ÜBER DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEM MAXIMALBETRAGE EINER ANALYTISCHEN FUNKTION UND DEM GRÖSSTEN GLIEDE DER ZUGEHÖRIGEN TAYLORSCHEN REIHE.[1]

(Brief an Herrn Professor Dr. A. WIMAN.)

VON

G. PÓLYA

in ZÜRICH.

Sehr geehrter Herr Professor!

Ich habe Ihre Arbeit »Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylorschen Reihe» mit dem allergrössten Interesse gelesen. Ich bemühte mich, Ihren Gedankengang, dessen Originalität mich frappierte, klar herauszuarbeiten. Es gelang mir in der Tat mit einem etwas einfacheren Ansatz auszukommen, Ihre Schlüsse in elementare Hilfssätze zu zerlegen, und diese Hilfssätze kurz und durchsichtig zu beweisen. Es hat häufig keine Schwierigkeit, einer schon gemachten Entdeckung einfachere Form zu geben, und ich hätte Sie damit nicht aufgehalten.

Es ist aber ein Punkt Ihrer Arbeit, und zwar eben der springende Punkt darin, mit einer gewissen Unklarheit behaftet, die einige Leser aufhalten könnte. Sie behaupten S. 310 Ihrer Arbeit, dass sämtliche Ungleichungen

$$(18) \qquad \prod_{k=1}^{\nu} \frac{r_{n-k}}{r_n} \leqq \prod_{k=1}^{\nu} \frac{P_{n-k}}{P_n} \quad (\nu < n), \qquad (19) \quad \prod_{k=1}^{\nu} \frac{r_n}{r_{n+k}} \leqq \prod_{k=1}^{\nu} \frac{P_n}{P_{n+k}} \quad (\nu > o)$$

für unendlich viele n erfüllt werden können, vorausgesetzt, dass

$$o < r_1 \leqq r_2 \leqq r_3 \leqq \cdots, \quad o < P_1 < P_2 < P_3 < \cdots$$
$$\lim_{n=\infty} r_n = \infty, \qquad \lim_{n=\infty} P_n = P,$$

[1] Vgl. Acta Mathematica Bd. 37. S. 305—326.

wo P einen beliebigen positiven endlichen Wert haben kann. Ich werde im Folgenden eine numerische Folge $r_1, r_2, r_3, \cdots$ angeben, bei welcher Ihre Ungleichungen (18), (19) für kein n sämtlich erfüllt sind.

Dies Beispiel, ich weiss es wohl, entkräftet Ihren Schluss keineswegs. Denn meine Folge ist eben eine *numerische,* während Sie noch freie Hand haben gewisse Ihrer $r_1, r_2, r_3, \cdots$ in bestimmten Intervallen geeignet zu wählen. Auch die Art dieser Wahl ist Ihrer Ausführung, wenn auch vielleicht nicht ganz klar, zu entnehmen. Übrigens, urteilen Sie selbst, ob die nachfolgende Darstellung Ihrer Schlüsse nicht das Verständnis Ihrer Entdeckung erleichtern könnte.

1. Die Potenzreihe

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

soll folgende Eigenschaften haben:

1) Alle Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \cdots$ sind positiv.
2) Die Rolle des grössten Gliedes wird nacheinander von jedem Glied $a_n x^n$ übernommen, sei es ein ganzes Intervall entlang, sei es nur in einem Punkte.
3) $a_0 = 1$.

Sie haben in Ihrer Arbeit S. 307 gezeigt, dass, wenn Ihre Sätze für solche ganze Funktionen gelten, die den Bedingungen 1) 2) genügen, sie dann für jede ganze Funktion gelten. Offenbar ist die Normierung 3) eine irrelevante Beschränkung.

