EIN KONVERGENZSATZ FÜR DIRICHLETSCHE REIHEN.

VON

MARCEL RIESZ

in STOCKHOLM.

Vor mehr als sechs Jahren habe ich in einer kurzen Mitteilung[1] einen Satz über DIRICHLETsche Reihen

$$a_0 e^{-\lambda_0 s} + \cdots + a_n e^{-\lambda_n s} + \cdots \qquad (0 \leqq \lambda_0 < \cdots < \lambda_n < \cdots; \lim_{n=\infty} \lambda_n = \infty)$$

ausgesprochen, dessen Beweis (für den allgemeinen Fall) ich erst jetzt veröffentliche. Ich hegte nämlich immer die Hoffnung meinen ursprünglichen, recht verwickelten Beweis wesentlich vereinfachen zu können. Für den speziellen Fall der gewöhnlichen DIRICHLETschen Reihen $\Sigma a_n n^{-s}$ hat Herr LANDAU meinen damaligen Beweis mit meiner Zustimmung veröffentlicht.[2] Gleichzeitig gab er eine Reihe wichtiger Anwendungen meines Satzes auf gewisse zahlentheoretische Funktionen. In einer anderen Arbeit veröffentlichte er einen zweiten, auch von mir herrührenden, verwandten Satz, nebst Beweis und wandte denselben auf eine idealtheoretische Funktion an.[3]

Unser Satz behauptet, dass, wenn die Koeffizienten der DIRICHLETschen Reihe eine gewisse Bedingung erfüllen, die Reihe an allen Regularitätsstellen ihrer Konvergenzgeraden konvergiert. Ich habe schon in der erwähnten, kurzen Mit-

---

[1] M. RIESZ: Sur les séries de DIRICHLET et les séries entières, Comptes rendus, Paris, Bd. 149 (1909, 2).

[2] E. LANDAU: Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren HARDY und AXER, Prace matematyczno-fizyczne, Warszawa, Bd. 21 (1910). Vergl. S. 151—167.

[3] E. LANDAU: Über eine idealtheoretische Funktion, Transactions of the Amer. Math. Soc., Bd. 13 (1912). Vergl. S. 18—19. Für andere Anwendungen dieser Sätze vergl. D. CAUER: Neue Anwendung der PFEIFFERschen Methode zur Abschätzung zahlentheoretischer Funktionen, Inauguraldissertation, Göttingen (1914) und G. H. HARDY: On the expression of a number as the sum of two squares, Quarterly Journal of Mathematics, no. 183 (1915).

teilung hervorgehoben, dass unser allgemeiner Satz den bekannten FATOUschen Satz über Potenzreihen als Spezialfall umfasst. Es ist mir nun neuerdings gelungen, für diesen letztgenannten Satz einen überaus einfachen Beweis zu finden, der an anderer Stelle veröffentlicht wurde.[1] Derselbe gestaltet sich für unseren allgemeinen Satz über DIRICHLETsche Reihen fast ebenso einfach wie für Potenzreihen. In Abschnitt 1 der vorliegenden Arbeit soll nun der Beweis für den genannten allgemeinen Satz entwickelt werden. Im Abschnitte 2 wird unter anderem gezeigt, dass unser Satz den FATOUschen Satz enthält. In Abschnitt 3 wird die Bedingung (1) von Abschnitt 1 durch eine gleichwertige ersetzt, und daraus werden dann ein Spezialfall des Satzes und einige Sätze für gewisse spezielle Exponentenfolgen hergeleitet. Im Abschnitte 4 wird endlich auseinandergesetzt, wie unsere Ergebnisse auf verwandte Integralausdrücke übertragen werden können.

In der vorliegenden Arbeit wird überall vorausgesetzt, dass die betrachtete Funktion an den fraglichen Stellen regulär ist. Ich gedenke in einer späteren Arbeit auszuführen, wie die Regularität durch weniger einschränkende Bedingungen ersetzt werden kann.[2] Auch auf die Ausdehnung der vorliegenden Ergebnisse auf *typische Mittel*[3] komme ich bei einer späteren Gelegenheit zurück.

1. Satz I. *Erfüllen die Koeffizienten einer* DIRICHLET*schen Reihe*

$$f(z) = a_0 e^{-\lambda_0 z} + \cdots + a_n e^{-\lambda_n z} + \cdots$$

die Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{e^{\lambda_n c}} = 0, \qquad (c > 0),^{4} \tag{1}$$

und ist die infolge der Bedingung (1) *für* $R(z) > c$ *reguläre Funktion* $f(z)$ *auch in gewissen Punkten der Geraden* $R(z) = c$ *regulär, so konvergiert die Reihe in diesen Punkten.*[5] *Die Konvergenz ist eine gleichmässige auf jeder abgeschlossenen Strecke der*

---

[1] M. RIESZ: Neuer Beweis des FATOUschen Satzes, Göttinger Nachrichten (1916); Sätze über Potenzreihen. Arkiv för Mat., Astr. och Fys. (1916).

