\vartheta_1'}{dr} = -\frac{4\Theta_1}{r^5} + \frac{1}{r^4}\frac{d\Theta_1}{dr} = -\frac{4}{r}\vartheta_1' + \frac{2}{r^3}\frac{d\Theta_1}{d\rho_1}.$$

Si nous avons égard à l'équation $\frac{d\Theta_1}{d\rho_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial\vartheta_1} : \frac{\partial H_1}{\partial P_1}$ du système (1^{IV}) et aux (17_a), (17_d), l'égalité précédente nous donne:

$$(18_c)\qquad r\frac{d\vartheta_1'}{dr} = -4\vartheta_1' + \frac{2r^3}{R}\left\{-\varphi_1'^2\sin\vartheta_1\cos\vartheta_1 + \frac{m_2}{r^2}\left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right)\frac{\partial\nabla_1}{\partial\vartheta_1}\right\}.$$

De la même manière on a:

$$\frac{d\varphi_1'}{dr} = -\frac{4\Phi_1}{r^5\sin^2\vartheta_1} - \frac{2\Phi_1}{r^4\sin^3\vartheta_1}\cos\vartheta_1\frac{d\vartheta_1}{dr} + \frac{1}{r^4\sin^2\vartheta_1}\frac{d\Phi_1}{dr}$$

$$= -\frac{4\varphi_1'}{r} - \frac{2\varphi_1'\cos\vartheta_1}{\sin\vartheta_1}\frac{d\vartheta_1}{dr} + \frac{2}{r^3\sin^2\vartheta_1}\frac{d\Phi_1}{d\rho_1}.$$

En éliminant $\frac{d\vartheta_1}{dr}$, au moyen de (18_a), et en remplaçant $\frac{d\Phi_1}{d\rho_1}$ par l'expression, qui est fournie par la quatrième des ((1^{IV}), I) et par les (17_a), (17_e), on a:

$$(18_d)\qquad r\frac{d\varphi_1'}{dr} = -4\varphi_1' + \frac{2r^3}{R}\left\{\frac{1}{\sin^2\vartheta_1}\left[-\varphi_1'\vartheta_1'\frac{\sin 2\vartheta_1}{2} + \frac{m_2}{r^2}\left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right)\frac{\partial\nabla_1}{\partial\vartheta_1}\right]\right\}.$$

Pour les équations du second groupe la transformation est immédiate, de sorte que nous n'insisterons pas.

Elles deviennent:

$$(18_e)\qquad \frac{dx_2}{dr} = -\frac{2r}{R}\left\{r\mu_2 p_2 + \frac{1}{m_0\mu_1}(-R\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + r^3\vartheta_1'\cos\vartheta_1\cos\varphi_1 - r^3\varphi_1'\sin\vartheta_1\sin\varphi_1)\right\},\quad \text{etc.};$$

$$(18_f)\qquad \frac{dp_2}{dr} = -\frac{2r^2}{R}\left\{\frac{m_0 m_2}{\rho_2^3}x_2 - \frac{m_1 m_2(r^2\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 - x_2)}{\Delta^3}\right\},\quad \text{etc.}$$

Posons maintenant:

$$(19)\quad \begin{cases} \beta_1 = -\varphi_1'^2 \dfrac{\sin 2\vartheta_1}{2} + \dfrac{m_2}{r^2}\left(\dfrac{1}{\rho_2^3} - \dfrac{1}{\Delta^3}\right)\dfrac{\partial \nabla_1}{\partial \vartheta_1}, \\ \beta_2 = \dfrac{1}{\sin^2\vartheta_1}\left[-\varphi_1'\vartheta_1' \dfrac{\sin 2\vartheta_1}{2} + \dfrac{m_2}{r^2}\left(\dfrac{1}{\rho_2^3} - \dfrac{1}{\Delta^3}\right)\dfrac{\partial \nabla_1}{\partial \varphi_1}\right], \\ \alpha_1 = r\vartheta_1', \\ \alpha_2 = r\varphi_1', \\ \alpha_3 = r\mu_2 p_2 + \dfrac{1}{m_0\mu_1}(-R\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + r^3\vartheta_1'\cos\vartheta_1\cos\varphi_1 - r^3\varphi_1'\sin\vartheta_1\sin\varphi_1), \\ \alpha_4 = r\mu_2 q_2 + \dfrac{1}{m_0\mu_1}(-R\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + r^3\vartheta_1'\cos\vartheta_1\sin\varphi_1 + r^3\varphi_1'\sin\vartheta_1\cos\varphi_1), \\ \alpha_5 = r\mu_2 r_2 + \dfrac{1}{m_0\mu_1}(-R\cos\vartheta_1 \qquad - r^3\vartheta_1'\sin\vartheta_1), \\ \alpha_6 = r\left\{\dfrac{m_0 m_2}{\rho_2^3}x_2 - \dfrac{m_1 m_2(r^2\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 - x_2)}{\Delta^3}\right\}, \\ \alpha_7 = r\left\{\dfrac{m_0 m_2}{\rho_2^3}y_2 - \dfrac{m_1 m_2(r^2\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 - y_2)}{\Delta^3}\right\}, \\ \alpha_8 = r\left\{\dfrac{m_0 m_2}{\rho_2^3}z_2 - \dfrac{m_1 m_2(r^2\cos\vartheta_1 - z_2)}{\Delta^3}\right\}. \end{cases}$$

Écrivons, à la place de $\vartheta_1(r)$, $\varphi_1(r)$, $x_2(r)$, $y_2(r)$, $z_2(r)$, $p_2(r)$, $q_2(r)$, $r_2(r)$, respectivement $\lambda_1(r)$, $\lambda_2(r)$, ..., $\lambda_8(r)$. Alors, puisque $\vartheta_1'(r) = \dfrac{d\vartheta_1(r)}{dt}$ et $\varphi_1'(r) = \dfrac{d\varphi_1(r)}{dt}$, nous pourrons encore remplacer $\vartheta_1'(r)$ et $\varphi_1'(r)$ par $\lambda_1'(r)$ et $\lambda_2'(r)$.

D'après (18_a), ..., (18_i) et (19) le système transformé de (1^{IV}) sera enfin:

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{d\lambda_i}{dr} = -2r\dfrac{\alpha_i}{R}, & (i=1,2,\ldots,8) \\ r\dfrac{d\lambda_j'}{dr} = -4\lambda_j' + 2r^3\dfrac{\beta_j}{R}. & (j=1,2) \end{cases}$$

II. *Comportement des seconds membres des équations* (S) *au voisinage d'une position de choc.* — Il est intéressant de mettre en évidence le comportement, dans le voisinage de $r = 0$, des fonctions α, β introduites par les positions (19).

En vertu de l'identité:

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right) = \frac{\Delta - \rho_2}{\rho_1} \frac{\Delta^2 + \rho_2 \Delta + \rho_2^2}{\rho_2^3 \Delta^3}$$

on voit, que, pour $r = 0$, le produit $\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right)$ reste fini. De plus, pour des valeurs finies des variables, $\frac{\partial \nabla_1}{\partial \vartheta_1}$ et $\frac{\partial \nabla_1}{\partial \varphi_1}$ gardent, dans le même domaine, des valeurs finies.

Enfin la fonction:

$$R = -rP_1 = \pm\sqrt{\left\{2(m_0+m_1)+r^2\mu_1\left[2\left(h+\frac{m_0 m_1}{\rho_2}+\frac{m_1 m_2}{\Delta}\right)-\mu(p_2^2+q_2^2+r_2^2)\right] - r^6(\vartheta_1'^2 + \varphi_1'^2 \sin^2\vartheta_1)\right\}},$$

dont l'expression se tire de (10) et de (9), (15), reste différente de zéro, pour r suffisamment petite (v. § 2, n° 1, lemme I). On tire, que les fonctions $\alpha_1, \ldots, \alpha_8, \beta_1$ sont régulières pour des valeurs finies des arguments et dans le domaine de $r = 0$. Mais on ne peut rien dire, *a priori*, à l'égard de β_2, car elle est affectée par le diviseur $\sin\vartheta_1$, qui peut s'annuler.