Das Glied $a_n x^n$ übernimmt die Rolle des grössten Gliedes von seinem linken Nachbar $a_{n-1}x^{n-1}$. Dies soll in dem Punkte $|x| = r_n$ geschehen, d. h. es sei

$$a_{n-1} r_n^{n-1} = a_n r_n^n$$

oder

$$a_n = \frac{1}{r_n} a_{n-1}. \tag*{[1][1]}$$

Seien $r_1, r_2, r_3, \cdots$ die Punkte, wo $a_1 x$, bezw. $a_2 x^2, a_3 x^3, \cdots$ die Rolle des grössten Gliedes antreten. Es ist

$$0 < r_1 \leqq r_2 \leqq r_3 \leqq \cdots \tag*{[2]}$$

und aus [1] ergibt sich durch Rekursion

[1] Ich numeriere meine Formeln in eckigen Klammern [], um sie von Ihren in runden Klammern () numerierten Formeln zu unterscheiden.

$$a_n = \frac{1}{r_1 r_2 r_3 \cdots r_n},$$

[3] $$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{r_1 r_2 r_3 \cdots r_n}.$$

Jede Potenzreihe, die den Bedingungen 1) 2) 3) genügt, lässt sich, und zwar nur auf eine Weise, in die Form [3] setzen. Umgekehrt, ist [2] erfüllt, so repräsentiert [3] immer eine Potenzreihe, die im Kreise vom Radius $\varrho = \lim_{n=\infty} r_n$ konvergiert, und die Bedingungen 1) 2) 3) erfüllt; denn es ist offenbar $\frac{x^n}{r_1 r_2 r_3 \cdots r_n}$ das grösste Glied von [3] im Intervalle $r_n \leqq |x| \leqq r_{n+1}$ von verschwindender oder positiver Länge. Setzt man für $r_1, r_2, r_3, \cdots$ die einfachste wachsende Zahlenfolge 1, 2, 3, ... ein, so erhält man die einfachste ganze Funktion e^x.

Ich setze $|x| = r$, und für $r_n \leqq r \leqq r_{n+1}$

$$m(r) = \frac{r^n}{r_1 r_2 r_3 \cdots r_n}$$

$$\mu(r) = 1 + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{r_{n-\mu+1} \cdots r_{n-1} r_n}{r^\mu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{r^\nu}{r_{n+1} r_{n+2} \cdots r_{n+\nu}}.$$

Es ist also

$$|F(x)| \leqq F(r) = m(r)\mu(r).$$

Ich halte am Ansatz [3] fest. Ich habe also die beiden Ausdrücke $m(r)$ und $\mu(r)$ gegeneinander abzuwägen. Ich habe $r_1, r_2, r_3, \cdots$ als fest gegeben zu betrachten, und ich kann r im Intervalle (r_n, r_{n+1}) variieren lassen.

2. Hilfssatz I. *Ich setze von der Folge $l_1, l_2, \cdots l_n, \cdots$ voraus, dass*

$$\lim_{n=\infty} l_n = +\infty.$$

Dann gibt es unendlich viele Indices n, zu denen man Zahlen A bestimmen kann, derart, dass alle Ungleichungen

[4] $$\frac{l_{n-\mu+1} + \cdots + l_{n-1} + l_n}{\mu} \leqq A \leqq \frac{l_{n+1} + l_{n+2} + \cdots + l_{n+\nu}}{\nu}$$

$$(\mu = 1, 2, \cdots n; \quad \nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

erfüllt sind.

Es sei r gegeben. Ich werde einen Index n finden, $n \geqq r$, der die gewünschte Eigenschaft hat. Dabei kann A beliebig gewählt werden, wenn sie nur grösser ist als das Maximum der Zahlen $l_1, l_2, \cdots l_r$

$$[5] \qquad A > l_1, A > l_2, \cdots A > l_r.$$

Man betrachte zum Beweise die Zahlen

$$\begin{aligned}
L_r &= l_r - A \\
L_{r+1} &= l_r + l_{r+1} - 2A \\
L_{r+2} &= l_r + l_{r+1} + l_{r+2} - 3A \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
L_n &= l_r + l_{r+1} + \cdots + l_n - (n - r + 1)A \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Es ist offenbar $\lim_{\nu=\infty} L_\nu = +\infty$, und darum besitzen die Zahlen $L_r, L_{r+1}, L_{r+2} \cdots$ ein Minimum, d. h. es gibt (wenigstens) ein L_n so, dass