[2] Vergl. M. RIESZ: Comptes rendus, a. a. O. und Über einen Satz des Herrn FATOU, Journal für Mathematik, Bd. 140 (1911).

[3] Für die ausführliche Darstellung der Eigenschaften dieser Mittel vergl. G. H. HARDY and M. RIESZ: The general theory of DIRICHLET's series, Cambridge Tract in Mathematics etc. (1915).

[4] Die Bedingung ist auch bei $c = 0$ hinreichend aber nicht mehr notwendig. Bleibt der Ausdruck auf der linken Seite von (1) nur beschränkt, so gilt dasselbe für die Teilsummen der Reihe an jeder Regularitätsstelle der Geraden $R(z) = c$. Ähnliches gilt, wenn in den späteren Bedingungen die Voraussetzung, dass gewisse Ausdrücke gegen Null konvergieren, ersetzt wird durch die Voraussetzung, dass diese Ausdrücke beschränkt bleiben, oder in der Ausdrucksweise von Herrn LANDAU, wenn o durch O ersetzt wird.

[5] Wie gewöhnlich, setzen wir $R(a + bi) = a$ und $I(a + bi) = b$.

Geraden, welche ausschliesslich aus Regularitätsstellen besteht. Wie bekannt,[1] *ist die obige Bedingung* (1) *auch notwendig, damit die Gerade* $R(z) = c$ *wenigstens eine Konvergenzstelle der Reihe enthalte.*

Wir setzen

$$A_n = a_0 + \cdots + a_n$$

und

$$A(v) = A_n, \qquad \lambda_n < v \leqq \lambda_{n+1}$$

$$A(v) = 0, \qquad 0 \leqq v \leqq \lambda_0.$$[2]

Dann ist bekanntlich nach der ABELschen Transformation

(2)
$$a_0 e^{-\lambda_0 z} + a_1 e^{-\lambda_1 z} + \cdots + a_n e^{-\lambda_n z} =$$
$$= A_0 (e^{-\lambda_0 z} - e^{-\lambda_1 z}) + A_1 (e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z}) + \cdots + A_{n-1} (e^{-\lambda_{n-1} z} - e^{-\lambda_n z}) +$$
$$+ A_n e^{-\lambda_n z} = z \int_0^{\lambda_n} A(v) e^{-vz} dv + A_n e^{-\lambda_n z}.$$

Die Bedingung (1) kann auch in der Gestalt

(3)
$$\lim_{v=\infty} A(v) e^{-vc} = 0$$

geschrieben werden. Dann folgt aber aus (2), dass die Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ in jedem samt Begrenzung in der Halbebene $R(z) > c$ gelegenen, endlichen Gebiete gleichmässig konvergiert und daselbst eine regulär analytische Funktion darstellt. Es ist auch für $R(z) > c$

(4)
$$f(z) = z \int_0^{\infty} A(v) e^{-vz} dv.$$

Es möge nun die Funktion $f(z)$ auch auf der Geraden $R(z) = c$ Regularitätsstellen besitzen und $x = c + \tau i$ sei eine solche Stelle. Wir bestimmen zwei Punkte $z_1 = c + \tau_1 i$ und $z_2 = c + \tau_2 i$ derart, dass $\tau_1 < \tau < \tau_2$ sei, und die Funktion $f(z)$ auf der ganzen Strecke z_1, z_2 (mit Einschluss der Endpunkte) regulär sei. Wir können dann die Zahl $b < c$ so nahe an c wählen, dass die Funktion $f(z)$ auch

[1] J. L. W. V. JENSEN: Sur une généralisation d'un théorème de CAUCHY, Comptes rendus, Paris, Bd. 106 (1888, 1). Diese Behauptung wird übrigens auch in Abschnitt 2 der vorliegenden Arbeit bewiesen.

[2] Natürlich kann λ_0 auch 0 sein.

noch im Rechteck z_1, z_2, $b+\tau_2 i$, $b+\tau_1 i$ dieselbe Eigenschaft besitze. Wir setzen der Kürze halber $z_1' = b+\tau_1 i$, $z_2' = b+\tau_2 i$. Wir setzen endlich $z_1'' = d+\tau_1 i$, $z_2'' = d+\tau_2 i$, wo d eine beliebige, aber feste Zahl $>c$ bedeutet.