Si l'on pouvait démontrer, que, pour $t = t_1$, la fonction $\vartheta_1' = \frac{d\vartheta_1}{dt}$ reste finie, on pourrait conclure, que ϑ_1 tendrait, pour cette valeur du temps, vers une valeur déterminée et finie.[1] Si, par hasard, cette valeur annulait $\sin\vartheta_1$, il suffirait de changer l'orientation des axes x, y, z pour éviter ce cas exceptionnel.

Mais, répétons-le, à cette conclusion on arriverait seulement après avoir démontré, que ϑ_1' reste finie.

En nous servant des hypothèses: $\lim_{t=t_1} r = 0$, et limite inférieure de ρ_2 (dans le domaine de $t = t_1$) plus grande que zéro, nous avons tâché de

---

[1] Il suffirait d'appliquer la méthode suivie dans le § 2, n° 1.

donner cette démonstration. Nous devons cependant avouer que nos efforts ont été sans résultat.

C'est notre convinction, que la propriété ci-dessus soit vraie. Les raisons, qui nous engagent dans cette opinion, sont principalement deux: I. Dans le cas du problème restreint la propriété est vérifiée. II. L'intuition physique du phénomène du choc des deux points $P_0 P_1$ nous fait voir que, lorsque la distance $P_0 P_1$ sera réduite suffisamment petite (par rapport à la distance $P_0 P_2$), le troisième point aura une influence presque nulle sur le mouvement relatif des deux premiers. C'est-à-dire, P_0, P_1 se mouvront, l'un par rapport à l'autre, selon les lois du mouvement newtonien de deux points. Si l'on admet donc, qu'ils doivent se choquer au bout du temps t_1, on est entraîné à penser, que P_1, dans le voisinage de P_0, suit, par une grande approximation, une des trajectoires de choc dans le mouvement non-troublé. Mais ces trajectoires sont des droites sortant de P_0, par conséquent les fonctions ϑ_1, φ_1 et leurs dérivées ϑ_1', φ_1' tendront vers des limites finies.[1]

En résumé nous pouvons donc retenir, que la fonction β_2, comme toutes les autres, sera régulière, dans le voisinage de $r = 0$, pour toutes les valeurs finies de ses arguments.

Nous en tirons, que les seconds membres des équations du système (S) sont réguliers dans ce domaine des variables. La valeur $r = 0$ sera donc singulière, pour les intégrales du problème des trois corps, parce que les premiers membres des deux dernières équations contiennent le facteur r.

§ 5. *Intégrales qui correspondent aux trajectoires singulières.*

I. *Théorème d'existence. — Le système* (S) *admet, dans le domaine de* $r = 0$, ∞^8 *intégrales holomorphes, dont* λ_1' *et* λ_2', *pour* $r = 0$, *se réduisent égales à zéro, tandis que les autres prennent des valeurs constantes arbitraires.*

Remarquons tout de suite, qu'un système d'intégrales holomorphes de (S) doit satisfaire à ces équations même pour la valeur zéro de la

[1] Nous aurions pu admettre que $\lim\limits_{t=t_1} \vartheta_1' = \lim\limits_{t=t_1} \varphi_1' = 0$, mais nous nous contentons d'une hypothèse moins restrictive, car nous verrons, qu'elle nous suffit pour pouvoir en tirer, que les deux dérivées tendent vers zéro.

variable indépendante. Mais, comme les deux dernières équations s'écrivent tout simplement, pour cette valeur: $\lambda'_1 = 0$, $\lambda'_2 = 0$, il faudra qu'on ait précisément $\lambda'_1(0) = 0$, $\lambda'_2(0) = 0$. Après cela nous pouvons encore remarquer, que la forme particulière de nos équations nous permet de déterminer, au moyen d'elles, les successifs coefficients des séries, qui donnent les développements des fonctions au voisinage de $r = 0$.

Nous pourrons affirmer en outre, que ces coefficients seront des fonctions périodiques par rapport aux valeurs initiales $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}$ des λ_1, λ_2. En effet les seconds membres des équations peuvent évidemment être envisagés comme des fonctions régulières de $r, \lambda_i, \lambda_i^{(0)}, \lambda'_1, \lambda'_2$ et, par conséquent, périodiques par rapport à $\lambda_1^{(0)}$ et $\lambda_2^{(0)}$, car λ_1 et λ_2 entrent au moyen de fonctions trigonométriques.

Comme nous aurons construit les séries, il faudra s'assurer, pour la démonstration du théorème, qu'elles sont convergentes.

A ce but écrivons le système (S) sous la forme:

$$
(S')\qquad \begin{cases} \dfrac{d(\lambda_i - \lambda_i^{(0)})}{dr} = -2r\dfrac{\alpha_i}{R}, & (i=1,2,\ldots,8) \\[2ex] r\dfrac{d\lambda'_j}{dr} = -4\lambda'_j + 2r^3\dfrac{\beta_j}{R}. & (j=1,2) \end{cases}
$$

Posons en outre:

$$
\lambda_i - \lambda_i^{(0)} = \nu_i, \qquad (i=1,2,\ldots,8)
$$

et envisageons des fonctions

$$
\mathfrak{L}_j(r, \nu_1, \ldots, \nu_8, \lambda'_1, \lambda'_2), \qquad (j=1,2)
$$

$$
\mathfrak{N}_i(r, \nu_1, \ldots, \nu_8, \lambda'_1, \lambda'_2), \qquad (i=1,2,\ldots,8)
$$

qui soient *majorants* des fonctions $2r^2\dfrac{\beta_j}{R}$, $-2r\dfrac{\alpha_i}{R}$.

Il viendra que le système:

$$
(S'')\qquad \begin{cases} r\dfrac{d\lambda'_j}{dr} = -4\lambda'_j + r\mathfrak{L}_j, & (j=1,2) \\[2ex] \dfrac{d\nu_i}{dr} = \mathfrak{N}_i & (i=1,2,\ldots,8) \end{cases}
$$

sera *majorant* de (S'). Pour démontrer notre théorème, il faudra donc que nous fassions voir, que (S'') admet une solution régulière $\lambda'_j(r), \nu_i(r)$, qui pour $r = 0$ devient: $\lambda'_j(0) = 0, \nu_i(0) = 0$.

Si nous nous proposons de construire les séries de TAYLOR correspondantes aux fonctions λ'_j, ν_i, nous trouvons, que leurs coefficients sont donnés par les relations:

$$(\mathrm{S}''') \qquad \begin{cases} \dfrac{d^n \lambda'_j}{dr^n} = \dfrac{n}{n+4} \dfrac{d^{n-1} \mathfrak{L}_j}{dr^{n-1}}, & (j=1,2) \\ & (i=1,2,\ldots,8) \\ \dfrac{d^n \nu_i}{dr^n} = \dfrac{d^{n-1} \mathfrak{N}_i}{dr^{n-1}}. & (n=1,2,\ldots) \end{cases}$$

Elles ont été deduites par les équations (S'') en dérivant le premier groupe n fois par rapport à r, le second $n-1$ fois, et en posant $r = 0$.

Si l'on remarque, que les fonctions $\mathfrak{L}_j$ sont majorantes des fonctions $\dfrac{n}{n+4}\mathfrak{L}_j$, on tire que le système:

$$(\mathrm{S}^{\mathrm{IV}}) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^n \lambda'_j}{dr^n} = \dfrac{d^{n-1} \mathfrak{L}_j}{dr^{n-1}}, & (j=1,2) \\ & (i=1,2,\ldots,8) \\ \dfrac{d^n \nu_i}{dr^n} = \dfrac{d^{n-1} \mathfrak{N}_i}{dr^{n-1}} & (n=1,2,\ldots) \end{cases}$$

est majorant de (S'''). De la sorte le système

$$(\mathrm{S}^{\mathrm{V}}) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda_j}{dr} = \mathfrak{L}_j, & (j=1,2) \\ \dfrac{d\nu_i}{dr} = \mathfrak{N}_i, & (i=1,2,\ldots,8) \end{cases}$$

qui correspond à (S^IV) sera, *a fortiori,* majorant de (S). Mais les équations de (S^V) sont toutes régulières dans le voisinage de $r = 0$, par conséquent ce dernier système admettra certainement une solution holomorphe s'annulant pour $r = 0$.[1] Le théorème est donc démontré.