$$L_\nu \geqq L_n \quad (\nu = r, r+1, r+2, \cdots).$$

Es ist

$$L_{n+\nu} - L_n = l_{n+1} + l_{n+2} \cdots + l_{n+\nu} - \nu A \geqq 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

und so ist die zweite Hälfte der Ungleichungen [4] erfüllt. Es ist ferner

$$L_n - L_{n-\mu} = l_{n-\mu+1} + \cdots + l_{n-1} + l_n - \mu A \leqq 0 \quad (n - \mu \geqq r).$$

Dies zeigt, dass auch ein Teil der ersten Hälfte der Ungleichungen [4] erfüllt ist, nämlich diese, wo $\mu \leqq n - r$. Addiert man zu der Ungleichung

$$l_{r+1} + l_{r+2} + \cdots + l_n \leqq (n - r)A$$

die aus den Ungleichungen [5] fliessende

$$l_{n-\mu+1} + l_{n-\mu+2} + \cdots + l_r < (r - n + \mu)A,$$

so sieht man, dass die erste Hälfte der Ungleichungen [4] auch für $\mu > n - r$ erfüllt ist. Der Index n $(n \geqq r)$ und die Zahl A sind also in der Tat so gewählt, dass alle Ungleichungen [4] erfüllt sind. —

Setzt man in [4] $\mu = \nu = 1$, so erhält man

$$l_n \leqq A \leqq l_{n+1}.$$

Es besteht also der Satz: *Strebt die Folge* $l_1, l_2, l_3, \cdots$ *gegen* $+\infty$, *so lassen sich darin unendlich viele Paare benachbarter Glieder* l_n, l_{n+1} *finden, so dass*

$$l_n \leqq \frac{l_{n+1}+l_{n+2}+\cdots+l_{n+\nu}}{\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$l_{n+1} \geqq \frac{l_{n-\mu+1}+\cdots+l_{n-1}+l_n}{\mu} \quad (\mu = 1, 2, \cdots n).$$

Um so merkwürdiger ist es, dass folgender Satz, der eigentlich viel einfacher lauten würde, *falsch* ist: *Strebt die Folge* $l_1, l_2, \cdots l_n, \cdots$ *gegen* $+\infty$, *so lassen sich darin unendlich viele Glieder* l_n *finden, so dass*

[6] $$\frac{l_{n-\mu}+\cdots+l_{n-2}+l_{n-1}}{\mu} \leqq l_n \leqq \frac{l_{n+1}+l_{n+2}+\cdots+l_{n+\nu}}{\nu}$$

$$(\mu = 1, 2, \cdots n-1; \ \nu = 1, 2, 3, \cdots).$$

In der Tat, es gibt gegen $+\infty$ strebende Folgen, deren Glieder folgenden Ungleichungen genügen

[7] $$\begin{aligned} & l_1 > l_2 \\ & l_3 > l_4 \\ & l_5 > l_6 > l_7 > l_8 \\ & l_9 > l_{10} > \cdots > l_{16} \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & l_{2^k+1} > l_{2^k+2} > \cdots > l_{2^{k+1}} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

In solchen Folgen gibt es kein n, für welches sämtliche Ungleichungen [6] erfüllt wären. Genauer, es sind wenigstens $2^k - 1$ Ungleichungen [6] nicht erfüllt, wenn $2^k + 1 \leqq n \leqq 2^{k+1}$.[1]