Wir betrachten jetzt die Funktionen

$$g_n(z) = e^{\lambda_n(z-c)}(z-z_1)(z-z_2)\left(f(z)-(a_0 e^{-\lambda_0 z}+\cdots+a_n e^{-\lambda_n z})\right)$$

und werden zeigen, dass bei hinreichend grossem n auf der ganzen Begrenzung des Rechtecks z_1', z_1'', z_2'', z_2'

$$(5) \qquad |g_n(z)| < \varepsilon$$

wird, wie klein auch die positive Zahl ε sein mag.[1]

Wegen (1) können wir für ein beliebig kleines, positives δ eine Zahl ν finden derart, dass

$$(6) \qquad |A_n e^{-\lambda_n c}| < \delta \text{ für } n > \nu$$

und daraus folgt, dass

$$(7) \qquad |A(v) e^{-vc}| < \delta \text{ für } v > \lambda_\nu.$$

Wir setzen der Kürze halber noch $\sigma = R(z)$. Für $\sigma > c$ ist dann wegen (2) und (4)

$$(8) \qquad |f(z)-(a_0 e^{-\lambda_0 z}+\cdots+a_n e^{-\lambda_n z})| = \left| z\int_{\lambda_n}^{\infty} A(v) e^{-vz}\,dv - A_n e^{-\lambda_n z}\right|.^{2}$$

Wählen wir jetzt $n > \nu$, so folgt aus (6), (7) und (8)

$$(9) \qquad |f(z)-(a_0 e^{-\lambda_0 z}+\cdots+a_n e^{-\lambda_n z})| < \delta|z|\int_{\lambda_n}^{\infty} e^{-v(\sigma-c)}\,dv + \delta e^{-\lambda_n(\sigma-c)} =$$

$$= \delta e^{-\lambda_n(\sigma-c)}\left(1+\frac{|z|}{\sigma-c}\right) \leqq \delta e^{-\lambda_n(\sigma-c)}\left(1+\frac{K}{\sigma-c}\right),$$

wo K das Maximum von $|z|$ im Rechtecke z_1', z_1'', z_2'', z_2' bedeutet.

---

[1] In $g_n(z)$ könnte auch statt $e^{\lambda_n(z-c)}$ die Funktion $e^{\lambda(z-c)}$ stehen, wo λ eine beliebige Zahl bedeutet, die der Bedingung $\lambda_n \leqq \lambda \leqq \lambda_{n+1}$ genügt.

[2] Dieser Ausdruck kann auch in der Form $z\int_{\lambda_{n+1}}^{\infty} A(v) e^{-vz}\,dv - A_n e^{-\lambda_{n+1} z}$ geschrieben werden.

Es möge noch H das Maximum der Werte $|z-z_1|$ und $|z-z_2|$ für alle Punkte z des genannten Rechtecks bedeuten.

Ist nun z ein beliebiger Punkt der Strecke z_1, z_1'', so ist $|z-z_1| = \sigma - c$. Also ist nach (9) auf dieser Strecke

$$(10) \quad |g_n(z)| < e^{\lambda_n(\sigma-c)}(\sigma-c) H \delta e^{-\lambda_n(\sigma-c)}\left(1+\frac{K}{\sigma-c}\right) =$$

$$= \delta(\sigma-c)H + \delta H K \leqq \delta H(d-c+K).$$

Dieselbe Ungleichung gilt aus Symmetriegründen auch für die Strecke z_2, z_2''.

Es sei jetzt z ein Punkt der auf der Geraden $\sigma = d$ gelegenen Strecke z_1'', z_2''; dann ist wegen (9)

$$(11) \quad |g_n(z)| < e^{\lambda_n(d-c)} H^2 \delta e^{-\lambda_n(d-c)}\left(1+\frac{K}{d-c}\right) = \delta H^2\left(1+\frac{K}{d-c}\right).$$