II. *Toutes les solutions du système* (S) *sont holomorphes.* — Nous pouvons maintenant nous faire la question: Le système (S) admet-il d'autres solutions hors de celles, dont nous venons de démontrer l'existence?

[1] V. PICARD. *Traité d'analyse,* a. 1892. T. II, Ch. XI, p. 308.

Pour y repondre il faut démontrer le théorème:

Hors des solutions holomorphes, il n'y a pas d'autres solutions, pour lesquelles on ait $\lambda_1'(0) = \lambda_2'(0) = 0$.

Nous employerons pour la démonstration un procédé, qui est une généralisation d'un procédé analogue, donné, dans son mémoire, par M. Levi-Civita (loc. c., p. 17).

Il faudra, à ce but, que nous donnions auparavant aux équations de (S) une forme convenante.

Le comportement des solutions holomorphes du système (S), dans le domaine de $r = 0$, nous permet de mettre celles-ci sous la forme:

$$(20) \qquad \begin{cases} \lambda_i - \lambda_i^{(0)} = r\Lambda_i\,(r, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}), & (i=1,2,\ldots,8) \\ \lambda_j' = r\Lambda_j^{(1)}(r, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}). & (j=1,2) \end{cases}$$

Il va sans dire, que $\Lambda_i(r \mid \lambda_i^{(0)})$ et $\Lambda_j^{(1)}(r \mid \lambda_i^{(0)})$ sont des fonctions régulières, par rapport à leurs arguments, au voisinage de $r = 0$. Elles sont de plus périodiques par rapport à $\lambda_1^{(0)}$ et $\lambda_2^{(0)}$.

Si nous posons maintenant:

$$(21) \qquad \begin{cases} \lambda_i = \lambda_i^{(0)} + r\Lambda_i\,(r, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}), & (i=1,2,\ldots,8) \\ \lambda_j' = u_j \;\; + r\Lambda_j^{(1)}(r, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}), & (j=1,2) \end{cases}$$

nous obtenons un système d'équations, qui peut nous fournir, dans le voisinage de $r = 0$, les quantités $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}, u_1, u_2$ en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_8, \lambda_1', \lambda_2'$.[1]

[1] Pour s'en assurer il suffit de remarquer que:

$$\frac{\partial \lambda_r}{\partial \lambda_s^{(0)}} = \varepsilon_{rs} + r\frac{\partial \Lambda_r}{\partial \lambda_s^{(0)}}, \qquad \frac{\partial \lambda_r}{\partial u_j} = 0, \qquad \frac{\partial \lambda_l'}{\partial \lambda_s^{(0)}} = r\frac{\partial \Lambda_l^{(1)}}{\partial \lambda_s^{(0)}}, \qquad \frac{\partial \lambda_l'}{\partial u_j} = \varepsilon_{lj},$$
$$(r, s = 1, 2, \ldots, 8;\; l, j = 1, 2)$$

où le symbole ε_{rs} dénote l'unité ou le zéro, selon que les deux indices r, s sont égaux ou différents. On peut de plus observer, que les dérivées des fonctions Λ_r, $\Lambda_l^{(1)}$ (régulières, comme nous l'avons vu tout à l'heure) sont finies dans le domaine de $r = 0$. On a de la sorte, que le déterminant jacobien $\dfrac{d(\lambda_1, \ldots, \lambda_8, \lambda_1', \lambda_2')}{d(\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}, u_1, u_2)}$ reste, dans ce domaine, différent de zéro, car tous ses élements principaux se réduissent, pour $r = 0$, à l'unité, tandis que les autres s'annulent.

A ce propos remarquons, que les huit équations du premier groupe dépendent seulement des deux séries de variables $\lambda_i, \lambda_i^{(0)}$ et elles envisagent une vraie substitution entre les deux séries mêmes. Pour résoudre le système (21), on peut donc tirer du premier groupe $\lambda_i^{(0)}$ en fonction de λ_i, et substituer ces valeurs dans les deux autres. Ces dernières peuvent être envisagées comme déjà résolues par rapport à u_1 et u_2.

Il vient ainsi:

$$(22) \qquad \begin{cases} \lambda_i^{(0)} = \lambda_i + r\bar{A}_i\ (r, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_8), & {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,8)} \\ u_j = \lambda_j' - r\bar{A}_j^{(1)}(r, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_8). & {\scriptstyle (j=1,2)} \end{cases}$$

Il est important de remarquer, que $\bar{A}_i, \bar{A}_j^{(1)}$ doivent être des fonctions régulières par rapport à leurs arguments, et périodiques par rapport à λ_1 et λ_2 avec la période 2π.

En effet, d'après les équations (20) et (22), on a:

$$(23) \qquad -A_i(r \mid \lambda_i^{(0)}) = \bar{A}_i(r \mid \lambda_i). \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,8)}$$

Ayant égard à la périodicité des A_i par rapport a $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}$, on peut écrire:

$$A_i(r, \lambda_1^{(0)} + 2\pi, \lambda_2^{(0)} + 2\pi, \lambda_3^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}) = A_i(r \mid \lambda_i^{(0)}), \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,8)}$$

et, en vertu de (23):

$$-A_i(r, \lambda_1^{(0)} + 2\pi, \lambda_2^{(0)} + 2\pi, \lambda_3^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}) = \bar{A}_i(r, \lambda_1 + 2\pi, \lambda_2 + 2\pi, \lambda_3, \ldots, \lambda_8), \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,8)}$$

de sorte que l'on tirera enfin:

$$\bar{A}_i(r, \lambda_1 + 2\pi, \lambda_2 + 2\pi, \lambda_3, \ldots, \lambda_8) = \bar{A}_i(r \mid \lambda_i). \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,8)}$$

Ces relations nous confirment, que les fonctions $\bar{A}_i$ sont périodiques par rapport à λ_1 et λ_2. Alors, d'après la méthode suivie pour la résolution des équations (21), on est autorisé de conclure que $\bar{A}_1^{(1)}$ et $\bar{A}_2^{(1)}$ jouissent de la même propriété.

Écrivons maintenant le système différentiel, qui définit les nouvelles fonctions.

En dérivant les équations (22) par rapport à r, on a:

$$\frac{d\lambda_i^{(0)}}{dr}=\frac{d\lambda_i}{dr}+\frac{d(r\overline{A}_i)}{dr}=\frac{d\lambda_i}{dr}+\frac{\partial(r\overline{A}_i)}{\partial r}+r\sum_1^8{}_s\frac{\partial\overline{A}_i}{\partial\lambda_s}\frac{d\lambda_s}{dr},\qquad (i=1,2,\ldots,8)$$

$$\frac{du_j}{dr}=\frac{d\lambda_j'}{dr}-\frac{d(r\overline{A}_j^{(1)})}{dr}=\frac{d\lambda_j'}{dr}-\frac{\partial(r\overline{A}_j^{(1)})}{\partial r}-r\sum_1^8{}_s\frac{\partial\overline{A}_j^{(1)}}{\partial\lambda_s}\frac{d\lambda_s}{dr}.\qquad (j=1,2)$$

Aux derivées de λ_i, λ_j' on doit substituer leurs valeurs données par les équations de (S) et, ensuite, remplacer partout les anciennes par les nouvelles variables.

On trouve ainsi:

$$\frac{d\lambda_i^{(0)}}{dr}=-2r\frac{\alpha_i}{R}+\frac{\partial(r\overline{A}_i)}{\partial r}-\frac{2r^2}{R}\sum_1^8{}_s\frac{\partial\overline{A}_i}{\partial\lambda_s}\alpha_s,\qquad (i=1,2,\ldots,8)$$

$$\frac{du_j}{dr}=-\frac{4}{r}(u_j+rA_j^{(1)})+2r^2\frac{\beta_j}{R}-\frac{\partial(r\overline{A}_j^{(1)})}{\partial r}-\frac{2r^2}{R}\sum_1^8{}_s\frac{\partial\overline{A}_j^{(1)}}{\partial\lambda_s}\alpha_s.\qquad (j=1,2)$$

Le système transformé du système (S) peut s'écrire par conséquent:

$$(24)\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{d\lambda_i^{(0)}}{dr}=A_i, && (i=1,2,\ldots,8)\\ &r\frac{du_j}{dr}=-4u_j+rB_j. && (j=1,2)\end{aligned}\right.$$

A_i et B_j sont évidemment des fonctions régulières des arguments r, $\lambda_i^{(0)}$, u_j dans le domaine de $r=0$ et périodiques par rapport à $\lambda_1^{(0)}$, $\lambda_2^{(0)}$.