3. Eine ins Unendliche wachsende Folge von der Eigenschaft [7] erhält man etwa folgendermassen: es sei

---

[1] Es besteht jedoch folgender Satz: »Sei die Funktion $f(x)$ stetig für $x \geqq 0$, und sei $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = +\infty$. Dann gibt es beliebig grosse Abszissen ξ, sodass für jedes $x < \xi$ und jedes $y > \xi$

$$\frac{1}{\xi - x}\int_x^\xi f(x)\,dx \leqq f(\xi) \leqq \frac{1}{y-\xi}\int_\xi^y f(x)\,dx.«$$

$$0 < P_1 < P_2 < P_3 < \cdots < P_n < \cdots$$

und $\lim\limits_{n=\infty} P_n$ sei endlich. Sei ferner

$$\begin{aligned}
&r_1 = r_2 = 2\\
&r_3 = r_4 = 4\\
&r_5 = r_6 = r_7 = r_8 = 8\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&r_{2^k+1} = r_{2^k+2} = \cdots = r_{2^{k+1}} = 2^{k+1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Setzt man

$$l_n = \log \frac{r_n}{P_n},$$

so sind die Ungleichungen [7] alle erfüllt. Folglich sind die Ungleichungen [6], die sich jetzt so schreiben lassen

$$\left(\frac{r_{n-\mu} \cdots r_{n-2} r_{n-1}}{P_{n-\mu} \cdots P_{n-2} P_{n-1}}\right)^{\frac{1}{\mu}} \leqq \frac{r_n}{P_n} \leqq \left(\frac{r_{n+1} r_{n+2} \cdots r_{n+\nu}}{P_{n+1} P_{n+2} \cdots P_{n+\nu}}\right)^{\frac{1}{\nu}}$$

$$(\mu = 1, 2, \cdots n-1; \quad \nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

für kein n sämtlich erfüllt, und genauer, die Anzahl der nicht erfüllten wächst mit wachsendem n ins Unendliche. Das besagt aber, dass Ihre vorher erwähnten Ungleichungen (18), (19) im Falle der eben konstruierten Folge $r_1, r_2, r_3, \cdots$ für kein n sämtlich erfüllt sind, und dass die Anzahl der nicht erfüllten unbegrenzt mit n wächst. —

Es sei

$$0 < r_1 \leqq r_2 \leqq r_3 \leqq \cdots \leqq r_n \leqq \cdots$$

$$0 < P_1 < P_2 < P_3 < \cdots < P_n < \cdots$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{r_n}{P_n} = \infty.$$

So kann man zu unendlich vielen Indices n positive Grössen r bestimmen, wo

$$r_n \leqq r \leqq r_{n+1}$$

ist, sodass sämtliche Ungleichungen

[8]
$$\frac{r_{n-\mu+1}\cdots r_{n-1}r_n}{r^\mu} \leqq \frac{P_{n-\mu+1}\cdots P_{n-1}P_n}{P_n^\mu} \quad (\mu = 1, 2, \cdots n)$$
$$\frac{r^\nu}{r_{n+1}r_{n+2}\cdots r_{n+\nu}} \leqq \frac{P_n^\nu}{P_{n+1}P_{n+2}\cdots P_{n+\nu}} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

erfüllt sind.

Man wende Hilfssatz I auf die Folge

$$l_1 = \log\frac{r_1}{P_1}, \; l_2 = \log\frac{r_2}{P_2}, \cdots l_n = \log\frac{r_n}{P_n}, \cdots$$

an, und man setze die in den Ungleichungen [4] vorkommende Zahl

$$A = \log\frac{r}{P_n}$$

Für $\mu = \nu = 1$ ergeben die Ungleichungen [4]

$$\log\frac{r_n}{P_n} \leqq A = \log\frac{r}{P_n} \leqq \log\frac{r_{n+1}}{P_{n+1}} < \log\frac{r_{n+1}}{P_n}$$

also

$$r_n \leqq r < r_{n+1}.$$

Setzt man den Wert $A = \log\frac{r}{P_n}$ in [4] ein, so erhält man genau die Ungleichungen [8].