Um $|g_n(z)|$ auch auf den anderen Teilen der Begrenzung des Rechtecks z_1', z_1'', z_2'', z_2' abzuschätzen, bezeichnen wir mit M das Maximum von $|f(z)|$ in diesem Rechtecke und mit A die grösste der Zahlen $|A_0|, |A_1|, \cdots |A_\nu|$. Dann ist mit Rücksicht auf (2), (6) und (7) für $b \leqq \sigma \leqq c$, $\tau_1 \leqq I(z) \leqq \tau_2$

$$(12) \quad |f(z) - (a_0 e^{-\lambda_0 z} + \cdots + a_n e^{-\lambda_n z})| < M + \delta e^{-\lambda_n(c-\sigma)} + KA\int_0^{\lambda_\nu} e^{-(v-c)} dv +$$

$$+ K\delta \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} e^{-v(\sigma-c)} dv < M + \delta e^{\lambda_n(c-\sigma)} + KA\lambda_\nu e^{\lambda_\nu(c-\sigma)} + \frac{K\delta}{c-\sigma} e^{\lambda_n(c-\sigma)}.$$

Auf der Strecke z_1', z_1 ist $|z-z_1| = c-\sigma$, folglich

$$|e^{\lambda_n(z-c)}(z-z_1)(z-z_2)| \leqq e^{-\lambda_n(c-\sigma)}(c-\sigma)H$$

also mit Benutzung von (12) und auf Grund von $c-\sigma \leqq c-b$

$$(13) \quad |g_n(z)| < (c-\sigma)e^{-\lambda_n(c-\sigma)} H(M + KA\lambda_\nu e^{\lambda_\nu(c-b)}) + \delta H(c-b+K).$$

Durch Differentiation folgt unmittelbar, dass der Ausdruck $u e^{-\lambda_n u}$, als Funktion von $u \geqq 0$ betrachtet, sein Maximum für $u = \frac{1}{\lambda_n}$ erreicht. Daher ist

$$(c-\sigma) e^{-\lambda_n(c-\sigma)} \leqq \frac{1}{\lambda_n} \qquad (\sigma \leqq c).$$

Daraus folgt, dass das erste Glied auf der rechten Seite von (13) bei hinreichend grossem n kleiner als δ wird und somit ist dargelegt, dass bei hinrechend grossem n auf der ganzen Strecke z_1', z_1 und ebenso auch auf der Strecke z_2', z_2

$$|g_n(z)| < \delta(1 + H(c - b + K)) \tag{14}$$

ausfällt.

Auf der Strecke z_1', z_2' ist endlich wegen (12) und $c - \sigma = c - b$

$$|g_n(z)| < e^{-\lambda_n(c-b)} H^2 \left(M + \delta e^{\lambda_n(c-b)} + K A \lambda_\nu e^{\lambda_\nu(c-b)} + \frac{K\delta}{c-b} e^{\lambda_n(c-b)}\right) =$$

$$= e^{-\lambda_n(c-b)} H^2 \left(M + K A \lambda_\nu e^{\lambda_\nu(c-b)}\right) + \delta H^2 \left(1 + \frac{K}{c-b}\right).$$

Für hinreichend grosses n ist das erste Glied des letzten Ausdruckes kleiner als das zweite, folglich

$$|g_n(z)| < 2\delta H^2 \left(1 + \frac{K}{c-b}\right). \tag{15}$$

Bei hinreichend kleinem δ ergeben die Ungleichungen (10), (11), (14), (15) die Ungleichung (5) für die ganze Begrenzung des Rechtecks z_1', z_1'', z_2'', z_2'.

Damit sind wir aber gleich am Ziele. Denn die Funktionen $g_n(z)$ sind im betrachteten Rechtecke regulär, mithin erreicht ihr absoluter Betrag sein Maximum auf der Begrenzung. Daraus ergibt sich, bei hinreichend grossem n, für einen beliebigen inneren Punkt x der Strecke z_1, z_2

$$|g_n(x)| < \varepsilon,$$

oder

$$|f(x) - (a_0 e^{-\lambda_0 x} + \cdots + a_n e^{-\lambda_n x})| < \frac{\varepsilon}{|x - z_1||x - z_2|}, \tag{16}$$

d. h. die behauptete Konvergenz unserer Reihe.

Auf die gleichmässige Konvergenz kann man nun folgendermassen schliessen. Besteht die Strecke x_1, x_2 der Geraden $R(z) = c$ ausschliesslich aus Regularitätsstellen, so ist sie in einer grösseren Strecke enthalten, welche dieselbe Eigenschaft besitzt. Bezeichnen wir die Endpunkte dieser grösseren Strecke wiederum mit z_1 und z_2, so folgt aus (16) die gleichmässige Konvergenz für die Punkte der Strecke x_1, x_2.

2. In den folgenden Abschnitten geben wir unserem Satze verschiedene neue Formen, aus denen dann einige interessante Spezialfälle des Satzes folgen.

Durch die lineare Substitution $z' = z - c$ geht Satz I in den folgenden über.