Il faut ajouter encore une remarque. Pour intégrer le système (S) on peut d'abord intégrer les équations (24) et substituer, ensuite, à la place de $\lambda_i^{(0)}$ et u_j dans les (21) les intégrales trouvées. Si, parmi les solutions de (S), nous voulons celles, qui pour $r=0$ fournissent $\lambda_1'=0$, $\lambda_2'=0$, il suffit, d'après (21), de déterminer les intégrales de (24), qui satisfont aux deux conditions $u_1(0)=0$, $u_2(0)=0$. En particulier, si l'on veut les intégrales de (S) holomorphes dans le domaine de $r=0$, il faut déterminer de telles intégrales de (24), en vertu desquelles les relations (21) coïncident avec les (20) identiquement, c'est-à-dire pour quelque valeur de r que ce soit. Mais cette identité a lieu seulement, si, pour toute valeur de r, $\lambda_i^{(0)}=\text{const.}$, $u_j=0$, par conséquent on conclut que

$$(25)\qquad \lambda_i^{(0)}=\text{const.},\qquad u_j=0$$

constituent un système d'intégrales particulières des (24). Si nous remplaçons dans ces équations les fonctions inconnues par les valeurs (25), nous trouvons:

$$(A_i) = 0, \qquad r(B_j) = 0, \qquad (i=1,2,\ldots,8\,;\, j=1,2)$$

ayant designé par les symboles (A_i), (B_j) les fonctions A_i, B_j après cette substitution.

Pour que ces deux conditions soient verifiées quel que soit r, il faut et il suffit que l'on ait:

$$A_i = u_1 A_i^{(1)} + u_2 A_i^{(2)}, \qquad (i=1,2,\ldots,8)$$

$$B_j = u_1 B_j^{(1)} + u_2 B_j^{(2)}. \qquad (j=1,2)$$

Le système (24) s'écrira donc enfin:

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda_i^{(0)}}{dr} = u_1 A_i^{(1)} + u_2 A_i^{(2)}, & (i=1,2,\ldots,8) \\[2ex] r\dfrac{du_j}{dr} = -4u_j + r(u_1 B_j^{(1)} + u_2 B_j^{(2)}). & (j=1,2) \end{cases}$$

Il est aisé de se convaincre, que les fonctions $A_i^{(1)}$, $A_i^{(2)}$, $B_j^{(1)}$, $B_j^{(2)}$ sont elles mêmes régulières pour r assez petite et périodiques par rapports aux $\lambda_1^{(0)}$, $\lambda_2^{(0)}$.

D'après la remarque faite tout à l'heure à propos de la relation entre les solutions de (S), telles que $\lambda_1'(0) = \lambda_2'(0) = 0$, et les intégrales de (Σ), qui peuvent les engendrer, il est évident, que notre théorème sera démontré, si nous prouverons que le système (Σ) ne peut pas avoir des solutions réelles, qui pour $r = 0$ fournissent $u_1 = 0$, $u_2 = 0$.

Plus précisément il faudra prouver, que, si cela se vérifie, u_1 et u_2 doivent s'annuler identiquement, c'est-à-dire, que nous devons retrouver les solutions holomorphes de (S).

Puisque les fonctions $B_j^{(1)}$, $B_j^{(2)}$ sont régulières dans le domaine des valeurs $u_1 = u_2 = r = 0$, nous pourrons déterminer un nombre positif ε, tel que pour

$$r \leqq \varepsilon, \qquad |u_1| \leqq \varepsilon, \qquad |u_2| \leqq \varepsilon,$$

elles soient développables en séries de puissances de u_1, u_2, r.

En particulier on pourra écrire:

$$(26) \qquad B_j^{(k)} = b_j^{(k)} + \sum_1^2{}_s b_{j,s}^{(k)} u_s + \sum_1^2{}_{st} b_{j,st}^{(k)} u_s u_t + \ldots \qquad (j,k=1,2)$$

En substituant ces valeurs dans les deux équations du second groupe de (Σ) on obtient:

$$r\frac{du_j}{dr} = -4u_j + r\sum_1^2{}_k\{u_k b_j^{(k)} + \mathbf{2}\}. \qquad (j=1,2)$$

Le symbole $\mathbf{n}$ remplace, comme d'habitude, l'ensemble des termes de $n^{\text{ième}}$ ordre par rapport aux u_j.

En multipliant les deux membres de ces équations par u_j, et en ajoutant, on a:

$$r\sum_1^2{}_j u_j \frac{du_j}{dr} = -4\sum_1^2{}_j u_j^2 + \sum_1^2{}_j u_j \sum_1^2{}_k\{u_k b_j^k + \mathbf{2}\}.$$

Et, en posant

$$U^2 = u_1^2 + u_2^2,$$

nous pouvons écrire enfin:

$$(27) \qquad \frac{r}{2}\frac{dU}{dr} = -4U^2 + r\left\{\sum_1^2{}_{jk} b_j^k u_j u_k + \mathbf{3}\right\}.$$

Supposons maintenant que les fonctions u_j ne soient pas, au voisinage de $r=0$, identiquement nulles. Il y aura alors des valeurs r_0, aussi petites que l'on veut, pour lesquelles:

$$U^2(r_0) = u_1^2(r_0) + u_2^2(r_0) > 0.$$

Par hypothèse les fonctions u_j tendent vers zéro en même temps que r. Nous pourrons donc choisir une valeur r_0, telle que u_1, u_2 soient régulières dans l'intervalle $(0, r_0)$, et en outre les développements (26) soient valables. Il va sans dire, que l'on doit excepter au plus la limite inférieure de cet intervalle.

Puisque la fonction U est régulière pour $r > 0$, et elle ne s'annule pas pour $r = r_0$, on pourra déterminer une valeur $r' < r_0$, telle que dans l'intervalle (r', r_0) on ait toujours $U \neq 0$. Pour toute valeur de r, à l'intérieur de cet intervalle, on pourra déduire de l'équation (27):

$$d \log U^2 = - 8 d \log r + 2 \left\{ \sum_{1\,jk}^{2} b_j^{(k)} \frac{u_j u_k}{U^2} + \frac{3}{U^2} \right\} dr,$$

ou bien:

$$d \log U r^4 = \left\{ \sum_{1\,jk}^{2} b_j^{(k)} \frac{u_j u_k}{U^2} + \frac{3}{U^2} \right\} dr.$$

Les fonctions $b_j^{(k)}$ sont régulières pour toutes valeurs finies de leurs arguments, et pour r suffisamment petite. On a de la sorte, que la fonction, qui multiplie dr dans l'équation précédente, est intégrable dans notre intervalle. On pourra tirer donc la relation:

$$\log \frac{U(r') r'^4}{U(r_0) r_0^4} = \int_{r_0}^{r'} \left\{ \sum_{1\,jk}^{2} b_j^{(k)} \frac{u_j u_k}{U^2} + \frac{3}{U^2} \right\} dr.$$

Comme dans l'intervalle d'intégration $u_1^2 + u_2^2 > 0$, il sera justifié de poser

$$u_1 = U \cos \omega, \qquad u_2 = U \sin \omega.$$

L'égalité précédente pourra donc être écrite:

$$\log \frac{U(r') r'^4}{U(r_0) r_0^4} = \int_{r_0}^{r'} \{ b_1^{(1)} \cos^2 \omega + (b_1^{(2)} + b_2^{(1)}) \sin \omega \cos \omega + b_2^{(2)} \sin^2 \omega + U g(r, U, \omega) \} dr,$$

où g dénote une fonction régulière dans le domaine des valeurs considérées. Dans le second membre de notre égalité il y a donc une fonction, qui reste finie dans ce domaine. Le premier membre, au contraire, tend vers l'infini, si r, en décroissant, passe par une valeur qui annule U; en particulier si r tend vers zéro. C'est là une contradiction évidente, qui nous prouve l'exactitude de notre théorème.