4. Durch das Gesagte, hauptsächlich durch [3] und [8], glaube ich den wesentlichsten Teil des Gedankenganges der §§ 1—3 Ihrer Arbeit dargestellt zu haben. Ich glaube, dass der Kern Ihrer Schlussweise in § 5 in folgendem Hilfssatze seinen einfachsten Ausdruck findet:

Hilfssatz II. *Die Folge reeller Zahlen*

$$l_1, l_2, l_3, \cdots l_n, \cdots$$

unterliege den beiden Bedingungen

1) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\,(l_1 + l_2 + \cdots + l_\nu) = +\infty$$

2) $$\lim_{\nu=\infty} l_\nu = 0.$$

Dann gibt es unendlich viele Indices n, zu denen sich eine Grösse A so bestimmen lässt, dass sämtliche Ungleichungen

[9] $$\frac{l_{n-\mu+1}+\cdots+l_{n-1}+l_n}{\mu} \geqq A \geqq \frac{l_{n+1}+l_{n+2}+\cdots+l_{n+\nu}}{\nu}$$
$$(\mu = 1, 2, \cdots n; \ \nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

befriedigt sind.

Sei r gegeben; ich werde einen Index n, $n > r$, finden von der im Hilfssatz II. verlangten Eigenschaft.

Es sei M das Maximum der $r+1$ Zahlen

$$l_1, l_1+l_2, \cdots, l_1+l_2+\cdots+l_r; \ 0.$$

Kraft Bedingung 1) kommen unter den Zahlen $l_1+l_2+\cdots+l_\nu$ solche vor, die grösser sind als M. Sei $\nu = s$ der kleinste Index, für welchen dies eintritt, dann ist

$$s > r$$
$$l_1+l_2+l_3+\cdots+l_s > M \geqq l_1+l_2+\cdots+l_\mu$$
$$(\mu = 1, 2, 3, \cdots s-1)$$

also

$$l_1+l_2+l_3+\cdots+l_s > 0$$
$$l_2+l_3+\cdots+l_s > 0$$
$$l_3+\cdots+l_s > 0$$
$$\cdots\cdots$$
$$l_s > 0.$$

Das Minimum der s Zahlen

$$\frac{l_1+l_2+\cdots+l_s}{s}, \frac{l_2+\cdots+l_n}{s-1}, \cdots \frac{l_s}{1}$$

ist also ein positiver Wert, den ich $= A$ setzen will.

Man bilde nun die Zahlenfolge

$$\begin{aligned}
L_s &= l_s - A\\
L_{s+1} &= l_s + l_{s+1} - 2A\\
L_{s+2} &= l_s + l_{s+1} + l_{s+2} - 3A\\
&\cdots\cdots\\
L_n &= l_s + l_{s+1} + l_{s+2} + \cdots + l_n - (n-s+1)A\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Es ist

$$\lim_{\nu=\infty} L_\nu = -\infty$$

wegen der Bedingung 2), und da $A > 0$. Folglich haben die Zahlen $L_s, L_{s+1}, L_{s+2}, \ldots$ ein Maximum, d. h. es gibt wenigstens eine Zahl L_n, so dass

$$L_\nu \leqq L_n \qquad (\nu = s, s+1, s+2, \cdots).$$

Es ist also

$$\begin{aligned} L_{n+\nu} - L_n &= l_{n+1} + l_{n+2} + \cdots + l_{n+\nu} - \nu A \leqq 0 \quad (\nu > 0) \\ L_n - L_{n-\mu} &= l_{n-\mu+1} + \cdots + l_{n+1} + l_n - \mu A \geqq 0 \quad (\mu \leqq n - s). \end{aligned}$$

Man bemerke, dass $n \geqq s > r$ ist, und der Beweis endet, wie für Hilfssatz I.[1]

Ich würde mich sehr freuen, wenn diese Schlussweise Ihren Beifall fände.

[1] Um Ihr Resultat in § 5) aus Hilfssatz II zu erhalten, setzt man

$$c_n = \frac{1}{r_1 r_2 \cdots r_n}, \gamma_n = \frac{1}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n}, l_n = \log \frac{\rho_n}{r_n}.$$