Satz I'. *Es sei c eine beliebige, aber feste, positive, reelle Zahl. Erfüllen dann die Koeffizienten der* DIRICHLET*schen Reihe*

$$f(z) = a_0 e^{-\lambda_0 z} + \cdots + a_n e^{-\lambda_n z} + \cdots$$

die Bedingung

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_0 e^{\lambda_0 c} + \cdots + a_n e^{\lambda_n c}}{e^{\lambda_n c}} = 0, \tag{17}$$

und ist die infolge dieser Bedingung für $R(z) > 0$ reguläre Funktion $f(z)$ auch in gewissen Punkten der imaginären Achse regulär, so konvergiert die Reihe in diesen Punkten. Die Konvergenz ist gleichmässig auf jeder Strecke der imaginären Achse, die ausschliesslich aus Regularitätsstellen besteht. Die Bedingung (17) *ist auch notwendig, damit die imaginäre Achse wenigstens einen Konvergenzpunkt der Reihe enthalte.*

Dieser Satz geht durch die Transformation $e^{-z} = x$ für $\lambda_n = n$ in den genannten, folgendermassen lautenden Satz von FATOU[1] über.

Erfüllen die Zahlen a_n die Bedingung

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0, \tag{18}$$

so konvergiert die Potenzreihe

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

an jeder Regularitätsstelle des Einheitskreises. Die Konvergenz ist auf jedem Regularitätsbogen eine gleichmässige.

In der Tat nimmt, für $\lambda_n = n$, die Bedingung (17) die folgende Gestalt an:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_0 + a_1 R + \cdots + a_n R^n}{R^n} = 0, \qquad (R > 1) \tag{19}$$

wo R eine feste Zahl bedeutet. Wir haben also nur zu zeigen, dass die Bedingungen (18) und (19) vollständig gleichwertig sind.

Es sei zuerst (18) erfüllt. Dann lässt sich bei beliebig kleinem ε die Zahl ν derart bestimmen, dass für alle $m > \nu$

$$|a_m| < \varepsilon$$

wird. Mithin ist für $n > \nu$

---

[1] P. FATOU: Séries trigonométriques et séries de TAYLOR, Acta Math., Bd. 30 (1906). Vergl. S. 389—391.

$$\frac{|a_0 + a_1 R + \cdots + a_n R^n|}{R^n} < \frac{|a_0 + \cdots + a_\nu R^\nu| + \varepsilon(R^{\nu+1} + \cdots + R^n)}{R^n} <$$

$$< \frac{|a_0 + \cdots + a_\nu R^\nu|}{R^n} + \varepsilon \frac{R}{R-1}.$$

Für hinreichend grosses n ist dieser Ausdruck $< \frac{2R}{R-1}\varepsilon$, d. h. (19) folgt wirklich aus (18).

Es sei nun umgekehrt (19) erfüllt. Dann ist bei genügend grossem n

$$\frac{|a_0 + \cdots + a_{n-1} R^{n-1} + a_n R^n|}{R^n} < \varepsilon$$

und

$$\frac{|a_0 + \cdots + a_{n-1} R^{n-1}|}{R^n} < \frac{|a_0 + \cdots + a_{n-1} R^{n-1}|}{R^{n-1}} < \varepsilon.$$

Daraus folgt durch Subtraktion $|a_n| < 2\varepsilon$. Mithin hat auch die Bedingung (19) die Bedingung (18) zur Folge.

Wir kehren jetzt zu dem allgemeinen Satze I' zurück. In demselben spielt augenscheinlich die positive Konstante c eine rein zufällige Rolle. Die Vermutung liegt also nahe, dass die Beziehung (17) für alle positiven Zahlen besteht, wenn sie für eine einzige solche Zahl besteht. Dies ergibt sich in der Tat aus dem folgenden, übrigens bekannten Satze.

Ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_0 e^{\lambda_0 \alpha} + \cdots + a_n e^{\lambda_n \alpha}}{e^{\lambda_n \alpha}} = 0, \tag{20}$$

wo α eine beliebige, feste, komplexe Zahl bedeutet, so ist auch

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_0 e^{\lambda_0 \beta} + \cdots + a_n e^{\lambda_n \beta}}{e^{\lambda_n \beta}} = 0, \tag{21}$$

wo β eine beliebige komplexe Zahl sein kann, deren reeller Teil positiv ist.