Nous voulons établir maintenant, que:

Dans toute solution de (S), *holomorphe ou non, on doit avoir* $\lim\limits_{t=t_1} \lambda_1' = \lim\limits_{t=t_1} \lambda_2' = 0$.[1]

---

[1] V. la remarque faite au § 4, n° 2.

La démonstration est identique pour toutes les deux fonctions. Nous nous bornerons donc à la donner seulement pour λ_1'. Considérons parmi les équations de (S):

$$r\frac{d\lambda_1'}{dr} = -4\lambda_1' + 2r^3\frac{\beta_1}{R},$$

qui peut s'écrire:

$$r^4\frac{d\lambda_1'}{dr} + 4r^3\lambda_1' = 2r^6\frac{\beta_1}{R},$$

ou bien:

$$\frac{d}{dr}(r^4\lambda_1') = r^4\frac{2r^2\beta_1}{R}.$$

Le rapport $\frac{2r^2\beta_1}{R}$ reste fini pour des valeurs de r suffisamment près de zéro et pour des valeurs finies des autres variables. Pour s'en convaincre, il suffit de ce rappeler que β_1 reste finie (v. § 4, n° 2) et R ne peut pas s'annuler (v. § 2, n° 1, lemme I). En choisissant une valeur r_0 assez petite, pour que la fonction $\frac{2r^2\beta_1}{R}$ soit intégrable entre r_0 et 0, on tirera de l'égalité précédente:

$$[r^4\lambda_1']_{r=0} - [r^4\lambda_1']_{r=r_0} = \int_{r_0}^{0} r^4\frac{2r^2\beta_1}{R}\,dr.$$

Mais le produit $r^4\lambda_1'$ s'annule pour $r=0$, car la fonction

$$r^3\lambda_1'\left(= r^3\vartheta_1' = \rho_1^{\frac{3}{2}}\frac{\theta_1}{\rho^2} = \frac{\theta_1}{\sqrt{\rho_1}}\right)$$

reste finie (v. § 2, n° 1, lemme I); par conséquent nous pourrons écrire:

$$r_0^4\lambda_1'(r_0) = \int_0^{r_0} r^4\frac{2r^2\beta_1}{R}\,dr,$$

ou même

$$\lambda_1'(r_0) = \int_0^{r_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^4\frac{2r^2\beta_1}{R}\,dr.$$

Si nous remarquons que dans tout l'intervalle d'intégration $\frac{r}{r_0} \leqq 1$, et que de la sorte la fonction à intégrer reste toujours finie, nous déduisons, que le second membre est une fonction régulière de la limite supérieure. Si cette limite tend vers zéro, le premier membre y tendra donc lui même.

Voilà ce que nous devions prouver.

En réunissant les résultats de ce théorème et ceux du précédent, nous pouvons énoncer la propriété:

Dans le domaine de $r = 0$ *le système* (S) *ne peut admettre que des solutions holomorphes.*

III. *Correspondence univoque entre les trajectoires de choc et les intégrales holomorphes dans le voisinage de* $r = 0$. — Arrivés à ce point il est naturel de se demander, si chacune de ces ∞^8 solutions correspond à un choc.

En d'autres mots nous pouvons nous proposer la question: Pourvu que le mouvement ait lieu le long d'une des trajectoires (S), y aura-t-il une valeur t_1 du temps, telle que $\lim_{t=t_1} r = 0$? Voici la réponse.

Nous avons déjà observé, que, après avoir intégré le système (S) (ou même (1^{IV})), on peut avoir la loi du mouvement en intégrant l'équation:

$$\frac{dt}{d\rho_1} = 1 : \frac{\partial H_1}{\partial P_1},$$

dont le second membre doit être exprimé par les intégrales trouvées. Cette équation (en rappelant que $\frac{\partial H_1}{\partial P_1} = P_1 = -\frac{R}{r}$ et $d\rho_1 = 2r\,dr$) équivaut à:

$$dt = -\frac{2r^2}{R}\,dr.$$

D'après le comportement de R dans le domaine de $r = 0$, on tire que $-\frac{2r^2}{R}$ est une fonction intégrable dans un intervalle $(0, r)$ suffisamment petit. On pourra donc écrire:

$$t_1 - t = \int_0^r \frac{2r^2}{R}\,dr, \tag{28}$$

t_1 étant la valeur de t correspondente à $r = 0$. Puisque le second membre est fini, nous pouvons répondre affirmativement à la demande, que nous nous étions faite.

Les résultats, que nous avons obtenus, peuvent être résumés par le théorème:

Toutes et seulement les solutions du système (S), *qui sont holomorphes pour* $r = 0$, *correspondent aux trajectoires le long desquelles a lieu, au bout d'un temps fini, un choc entre les deux points* $P_0 P_1$.

IV. *Chocs passés et chocs futurs.* — Jusqu'ici nous n'avons jamais fait aucune distinction entre les chocs qui peuvent arriver et ceux qui ont eu déjà lieu. Ce dernier pas peut être fait en considérant l'équation (28).

Elle nous dit, que, puisque le facteur dr est toujours négatif, le signe de dt est le même que celui de R. Mais nous avons vu que:

$$
\begin{aligned}
(29) \quad R = -rP_1 = \pm \sqrt{\Big\{ 2(m_0 + m_1) \right.} \\
\left. + r^2 \mu_1 \left[2\left(\frac{m_0 m_2}{\rho_2} + \frac{m_1 m_2}{\Delta} \right) - \mu_2 (p_2^2 + q_2^2 + r_2^2) \right] - r^6 (\vartheta_1'^2 + \varphi_1'^2 \sin^2 \vartheta_1 \Big\} }
\end{aligned}
$$

(v. § 4, n° 2), par conséquent le système (S) nous fournit des trajectoires correspondantes aux chocs futurs ou passés, selon que nous prenons le radical avec le signé $+$ ou $-$.

§ 6. *Conditions de choc.*

I. *Déterminations de ces conditions.* — Pour accomplir la récherche, que nous avons entreprise nous nous proposons maintenant de caractériser les conditions de choc. C'est-à-dire que nous voulons chercher des équations auxquelles doivent satisfaire les valeurs initiales des variables, dont dépend le mouvement des trois points (ou, si l'on veut, le mouvement relatif de deux entre eux), pour qu'à partir de ces valeurs il y ait un choc au bout d'un temps fini.

Nous avons vu que, pour avoir toutes les trajectoires singulières, il faut remplacer par des valeurs arbitraires les constantes d'intégration, qui entrent dans les équations (20). On a de la sorte, que les relations cherchées s'obtiendront en éliminant les paramètres arbitraires entre les équations susdites.[1] Il a été déjà montré, dans le paragraphe précédent, que cette opération est possible. Pour l'effectuer il suffit de se rappeler, que le second groupe des équations (22) a été obtenu par l'élimination des paramètres $\lambda_i^{(0)}$ entre les équations (21). Mais, comme celles-ci coïncident avec les (20), pourvu que l'on pose $u_1 = u_2 = 0$, on atteindra le résultat que l'on cherche, en posant $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ dans le deuxième groupe des (22). On trouve ainsi:

$$(30) \qquad \lambda'_j - r\bar{A}_j^{(1)}(r, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_8) = 0. \qquad (j=1,2)$$

Nous avons déjà remarqué que ces relations peuvent nous représenter les conditions de choc entre deux autres points de notre système, pourvu que la signification des lettres soit changée cycliquement.

En indiquant tout court par $u_1^{(1)}$, $u_2^{(1)}$ les premiers membres de (30), nous pouvons donc conclure que deux relations du type:

$$u_1^{(1)}u_1^{(2)}u_1^{(3)} = 0, \qquad u_2^{(1)}u_2^{(2)}u_2^{(3)} = 0$$

sont caractéristiques pour le choc entre deux quelconques de nos points. Si, au contraire, les conditions initiales vérifient l'une ou l'autre des inégalités:

$$u_1^{(1)}u_1^{(2)}u_1^{(3)} \neq 0, \qquad u_2^{(1)}u_2^{(2)}u_2^{(3)} \neq 0,$$

nous pourrons être surs que le mouvement se poursuivra régulièrement.[2]

[1] Nous pouvons même dire, en empoyant un language géométrique, que les équations (20) définissent dans l'espace à dix dimentions un hyperspace à huit dimentions, dont les équations s'obtiennent en éliminant les paramètres $\lambda_i^{(0)}$.