Unsere Behauptung folgt leicht aus der ABELschen Transformation. Wir setzen

$$A_{\alpha,n} = a_0 e^{\lambda_0 \alpha} + \cdots + a_n e^{\lambda_n \alpha}$$

$$A_\alpha(v) = A_{\alpha,n} \text{ für } \lambda_n < v \leq \lambda_{n+1} \text{ und } = 0 \text{ für } 0 \leq v \leq \lambda_0.$$

Dann ist nach (2)

$$A_{\beta,n} = a_0 e^{\lambda_0 \beta} + \cdots + a_n e^{\lambda_n \beta} = (\alpha - \beta) \int_0^{\lambda_n} A_\alpha(v) e^{v(\beta-\alpha)} dv + A_{\alpha,n} e^{\lambda_n(\beta-\alpha)}. \tag{22}$$

Nach (20) kann man eine Zahl ν bestimmen derart, dass

$$|A_{\alpha,n}| < \varepsilon e^{\lambda_n R(\alpha)} \text{ für } n > \nu$$

und also auch

$$|A_\alpha(v)| < \varepsilon e^{v R(\alpha)} \text{ für } v > \lambda_\nu.$$

Aus (22) ergibt sich nun mit Rücksicht auf die letzten Ungleichungen

$$|A_{\beta,n}| < |\alpha-\beta| \left| \int_0^{\lambda_\nu} A_\alpha(v) e^{v(\beta-\alpha)} dv \right| + |\alpha-\beta| \varepsilon \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} e^{v R(\beta)} dv + \varepsilon e^{\lambda_n R(\beta)} <$$

$$< |\alpha-\beta| \left| \int_0^{\lambda_\nu} A_\alpha(v) e^{v(\beta-\alpha)} dv \right| + \varepsilon e^{\lambda_n R(\beta)} \left(\frac{|\alpha-\beta|}{R(\beta)} + 1 \right).$$

Bei hinreichend grossem n ist das erste (von n unabhängige) Glied des letzten Ausdruckes kleiner als das zweite und daraus erhält man unsere obige Behauptung.

Aus diesem letzten Ergebnisse ersieht man auch leicht, dass die Bedingung (17) (bzw. die Bedingung (1)) auch notwendig ist, damit die imaginäre Achse (bzw. die Gerade $R(z) = c$) wenigstens einen Konvergenzpunkt enthalte.

Es sei in der Tat die Reihe $\Sigma a_n e^{-\lambda_n z}$ in einem Punkte $z = ti$ der imaginären Achse konvergent. Man kann dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass die Reihe gegen den Wert Null konvergiert, da dies immer durch Veränderung von z. B. a_0 erreicht werden kann, was den Grenzwert (17) nicht beeinflusst. Dann ist aber (20) für $\alpha = -ti$, also auch (21) für $\beta = c$ erfüllt. Dies besagt aber eben, dass auch (17) erfüllt ist.

3. In diesem Abschnitte werden wir (17) durch eine gleichwertige Bedingung ersetzen, die folgendermassen lautet.

Es gebe eine positive Konstante K derart, dass bei beliebig kleinem ε und hinreichend grossem n

$$|a_n + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon, \text{ sobald } 0 \leqq \lambda_{n+p} - \lambda_n \leqq K \tag{23}$$

ist.[1]

[1] Die Bedingungen (1) und (17) erinnern an den Ausdruck von Herrn Cahen für die Konvergenzabszisse der Dirichletschen Reihen. Dieser Ausdruck ist bekanntlich im Allgemeinen nur dann gültig, wenn die Konvergenzabszisse positiv ist. Die Bedingung (23) erinnert nun an einen Ausdruck für dieselbe Konvergenzabszisse, der immer gültig ist, und den, von einander unabhängig, die Herren Lindh und Kojima und in einem Spezialfalle auch Herr Knopp gefunden haben. Die Bedingung (23) ist auch mit

$$\lim_{n=\infty} e^{\lambda_n c}(a_n e^{-\lambda_n c} + a_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} c} + \cdots) = 0 \qquad (c > 0)$$

Man hat sicher mit Rücksicht auf das bekannte ABELsche Lemma (das auch aus der oben angewandten ABELschen Transformation folgt)

$$(24)\qquad |a_n + \cdots + a_{n+p}| = |e^{-\lambda_n c} a_n e^{\lambda_n c} + \cdots + e^{-\lambda_{n+p} c} a_{n+p} e^{\lambda_{n+p} c}| \leqq$$
$$\leqq e^{-\lambda_n c} \operatorname{Max} |a_n e^{\lambda_n c} + \cdots + a_{n+r} e^{\lambda_{n+r} c}|, \quad r = 0, 1, \cdots p.$$