[2] Je ne crois pas inutile à ce propos de rappeler que nous sommes arrivés aux conditions $u_1^{(1)} = 0$, $u_2^{(1)} = 0$ (qui caractérisent un choc P_0P_1) en admettant: I° $\lim\limits_{t=t_1} P_0P_1 = 0$, II° dans le voisinage de t_1 la limite inférieure de P_0P_2 ne soit pas nulle, III° ϑ_1 et φ_1 tendent vers des valeurs déterminées et finies.

Si les deux conditions trouvées sont verifiées par les conditions initiales il y aura, au bout du temps t_1, un choc P_0P_1 qui vérifiera les trois hypothèses. S'il n'est pas en même temps $u_1^{(1)} = 0$, $u_2^{(1)} = 0$, nous pouvons affirmer, que l'une ou l'autre des hypothèses faites n'aura pas lieu. Nous pouvons évidemment admettre que la II° soit toujours vraie, car nous étudions seulement les chocs de deux corps, mais non ceux de tous les trois. Si la I° n'est pas satisfaite, le mouvement, d'après le théorème de M. Painlevé n'a pas de singularités. Mais il n'est pas exclu que seulement la III° ne soit pas verifiée. Ce choc exceptionel, qui n'a aucun point de repère dans l'intuition, n'est pas compris dans les conditions $u_1^{(1)} = 0$, $u_2^{(1)} = 0$, et il échappe effectivement à notre discussion.

Voilà ce que nous voulions mettre en évidence.

Il ne faut pas cependant se tromper sur la portée de ce résultat. Nous ne pouvons pas assurer la régularité indéfinie du mouvement, mais seulement la régularité jusqu'à une valeur t' du temps pas trop éloignée de l'instant initial, car la biunivocité entre les trajectoires de choc et les solutions holomorphes du système (S) a été démontrée seulement pour r suffisamment petit. Si les conditions du mouvement pour $t = t'$ sont telles que les inégalités précédentes soient encore vérifiées, le mouvement sera encore régulier pendant un autre intervalle (t', t''); et ainsi de suite.

II. *Comportement analytique des deux conditions trouvées au voisinage d'un choc.* — Ayant égard aux équations différentielles les premiers membres des égalités (30) peuvent se développer en séries de puissances de r. Nous verrons tout à l'heure que les coefficients de ces séries pourront être déterminés de proche en proche par de simples opérations en termes finis et différentiations.

Il faudra que nous établissions à ce but des équations différentielles, auxquelles doivent satisfaire les fonctions $\bar{\Lambda}_j^{(1)}$. Les relations (30) sont valables pour toute valeur de r, tant que l'on reste sur une trajectoire singulière. Si nous dérivons ces équations par rapport à r et nous remplaçons les dérivées de λ_i, λ_j' par leurs expressions (S), nous parviendrons à des relations, qui seront valables identiquement, pourvu que nous ayons égard aux équations (30) mêmes. Nous aurons donc, en remplaçant en outre le symbole $\bar{\Lambda}_j^{(1)}$ par F_j:

$$\frac{d\lambda_j'}{dr} - \frac{\partial(rF_j)}{\partial r} - r\sum_{1}^{8}{}_i \frac{\partial F_j}{\partial \lambda_i}\frac{d\lambda_i}{dr} = 0, \qquad (j=1,2)$$

ou même, d'après (S):

$$-4\frac{\lambda_j'}{r} + 2r^2\frac{\beta_j}{R} - r\frac{\partial F_j}{\partial r} - F_j + \frac{2r^2}{R}\sum{}_i \frac{\partial F_j}{\partial \lambda_i}\alpha_i = 0 \qquad (j=1,2)$$

et enfin, en vertu de (30):

$$(31) \qquad 5F_j + r\frac{\partial F_j}{\partial r} = \frac{2r^2}{R}\left(\beta_j + \sum_{1}^{8}{}_i \frac{\partial F_j}{\partial \lambda_i}\alpha_i\right). \qquad (j=1,2)$$

Substituons maintenant à la place des fonctions λ_j' (qui entrent dans les expressions de α_i, β_j, R) leurs valeurs rF_j. Les seconds membres de (31) pourront alors être envisagés comme des fonctions des produits $rF_j, r\frac{\partial F_j}{\partial \lambda_i}$. On tire de la sorte deux équations simultanées aux dérivées partielles, qui sont à même de nous donner les coefficients des séries que l'on cherche.

Posons à ce but

$$F_j = \sum_0^\infty {}_m f_j^{(m)} r^m. \qquad (32) \qquad (j=1,2)$$

Les équations (31) s'écriront donc:

$$\sum_0^\infty {}_m (5+m) f_j^{(m)} r^m = \Omega_j\left(r, \lambda_i; \sum_0^\infty {}_m f_j^{(m)} r^{m+1}; \sum_0^\infty {}_m \frac{\partial f_j^{(m)}}{\partial \lambda_i} r^{m+1}\right). \qquad (j=1,2)$$

Dérivons maintenant les deux membres n fois par rapport a r et posons ensuite $r = 0$. Il est aisé de voir, que dans les premiers membres il nous reste seulement les deux coefficients $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}$ multipliés par $(5+n)\underline{|n}$, tandis que dans les seconds membres nous aurons des fonctions des coefficients $f_j^{(0)}, \ldots, f_j^{(n-1)}$ et de leurs dérivées par rapport aux λ_i.

Une couple quelconque de coefficients des mêmes puissances de r dans les séries (32) pourra donc être déterminée lorsque les coefficients des puissances inférieures soient connus. Les deux premiers $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}$ se tirent des équations (31) (combinées avec les (32)) en posant $r = 0$, par conséquent tous les autres s'obtiendront de proche en proche.

III. *Développement approximatif suivant les puissances de* r. — Maintenant que nous avons démontré la possibilité d'effectuer ces développements, nous donnerons, pour les réaliser, une méthode, qui est essentiellement différente de celle, que nous avons indiquée tout à l'heure, mais qui est bien plus commode. Nous développerons les deux membres de (31) en séries de puissances et nous égalerons ensuite les coefficients des mêmes puissances. Il nous convient d'abord de remarquer que les seconds membres sont multipliés par le facteur r^2 et que par conséquent les coefficients $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, f_1^{(1)}, f_2^{(1)}$ des F_j seront nuls. Il sera donc permis de partir des développements:

$$F_j = r^2 \sum_0^\infty {}_m \omega_j^{(m)} r^m. \qquad (33) \qquad (j=1,2)$$

Les premiers membres des égalités (31) deviennent:

$$5F_j + r\frac{\partial F_j}{\partial r} = 5r^2 \sum_0^\infty {}_m \omega_j^{(m)} r^m + r\left\{2r \sum_0^\infty {}_m \omega_j^{(m)} r^m + r^2 \sum_0^\infty {}_m m\omega_j^{(m)} r^{m-1}\right\}$$

$$= r^2 \sum_0^\infty {}_m (7+m)\omega_j^{(m)} r^m,$$

et les égalités mêmes pourront être remplacées par les:

$$(34) \qquad \sum_0^\infty{}_m (7+m)\omega_j^{(m)} r^m = \frac{2}{R}\left\{\beta_j + r^2 \sum_1^8{}_i \sum_0^\infty{}_m \frac{\partial \omega_j^{(m)}}{\partial \lambda_i} \alpha_i r^m\right\}. \qquad (j=1,2)$$

Il faut maintenant que nous nous procurions les éléments, qui nous sont nécessaires pour les développements des seconds membres.