Ist nun (17) erfüllt und ist n genügend gross, so ist

$$|a_0 e^{\lambda_0 c} + \cdots + a_n e^{\lambda_n c} + \cdots + a_{n+r} e^{\lambda_{n+r} c}| < \frac{\varepsilon}{2 e^K} e^{\lambda_{n+r} c}, \quad r = 0, 1, \cdots$$

folglich, wenn $\lambda_{n+r} - \lambda_n \leqq \lambda_{n+p} - \lambda_n \leqq K$ ist,

$$|a_n e^{\lambda_n c} + \cdots + a_{n+r} e^{\lambda_{n+r} c}| < \frac{\varepsilon}{e^K} e^{\lambda_{n+r} c} < \varepsilon e^{\lambda_n c},$$

also nach (24)

$$|a_n + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon, \qquad 0 \leqq \lambda_{n+p} - \lambda_n \leqq K,$$

d. h. die Beziehung (23).

Es sei jetzt umgekehrt (23) erfüllt. Aus dem ABELschen Lemma folgt

$$|a_m e^{\lambda_m c} + \cdots + a_{m+p} e^{\lambda_{m+p} c}| \leqq e^{\lambda_{m+p} c} \operatorname{Max} |a_m + \cdots + a_{m+r}|, \quad r = 0, 1, \cdots p,$$

also nach (13) für jedes $m > \nu$, wo ν eine genügend grosse Zahl bedeutet,

$$(25)\qquad |a_m e^{\lambda_m c} + \cdots + a_{m+p} e^{\lambda_{m+p} c}| < \varepsilon e^{\lambda_{m+p} c}, \quad 0 \leqq \lambda_{m+r} - \lambda_m \leqq K.$$

Wir teilen jetzt die Exponenten $\lambda_{\nu+1}, \cdots \lambda_n$ folgendermassen in Gruppen ein

$$\lambda_{\nu+1}, \lambda_{\nu+2}, \cdots \lambda_{p_1}; \lambda_{p_1+1}, \lambda_{p_1+2}, \cdots \lambda_{p_2}; \cdots; \lambda_{p_i+1}, \lambda_{p_i+2}, \cdots, \lambda_{p_{i+1}}; \cdots; \lambda_{p_j+1}, \lambda_{p_j+2}, \cdots \lambda_n;$$

wo

---

gleichwertig. Diese letzte Bedingung erinnert wieder an eine Formel der Herren PINCHERLE und SCHNEE für negative Konvergenzabszissen. (Für Literaturangaben betreffs dieser verschiedenen Formeln vergl. HARDY and RIESZ, a. a. O., S. 8.)

Es ist einleuchtend, dass aus (23) eine analoge Bedingung für jeden anderen festen Wert K' folgt. Denn besteht (23) für einen festen Werten K, so besteht es naturgemäss für jeden anderen festen Wert, der kleiner als K ist. Andererseits zieht (23) eine analoge Bedingung für alle ganzzahlige Multipla von K mit sich. Aus diesen beiden Tatsachen folgt unsere Behauptung, und wir könnten auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit $K = 1$ voraussetzen. Daraus folgt dann leicht, dass die Bedingung (23) mit der folgenden gleichwertig ist: Bei beliebig kleinem ε und hinreichend grossem n ist

$$|a_n + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon(\lambda_{n+p} - \lambda_n + 1) \qquad (p \geqq 0);$$

oder auch mit der folgenden: bei beliebig kleinem ε und hinreichend grossem n ist

$$|a_{n-p} + a_{n-p+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon(\lambda_n - \lambda_{n-p} + 1) \qquad (p \geqq 0).$$

$$\begin{array}{ll} \lambda_n - \lambda_{p_j} > K, & 0 < \lambda_n - \lambda_{p_j+1} \leqq K, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_{p_i+1} - \lambda_{p_i} > K, & 0 < \lambda_{p_i+1} - \lambda_{p_i+1} \leqq K, \\ & \cdots\cdots \\ & 0 \leqq \lambda_{p_1} - \lambda_{\nu+1} \leqq K. \end{array}$$

Dann ist

$$\lambda_{p_i+1} < \lambda_n - (j-i) K. \tag{26}$$

Wir setzen jetzt

$$\sum_{h=\nu+1}^{p_1} a_h e^{\lambda_h c} = A_1, \sum_{h=p_1+1}^{p_2} a_h e^{\lambda_h c} = A_2, \cdots \sum_{h=p_i+1}^{p_{i+1}} a_h e^{\lambda_h c} = A_{i+1}, \cdots \sum_{h=p_j+1}^{n} a_h e^{\lambda_h c} = A_{j+1},$$

so ist nach (25) und (26)

$$|A_{i+1}| < \varepsilon e^{(\lambda_n - (j-i) K) c}.$$

Es ist mithin

$$|a_{\nu+1} e^{\lambda_{\nu+1} c} + \cdots + a_n e^{\lambda_n c}| = |A_{j+1} + A_j + \cdots + A_{i+1} + \cdots + A_1| <$$
$$< \varepsilon e^{\lambda_n c} + \varepsilon e^{(\lambda_n - K) c} + \varepsilon e^{(\lambda_n - 2K) c} + \cdots = \frac{\varepsilon e^{\lambda_n c}}{1 - e^{-Kc}}.$$

Folglich ist bei genügend grossem n

$$|a_0 e^{\lambda_0 c} + \cdots + a_n e^{\lambda_n c}| \leqq |a_0 e^{\lambda_0 c} + \cdots + a_\nu e^{\lambda_\nu c}| + |a_{\nu+1} e^{\lambda_{\nu+1} c} + \cdots + a_n e^{\lambda_n c}|$$
$$< \frac{2 \varepsilon e^{\lambda_n c}}{1 - e^{-Kc}}$$

d. h. die Beziehung (17). Also sind die Bedingungen (17) und (23) wirklich gleichwertig.

Wir wollen nun aus Satz I' mit Hilfe von (23) einige speziellere Resultate herleiten.

Ist $\lambda_n = n$ und wählt man $K < 1$, so geht (23) in $|a_n| < \varepsilon$ über, wir erhalten also wieder den Fatouschen Satz.

Die Bedingung (23) ist sicher erfüllt, wenn a_n den folgenden zwei Bedingungen genügt

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0; \quad \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = 0. \tag{27}$$

Dies ergibt natürlich wieder den FATOUschen Satz, aber auch folgenden Satz über *gewöhnliche* DIRICHLETsche Reihen.

Ist $\lim_{n=\infty} n a_n = 0$, *so konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ *an jeder Regularitätsstelle der imaginären Achse.*

Wie ich in der erstgenannten LANDAUschen Arbeit gezeigt habe, folgt für *gewöhnliche* DIRICHLETsche Reihen der Satz I leicht aus diesem spezielleren Satze.[1]

Ich will schliesslich bemerken, dass für alle solche Exponentenfolgen, für welche die Differenz $\lambda_n - \lambda_{n-1}$ beschränkt bleibt, die beiden Bedingungen (27) offenbar durch die eine Bedingung $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = 0$ ersetzt werden können.[2] Ist dagegen die Differenz $\lambda_n - \lambda_{n-1}$ immer grösser als eine feste positive Zahl, so können die Bedingungen (27) durch die Bedingung $\lim_{n=\infty} a_n = 0$ ersetzt werden.

4. Unsere Ergebnisse lassen sich leicht auf Integrale von der Form

$$\int_0^{\infty} a(v) e^{-vz} dv \tag{28}$$

oder STIELTJESsche Integrale von der Form

$$\int_0^{\infty} e^{-vz} dA(v) \tag{29}$$

übertragen. In (28) bedeutet $a(v)$ eine Funktion, die über jede endliche Strecke integriert werden kann, und in (29) bedeutet $A(v)$ eine Funktion, die auf jeder endlichen Strecke von beschränkter Schwankung ist. Der Ausdruck (29) umfasst natürlich sowohl die Integrale (28) als auch die DIRICHLETschen Reihen.

Für die Ausdrücke (28) und (29) ist die Bedingung (1) naturgemäss durch

$$\lim_{\omega=\infty} e^{-\omega c} \int_0^{\omega} a(v) dv = 0$$

bzw. durch

$$\lim_{\omega=\infty} e^{-\omega c} A(\omega) = 0$$

zu ersetzen. Die Bedingung (23) geht entsprechend in

---

[1] Vergl. a. a. O. S. 156—158.

[2] Für eine andere Herleitung dieses Ergebnisses vergl. HARDY and RIESZ, a. a. O. S. 47.

$$\left|\int_{\omega}^{\omega+K'} a(v)\,dv\right| < \varepsilon, \qquad \omega > \mu,\ K' \leqq K$$

bzw.

$$|A(\omega + K') - A(\omega)| < \varepsilon, \qquad \omega > \mu,\ K' \leqq K$$

über.

Alle Beweise laufen genau so wie oben, nur ist statt der ABELschen Transformation stets eine partielle Integration vorzunehmen.

Islinge, den 11. März 1916.