En vertu des positions (8) et (15) nous pouvons écrire:

$$\Delta^2 = r^4 - 2r^2\nabla_1 + \rho_2^2 = \rho_2^2\left\{1 - 2\frac{r^2}{\rho_2^2}\nabla_1 + \left(\frac{r^2}{\rho_2}\right)^2\right\}.$$

Par conséquent:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\rho_2}\left\{1 - \frac{r^2}{\rho_2^2}(2\nabla_1 - r^2)\right\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\rho_2}\left\{1 + r^2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2} + r^4\frac{3\nabla_1^2 - \rho_2^2}{2\rho_2^4} + \mathbf{6}\right\}.$$

$$\frac{1}{\Delta^3} = \frac{1}{\rho_2^3}\left\{1 + r^2\frac{3\nabla_1}{\rho_2^2} + r^4\frac{3(5\nabla^2 - \rho_2^2)}{2\rho_2^4} + \mathbf{6}\right\}.$$

Le symbole $\mathbf{n}$ remplace l'ensemble des termes de $n^{\text{ième}}$ ordre par rapport à r.

L'expression (29) de R peut s'écrire aussi:

$$R = \pm\left\{2(m_0 + m_1) + r^2\mu_1\left[2\left(h + \frac{m_0 m_2}{\rho_2} + \frac{m_1 m_2}{\Delta}\right) - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right] - r^6(\vartheta_1'^2 + \varphi_1'^2 \sin^2\vartheta_1)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent, ayant égard aux relations (30) et au développement de $\frac{1}{\Delta}$, nous aurons:

$$R = \pm\left\{2(m_0 + m_1) + 2\mu_1 r^2\left[h + \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right] + \mathbf{4}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

ou même:

$$R = \pm\sqrt{2(m_0 + m_1)}\left\{1 + \frac{r^2}{2m_0 m_1}\left[h + \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right] + \mathbf{4}\right\}.$$

On tire par suite:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\pm\sqrt{2(m_0 + m_1)}}\left\{1 - \frac{r^2}{2m_0 m_1}\left[h + \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right] + \mathbf{4}\right\}.$$

D'après les positions (19) nous avons:

$$\beta_2 = -r^2F_2^2\frac{\sin 2\vartheta_1}{2} - m_2\left(\frac{3\nabla_1}{\rho_2^2} + r^2\frac{3(5\nabla^2 - \rho_2^2)}{2\rho_2^4} + \mathbf{4}\right)\frac{\partial\nabla_1}{\partial\vartheta_1},$$

ou bien, en vertu de (33):

$$\beta_1 = -\frac{3m_2}{2\rho_2^2}\frac{\partial\nabla_1^2}{\partial\vartheta_1} - r^2\frac{m_2}{2\rho_2^4}\frac{\partial}{\partial\vartheta_1}(5\nabla_1^3 - 3\nabla_1\rho_2^2) + \mathbf{4}.$$

D'une manière analogue:

$$\beta_2 = \frac{1}{\sin^2\vartheta_1}\left\{-\frac{3m_2}{2\rho_2^2}\frac{\partial\nabla_1^2}{\partial\varphi_1} - r^2\frac{m_2}{2\rho_2^4}\frac{\partial}{\partial\varphi}(5\nabla_1^3 - 3\nabla_1\rho_2^2) + \mathbf{4}\right\},$$

$$\alpha_1 = r^2F_1 = \mathbf{4},$$

$$\alpha_2 = r^2F_2 = \mathbf{4},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{m_0\mu_1}\left\{\mp\sqrt{2(m_0+m_1)}\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + rm_0\mu_1\mu_2p_2 \right.$$
$$\left.\mp r^2\frac{\sqrt{2(m_0+m_1)}}{2m_0m_1}\left[h + \frac{(m_0+m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2+q_2^2+r_2^2)\right]\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + \mathbf{4}\right\},$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{m_0\mu_1}\left\{\mp\sqrt{2(m_0+m_1)}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + rm_0\mu_1\mu_2q_2 \right.$$
$$\left.\mp r^2\frac{\sqrt{2(m_0+m_1)}}{2m_0m_1}\left[h + \frac{(m_0+m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2+q_2^2+r_2^2)\right]\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + \mathbf{4}\right\},$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{m_0\mu_1}\left\{\mp\sqrt{2(m_0+m_1)}\cos\vartheta_1 + rm_0\mu_1\mu_2r_2 \right.$$
$$\left.\mp r^2\frac{\sqrt{2(m_0+m_1)}}{2m_0m_1}\left[h + \frac{(m_0+m_1)m_2}{\rho_2} + \mu_2(p_2^2+q_2^2+r_2^2)\right]\cos\vartheta_1 + \mathbf{4}\right\},$$

$$\alpha_6 = \frac{r}{\rho_2^3}\left\{(m_0+m_1)m_2x_2 - r^2m_1m_2\left(\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 - 3x_2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2}\right) + \mathbf{4}\right\},$$

$$\alpha_7 = \frac{r}{\rho_2^3}\left\{(m_0+m_1)m_2y_2 - r^2m_1m_2\left(\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 - 3y_2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2}\right) + \mathbf{4}\right\},$$

$$\alpha_8 = \frac{r}{\rho_2^3}\left\{(m_0+m_1)m_2z_2 - r^2m_1m_2\left(\cos\vartheta_1 - 3z_2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2}\right) + \mathbf{4}\right\}.$$

D'après les positions (34), en faisant $j = 1$ et en substituant les développements trouvés, nous avons alors:

$$\sum_0^\infty{}_m (7 + m)\,\omega_1^{(m)} r^m =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2}{m_0 + m_1}}\,(1 - r^2 A + \mathbf{4})\Bigg[\left\{-\frac{3m_2}{2\rho_2^2}\frac{\partial\nabla_1^2}{\partial\vartheta_1} - r^2\frac{m_2}{2\rho_2^4}\frac{\partial}{\partial\vartheta_1}(5\nabla_1^3 - 3\nabla_1\rho_2^2) + \mathbf{4}\right\}$$

$$+ \frac{r^2}{m_0\mu_1}\Bigg\{\left(\sum_0^\infty{}_m \frac{\partial\omega_1^{(m)}}{\partial x_2} r^m\right)\Big(\mp\sqrt{2(m_0 + m_1)}\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + r m_0\mu_1\mu_2 p_2$$

$$\mp r^2\sqrt{2(m_0 + m_1)}\,A\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + \mathbf{4}\Big)$$

$$+ \left(\sum_0^\infty{}_m \frac{\partial\omega_1^{(m)}}{\partial y_2} r^m\right)\Big(\mp\sqrt{2(m_0 + m_1)}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + r m_0\mu_1\mu_2 q_2$$

$$\mp r^2\sqrt{2(m_0 + m_1)}\,A\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + \mathbf{4}\Big)$$

$$+ \left(\sum_0^\infty{}_m \frac{\partial\omega_1^{(m)}}{\partial z_2} r^m\right)\Big(\mp\sqrt{2(m_0 + m_1)}\cos\vartheta_1 + r m_0\mu_1\mu_2 r_2$$

$$\mp r^2\sqrt{2(m_0 + m_1)}\,A\cos\vartheta_1 + \mathbf{4}\Big)\Bigg\}$$

$$+ \frac{r^3}{\rho_2^3}\Bigg\{\left(\sum_0^\infty{}_m \frac{\partial\omega_1^{(m)}}{\partial p_2} r^m\right)\Big((m_0 + m_1)m_2 x_2$$

$$- r^2 m_1 m_2\left(\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 - 3x_2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2}\right) + \mathbf{4}\Big)$$

$$+ \left(\sum_0^\infty{}_m \frac{\partial\omega_1^{(m)}}{\partial q_2} r^m\right)\Big((m_0 + m_1)m_2 y_2$$

$$- r^2 m_1 m_2\left(\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 - 3y_2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2}\right) + \mathbf{4}\Big)$$

$$+ \left(\sum_0^\infty{}_m \frac{\partial\omega_1^{(m)}}{\partial r_2} r^m\right)\Big((m_0 + m_1)m_2 z_2$$

$$- r^2 m_1 m_2\left(\cos\vartheta_1 - 3z_2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2}\right) + \mathbf{4}\Big)\Bigg\}\Bigg],$$

où nous avons posé:

$$A = \frac{1}{2m_0 m_1}\left(h + \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right).$$

En ordonnant selon les puissances croissantes de r, il viendra:

$$\sum_0^\infty {}_m (7 + m)\omega_1^{(m)} r^m =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2}{m_0 + m_1}}\Bigg[-\frac{3m_2}{2\rho_2^2}\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \vartheta_1} + r^2\Bigg\{\frac{3m_2}{2\rho_2^2}\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \vartheta_1}A - \frac{m_2}{2\rho_2^4}\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}(5\nabla_1^3 - 3\nabla_1\rho_2^2)$$

$$\mp \frac{\sqrt{2(m_0 + m_1)}}{m_0\mu_1}\left(\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial x_2}\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial y_2}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial z_2}\cos\vartheta_1\right)\Bigg\}$$

$$+ r^3\Bigg\{\mu_2\left(p_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial x_2} + q_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial y_2} + r_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial z_2}\right)$$

$$+ \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2^3}\left(x_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial p_2} + y_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial q_2} + z_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial r_2}\right)$$

$$\mp \frac{\sqrt{2(m_0 + m_1)}}{m_0\mu_1}\left(\frac{\partial \omega_1^{(1)}}{\partial x_2}\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + \frac{\partial \omega_1^{(1)}}{\partial y_2}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + \frac{\partial \omega_1^{(1)}}{\partial z_2}\cos\vartheta_1\right)\Bigg\} + 4\Bigg].$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de r, nous parviendrons aux égalités:

$$\omega_1^{(0)} = \pm\sqrt{\frac{2}{m_0 + m_1}}\frac{3m_2}{14\rho_2^2}\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \vartheta_1},$$

$$\omega_1^{(1)} = 0,$$

$$\omega_1^{(2)} = \pm\frac{1}{9}\sqrt{\frac{2}{m_0 + m_1}}\Bigg\{\frac{3m_2}{4m_0m_1\rho_2^2}\left(h + \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right)\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \vartheta_1}$$

$$- \frac{m_2}{2\rho_2^4}\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}(5\nabla_1^3 - 3\nabla_1\rho_2)$$

$$\mp \frac{\sqrt{2(m_0 + m_1)}}{m_0\mu_1}\left(\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial x_2}\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial y_2}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial z_2}\cos\vartheta_1\right)\Bigg\},$$

$$\omega_1^{(3)} = \pm\frac{1}{10}\sqrt{\frac{2}{m_0 + m_1}}\Bigg\{\mu_2\left(p_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial x_3} + q_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial y_2} + r_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial z_2}\right)$$

$$+ \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2^3}\left(x_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial p_2} + y_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial q_2} + z_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial r_2}\right)\Bigg\}.$$

Si nous remarquons, en vertu des positions (8), que:

$$\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial x_2}\sin\vartheta_1\cos\varphi_1+\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial y_2}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1+\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial z_2}\cos\vartheta_1=$$

$$=\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial x_2}\frac{\partial\nabla_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial y_2}\frac{\partial\nabla_1}{\partial y_2}+\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial z_2}\frac{\partial\nabla_1}{\partial z_2}$$

$$=\mp\frac{3m_2}{14}\sqrt{\frac{2}{m_0+m_1}}\overset{2}{\nabla}\left\{\frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial\nabla_1^2}{\partial\vartheta_1},\nabla_1\right\},$$

$$\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial x_2}p_2+\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial y_2}q_2+\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial z_2}r_2=\pm\frac{3m_2}{14}\sqrt{\frac{2}{m_0+m_1}}\frac{\partial}{\partial\vartheta_1}\overset{2}{\nabla}\left(V_2,\frac{\nabla_1^2}{\rho_2^2}\right),^{1}$$

$$\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial p_2}x_2+\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial q_2}y_2+\frac{\partial\omega_1^{(0)}}{\partial r_2}z_2=0,$$

où:

$$V_2=p_2x_2+q_2y_2+r_2z_2,$$

nous aurons enfin:

$$\omega_1^{(0)}=\mp\frac{3m_2}{14\rho_2^2}\sqrt{\frac{2}{m_0+m_1}}\frac{\partial\nabla_1^2}{\partial\vartheta_1},$$

$$\omega_1^{(1)}=0,$$

$$\omega_1^{(2)}=\pm\frac{m_2}{9}\sqrt{\frac{2}{m_0+m_1}}\left[\frac{3m_1}{7(m_0+m_1)}\overset{2}{\nabla}\left\{\frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial\nabla_1^2}{\partial\vartheta_1},\nabla_1\right\}\right.$$
$$-\frac{\partial}{\partial\vartheta_1}\left\{\frac{3\nabla_1^2}{4m_0m_1\rho_2^2}\left(h+\frac{(m_0+m_1)m_2}{\rho_2}\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{m_0+m_1+m_2}{(m_0+m_1)m_2}(p_2^2+q_2^2+r_2^2)\right)+\frac{3}{2}\frac{\nabla_1}{\rho_2^3}-\frac{5}{2}\frac{\nabla_1^3}{\rho_2^4}\right\}\right],$$

$$\omega_1^{(3)}=-\frac{3(m_0+m_1+m_2)}{70(m_0+m_1)^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta_1}\overset{2}{\nabla}\left(V_2,\frac{\nabla_1^2}{\rho_2^2}\right).$$

---

[1] Nous avons posé évidemment:

$$\overset{2}{\nabla}(f,\varphi)=\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}+\frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{\partial\varphi}{\partial z_2},$$

D'une manière parfaitement identique on pourrait déduire:

$$\omega_2^{(0)} = \mp \frac{3m_2}{14\rho_2^2}\sqrt{\frac{2}{m_0+m_1}}\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \varphi_1},$$

$$\omega_2^{(1)} = 0,$$

$$\omega_2^{(2)} = \pm \frac{m_2}{9\sin^2\vartheta_1}\sqrt{\frac{2}{m_0+m_1}}\left[\frac{3m_1}{7(m_0+m_1)}\overset{2}{\nabla}\left\{\frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \varphi_1}, \nabla_1\right\}\right.$$

$$-\frac{\partial}{\partial \varphi_1}\left\{\frac{3\nabla_1^2}{4m_0m_1\rho_2^2}\left(h + \frac{(m_0+m_1)m_2}{\rho_2}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{m_0+m_1+m_2}{(m_0+m_1)m_2}(p_2^2+q_2^2+r_2^2)\right) + \frac{3}{2}\frac{\nabla_1}{\rho_2^3} - \frac{5\nabla_1^3}{2\rho_2^4}\right\}\right],$$

$$\omega_2^{(3)} = \mp \frac{3(m_0+m_1+m_2)}{70(m_0+m_1)^2\sin^2\vartheta_1}\frac{\partial}{\partial \varphi_1}\overset{2}{\nabla}\left(V_2, \frac{\nabla_1^2}{\rho_2^2}\right).$$

Ayant égard à ces formules nous pouvons conclure que, *lorsque* P_1 *est suffisamment près de* P_0, les deux équations:

$$(35)\qquad \begin{cases} \vartheta_1' - r^3(\omega_1^{(0)} + \omega_1^{(2)}r^2 + \omega_1^{(3)}r^3) = 0, \\ \varphi_1' - r^3(\omega_2^{(0)} + \omega_2^{(2)}r^2 + \omega_2^{(2)}r^3) = 0 \end{cases}$$

nous fournissent les deux conditions cherchées entre les valeurs initiales des variables, dont dépend le mouvement des trois points. Ces équations nous permettrons de décider, avec une certitude suffisante, sur la régularité du mouvement avant ou après l'instant initial.

Les équations (30) sont valables, et leurs premiers membres peuvent être regardés comme des fonctions analytiques de r, pourvu que celle-ci soit assez petite.

En effet nous ne savons rien par rapport à la grandeur du rayon de convergence des séries (32), car nous avons démontré seulement, qu'il n'est pas nul. *A fortiori* nous ne pourrons rien conclure, si nous remplaçons les conditions (30) par les (35) (qui équivalent à celles-là seulement par approximation) si nous ne partons pas d'une position de P_1 assez près de P_0.

Rome, mai 1904.

TABLE DES MATIÈRES.